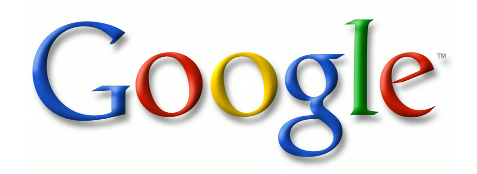
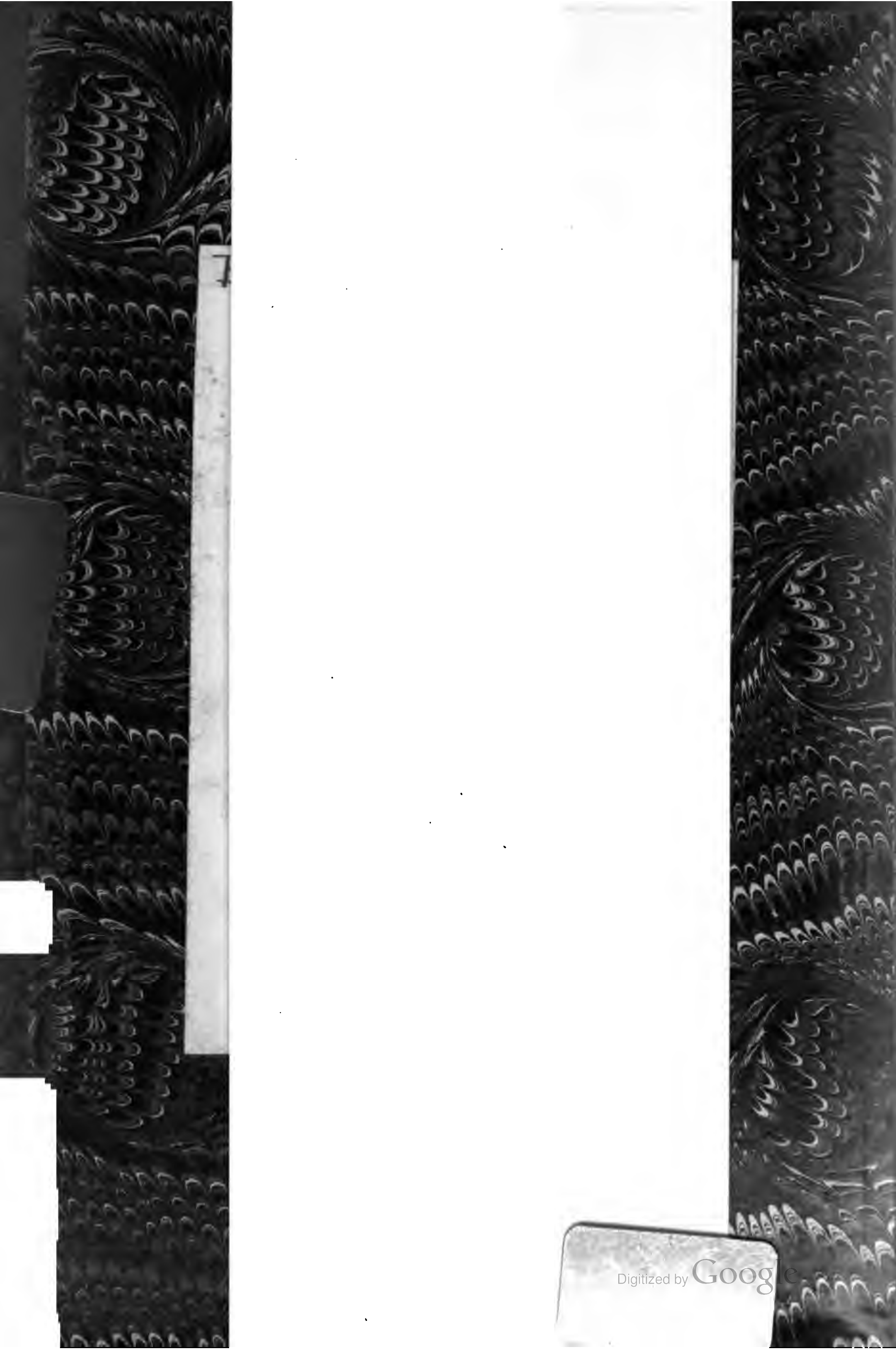
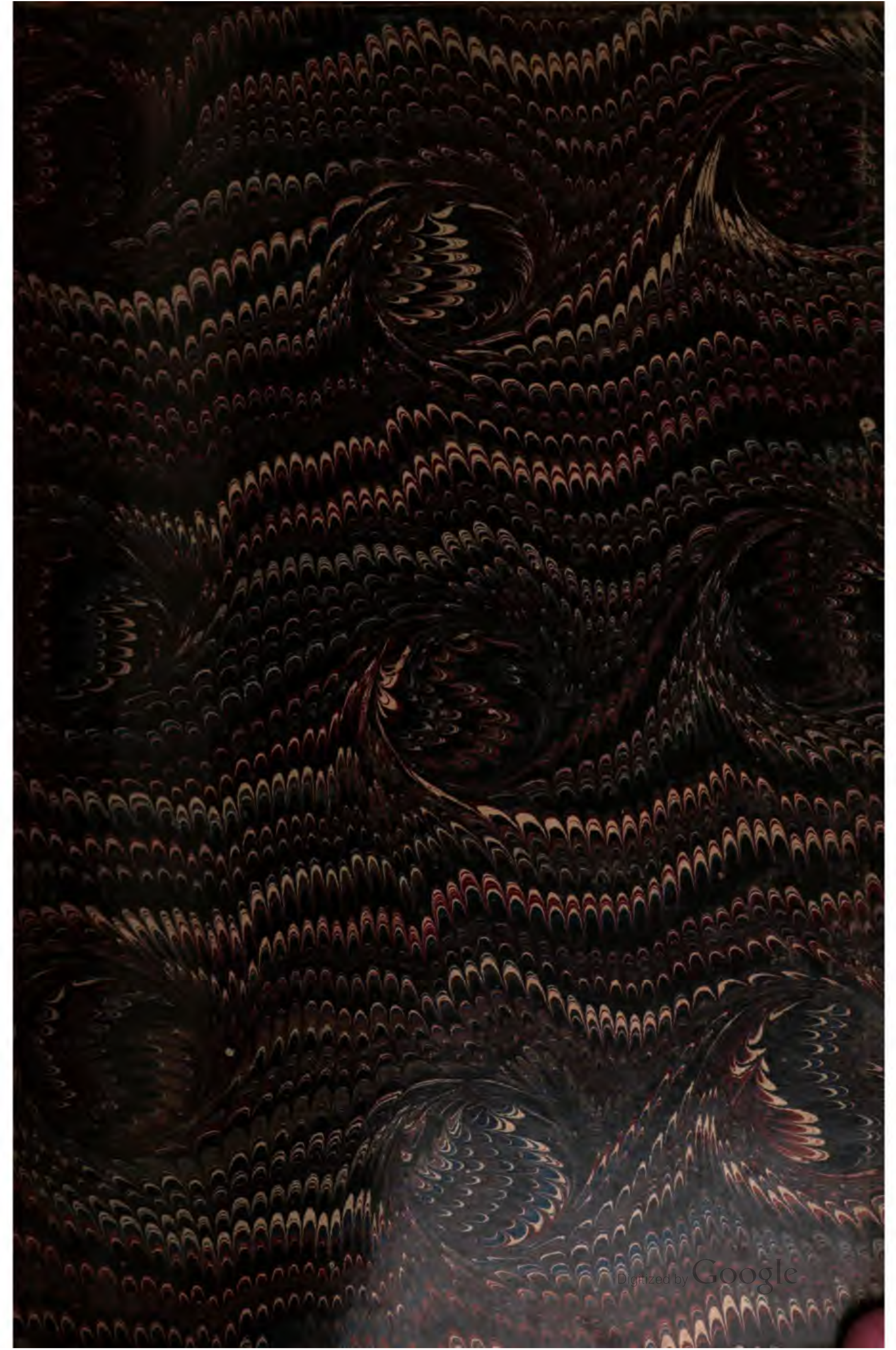
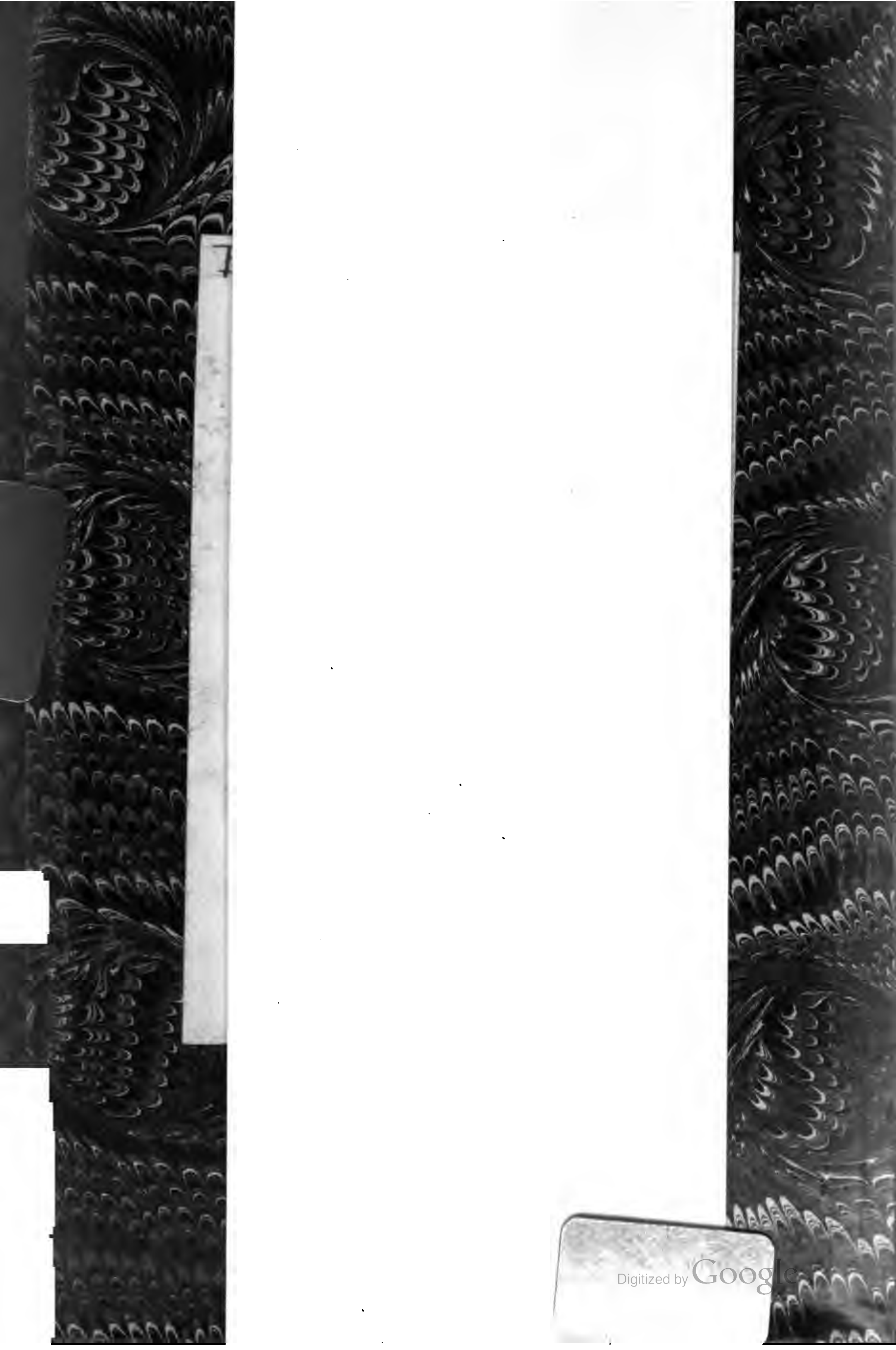










DIE

MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN

THEORIEEN

DER

HÖHEREN GEODÄSIE.

DIE

MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN

THEORIEEN

DER

HÖHEREN GEODÄSIE.

EINLEITUNG UND I. TEIL:

DIE MATHEMATISCHEN THEORIEEN.

VON

DR. F. R. HELMERT,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1880.

Vorwort.

Das vorliegende Buch enthält den mathematischen Teil einer umfassenden, auf praktische Anwendung zielenden Darstellung der wissenschaftlichen Grundlagen der Landesvermessungen und Erdmessungen. Meine ursprüngliche Absicht war, in organischer Entwicklung den physikalischen Teil vorausgehen zu lassen; nachdem ich jedoch das gesamte Material einer ersten Bearbeitung unterzogen hatte, fand ich, dafs die bewährte Methode des Aufsteigens vom Einfachen zum Komplizierteren sich besser mit der nunmehr gewählten Reihenfolge der Teile würde vereinigen lassen. Für die allgemeine Orientierung sorgen jetzt die beiden ersten Kapitel der Einleitung.

Bei den mathematischen Entwicklungen ist alles beiseite gelassen, was in keiner Beziehung zur Geodäsie auf der wirklichen Erdoberfläche steht; innerhalb dieses Rahmens aber habe ich versucht Ausführlichkeit und Strenge mit Einfachheit zu vereinigen.

Der Wunsch nach Ausführlichkeit veranlafste mich u. a. der Rechnung mit Sehnen einen Platz einzuräumen, obgleich sich herausstellte, dafs im allgemeinen die Sehne weniger bequem zur Anwendung ist, als die geodätische Linie. Immerhin ergaben sich aufser theoretisch interessanten Resultaten auch einige zur Anwendung geeignete Formeln.

Was die Strenge der mathematischen Darstellung anlangt, so scheint es mir, dafs sie namentlich bei Reihenentwicklungen in geodätischen Werken meistens zu sehr als selbstverständlich angesehen wird. Nicht immer aber hat man es mit dem einfachen Fall der Entwicklung trigonometrischer Funktionen kleiner Winkel in Potenzreihen zu thun und es bedarf u. a. bei der Ableitung des *Legendre*schen Theorems einer besonderen Untersuchung der Gültigkeit für spitze Dreiecke, die jedoch mittelst des Restes der *Taylor*schen Reihe leicht zu führen ist.

In Hinsicht der Einfachheit beschränkte ich mich zunächst auf die Geodäsie für die Kugel und das schwach abgeplattete Rotationsellipsoid, schlofs an die letztere aber die Geodäsie auf der wirklichen Erdoberfläche mittelst des Begriffes der Lotabweichung an. Dieses schon von *Bessel* angegebene Verfahren ist nach dem gegenwärtigen

Stande unserer Kenntnis der Erdgestalt nicht nur ein ganz berechtigtes, sondern nach meiner Ansicht das einzig praktische. Ich halte es namentlich für ganz nutzlos, als Projektionsfläche eine andere Fläche als das schwachabgeplattete Rotationsellipsoid mit zur Erdaxe paralleler kleiner Axe zu wählen und habe mich demgemäfs darauf beschränkt, alle Theorieen nur für diese Fläche oder die noch einfachere Kugelfläche aufzustellen. Ist es auch mathematisch interessant, in jedem Falle das Gültigkeitsgebiet eines Satzes in vollem Umfange zu erkennen, so verliert doch diese Kenntnis jede Bedeutung für die geodätische Anwendung. Die Beschränkung aber gewährte mir die Möglichkeit einer, wie ich hoffe, in erweitertem Kreise verständlichen Darstellung. Insbesondere habe ich die Fundamentalgleichung der geodätischen Linie ganz elementar ohne Variationsrechnung hergeleitet, sowie mich bemüht, zur Theorie der geodätischen Dreiecke in dem für die Praxis ausreichenden Umfange auf direkten, dem allgemeineren Verständnis naheliegenden Wegen zu gelangen. Zu dem Zwecke wurde von den Integralformeln für die geodätische Linie zunächst zu den Differentialformeln übergegangen und aus diesen die Lehre vom geodätischen Kreise gewonnen, wonach es nur einfacher Integrationen zur Erreichung jenes Zieles bedurfte. Zu gröfserer Anschaulichkeit ist die Theorie der geodätischen Dreiecke auf der Kugel ähnlich behandelt worden, wie jene fürs Ellipsoid; dabei konnte zugleich ohne Schwierigkeit die Gültigkeit der Formeln der sphärischen Trigonometrie in dem für die Geodäsie wichtigen Umfange bewiesen werden.

Es versteht sich wohl von selbst, dafs die vorhandenen Arbeiten über Geodäsie berücksichtigt wurden, wie zahlreiche Citate bezeugen: formell bin ich jedoch entsprechend meinen Absichten in den meisten Fällen selbständig vorgegangen.

Auch materiell dürfte sich manches Neue finden. In dieser Beziehung nenne ich u. a. die Rechnung mit Sehnen auf dem Ellipsoid (4. Kap.), die Differentialformeln für die geodätische Linie (6. Kap.), die Reihenentwicklungen zur Berechnung von Entfernung und Azimuten aus geographischen Positionen (S. 314), die Betrachtung für geodätische Linien zwischen nahezu diametralen Punkten (7. Kap.), die Untersuchung über die Maximalwerte der höheren Glieder des *Legendre*schen Theorems (S. 94, 359 u. 384), die Untersuchung über die sphärische Berechnung der Dreiecksketten (S. 400), die Beziehungen zwischen rechtwinkligen und geographischen Koordinaten (9. Kap.), die Ausgleichung geodätisch-astronomischer Messungen mit Rücksicht auf Lotabweichungen (12. Kap.) und die Entwicklungen bezüglich der Beweiskraft der Gradmessungen für eine rotationsellipsoidische Erdgestalt (13. Kap.).

Die wichtige Angelegenheit der Ausgleichung geodätisch-astronomischer Messungen mit Rücksicht auf Lotabweichungen ist zwar nicht bis in alle Details erledigt, aber es ist wenigstens die Grundlage vollständig entwickelt. Als ein Hauptresultat der Untersuchung mufs ich für mich die Überzeugung betrachten, dafs bei den Ausgleichungen grofser Dreiecksnetze nicht nur die von den verschiedenen Grundlinien gegebenen Bedingungsgleichungen zu berücksichtigen sind, sondern auch die bei dem jetzigen Stande der Beobachtungskunst völlig ebenbürtigen Gleichungen, welche mittelst des Theorems von *Laplace* aus Azimutbestimmungen und geographischen Längenbestimmungen abgeleitet werden können (S. 537). Eine ohne diese Rücksichtnahme ausgeführte gemeinsame Ausgleichung eines gröfseren Komplexes von Dreiecksketten würde ich für Gradmessungszwecke als wertlos erachten, für Landesvermessungszwecke aber wenigstens als unvollständig ansehen.

Um die Übersichtlichkeit zu erleichtern, sind in den Formeln möglichst wenig abkürzende Bezeichnungen eingeführt. Die Symbolik ergab sich durch eine Reihe von Kompromissen aus den üblichen Bezeichnungsweisen. Es ist dabei möglichst bedacht genommen, dasselbe Symbol nur insoweit zur Bezeichnung verschiedener Gröfsen zu verwenden, als ein Irrtum daraus nicht entstehen kann.

Tabellen sind dem Buche bis auf eine solche für den Logarithmus einer häufig auftretenden Funktion der Excentricität der Meridianellipse und der geographischen Breite nicht beigefügt, es ist vielmehr auf *Albrechts* bewährte Tafelsammlung verwiesen (S. 34). Zur Prüfung der Brauchbarkeit der Formeln, namentlich derjenigen für die Aufgabe der Übertragung geographischer Koordinaten und ihrer Umkehrung, welche je besonders für beliebige Distanzen, für Distanzen bis zu 640 Kilometer und für Seiten mefsbarer Dreiecke entwickelt sind, wurden Zahlenbeispiele berechnet, z. T. unter Anwendung von Logarithmen mit 10 Decimalen. Die so erzielte Schärfe der Rechnung ist zwar in mehreren Fällen weit gröfser als in der Praxis erforderlich wird, sie war aber gleichwohl des speziellen Zweckes wegen erwünscht. Eine Gebrauchsanweisung sollte mit diesen Beispielen ebensowenig gegeben werden, wie eine völlig gebrauchsfertige Gestalt der Formeln im Sinne der praktischen Routine beabsichtigt ist.

Aachen, Oktober 1880.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

1. Kapitel. Gegenstand der Geodäsie.

2. Kapitel. Historische Entwicklung der Kenntnisse von der mathematischen Erdoberfläche.

3. Kapitel. Allgemeine mathematische Notizen, insbesondere Reihenentwicklungen.

1. Teil.

Die mathematischen Theorieen der höhern Geodäsie.

1. Kapitel. Das abgeplattete Rotationsellipsoid.

2. Kapitel. Dreiecke und Dreiecksnetze auf der Kugel.

3. Kapitel. Rechtwinklige und geographische Koordinaten auf der Kugel.

4. Kapitel. Der vertikale Schnitt und das Sehnendreieck für das abgeplattete Rotationsellipsoid.

5. Kapitel. Fundamentalformeln für die geodätische Linie.

8. Kapitel. Das geodätische Dreieck; Dreiecksnetze.

9. Kapitel. Rechtwinklige geodätische Koordinaten und Übertragung geographischer Koordinaten mittelst derselben.

10. Kapitel. Berechnung kleiner Figuren auf dem Rotationsellipsoid mittelst Projektion auf eine Ebene.

11. Kapitel. Die Berechnungsarbeiten für eine Landesvermessung.

12. Kapitel. Messungen auf der physischen Erdoberfläche und näherungsweise Bestimmung einzelner Teile des Geoids.

13. Kapitel. Bestimmung des Erdellipsoids aus Gradmessungen.

Berichtigungen.

S. 8 Z. 23 v. o. sind die Worte *mit anderen* vor *paarweise* einzuschalten.
S. 28 Z. 10 und 11 v. u. ist $\varkappa$ in den Quotienten zu streichen.
S. 65 Z. 11 v. u. ist § 17 anstatt § 18 zu lesen.
S. 93 Z. 3 v. u. ist sin B anstatt sin : B zu lesen.
S. 115 Z. 7 v. o. lies y_1 anstatt y.
S. 116 Formel (3) lies $\eta_1{}^3$ anstatt η^3.
S. 173 2 Z. rechts fehlt im Zähler vor k das Minuszeichen.
S. 191 2 Z. o. fehlt am Anfange das Wörtchen *dafs*.
S. 192 (9) fehlt rechter Hand $+ Gl_3$.
S. 206 (8) ist in der ersten eckigen Parenthese der Zähler 5 im Bruche $\frac{5}{6}$ ausgefallen.
S. 267 inmitten ist zu lesen $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_2' = \sin \Delta\varphi\, \delta\alpha_{1.2}$.
S. 277 (8) ist der Faktor a_1 vor der geschlungenen Parenthese zu tilgen und an der 1. runden Parenthese wieder anzubringen.
S. 287 (11) ist die untere Integralgrenze φ_1.
S. 338 Z. 3 v. o. fehlt an P der Index n.
S. 356 (14) lies $6b^2c^2$ anstatt $6b_2c_2$.
S. 378 inmitten ist 3,9675889.6 in eine eckige, den Logarithmus anzeigende Parenthese einzuschliefsen.
S. 383 Z. 9 v. o. lies $\sin 2\beta_1$ anstatt $\sin^2 \beta_1$.
S. 386 Z. 15 v. o. lies $b \cos \mathfrak{A}_b$ anstatt $b \cos \mathfrak{A}_c$.
S. 387 (21) lies $\pm$ anstatt $\mp$.
S. 437 2. Z. v. o. lies m^2 anstatt m^4.
S. 451 ist in (1), (2) und (3) $W_0{}^4$ für $W_0{}^2$ zu setzen.
S. 472 lies Z. 6 und 7 rechter Hand: 27,24″ 0,454′ 0,34′.
S. 482 ist die Nummer (5) eine Zeile höher zu rücken.
S. 496 (3) ist $\cos B_k$ anstatt $\cos B$ zu lesen.
S. 522 Anm. ist gleichmäfsiges Gefälle des Profils $P_1 P_2$ vorausgesetzt.
S. 579 u. 581 ist in den Fehlergleichungen für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zu setzen $\lambda_1 - \lambda\sigma$, $\lambda_2 - \lambda\sigma, \ldots$ und demgemäfs (nach Ausgleichungsrechnung S. 143) die Bildung der Normalgleichungen abzuändern, falls auch für die Münchener Lotrichtung eine interpolatorische Abweichung zulässig erscheint.

Einleitung.

1. Kapitel.

Gegenstand der Geodäsie.

§ 1. **Die Geodäsie** ist die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche.

Die Erdoberfläche hat näherungsweise die Gestalt einer Kugel von 6370^{km} Radius. Die Abweichungen von der Kugelform halten sich völlig innerhalb $^1/_2$ Prozent in radialer Richtung, indem die Differenz zwischen dem gröfsten und kleinsten Abstand der Oberfläche vom Schwerpunkt der Erde noch nicht den Betrag von 32^{km} erreicht. Die Abweichungen sind also in manchen Fällen, wo die Erde als Ganzes aufgefafst wird, verschwindend klein, wie z. B. bei einer räumlich bildlichen Darstellung der Erde als Globus.

Andrerseits sind gerade sie ein wesentliches Objekt der Messungen. Dabei kommt in betracht, dafs der unmittelbar sichtbare Teil der Abweichungen: Berg und Thal, wegen seines verwickelten Bildungsgesetzes als regellos behandelt werden mufs. Weil aber ein Schlufs von einzelnen Teilen auf das Ganze nur bei regelmäfsiger Beschaffenheit möglich ist, so mufs überall da, wo die Gestalt der physischen Erdoberfläche im Detail erkannt werden soll, sie direkt durch Messungen bestimmt werden.

Dafs wir nun gleichwohl auch Kenntnisse über die Erdgestalt im allgemeinen erlangt haben, trotzdem die Erdoberfläche nicht überall zugänglich ist, wurde ermöglicht durch die Existenz eines in erster Annäherung sehr einfachen Bildungsgesetzes der Gestalt des gesamten Erdkörpers: eines Bildungsgesetzes, dessen Faktoren die Gravitation der Massenteile und die durch die Rotation um eine Axe erzeugte Zentrifugalkraft sind.

§ 2. **Ausmessung kleiner Teile der Erdoberfläche.** Die Aufnahme irgend eines Flächenstücks ist eine relativ vollständige, wenn man die räumlichen Koordinaten von so vielen Punkten desselben ermittelt hat, als zur Herstellung eines für einen bestimmten Zweck ausreichend genauen Bildes erforderlich sind. Die Punkte sind als *charakteristische* auszuwählen d. h. als solche, zwischen denen die Linien- und Flächenelemente hinreichend gerade bezw. eben sind.

1*

Auf *eine* Koordinatenrichtung ist man durch *die Richtung der Schwerkraft*, derjenigen Kraft, die sich als Resultante der obengenannten Kräfte ergiebt, hingewiesen; denn der Umstand, dafs der Schwerpunkt eines in einem Punkte ruhend aufgehängten Körpers stets in Richtung der Schwerkraft unterhalb des Aufhängepunktes liegt, und dafs ferner ein ruhender Flüssigkeitsspiegel sich immer rechtwinklig zur Richtung der Schwerkraft stellt, gestattet geodätische Mefsinstrumente gegen diese Hauptrichtung zu orientieren. Dieselbe wird kurz als *Lotrichtung* oder *vertikale* Richtung bezeichnet, eine Normale zu ihr als *horizontale* Richtung und der geometrische Ort aller Horizontalen eines Punktes als seine Horizontalebene.

Die Lotrichtungen verschiedener Punkte konvergieren näherungsweise nach dem Erdschwerpunkte; sie sind also nicht parallel. Nichtsdestoweniger darf man für hinlänglich benachbarte Punkte ihnen diese Eigenschaft beilegen, weil alsdann wegen des grofsen Abstandes des Schwerpunktes der Erde von ihrer Oberfläche die Konvergenz gering ist. Selbstverständlich mufs untersucht werden, wann die Konvergenz der Lotrichtungen vernachlässigt werden darf.

Sehen wir die Lotrichtungen der charakteristischen Punkte eines Teiles der Erdoberfläche als parallel an, so projicieren sie dieselben zu identischen Figuren auf beliebig über einander liegende Horizontalebenen. In Bezug auf *die Horizontalprojektion* ist daher die Wahl der als Projektionsebene gedachten Horizontalebene gleichgültig. Dagegen hängen die Vertikalabstände, *die Höhen über dem angenommenen Horizont*, davon ab.

Horizontalprojektion und Höhen genügen völlig zur Beantwortung aller Fragen über die Figur des Terrains. Man kann aus ihnen nicht nur die wirklichen Entfernungen und Flächen ableiten — im Gegensatz zu den *horizontalen*, in der Projektion gemessenen, *schiefe* genannt — man erhält auch bequem nächst den Höhenunterschieden die Gefälle der Linienelemente des Terrains. Diese Gröfsen sind so bedeutungsvoll, dafs eine Aufnahme, welche die Figur des Terrains ohne Bezug zur Richtung des Lotes gäbe, schon darum geringe Bedeutung hätte. Gerade die Existenz dieser fundamentalen Richtung erleichtert aber die Aufnahme sehr, wie man erkennt, wenn man diese letztere ohne ihre Mitwirkung ausführen will.

In der Horizontalprojektion fehlt leider eine fixe, mit immer hinreichender Genauigkeit rasch herzustellende Richtung; eine fundamentale Richtung ist zwar als Nordsüdrichtung vorhanden, aber man kann sie meist mit erforderlicher Schärfe nur durch zeitraubende astronomische Messungen erlangen, so dafs man in der Regel auf ihre unmittelbare Benutzung verzichtet. Immerhin ist die direkte Bezug-

nahme auf diese Richtung in einigen Fällen vorteilhaft, ja unentbehrlich, wobei die Magnetnadel dazu dient, die Beziehung herzustellen.

Die Art und Weise, in welcher die soeben ganz im allgemeinen besprochenen Aufnahmen ausgeführt werden, ausführlich wissenschaftlich zu beschreiben, ist Gegenstand der *niedern* Geodäsie (Feldmessen und Nivellieren).

§ 3. Aufnahme im grofsen. Projiciert man die Punkte eines beliebig grofsen Teils der Erdoberfläche auf eine Fläche, die überall zur projicierenden Linie normal steht, so zeigt sich im Vergleiche zu § 2 zweierlei.

1. Folgt man der Lotrichtung eines Punktes, so hört sie mit Verlassen desselben streng genommen im allgemeinen sofort auf, Lotrichtung zu sein. Es ändert sich vielmehr die Lotrichtung von Ort zu Ort und ein beweglicher Punkt, der in jedem Augenblick derjenigen Lotrichtung folgt, die seiner jedesmaligen Lage entspricht, beschreibt eine schwach gekrümmte Linie: die *Lotlinie* (Kraftlinie). Hiernach ist in jedem Punkte der Lotlinie die Tangente Lotrichtung.

2. An Stelle der Horizontalebene, auf welche projiciert wurde, tritt eine krumme Fläche, welche die Lotlinien normal schneidet: eine *Niveaufläche.*

Besonders hervorzuheben unter den Niveauflächen ist die Meeresfläche, welche man sich aber hierbei nur der Schwerkraft der Erde unterworfen und also ruhend denkt, so dafs von der Bewegung durch Ebbe und Flut, durch Winde und andere, Meeresströmungen erzeugende Ursachen abgesehen wird. Diese ideelle Meeresfläche würde den sichtbaren Teil einer Niveaufläche bilden. Man nennt sie die *mathematische Erdoberfläche* oder (nach Listing 1872) das *Geoid,* im Gegensatz zur reellen, der *physischen* Erdoberfläche. Durch ein System von Kanälen, die von der Meeresküste aus ins Innere der Kontinente geführt würden, könnte man sich auch dort das Geoid sichtbar gemacht denken.*) Die ruhenden Spiegel der Teiche und Seeen sind dagegen in der Regel Teile anderer Niveauflächen.

Denken wir uns nunmehr die Lotlinien als projicierende Linien, so ist jetzt im Gegensatz zu § 2 die Auswahl einer bestimmten Niveaufläche als Projektionsfläche notwendig, weil die Projektionen auf verschiedene Niveauflächen nicht identisch sind und namentlich in

---

*) Hierbei ist vorausgesetzt, dafs die mathematiche Erdoberfläche eine kugelartig geschlossene Fläche ist. In der That pflegen wir die Möglichkeit der Tracierung von Kanälen quer durch die Kontinente (abgesehen von technischen Schwierigkeiten) für selbstverständlich zu halten. Die wissenschaftliche Erörterung dieser Frage mufs aber dem zweiten, physikalischen Teil des Buches vorbehalten bleiben.



der Gröfse sich unterscheiden. Fafst man insbesondere zwei Niveauflächen ins Auge, die von zwei benachbarten Punkten einer Lotlinie ausgehen, so bilden beide geschlossene, näherungsweise parallele Flächen, die sich nicht schneiden, sondern von denen die eine die andre vollständig umschliefst. Im allgemeinen hat hiernach die Projektion auf die höher gelegene Niveaufläche den gröfsern Inhalt.

Betrachten wir die Niveauflächen als konzentrische Kugelflächen, so sind die Projektionen einander ähnliche Figuren, deren Seiten im Verhältnis $\varrho : (\varrho + h)$ oder $1 : (1 + \frac{h}{\varrho})$ stehen, wenn ϱ den innern Kugelradius und h den Abstand beider Flächen bezeichnen. Das Verhältnis der Flächen ist

$$\varrho^2 : (\varrho + h)^2 \text{ oder } 1 : \left(1 + \frac{2h}{\varrho}\right)$$

genähert. Die horizontale Entfernung zweier Punkte ist ein Kreisbogen, dessen Länge von der Höhenlage der Niveaufläche abhängt.

Nach dem Vorstehenden würde eine vollständige Aufnahme der physischen Erdoberfläche bewirkt werden können durch die Bestimmung ihrer Projektion auf eine ihrer Gestalt nach bekannte Niveaufläche nebst den Abständen der projicierten Punkte von der letztern, gemessen in den Lotlinien. In der Praxis modificiert sich dies etwas.

Die *höhere* Geodäsie lehrt die Methoden zur Ermittlung der Gestalt der Niveauflächen und die Aufnahme beliebig grofser Teile der Erdoberfläche durch Horizontalprojektion und Höhen mit Rücksicht auf die Gestalt der Niveauflächen.

Die Lösung der erstgenannten Aufgabe ist durch die Thatsache erleichtert worden, dafs den Niveauflächen in grofser Annäherung die Gestalt eines an den Polen schwach abgeplatteten Rotationsellipsoids zukommt. Hierdurch wurde es möglich, aus Messungen an einer beschränkten Anzahl Orten eine genäherte Kenntnis zu erlangen — die genaue Lösung erfordert dagegen ein fast ähnlich detailliertes Studium, wie es für die physische Erdoberfläche nötig ist und da $\frac{8}{11}$ der letzteren Meer und nur $\frac{3}{11}$ Land sind, so ist dieses Studium nur für die kleinere Hälfte der Erdoberfläche durchführbar, aber auch für diese kaum begonnen.

Das genannte Ellipsoid legt man auch bei der 2. Aufgabe zu Grunde, nicht nur, weil die genaue Gestalt der Niveauflächen in der Regel unbekannt bleibt, sondern auch wegen des einfachern Kalküls.

§ 4. **Geographische Begriffe, die von der Gestalt der Niveauflächen unabhängig sind.** Obgleich wir hier die Lehren der mathematischen Geographie und niedern Geodäsie voraussetzen, so ist es doch notwendig, einige im Folgenden erforderliche Begriffe, soweit

nicht schon geschehen, mit Berücksichtigung der wirklichen Gestalt der Niveauflächen scharf zu fassen und zusammenzustellen.

Als unmittelbar gegeben treten die Lotrichtungen und die Rotationsaxe der Erde, die *Erdaxe*, auf. Diese enthält, wie später zu erläutern vorbehalten bleibt, den Erdschwerpunkt, in welchem die Äquatorebene normal zu ihr steht, und sie schneidet die Oberfläche und jede Niveaufläche in einem *Nordpol* und *Südpol.*

An einem Punkte, wo sich astronomische Beobachtungen anstellen lassen, kann aufser der Lotrichtung auch die Richtung nach demjenigen Himmelspole angegeben werden, der über der Horizontalebene des Punktes liegt. Da der Himmelspol nichts anderes ist, als derjenige Punkt des scheinbaren Himmelsgewölbes, der durch die tägliche Rotation keine Ortsveränderung erleidet, so ist er der unendlich entfernte Punkt der Erdaxe und die Richtung nach ihm parallel zur Erdaxe. Die Ebene durch diese Parallele und die Lotrichtung heifst die *Meridianebene* des Punktes.

Sie schneidet die Horizontalebene in der *Nordsüdlinie,* zu welcher die *Ostwestlinie* rechtwinklig gezogen wird. Von oben gesehen ist die Reihenfolge der 4 Himmelsrichtungen im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers Nord, Ost, Süd, West (nach Übereinkunft der Meteorologen mit *N, E, S, W* zu bezeichnen).

Das astronomische Azimut einer Vertikalebene ist ihr Winkel mit der Meridianebene; er wird also in der Horizontalebene gemessen und zwar von der Meridianebene aus südwestlich oder nordöstlich.

Die geographische Breite eines Punktes ist der Winkel zwischen der Lotrichtung des Punktes und der Äquatorebene; *die geographische Länge* derjenige zwischen der Meridianebene des Punktes und einer als Ausgang der Zählung angenommenen Meridianebene. Die Breiten zählt man nördlich und südlich oder positiv und negativ bis 90°; die Längen westlich oder östlich bis 180° oder auch bis 360°, wobei in der Wissenschaft der Astronomie und Geodäsie meist der Meridian (eines markierten Punktes) der Sternwarten zu Greenwich bei London oder zu Paris als Ausgang der Zählung dient.

§ 5. Geographische Begriffe für ein Rotationsellipsoid. Nehmen wir an, dafs sowohl die mathematische als auch die physische Erdoberfläche *ein* abgeplattetes Rotationsellipsoid bilden, so *schneidet* die Lotrichtung jedes Oberflächenpunktes die Erdaxe; demnach wird diese die gemeinsame Durchschnittslinie aller Meridianebenen, und alle Punkte gleicher geographischer Länge liegen in ein und derselben Meridianebene und bilden die als geographischer Meridian benannte ebene, durch beide Pole führende Kurve.

Auch alle Punkte gleicher geographischer Breite liegen auf einer

ebenen Kurve, deren Ebene parallel zur Äquatorebene ist; sie heifst geographischer Parallelkreis, bei null Grad Breite insbesondere geographischer Äquator.

Als *Abplattung* bezeichnet man das Verhältnis des Unterschieds des äquatorialen und polaren Durchmessers zu dem äquatorialen Durchmesser.

§ 6. **Geographische Begriffe für den thatsächlichen Zustand.** In Wirklichkeit liegt ein Punkt der physischen Erdoberfläche im allgemeinen nicht auch auf der mathematischen Erdoberfläche und diese weicht vom Rotationsellipsoid etwas ab.

Der Abstand eines Punktes vom Geoid, gemessen in der Lotlinie, heifst *Meereshöhe*. Diese ist hiernach nicht die Länge einer geraden, sondern krummen Linie; indefs ist diese Krümmung so gering, dafs sie nur bei den feinsten Untersuchungen Bedeutung erlangt. Sie bewirkt, da die Niveauflächen die Lotlinien normal schneiden, eine Abweichung der Niveauflächen vom Parallelismus.

Die Lotrichtung irgend eines Punktes schneidet in der Regel die Erdaxe *nicht;* daher laufen die Meridianebenen im allgemeinen nur parallel zur Erdaxe, ohne sie zu enthalten. Der Abstand ist jedoch stets gering. Hiernach besitzen nun Punkte gleicher geographischer Länge ebenfalls Meridianebenen, die im allgemeinen nicht zusammenfallen, sondern einander in kleinen Abständen parallel laufen und die sich, wie überhaupt alle Meridianebenen, paarweise in zur Erdaxe parallelen Linien schneiden.

Der geographische Meridian, welcher Punkte gleicher geographischer Länge auf der Geoidfläche verbindet, ist im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung.*) Dies gilt auch vom *geographischen Parallel* und *geographischen Äquator*. Nur näherungsweise läfst sich durch diese Kurven eine Ebene legen. Müssen wir also mit den letztgenannten geographischen Begriffen bei strenger Auffassung andere räumliche Vorstellungen verbinden, als man es meist gewöhnt ist, so ändert sich doch nichts an den entsprechenden Begriffen für das scheinbare Himmelsgewölbe, wenn wir darunter eine die Erde umschliefsende Kugel von unendlichgrofsem Radius verstehen. Die cölestischen Meridiane und Parallelkreise sind jedenfalls ebene Kurven und zwar Kreise im eigentlichen Sinne des Worts.

Die Begriffe für den thatsächlichen Zustand entwickelte bereits 1860 General *von Schubert* im 52. Band der Astronomischen Nachrichten No. 1245 S. 321.

*) Wäre das Geoid ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit zur Erdaxe *schief*liegender kleiner Axe, so würden die geographischen Meridiane auch ebene Kurven sein. (Vergleiche *Fergola, Sulla Posizione dell' Asse di Rotazione etc.* oder das Referat in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft 1876 S. 94.)



Man vergleiche auch die Entwicklungen von *Laplace, Mécanique céleste* t. II l. III p. 109 u. s. w. für eine nahezu kugelförmige aber sonst beliebige Meeresfläche (publiziert im Jahr 1799).

§ 7. **Geozentrische Breite, Länge und Radiusvektor.** Legt man durch die Verbindungslinie eines Punktes der Erde mit deren Schwerpunkt, also durch den Radiusvektor des Punktes, eine die Erdaxe enthaltende Ebene, so ist die geozentrische Länge der Winkel dieser Ebene mit einer andern Ebene durch die Erdaxe, die als Ausgang der Zählung dient; die *geozentrische* oder *verbesserte* Breite aber ist der Neigungswinkel des Radiusvektors zur Äquatorebene.

Die geozentrische Breite ist im Maximum nur etwa $11^1/_2$ Min. kleiner als die geographische; noch weit kleiner ist*) der Unterschied der geozentrischen und geographischen Längen, welcher nur von den Abweichungen des Geoids von einer Rotationsfläche abhängt, während der ersterwähnte namentlich aus der an den Polen abgeplatteten Gestalt hervorgeht.

Der Radiusvektor der Geoidfläche ist im allgemeinen für den Äquator am gröfsten und verjüngt sich nach den Polen allmählich um circa $\frac{1}{300}$. Der Radiusvektor der physischen Erdoberfläche ist näherungsweise um die Meereshöhe von dem gleichgerichteten Radiusvektor des Geoids verschieden; genauer (jedoch noch nicht ganz streng) ist der Unterschied gleich Meereshöhe mal Sekante des Winkels zwischen Lotrichtung und Radiusvektor. Man bemerkt aber leicht, dafs hiermit selbst für 10000^m Höhe nur Centimeter gewonnen werden, weil der Cosinus von $11^1/_2$ Minute von der Einheit nur um $\frac{1}{180000}$ abweicht.

§ 8. **Koordinatensysteme.** Zur gegenseitigen Beziehung der Punkte der Erdoberfläche bieten sich nach dem Vorhergehenden drei Wege.

Geozentrische Breite und Länge und der Radiusvektor bilden ein für *astronomische* Zwecke wichtiges System; geographische Breite und Länge und die Meereshöhe eignen sich zur Beschreibung der gegenseitigen Lage irgend zweier Punkte und bilden so recht eigentlich die *geographischen* Koordinaten; die Elemente des *geodätischen* Koordinatensystems sind Höhen und Horizontalprojektion in Bezug auf eine Niveaufläche, mit Anwendung geometrischer Koordinaten in dieser letzteren, welche unter andern als rechtwinklige Koordinaten oder Polarkoordinaten für die Ebene allgemein geläufig sind. Die höhere Geodäsie bedient sich zur Lösung ihrer Aufgaben namentlich direkter Bestimmungen geodätischer *und* geographischer Koordinaten.

*) Abgesehen von Punkten in der Nähe der Pole.

2. Kapitel.

Historische Entwicklung der Kenntnisse von der mathematischen Erdoberfläche.

§ 1. **Historische Notizen bis zur Zeit Newtons.** Schon im Altertume konnte den seefahrenden Nationen die Krümmung des Meeresspiegels nicht unbemerkt bleiben, womit der erste Schritt zur Annahme der Kugelgestalt geschehen war. Bei den Griechen taucht die Kenntnis von dieser Annäherungsform für die Erdoberfläche vor etwa zwei und ein halb Jahrtausenden auf; *Aristoteles* stellt bereits die beweisenden Erfahrungen zusammen. Soviel bekannt gelangte aber erst (um 220 vor Chr.) der alexandrinische Gelehrte *Eratosthenes* zu einem wissenschaftlich begründeten Wert für den Umfang (und damit für den Krümmungsradius) der als Kugel betrachteten Erde; er berechnete ihn aus der geschätzten horizontalen Entfernung von Alexandria und Syene, und der astronomisch bestimmten Konvergenz der Lotrichtungen an den Endpunkten der Strecke, schlofs also von Kreisbogen und Zentriwinkel auf den Umfang oder Radius des Kreises.

Die folgenden achtzehn Jahrhunderte brachten keinen bemerkenswerten Fortschritt, wenn auch durch einige der wenigen nachfolgenden Messungen in diesem Zeitraume die Sicherheit des von *Eratosthenes* erhaltenen Wertes weit übertroffen worden ist. Die Einsicht, dafs die Kugelform nur eine rohe Annäherung und durch die Form des schwach abgeplatteten Rotationsellipsoids als einer weit besseren Annäherung zu ersetzen sei, brachte erst das siebzehnte Jahrhundert unter dem Einflufs von *Copernicus'*, *Galileis*, *Keplers*, *Huygens'* und *Newtons* reformatorischen Lehren. Was diese Männer leisteten und schufen, dürfte im allgemeinen dem Leser bekannt sein; hier ist nur an das, was die Geodäsie speziell betrifft, zu erinnern.

So heben wir hervor, dafs *Copernicus* in Verbindung mit der Aufstellung seines Planetensystems (1543) auch auf die Notwendigkeit der Annahme eines täglichen Umschwunges der Erde hinwies.

Zu beinahe denselben Anschauungen war zwar schon, ohne dafs hiervon *Copernicus* Kenntnis gehabt zu haben scheint, (um 270 vor Chr.) der Grieche *Aristarch* gelangt. Aber *Aristarchs* Lehre blieb ohne Einflufs: denn die Astronomie konnte sich eben noch lange mit Theorieen behelfen, die dem Augenschein besser als jene entsprachen. Erst nach fast zwei Jahrtausenden lernte man die Vereinfachungen schätzen, welche sie der theoretischen Astronomie gab. Ein *Kepler* und *Galilei* nahmen die Lehre jetzt auf und während der eine sie

direkt mit Benutzung von *Tycho Brahes* langjährigen, sorgfältigen Beobachtungen sowie älterer astronomischer Erfahrungen, die jene Jahrtausende zur Reife bedurften, weiter ausbildete (*Astronomia nova de motibus stellae Martis etc.* 1609), stellte der andere die Gesetze der Fall- und Pendelbewegung fest (1602) und schuf dadurch die Grundlage einer Mechanik der Körper.

Huygens untersuchte bereits das physikalische Pendel und die Zentralbewegung (1673) und erkannte auch den Einfluſs der Schwerkraft auf die Gestalt der Erde. Vollendet wurde die Reform durch *Newtons* Theorie der allgemeinen Gravitation (1666 gefunden, 1686 in dem Werke: *Philosophiae naturalis principia mathematica* auf die Bewegung der Himmelskörper u. s. w. angewandt).

Huygens, der groſse Zeitgenosse *Newtons*, hatte bezüglich der Gravitation seine eignen Ansichten und trug Bedenken, *Newtons* Theorie zu acceptieren; er nahm an, daſs die Anziehungskraft der Erde nicht von ihren einzelnen Massentheilen, sondern gewissermaſsen von einem Zentralpunkt ausgehe und beschränkte den Bereich ihrer Wirksamkeit auf die Erde selbst, während *Newton* bloſs aus Vorsicht wegen mangelnden Beweises die Gültigkeit des Gravitationsgesetzes nicht auch über das Sonnensystem hinaus ausdehnte.*) Die Verbindung der Anziehungskraft mit der Zentrifugalkraft (die er zuerst aufgefunden) zu einer Resultante normal zur Oberfläche führte nun *Huygens* unter Annahme von $\frac{1}{289}$ als Verhältnis der Schwungkraft zur Schwere am Äquator zu $\frac{1}{578}$ als Abplattung, der Hälfte jenes Wertes (1688).

Newton dagegen legte den Betrachtungen ein homogenes Ellipsoid zu Grunde, berücksichtigte die Anziehung aller Teile und fand als Abplattung $\frac{1}{230}$ unter Annahme derselben relativen Gröſse der Zentrifugalkraft (1686). Er bemerkte bereits, daſs die Abplattung kleiner werden müſste, falls die Dichte nach dem Zentrum zunähme, und wir wissen jetzt, daſs in der That das Rechte in der Mitte liegt, denn die Erddichte ist weder konstant, noch hat sie solche Gröſse und Richtung als wäre die ganze Masse in *einem* Punkte konzentriert; die Dichtigkeit wächst vielmehr von 2,6 an der Oberfläche bis ungefähr 11 im Zentrum (Durchschnitt 5,6). Immerhin genügten die theoretischen Betrachtungen von *Huygens* und *Newton* zur Erklärung der Erfahrung *Richers*, welcher 1672 bei einer astronomischen Expedition von Paris nach Cayenne sich genötigt sah, das Pendel seiner astronomischen Uhr, um wieder Sekundenschwingungen zu erhalten, $1^3/_4$ Linie zu verkürzen, was auf eine Verminderung der Schwerkraft gegen Paris

*) Vergl. hierzu: *Isenkrahe*, das Rätsel der Schwerkraft. 1879. S. 87 ff.

hinwies. Allein obwohl er bei der Rückkehr wieder die erste Pendellänge herstellen mufste, war man doch geneigt, Beobachtungsfehler oder lokale Verhältnisse als Grund zu vermuten. Denn auch neuen zustimmenden Beobachtungen, die in den nächsten zehn Jahren gemacht wurden, widersprachen wieder andere. Man konnte daher auf diesem Wege keine Bestätigung erwarten und die neuen Theorieen, diejenige von der Rotation der Erde nicht ausgeschlossen, bedurften derselben um so mehr, je eingreifender sie waren. Selbst die Entdeckung der Axendrehung des Planeten Mars durch *Huygens* (1659) und die der Abplattung des Planeten Jupiter ($\frac{1}{14}$) durch *Cassini* den Älteren (1666; 1691 publiziert) beseitigten die Zweifel nicht, weil direkte Bestimmungen der Erdkrümmung nach demselben Princip, das schon *Eratosthenes* anwandte, eine Verlängerung der Erde in Richtung ihrer Axe anzudeuten schienen.

§ 2. **Von Newton bis Laplace.** Setzt man voraus, dafs die Erde eine Kugel sei, so genügt eine einzelne Bestimmung des Krümmungsradius wenigstens vom theoretischen Standpunkte. Für die rotationsellipsoidische Gestalt aber sind zwei solche Messungen nötig, weil die Ellipse von 2 Parametern abhängt. Nimmt man Meridianbögen (wie schon *Eratosthenes*), so ist es am vorteilhaftesten, den einen thunlichst am Äquator, den andern möglichst nahe dem einen der Pole zu legen. Solche Messungen nun nennt man jetzt *Breitengradmessungen*, welcher Gebrauch anscheinend aus dem 17. Jahrhundert stammt, aus der Zeit, wo man anfing die elliptische Gestalt zu untersuchen und daher aus einer Messung nicht den ganzen Umfang der Erde, sondern nur etwa die Länge des elliptischen Bogens für 1° Breitendifferenz ableiten konnte.

1669 begann der Astronom *Picard* auf Veranlassung der 1666 gegründeten Akademie der Wissenschaften eine Messung in Frankreich und bereits er vermutete Abweichungen von der Kugelgestalt. Seine Messung verdient zunächst darum hier Erwähnung, weil sie die erste derjenigen ist, bei welchen die zahlreichen und wichtigen Erfindungen des genannten Jahrhunderts auf dem Gebiete der Konstruktion mathematischer Instrumente (wir nennen Pendeluhren und Federuhren, Fernrohr und Mikroskop, Röhrenlibelle, Vernier) Einflufs gewannen. Insbesondere haben *Picard* und *Azout* das mit Fadenkreuz versehene Fernrohr zuerst bei den astronomischen und geodätischen Messungen benutzt.

Aufserdem kam bei dieser Messung zum ersten Male die Methode der *Triangulation* zu gröfserer Verwendung, welche Methode der Niederländer *Snellius* um 1615 in die geodätische Praxis eingeführt hatte. Dieses Verfahren gestattete die Entfernung zweier Punkte

weit genauer indirekt zu finden, als mittelst bisher beliebter direkter Messungen, indem man nämlich eine Reihe an einander hängender Dreiecke zwischen jene einschaltete, die Winkel der Dreiecke und für eins der Dreiecke auch eine Seite mafs und daraus die unbekannte Entfernung berechnete. (Noch in den Jahren 1633—1635 mafs indes *Norwood* mit Kette und Bussole, auf Wegen u. s. w., direkt einen circa 40 geographische Meilen langen Bogen von London bis York!)

Die von *Picard* begonnene Messung wurde ganz Frankreich durchsetzend in Unterbrechungen bis 1718 durch verschiedene Gelehrte fortgesetzt. Das darüber von *J. Cassini* 1720 publizierte Werk zeigte nun, dafs innerhalb Frankreichs die gemessene Bogenlänge der Meridiangrade nach Norden etwas abnahm, was auf längliche (citronenförmige) Erdgestalt anstatt auf abgeplattete (orangenförmige) hindeutete.

Der Widerspruch mit den Theorieen von *Newton* und *Huygens* wurde anfangs von einigen dazu benutzt, diese letzteren anzugreifen, weil man jene Messungen für sehr genau hielt. Sie waren auch weit genauer als die früherer Zeit, aber man erkannte doch bald, dafs immerhin die Beobachtungsfehler noch grofs genug sein konnten, um den Einflufs der Abplattung für einen so kleinen Abstand der Meridiangrade, wie ihn Messungen innerhalb Frankreichs nur aufweisen, ganz zu verdecken.

Die Sache entschied sich in einem den dynamischen Theorieen günstigen Sinne durch die nunmehr von Frankreich aus unternommenen Breitengradmessungen in Peru (1735—1743) und Lappland (1736—1737). Die erstere genauere von beiden gab mit dem revidierten französischen Bogen eine Abplattung gleich $\frac{1}{304}$.

Seit dieser Zeit nun und besonders seit Ende des 18. Jahrhunderts sind zahlreiche Breitengradmessungen mit immer mehr verfeinerten Hilfsmitteln ausgeführt worden.

Auch *Längengradmessungen*, bei denen je ein Parallelbogen geodätisch und die Längendifferenz astronomisch bestimmt werden, wurden versucht, doch begegnete man bei ihnen anfänglich Schwierigkeiten in Bezug auf die genaue und bequeme Ausführung der astronomischen Arbeiten, welche erst neuerdings durch die elektrische Telegraphie ganz gehoben worden sind.

Zu der rein geometrischen Methode der Gradmessungen gesellten sich im Laufe des 18. Jahrhunderts durch die Ausbildung der Mechanik des Himmels noch andere Methoden zur Berechnung der Abplattung. *Clairaut* zeigte 1743, wie man mittels einer einfachen Formel aus dem Unterschied der Schwerkraft am Äquator und an den Polen der Erde die Abplattung berechnen könne; *d'Alembert* untersuchte (1749)

den Zusammenhang zwischen der Figur und Massenanordnung der von Mond und Sonne angezogenen Erde und der Bewegung der Erdaxe im Raume, welche einesteils sich als eine stetige Bewegung der Durchschnittslinie von Äquator und Ekliptik auf dieser äufsert (Präzession der Tag- und Nachtgleichenpunkte, von *Hipparch* [150 vor Chr.] entdeckt), andernteils aber als kleine periodische Veränderungen der Lage der Himmelspole gegen die Fixsterne (Nutation, von *Bradley* entdeckt und 1748 publiziert) bemerkt wird; endlich wies *Laplace* am Schlusse des Jahrhunderts auch in der Theorie des Mondlaufs diejenigen bereits empirisch gefundenen periodischen Glieder nach, welche von der Figur und Massenanordnung der Erde herrühren.

Nach allen diesen Methoden leitete *Laplace* im 2. Teile seiner Himmelsmechanik die Abplattung der Erde ab (die *Gröfse* kann nur aus den Gradmessungen und etwa noch aus der Mondparallaxe in Verbindung mit Schweremessungen gefunden werden) und er erhielt in ziemlich guter Übereinstimmung dieselbe aus allen etwas *kleiner* als $\frac{1}{300}$, während jetzt alle diese Methoden, nachdem zahlreichere Beobachtungen vorliegen, auf einen nicht unerheblich gröfsern Wert hindeuten.

Laplace konnte hierbei bereits eine gröfsere Anzahl Breitengradmessungen, sowie Pendelbeobachtungen verwerten und es gab ihm dies Veranlassung zu interessanten Lösungen des Problems der Ausgleichung der Beobachtungsfehler, welche allerdings bald darnach durch die praktikablere Methode der kleinsten Quadrate ersetzt worden sind. Er bemerkte bei diesen Ausgleichungsrechnungen unzweifelhaft, dafs die mathematische Erdoberfläche nicht genau mit der Form des abgeplatteten Rotationsellipsoids übereinstimmt, weil die übrigbleibenden (berechneten) Fehler der Messungen — auch Azimutmessungen zeigten grofse Abweichungen — bei weitem das zulässige Mafs von Beobachtungsfehlern überschritten, dafs aber immerhin diese Form eine gute Annäherung bietet.

Eine eingehende Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Theorieen, sowie auch der Grad- und Pendelmessungen zum Teil, von *Newton* bis *Laplace*, giebt

Todhunter, A History of the mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth. 2 Bde. in 8° mit 476 und 508 S. London 1873.

Nächstdem benutzten wir hauptsächlich noch:

Mädler, Geschichte der Himmelskunde von der ältesten bis auf die neueste Zeit. 2 Bde. in 8°. Braunschweig 1873.

Rud. Wolff, Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 2 Bde. in 8°. Zürich 1870 und 72.

Laplace, Traité de Mécanique céleste. Bd. 1 u. 2 in 4°. 1799. Insbesondere ist Buch 3 S. 126 ff. und der Überblick Buch 5 S. 353—355 zu vergleichen, sowie in Bezug auf *Laplaces* Bemerkungen über die Ursache der Anomalieen

Buch 3 S. 139 ff. — Bd. 5 (1825) S. 2—22 giebt einen geschichtlichen Überblick der dynamischen Untersuchungen in Bezug auf Figur und Rotation der Erde.

Zur *Ergänzung* kann dienen:

E. Mayer, Über die Gestalt und Gröfse der Erde; eine historisch geodätische Studie. Fiume 1876. 74 S. in 8° mit einer Übersichtskarte (Separat-Abdruck aus den *Mitteilungen im Gebiete des Seewesens*). Preis 1,8 Mark.

Poggendorff, Bibliographisch-litterarisches Handwörterbuch. 2 Bde. Leipzig 1863.

§ 3. **Das 19. Jahrhundert** brachte, weil man die Unzulänglichkeit der Bestimmung der Abplattung der Erde aus wenigen Gradmessungen erkannt hatte, schon in seiner ersten Hälfte eine gröfsere Anzahl solcher Operationen an verschiedenen Orten der Erde. Nach *Laplace* war es namentlich *Bessel*, der (in kritischer Diskussion der Resultate der bis dahin ausgeführten Messungen) 1837 ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ableitete, welches er 1841 mit Bezug auf einen bekannt gewordenen Fehler einer der benutzten Gradmessungen verbesserte. Als Abplattung fand er $\frac{1}{299}$. Verschiedene nachfolgende Berechnungen haben aber mit Zuziehung des immer mehr anwachsenden Materials es wahrscheinlich gemacht, dafs eine Vergröfserung dieses Wertes der Erde im ganzen besser entsprechen würde. Die Ansichten über das Mafs dieser Vergröfserung sind noch verschieden; viele sind geneigt, die Zahl $\frac{1}{289}$, dieselbe Zahl, welche das Verhältnis von Zentrifugal- und Schwerkraft am Äquator ausdrückt, für die angemessenste zu halten, da sie namentlich zahlreiche Schweremessungen gut befriedigt.

Die Dimensionen, welche *Bessel* 1841 erhielt, sind jedenfalls eine noch immer sehr brauchbare Annäherung, deren man sich um so lieber vielfach bedient, als zahlreiche Tafeln für Funktionen der Dimensionen des Erdkörpers darnach berechnet sind. Wir kommen weiterhin auf sie zurück.

Unter den neuern Berechnungen finden sich auch solche, welche versuchen, die Ergebnisse der Gradmessungen durch Annahme einer andern Hypothese als der des abgeplatteten Rotationsellipsoids zu besserer Übereinstimmung zu bringen. *Bowditch*, *Clarke*, *Paucker*, *Ritter* legten der Rechnung eine Rotationsfläche mit einem nicht elliptischen Meridianschnitt zu Grunde; *Schubert* und auch *Clarke* wiederum verfolgten die Hypothese des dreiaxigen Ellipsoids; neuerdings endlich ging *Fergola* von der Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoids mit zur Erdaxe schiefliegender kleiner Axe aus. Der Erfolg aller dieser Bemühungen ist als ein negativer zu bezeichnen, denn es gelang weder die Elemente solcher Körperformen mit hinlänglicher Sicherheit zu bestimmen, noch einen wesentlich bessern Anschlufs an die Beobachtungen zu erzielen.

Überdies ist man jetzt allgemein überzeugt, dafs Gradmessungen allein nicht genügen, um die Gestalt der mathematischen Erdoberfläche, im ganzen genommen, sicher zu erkennen; namentlich weil sie nur auf dem Festlande ausgeführt werden können und weil dieses nur $\frac{3}{11}$ der Oberfläche bedeckt. Glücklicher Weise lassen sich Schweremessungen mit dem Pendel auch auf den zahlreichen Inseln des Oceans ausführen und wenn zur Zeit auch noch nicht eine alle Anforderungen befriedigende Anzahl solcher Messungen vorliegt, so genügen sie doch bereits dazu, die Wahrscheinlichkeit *der* Vermutung beträchtlich zu verstärken, dafs man im abgeplatteten Rotationsellipsoid*) eine gute Annäherung hat. Sie zeigen nämlich, dafs das Geoid mit einem solchen bis auf Bruchteile des Radiusvektors von der Ordnung des Quadrats der Abplattung zusammenfällt und weder ein dreiaxiges Ellipsoid ist, noch einen erheblichen Unterschied der nördlichen und südlichen Hälfte aufweist.

Die vorhandenen Abweichungen lassen sich durch Unregelmäfsigkeiten in der Massenlagerung der Erdrinde erklären und man ist bis jetzt auf eine unregelmäfsige Massenlagerung im Erdinnern nicht hingewiesen worden. Es treten mithin die Abweichungen entweder als *lokale* auf, als eine Folge der lokalen Terraingestaltung, der verschiedenen Gesteinsdichten und der Existenz unterirdischer Hohlräume; oder sie haben eine kontinentale Verbreitung, als eine Folge der Erhebung des Festlandes über das mittlere Niveau des Meeresgrundes und der Ungleichheit der Meerestiefen.

Fafst man die Abweichungen gegen eine gewisse ideelle Massenlagerung, welche ein sich dem Geoid anschliefsendes Rotationsellipsoid ergeben würde, als positive und negative Störungen auf, so ist deren unmittelbar ersichtliche Wirkung eine positive oder negative Anziehung, die sich mit der normalen Schwere kombiniert und deren Richtung, die Lotrichtung des ideellen Ellipsoids, in die reelle des Geoids überführt. Der Richtungsunterschied beider, die *Lotablenkung*, beträgt durchschnittlich einige Sekunden; in der Nähe von Bergen, Gebirgen und an den Meeresküsten steigert sie sich aber leicht auf 10″ und mehr, ohne indes einen Maximalwert von etwa $1\frac{1}{2}'$ zu überschreiten.

Die weitere geometrische Konsequenz der Lotablenkungen sind Erhebungen und Senkungen des Geoids gegen das Ellipsoid, welche indessen nach ihrem Gesamtbetrage sicherer aus Schweremessungen

*) Manche Autoren bezeichnen dasselbe als *Sphäroid;* wir heben diesen Ausdruck aber zur Bezeichnung der näherungsweise kugelförmigen Flächen im allgemeinen auf und werden häufig, wo Verwechslung nicht möglich ist, das abgeplattete Rotationsellipsoid einfach *Ellipsoid* nennen.

als aus Lotablenkungen erkannt werden. Diejenigen von mehr kontinentalem als lokalem Charakter mögen durchschnittlich gegen 200^m Maximalabstand vom Geoid erreichen; ob irgendwo auch 1000^m vorkommen, wie einige annehmen, ist noch nicht genügend untersucht. Dagegen ist z. B. unterhalb des Harzes die lokale Erhebung im Maximum noch nicht 2^m (es ist dies also nicht die überhaupt daselbst vorhandene Abweichung vom Geoid, sondern nur derjenige Teil, welcher durch die lokalen Verhältnisse der Massenlagerung erzeugt wird).

Einen beträchtlichen Einfluſs haben die Lotablenkungen auf die Gröſse des Krümmungsradius, weil hierbei nicht ihr Betrag selbst, sondern dessen Änderung mit dem Orte auf dem Geoid in betracht kommt. Trotz der Kleinheit des Ablenkungsbetrages ist diese Änderung meist verhältnismäſsig groſs, sodaſs Abweichungen des Krümmungsradius um mehrere Prozent als Regel angesehen werden können und noch weit gröſsere nicht selten sind. Jedoch ist nirgends ein Krümmungswechsel konstatiert worden, und nach der Gestaltung der physischen Erdoberfläche und der geognostischen Beschaffenheit auch an keiner Stelle zu erwarten. Das Geoid zeigt also nirgends wie die physische Erdoberfläche Berge und Thäler, sondern nur Abnahmen und Zunahmen der nach dem Erdinnern zu *immer konkaven* Krümmung.

Eine Übersicht der meisten neuern Rechnungsergebnisse für die Erdgestalt enthält nachstehende Schrift:

Listing, Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Gröſse der Erde (Nachr. der Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen). 1872. 66 S. in 16°. Als Separatabdruck für 0,8 Mark.

Zum Teil dient auch *Mayer* a. a. O. S. 65 zur Ergänzung; ferner für *E. Ritters* Sphäroid *Wolff* a. a. O. Bd. 2, S. 141; für *Schuberts* Rechnungen *Listing* a. a. O. S. 32 und im Auszug auch Astronom. Nachr., Bd. 51 u. 52. (Nr. 1201 u. 1231). Über *Fergolas* bereits S. 8 erwähnte Abhandlung vergl. Vierteljahrsschr. der Astronom. Ges. Bd. 11, S. 94 u. 280.

Formeln für den nichtelliptischen Meridian eines Rotationssphäroids giebt bereits *Legendre* in einem Memoire, welches der Schrift *Delambres, Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien.* 1799. 4°, vorgedruckt ist.

Paucker berechnet in einer Abhandlung über *die Gestalt der Erde* aus 11 Gradmessungen (dieselben, welche *Encke* im Berl. Astronom. Jahrb. 1852, S. 340 aufführt) für den Radiusvektor der Erde den Ausdruck:

$$3272553{,}2083^t \,(1 - 0{,}003399065 \sin^2 - 0{,}000051868 \sin^4 + 0{,}000001775 \sin^6 - 0{,}000000002 \sin^8),$$

wobei sin den Sinus der geozentrischen Breite bedeutet. Die Abplattung



wird also $\frac{1}{289,9256}$, der Aquatorialradius 6378325,0^m*), die Abweichung von der Ellipse gleicher Abplattung in 45° geozentrischer Breite 107,0^m nach aufsen. (Bulletin de la Classe physico-mathém. de l'Ac. imp. des sciences de St. Pétersbourg. Bd. 12 und 13. 1854 und 55. S. 97—119 und 225 ff.).

Die Berechnungen von *Bowditch* und *Clarke* sind im Hauptwerke der englischen Vermessung *Ordnance Trigonometrical Survey, Principal Triangulation,* 1858, (vergl. *Listing* a. a. O. S. 29) aufgeführt; der erstere gab sie als Note zu seiner Übersetzung der Méc. cél., Boston 1832. Diese Rechner setzen den Krümmungsradius im Meridian gleich $A + Bs_1^2 + Cs_1^4$, wo s_1 der Sinus der geographischen Breite, ABC zu bestimmende Konstanten sind. Die Abweichung in 45° Breite ist 18^m nach innen bei *Bowditch* (5 Bögen), 115^m nach aufsen bei einer ersten Rechnung von *Clarke* ohne die russische Gradmessung und 54^m nach aufsen bei vollständigerer Rechnung (wahrscheinlicher Fehler $\pm$ 22^m). Alle diese Rechnungen zeigen also im Verhältnis zum mittlern Erdradius sowohl als auch im Vergleich zu den kontinentalen Erhebungen und Senkungen nur eine geringe Abweichung von der Ellipse an, deren Realität aber dabei zweifelhaft bleibt und gegenwärtig noch gar nicht konstatiert werden kann.

In einer sehr klaren Weise äufsern sich *Gaufs* (1828 in der Schrift über den Breitenunterschied von Göttingen und Altona S. 73) und *Bessel* (1837 in der Abhandlung über den Einflufs der Unregelmäfsigkeiten der Erde auf geodätische Messungen) über die Definition des Geoids und über seine Abweichungen vom Ellipsoid. Überdies untersucht schon *Laplace* Niveauflächen in verschiedenen Höhen (Méc. cél. Buch 3, Kap. 7) und Lotabweichungen.

Die Bedeutung der Schweremessungen für die Bestimmung der Erdgestalt kannte man bereits zu Anfang des Jahrhunderts. Dafür sprechen die zahlreichen Expeditionen zur Ausführung solcher und unter andern auch der Artikel *Erde* in *Gehlers* physikalischem Wörterbuch 3. Bd. S. 825—1141; 1827 von *Muncke* (nach *Ph. Fischer*) verfafst. Neuerdings wurde wiederholt darauf hingewiesen; vergleiche unter andern nachstehende Schriften:

Ph. Fischer, Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868. 318 S. in 8°. Hier werden auch die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid mittelst geschätzter Lotablenkungen berechnet. Vergleiche insbesondere S. 84, 92 u. 275. — Ähnlich wie *Fischer* bei der Berechnung der Dimensionen des Erdellipsoids (vergleiche *Listing* a. a. O. S. 47) verfuhr gleichzeitig *H. J. Klein* in seinem Werke: *Das Sonnensystem* u. s. w., Braunschweig 1869. Er nahm nämlich entsprechend den Schweremessungen als Abplattung $\frac{1}{289}$ und fand hiermit (S. 87) aus den Gradmessungen den Äquatorialradius gleich 3272766,1^t oder 6378739,9^m, mithin 402^m mehr als nach *Fischers* Rechnung aus der französisch-englischen Messung allein.

G. G. Stokes, On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth. Transactions of the Cambridge Phil. Society. VIII, Part V, p. 672—695 (Jahrgang 1849). Diese Schrift zeigt unter andern die Verwendung der Schweremessungen zur Bestimmung der Abstände von Geoid und Ellipsoid.

---

*) Es ist 1 Toise gleich 864 Par. Linien und gesetzlich 1 Meter genau gleich 443,296 Par. Linien; daher:

$$1^t = 1{,}9490363098^m \ldots, \qquad 1^m = 0{,}513074074^t \ldots$$

Über die geodätischen Mafseinheiten vergl. *Mayer* a. a. O. S. 34 u. 48.

§ 4. Gegenwärtige und zukünftige Untersuchungen. Insofern die Messungen zur Zeit über die Erdgestalt im allgemeinen schon einen recht befriedigenden Aufschlufs gegeben haben, ist es begreiflich, dafs man sich jetzt besonders dem Studium spezieller Krümmungsverhältnisse widmet. Doch werden auch immer mehr Daten gewonnen, die Kenntnis der allgemeinen Gestalt zu verbessern.

Die umfangreichsten Arbeiten sind gegenwärtig in Europa im Gange. Aus leicht ersichtlichen Gründen war dieses von jeher das best bearbeitete Operationsfeld der Geodäten. Bis um die Mitte des laufenden Jahrhunderts hatte man hier die französische Breitengradmessung durch ganz England verlängert und auf 22° 10′ Ausdehnung in Breitendifferenz (Amplitude) gebracht; dazu war im Osten die 25° 20′ in Amplitude haltende russische Breitengradmessung gekommen. Jedoch fehlte es zu dieser Zeit an einer entsprechend ausgedehnten Operation zwischen jenen beiden, wozu nur erst Anfänge sich fanden. Dafs auch diese jetzt im Gange ist, hat Generallieutenant *Baeyer*, der Mitarbeiter *Bessels* bei der ostpreufsischen Gradmessung, bewirkt (1861). Zunächst war nur Mitteleuropa ins Auge gefafst, aber schon nach einem Lustrum erweiterte sich die Operation zur *europäischen Gradmessung*.

Hierbei werden aufser den rein geodätischen Messungen nicht nur Breiten-, sondern auch geographische Längen- und Azimutmessungen vorgenommen — jene haben durch die Verwendung der elektrischen Telegraphie eine hinlängliche Genauigkeit gewonnen, um neben den Breitenmessungen gleichwertige Elemente der Untersuchung zu bilden, und die Azimutmessungen geben für Spezialstudien einen wertvollen Ersatz der Längenbestimmungen. Je genauer sich die astronomischen Messungen ausführen lassen werden, um so tiefer wird man auch ins Detail eindringen können.

Nächstdem werden die Schwerkraft und die Meereshöhe (durch präzise geometrische Nivellements) an vielen Orten gemessen, wodurch Anhaltspunkte einesteils für die Erforschung von Ursachen lokaler Lotanziehungen, andernteils für die etwa eintretende allmähliche Hebung oder Senkung der Kontinente und für sonstige Verschiebung der Massen der Erde gewonnen werden.

Ein besonders hervorragendes Glied der europäischen Gradmessung bildet die Längengradmessung auf dem 52. Breitenparallel, die sich vom Ural bis zur Westspitze Irlands über 68° 31′ Längenunterschied erstreckt. Sie wurde bereits 1857 von dem Direktor der Sternwarte Pulkowa bei Petersburg, *W. Struve*, entworfen und kann jetzt als beendet betrachtet werden. (Vergl. *Petermanns Mitteilungen* 1873 S. 332.)

Alle drei Jahre in der Regel vereinigen sich die Gradmessungs-

kommissare der beteiligten Staaten zu einer Konferenz; alle Jahre jedoch publiziert das königlich preufsische geodätische Institut, zugleich Zentralbureau der Gradmessung, einen Bericht über die Fortschritte der Arbeiten unter dem Titel: *Generalbericht über die europäische Gradmessung.* (In 4°. Berlin, Verlag von *G. Reimer.*) Derselbe ist meist kombiniert mit den *Berichten über die Verhandlungen der allgemeinen Konferenz.*

Die Ergebnisse der Messungen sollen das Mittel bieten, zu erkennen, wie im allgemeinen die Geoidfläche für Europa von einem Rotationsellipsoid abweicht. Für Einzelheiten sind Operationen nötig, bei denen die astronomisch bestimmten Punkte weit dichter liegen, als sonst (nämlich in nur 1 bis 2 Meilen Abstand gegen 10 Meilen und mehr im andern Falle). Eine derartige Untersuchung hat das genannte geodätische Institut für den Harz in Arbeit.

Wie schwierig und mühsam es ist, den Charakter der Geoidfläche zu studieren, dies zeigt unter andern die englische Landesvermessung (vergl. das Hauptwerk *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 712 ff.), deren Ergebnis in dieser Hinsicht trotz immerhin zahlreicher astronomischer Stationen (30 bis 40) mehr das war, eine Anzahl wesentlich lokaler Lotablenkungen gegen ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, das bei $\frac{1}{280,4}$ Abplattung vom allgemeinen Erdellipsoid wenig abweicht, kennen zu lehren und also die Brauchbarkeit desselben zur Angabe der allgemeinen Krümmungsverhältnisse auch für England zu bestätigen, als das, spezielle Angaben über Krümmungsverhältnisse wegen des rasch wechselnden Charakters derselben zu gestatten. Dergleichen ist auch anderwärts hervorgetreten, zuerst vielleicht bei der ostpreufsischen Gradmessung (1838; vergl. *Abhandlungen* von *F. W. Bessel*, herausgegeben von *Engelmann.* Band 3, Leipzig 1876; S. 135).

Ob man, wie für England geschehen, ein möglichst anschliefsendes *Referenzellipsoid* für Europa berechnen wird, lassen wir dahingestellt. Wahrscheinlich wird das *Bessel*sche Ellipsoid vollkommen genügen, um als Ausgang der Spezialstudien über die Geoidfläche zu dienen. Die Abweichungen von der Form des Rotationsellipsoids haben zufolge ihrer Entstehung so wenig mit der Gestalt irgend einer einfachen Fläche zu thun, dafs man auch schwerlich durch die Wahl einer andern Form, wie eines dreiaxigen Ellipsoids z. B., einen erheblichen Gewinn in der Darstellung der Krümmungsverhältnisse erzielen dürfte.

Nächst Europa ist der englische Teil von Ostindien im Laufe dieses Jahrhunderts bis in die Gegenwart mit umfassenden Ver-

messungsarbeiten bedacht worden (vergl. *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft* 1873. Band 8, S. 14ff.); auch auf den im niederländischen Besitz befindlichen Inseln werden seit jüngster Zeit solche Messungen ausgeführt, welche die Kenntnis der Erdgestalt im allgemeinen fördern werden. Derartige Arbeiten sind ferner seit einigen Decennien in den Vereinigten Staaten Nordamerikas an den Küsten und jetzt auch im Innern im Gange; ebenso in Ägypten, Algier, Chile. In Brasilien ist eine bedeutende Längen- und Breitengradmessung in Vorbereitung (9 bis 10 Längengrade in 23° südlicher Breite, 35 Breitengrade in 10° Länge westlich von Rio Janeiro).

Einer durch ihre Ergebnisse interessanten Operation im Kaukasus wird in dem Generalbericht über die europäische Gradmessung von 1871 (publiziert 1872) S. 49ff. gedacht. Danach ist unter andern für 2 noch nicht 1 Breitengrad von einander abstehende Punkte 54″ Lotablenkungsdifferenz beobachtet. (Vergl. auch *Petermanns Mitteilungen* 1862 Band 10, S. 365.)

Man hat sogar daran gedacht, Nordpolexpeditionen für Gradmessungszwecke nutzbar zu machen.

Börgen und *Copeland* maſsen 1870 an der Ostküste Grönlands einen 40 Minuten langen Bogen geodätisch, um die Möglichkeit genauer Winkelmessungen in höheren Breiten zu konstatieren. Die Breiten der Endpunkte wurden nur aus Sonnenhöhen abgeleitet, da die Operation eine blose Rekognoszierung sein sollte. Vergl. S. 19 der Schrift *Zweite deutsche Nordpolarfahrt*; 1869—70. Berlin 1871. (Das Hauptwerk über diese Expedition war dem Verfasser nicht zur Hand.)

Hiernach ist das Interesse für Gradmessungen hinreichend rege, um von dieser Seite her eine reiche Förderung der Kenntnis der Erdgestalt erwarten zu können. Man darf auch hoffen, daſs die so sehr wichtigen Messungen der Schwerkraft, welche nach den glänzenden Operationen in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts jetzt mehr gelegentlich ausgeführt worden sind, wieder in systematischer Weise aufgenommen werden werden. Durch sie ist mit verhältnismäſsig wenig Kosten weit mehr als mit Gradmessungen für die allgemeine Kenntnis des Geoids zu erlangen, ja sie sind zum Teil durch diese gar nicht zu ersetzen, weil sie gröſserer geographischer Verbreitung fähig sind.

Die Schweremessungen gestatten auch die Abstände des Geoids vom mittleren Rotationsellipsoide zu schätzen; wir müssen aber bemerken, daſs die bezüglichen Rechnungen nicht so einfach sind, als man oft glaubt und daſs sie nicht immer richtig angestellt worden sind. Korrekte Formeln gab *Stokes* a. a. O.

Von sehr untergeordneter Bedeutung wird es dereinst sein, wenn die Kenntnisse über das Geoid sich entsprechend vermehrt haben

werden, ein solches abgeplattetes Ellipsoid abzuleiten, das bei gleichem Volumen sich jenem möglichst anschliefst. Weit wichtiger ist es, Schlüsse auf die Massenlagerung im Erdinnern zu versuchen, wobei man allerdings der Schwierigkeit begegnet, dafs bis zu gewissem Grade die Gestalt und Lagerung der Niveauflächen von der Massenanordnung unabhängig ist (z. B. geben gewisse homogene Kugelschalen verschiedener Dicke dieselben Niveauflächen aufserhalb). Hierdurch werden aber keineswegs alle Schlüsse vereitelt.

Die Gradmessungsarbeiten und Schweremessungen, welche nur sehr allmählich ausgeführt werden können, setzen infolge dessen eine ausreichende Konstanz der Niveauflächen voraus. Im allgemeinen nimmt man jetzt an, dafs eine solche in hohem Grade in der That vorhanden ist. Zwar sind die Massen der Erde nicht in völlig relativer Ruhe, aber theoretische Untersuchungen haben gezeigt, dafs Veränderungen in der Lage der Erdaxe nicht zu befürchten sind und nur lokale Veränderungen der Lotrichtungen entstehen. Dafs auch dieser Umstand von den Gelehrten fortdauernd im Auge behalten wird, ist schon angedeutet worden.

§ 5. **Übersicht des Ganges der Entwicklung der Theorieen im vorliegenden Buche.** Eine streng logische Darstellung müfste mit dem beginnen, was geeignet ist, am eingehendsten die Erdgestalt zu definieren und im ganzen zu erkennen: den einfachsten Sätzen der Potentialtheorie und den Schweremessungen. Wir zogen es indessen vor, um das Rein-Mathematische zunächst zu erledigen, mit der Theorie der Gradmessungen auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoide zu beginnen und daran die geometrische Bestimmung von geoidischen Abweichungen zu knüpfen.

Die Formeln für Dreiecksnetze und die Verbindung geodätischer und astronomischer Beobachtungen sind direkt fürs abgeplattete Rotationsellipsoid aufgestellt. Die Voraussetzung beliebiger Oberflächenform ist einesteils insofern ohne Wert, als man immer nach *Bessels* Vorgang (1837) sich die Messungen auf den Niveauflächen der Erde am bequemsten auf ein solches Ellipsoid reduziert denken wird; andernteils aber dürfte die rasche Veränderung der Krümmung der Niveauflächen, wie *Bessel* ebenfalls bemerkte, der Konvergenz der Reihenentwicklungen, welche für jene Formeln nötig sind, sehr hinderlich werden — ja diese existiert streng genommen gar nicht, da in den Krümmungen sogar Diskontinuitäten auftreten, wie *H. Bruns* (1876) gezeigt hat. Auf Formeln fürs dreiaxige Ellipsoid ist, da dessen Annahme als mittlerer Repräsentant des Geoids schwerlich Aussicht hat, gar nicht eingegangen.

Der zweite Teil ist bestimmt, die Lücken, welche die rein geo-

metrische Behandlung des Problems der Definition und Bestimmung der Erdgestalt läfst, durch Einführung der Potentialtheorie und die sich anschliefsende Behandlung der Schweremessungen auszufüllen, einige Andeutungen über die Ausbeutung gewisser Angaben der Astronomie und der Lehren der Mechanik über die Rotation der Körper und dergl. zu bringen, sowie die Methode der Untersuchung der Geoidgestalt durch Zenithdistanzmessungen und im Anschlufs daran die terrestrische Refraktion zu behandeln.

---

3. Kapitel.

Allgemeine mathematische Notizen, insbesondere Reihenentwicklungen.

(Mit Benutzung von *Schlömilch,* Kompendium der höheren Analysis Band 1 und *Hattendorff,* Algebraische Analysis, sowie *Hattendorff,* Höhere Analysis).

§ 1. **Konvergenzbedingungen.** Eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern konvergiert (hat eine bestimmte Summe), wenn von einer Stelle an die Glieder dergestalt kleiner werden, dafs

$$\frac{\text{das folgende Glied}}{\text{das vorhergehende Glied}} < \varkappa; \quad \varkappa \text{ ein echter Bruch.}$$

Bezeichnet man die Glieder mit u_1, u_2, $u_3 \ldots$ und ist nun

$$u_{i+1} < \varkappa u_i, \quad u_{i+2} < \varkappa u_{i+1}, \ldots,$$

so ist der Rest der Entwicklung $(u_1 + u_2 + \cdots + u_{i-1})$ gleich

$$u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots \text{ d. i.}$$

$$= u_i \left(1 + \frac{u_{i+1}}{u_i} + \frac{u_{i+1}}{u_i}\frac{u_{i+2}}{u_{i+1}} + \frac{u_{i+1}}{u_i}\frac{u_{i+2}}{u_{i+1}}\frac{u_{i+3}}{u_{i+2}} + \cdots\right);$$

daher ist also der Rest

$$u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots < u_i\,(1 + \varkappa + \varkappa^2 + \varkappa^3 + \cdots)\,.$$

Es ist aber die Parenthese rechter Hand gleich $1 : (1 - \varkappa)$, mithin die Summe aller Glieder von u_i ab bis ins Unendliche $< u_i : (1 - \varkappa)$; und dieser Rest kann beliebig klein gemacht werden, wenn man den Index i hinreichend grofs annimmt.

An Stelle der gegebnen Reihe ist es oftmals vorteilhaft, eine Reihe zu betrachten, deren Summe augenscheinlich gröfser ist, weil ihre Glieder sämtlich gröfser sind, als in der ursprünglichen Reihe — die aber eine einfachere Form hat, wie diese letztere.

Eine unendliche Reihe mit positiven und negativen Gliedern konvergiert, wenn sie auch mit positiv gesetzten Gliedern konvergiert oder kurz gesagt: wenn sie absolut (genommen) konvergiert.

Werden von u_i an bei alternierenden Vorzeichen die Glieder immer kleiner, so ist der Rest der Reihe gleich $u_i x$.

Absolut konvergente Reihen gestatten eine veränderte Anordnung der Glieder d. h. sie konvergieren unbedingt, nur mufs immer von einer Stelle an das oben gegebene Kriterium der Konvergenz vorhanden sein.

Man darf sie addieren und multiplizieren und das Resultat ist wieder eine absolut konvergente Reihe. Dies gilt auch für Subtraktionen, während bei Divisionen besondere Untersuchungen erforderlich sind.

Ist die Reihe eine Potenzreihe und man setzt für die Variable selbst eine Reihe, so ist dies bestimmt zulässig, wenn die Anfangsreihe und die Substitutionsreihe absolut konvergent sind und die Summe der mit positiven Gliedern genommenen Substitutionsreihe die zur Konvergenz der Anfangsreihe nötige Bedingung erfüllt. Das Resultat ist alsdann absolut konvergent.

Besondere Untersuchungen sind erforderlich, wenn die Substitution für die Variable nur bedingt konvergiert und auch, wenn bei *endlicher* Gliederzahl der Substitution darin positive und negative Terme vorkommen. Alsdann kann ein nur bedingt konvergentes Resultat entstehen.

§ 2. **Stark konvergente Reihen in der Geodäsie.** Im Folgenden haben wir es vielfach mit stark konvergenten Reihen zu thun, weil diese allein für die praktische Anwendung bequem sind. Bei Potenzreihen insbesondere beschränkt man sich auf so kleine Werte der Variablen, dafs wenige Reihenglieder genügen, und man wendet solche Methoden an, dafs eben die Beschränkung auf kleine Werte praktisch genügt.

Für alle diese Fälle ist die Operation mit den Reihen nur geringen Schwierigkeiten unterworfen, weil die allein interessanten Glieder nach Beifügung eines (in den betreffenden praktischen Fällen schliefslich zu vernachlässigenden) Restgliedes wie endliche Reihen behandelt werden können.

Wir sind daher in den meisten Fällen der Konvergenzbetrachtungen überhoben und werden auf solche, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, auch nur eingehen, wenn es unerläfslich ist.

Die Restglieder werden wir meist symbolisch durch Gl_i andeuten, wobei i die Ordnungszahl ist, welche dem Rest zukommt, insofern er wesentlich als Vielfaches der i. Potenz einer Gröfse 1. Ordnung auftritt.*)

*) Ist der Rest von der i. Ordnung, so ist die Entwicklung genau *bis auf* Glieder i. Ordnung — was zur Feststellung des Sprachgebrauchs hier bemerkt sei.

Als Maximalbetrag einer *Gröfse 1. Ordnung* setzen wir rund 0,1 fest. Die Abplattung wird damit eine Gröfse 2. Ordnung.

§ 3. **Taylors Satz.** Es ist

$$\left.\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \cdots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) \\ + \frac{(1-\vartheta)^{n-p}\, h^n}{1.2\ldots(n-1)\, p} f^{(n)}(a+\vartheta h) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

p eine beliebige positive Gröfse (für welche man oft mit Nutzen n wählt), ϑ ein nicht näher bekannter positiver echter Bruch. Das letzte Glied heifst der Rest der Reihenentwicklung. Diese Entwicklung rechter Hand gilt, wenn $f(x)$ und seine Differentialquotienten $f', f'' \ldots f^{(n)}$ innerhalb des Intervalls $x = a$ bis $x = (a+h)$ endlich und stetig sind. Um nicht noch den nächst höheren Differentialquotienten bilden zu müssen, kann man den Rest auch mittelst desjenigen berechnen, der im letzten angesetzten Glied auftritt, mufs aber alsdann von dem so gebildeten Ausdrucke wiederum das letzte Glied selbst abziehen. Der Rest heifst dann, falls man bis $f^{(n)}$ geht:

$$\frac{\frac{1}{p}(1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(a+\vartheta h) - \frac{1}{n} f^{(n)}(a)}{1.2\ldots(n-1)} h^n \,. \quad (2)$$

Speziell für $p = n$:

$$\{f^{(n)}(a+\vartheta h) - f^{(n)}(a)\} \frac{h^n}{1.2\ldots n} \,. \quad (3)$$

In manchen Fällen läfst sich der Rest der auf eine endliche Gliederzahl beschränkten konvergenten Entwicklung dadurch genauer feststellen, dafs man wie in § 1 S. 23 eine genäherte Summierung ausführt, was voraussetzt, dafs das Bildungsgesetz der Reihenglieder bekannt ist. Vielfach wird man (vergl. oben), wenn u_i das letzte Glied ist, den Rest näherungsweise setzen können gleich

$$u_i \frac{\varkappa}{1-\varkappa} \,. \quad (4)$$

Giebt eine Entwicklung nach Taylors Satz eine unendliche konvergente Reihe für $x = (a-h)$ bis $(a+h)$, so kann man durch Subtraktion der Entwicklungen für $f(a+h)$ und $f(a-h)$ die folgende stark konvergente Reihe erhalten:

$$\left.\begin{aligned} f(a+h) = f(a-h) + \frac{2h}{1} f'(a) + \frac{2h^3}{1.2.3} f'''(a) + \cdots \\ + \frac{2h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} f^{(2n+1)}(a) + \cdots \end{aligned}\right\} (5)$$

In der Reihe (1), die wir uns als unendliche konvergente Reihe denken, kann man, falls nur $(n+1)$ Glieder angeschrieben sind, auch das nächste Glied dadurch berücksichtigen, dafs man die Entwicklung

$$f^{(n)}\left(a+\frac{h}{n+1}\right)=f^{(n)}(a)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a)+\cdots \tag{6}$$

benutzt, um damit das $(n+1)^{te}$ und $(n+2)^{te}$ Glied, nämlich:

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}f^{(n+1)}(a),$$

näherungsweise in das eine Glied:

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}\left(a+\frac{h}{n+1}\right)$$

zusammenzufassen. Man hat alsdann:

$$\left.\begin{aligned}f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\cdots\\+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)\\+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}\left(a+\frac{h}{n+1}\right)\\+\text{ Glieder mit } h^{n+2} \text{ u. s. f.}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und wenn die Konvergenz eine starke ist, so giebt dies eine unter Umständen bequeme und scharfe Beurteilung des Restes der auf n Glieder angesetzten Reihe.

Addiert man die Reihen für $f(a+h)$ und $f(a-h)$, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=f(a)\\+\text{ Glieder mit } h^2, h^4\ldots\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Multipliziert man dieselben Reihen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}f(a+h)f(a-h)=f(a)^2\\+\text{ Glieder mit } h^2, h^4\ldots\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

§ 4. **Binomischer Satz.** Es ist

$$(1\pm u)^\mu=1\pm\frac{\mu}{1}u+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}u^2\pm\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}u^3+\cdots \tag{1}$$

gültig und absolut konvergent bei beliebigem μ, falls das positive $u<1$ ist.*) Im Folgenden, wo einige häufig auftretende Spezialfälle behandelt sind, bezeichnet x stets einen positiven, echten Bruch. Die Reste sind durch direkte Summierung gefunden. Man hat

*) Auf die Fälle $u=1$ nehmen wir hier und im Folgenden keine Rücksicht, wie wir überhaupt die Grenzfälle der Gültigkeit aus praktischen Gründen vernachlässigen.

$$\left.\begin{aligned}
1:(1+u) &= 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots \pm u^n \,.\, \varkappa \\
1:(1-u) &= 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \cdots + \frac{u^n}{1-u} \\
1:(1-u)^2 &= 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 + 5u^4 + \cdots + u^n \left\{\frac{n}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2}\right\}
\end{aligned}\right\}(2)$$

u positiv und < 1.

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{1+u} &= 1 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 + \cdots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n\varkappa \\
\sqrt{1-u} &= 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 - \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 - \cdots - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n\frac{\varkappa}{1-u} \\
1:\sqrt{1+u} &= 1 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{8}u^2 - \tfrac{5}{16}u^3 + \tfrac{35}{128}u^4 - \cdots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n\varkappa \\
1:\sqrt{1-u} &= 1 + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{8}u^2 + \tfrac{5}{16}u^3 + \tfrac{35}{128}u^4 + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n\frac{\varkappa}{1-u} \\
1:\sqrt{1-u}^{\,3} &= 1 + \tfrac{3}{2}u + \tfrac{15}{8}u^2 + \tfrac{35}{16}u^3 + \tfrac{315}{128}u^4 + \cdots + \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots n.2^n}u^n\frac{\varkappa}{1-\frac{2n+3}{2n+2}u}
\end{aligned}\right\}(3)$$

u positiv und < 1

Eine starke Konvergenz erfordert für alle diese Reihen kleine Werte u.

§ 5. Logarithmische und Exponentialreihen.

Man hat:

$$\left.\begin{aligned}
\log(1+u) &= M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots \pm \frac{u^n}{n}\varkappa\right\} \\
\log(1-u) &= -M\left\{u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \cdots + \frac{u^n}{n}\frac{\varkappa}{1-u}\right\}
\end{aligned}\right\}(1)$$

u positiv und < 1.

$$\log u = 2M\left\{\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \cdots + \frac{\varkappa}{n}\,\frac{(u+1)^2}{4u}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^n\right\} \quad (2)$$

$$u = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{\log u}{M}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\log u}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\log u}{M}\right)^3 + \cdots \quad (3)$$

u positiv.

M Modulus des Briggischen Logarithmensystems.

Der Rest der letzten Reihe, welche nichts anderes als die Exponentialreihe ($u = e^x$) ist, beträgt

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\log u}{M}\right)^n \varkappa \text{ für } u < 1,$$

und

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\log u}{M}\right)^n \frac{\varkappa}{1 - \frac{\log u}{(n+1)M}} \text{ für } u > 1.$$

Dabei ist aber vorausgesetzt, dafs so viele Glieder der Reihen angesetzt sind, als zur Erfüllung der Bedingung val. abs. $\log u < (n+1)M$ gehören.

Vorstehende Reihen sind absolut konvergent. Eine starke Konvergenz erfordert für die (1), dafs u klein, für (2) und (3), dafs u nahezu gleich 1 ist.

§ 6. **Reihen für Sinus, Cosinus** u. s. f. Man hat:

$$\left.\begin{aligned}\sin u &= u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} - \frac{u^7}{5040} + \frac{u^9}{362880} - \cdots \pm \frac{u^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} \mp \cdots \\ \cos u &= 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{720} + \frac{u^8}{40320} - \cdots \pm \frac{u^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} \mp \cdots\end{aligned}\right\} (1)$$

Diese Reihen gelten für jeden Wert von u, welches als Arcus zu verstehen ist. Sie sind absolut konvergent. Setzt man sie bis dahin fort, wo die Glieder abnehmen, was für $u^2 < 1$ von Anfang an der Fall ist, so ist der Rest gleich dem ersten vernachlässigten Glied mal $\varkappa$. Für $u^2 < 1$ konvergieren überdies die Reihen stets beträchtlich.

Man hat ferner:

$$\left.\begin{aligned}\tan u &= u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + \frac{62}{2835}u^9 + \cdots \\ \sec u &= 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{24}u^4 + \frac{61}{720}u^6 + \frac{277}{8064}u^8 + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\text{val. abs. } u < \frac{\pi}{2}.$$

$$\left.\begin{aligned}\cot u &= \frac{1}{u}\left\{1 - \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{45}u^4 - \frac{2}{945}u^6 - \frac{1}{4725}u^8 - \cdots\right\} \\ \csc u &= \frac{1}{u}\left\{1 + \frac{1}{6}u^2 + \frac{7}{360}u^4 + \frac{31}{15120}u^6 + \frac{127}{604800}u^8 + \cdots\right\}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\text{val. abs. } u < \pi.$$

Die Koefficienten, welche in diesen absolut konvergenten Reihen vorkommen, lassen sich nicht bequem allgemein hinschreiben. Für unsere Zwecke genügen die angesetzten Glieder und die Thatsache, dafs bei den Reihen (2) der Rest angenähert gleich ist dem letzten Gliede mal $\frac{4u^2\varkappa}{\pi^2 - 4u^2}$ und bei den Reihen (3) angenähert gleich dem letzten Gliede mal $\frac{u^2\varkappa}{\pi^2 - u^2}$. Dies findet man mittelst der Bemerkung, dafs die Koefficienten der Reihenglieder (2), je weiter man die Reihen fortsetzt, mehr und mehr im Verhältnis $\pi^2 : 4$ abnehmen, die der (3) im Verhältnis $\pi^2 : 1$.

Die Konvergenz der Reihen (3) und noch mehr der Reihen (2) ist weit geringer, als diejenige der (1). Um mittelst der in den Reihen (2) angesetzten Glieder den Wert von $\tan u$ oder $\sec u$ auf 0,00000 00001 des Betrags genau zu erhalten, mufs man sich auf absolute Werte von u beschränken, die 0,1 nicht wesentlich überschreiten.

§ 7. Reihen für Arcus sinus und Arcus tangens, und logarithmische Reihen für Sinus, Arcus sinus u. s. f.

$$\left.\begin{aligned}\text{arc sin } u &= u + \frac{u^3}{6} + \frac{3u^5}{40} + \frac{5u^7}{112} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\,\frac{u^{2n-1}}{2n-1}\,\frac{\varkappa}{1-u^2}\\ \text{arc tan } u &= u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9}\cdots \pm \frac{u^n}{n}\,\varkappa\end{aligned}\right\}(1)$$

val. abs. $u < 1$.

Setzt man hierin $u = \sin v$ bezw. $u = \tan v$ und schreibt dann für v wieder u, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}u &= \sin u + \frac{\sin^3 u}{6} + \frac{3\sin^5 u}{40} + \frac{5\sin^7 u}{112} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\,\frac{\sin^{2n-1}u}{2n-1}\,\frac{\varkappa}{\cos^2 u}\\ &\qquad \text{val. abs. } u < \frac{\pi}{2};\\ u &= \tan u - \frac{1}{3}\tan^3 u + \frac{1}{5}\tan^5 u - \frac{1}{7}\tan^7 u + \frac{1}{9}\tan^9 u \cdots \pm \frac{\varkappa}{n}\tan^n u\\ &\qquad \text{val. abs. } u < \frac{\pi}{4}.\end{aligned}\right\}(2)$$

Diese absolut konvergenten Reihen konvergieren nur etwa ebenso stark als die (2) § 6. Man hat weiter:

$$\left.\begin{aligned}\log\sin u &= \log u - M\left\{\frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{180} + \frac{u^6}{2835} + \frac{u^8}{37800} + \cdots\right\}\\ &\qquad u \text{ positiv und } < \pi;\\ \log\tan u &= \log u + M\left\{\frac{u^2}{3} + \frac{7u^4}{90} + \frac{62u^6}{2835} + \frac{127u^8}{18900} + \cdots\right\}\\ &\qquad u \text{ positiv und } < \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Die erste dieser beiden Reihen folgt durch Integration der Reihe für $\cot u$, die zweite durch Integration der Reihe für $2\csc 2u$ (wobei zu beachten, dafs für $u = 0$ sowohl $\log\frac{\sin u}{u}$ als $\log\frac{\tan u}{u}$ gleich null wird). Da die Integration die Koefficienten verkleinert, so konvergieren die Reihen sicher im gleichen Intervall für u wie vorher (jedoch nicht weiter). Wegen des log mufs man sich aber zur Vermeidung des Imaginären auf positive u beschränken, was praktisch vollkommen ausreicht.

Der Rest der ersten Reihe ist, wenn man die Glieder bis u^n anschreibt, angenähert gleich dem letzten dieser Glieder mal $\frac{u^2\varkappa}{\pi^2 - u^2}$, derjenige der zweiten Reihe angenähert gleich dem letzten der Glieder mal $\frac{4u^2\varkappa}{\pi^2 - 4u^2}$.

Es ist ferner

$$\left.\begin{aligned}\log u &= \log\sin u + M\left\{\frac{1}{6}\sin^2 u + \frac{11}{180}\sin^4 u + \frac{191}{5670}\sin^6 u + \frac{2497}{113400}\sin^8 u + \cdots\right\}\\ &\qquad u \text{ positiv und } < \frac{\pi}{2};\\ \log u &= \log\tan u - M\left\{\frac{1}{3}\tan^2 u - \frac{13}{90}\tan^4 u + \frac{251}{2835}\tan^6 u - \frac{3551}{56700}\tan^8 u + \cdots\right\}\\ &\qquad u \text{ positiv und } < \frac{\pi}{4}.\end{aligned}\right\}(4)$$

Die erste dieser Reihen folgt aus der ersten Reihe (3) durch Substitution von $u = \sin u + \frac{1}{6}\sin^3 u + \frac{3}{40}\sin^5 u + \frac{5}{112}\sin^7 u + \cdots$, also der ersten Reihe (2). Diese letztere Reihe ist konvergent für $u^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ und da sie nur positive Glieder hat, so mufs mit Rücksicht auf die Konvergenzbedingung der ersten Reihe auch das Endergebnis für $u^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ konvergieren.

Der Rest der ersten Reihe (4) ist angenähert gleich dem letzten Gliede mal $x : (1 - \sin^2 u)$ d. i. $x \sec^2 u$.

Die zweite der Reihen (4) kann man aus der ersten derselben herstellen, indem man zunächst $\log\sin u = \log\tan u + \log\sqrt{1 - \sin^2 u}$ setzt und den letzten dieser Logarithmen nach Potenzen von $\sin^2 u$ entwickelt, sodann aber für $\sin^2 u$ substituiert $\tan^2 u : (1 + \tan^2 u) = \tan^2 u - \tan^4 u + \tan^6 u - \tan^8 u + \cdots$ Jedoch giebt diese Entwicklung nicht die Grenzen der Konvergenz vollständig, über deren Ableitung *Hattendorff*, Höhere Analysis, zu vergleichen ist. Der Rest der zweiten Reihe (4) ist angenähert gleich dem letzten Glied mal $x \tan^2 u$.

Die in den Reihen (1) bis (4) angesetzten Glieder genügen zu einer Genauigkeit auf etwa 10 Decimalstellen für val. abs. $u < \frac{1}{10}$.

§ 8. **Bestimmung der Winkeldifferenz aus der Cotangenten- bezw. Cosinusdifferenz.** Ist gegeben

$$\cot A = \cot A' + h\,, \tag{1}$$

h eine kleine Gröfse, so läfst sich mit Vorteil *Taylors* Satz anwenden, um $A - A'$ herzuleiten. Setzt man, weil $A = \operatorname{arc}\cot(\cot A' + h)$ ist, S. 25 (1) $a = \cot A'$ und $f(a) = \operatorname{arc}\cot a$, so wird

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{1}{1+a^2} = -\sin^2 A'\\ f''(a) &= 2\sin^3 A'\cos A'\\ f'''(a) &= 2\sin^4 A'(1 - 4\cos^2 A')\\ f^{IV}(a) &= 6\sin^4 A'\sin 4A' \end{aligned}$$

und daher

$$A = A' - h \sin^2 A' \left\{ 1 - h \sin A' \cos A' - \frac{1}{3} h^2 \sin^2 A' (1 - 4 \cos^2 A') \cdots \right\} \quad (2)$$

Bleibt man nun bei dem Glied mit h^3 stehen, so ist der Rest der Entwicklung, in der Formel (1) S. 25 $n = p$ angenommen, gleich

$$\frac{1}{4} h^4 \sin^4 A'' \sin 4A'', \quad (3)$$

worin A'' einem Winkel entspricht, dessen Cotangente gleich $\cot A' + \vartheta h$ ist, ϑ ein nicht näher bekannter positiver echter Bruch. Hieraus folgt

$$\sin^2 A'' = \frac{\sin^2 A'}{1 + \vartheta h \sin A' (2 \cos A' + \vartheta h \sin A')} \quad (4)$$

und man erkennt, dafs die in (2) angesetzten Glieder ausreichen, falls $(h \sin A')^4$ vernachlässigt werden kann. Denn alsdann ist sicher auch $\vartheta h \sin A'$ so klein, dafs $\sin^2 A''$ von $\sin^2 A'$ und folglich auch $(h \sin A'')^4$ von $(h \sin A')^4$ nicht merklich abweicht.

Ist gegeben

$$\cos A = \cos A' + h, \quad (5)$$

so hat man, da $A = \text{arc} \cos (\cos A' + h)$ wird, nach *Taylors* Satz für $a = \cos A'$ und $f(a) = \text{arc} \cos a$:

$$f'(a) = -(1 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sin A'}$$

$$f''(a) = -\frac{\cos A'}{\sin^3 A'}$$

$$f'''(a) = -\frac{1 + 2 \cos^2 A'}{\sin^5 A'},$$

$$f^{IV}(a) = -\frac{9 + 6 \cos^2 A'}{\sin^7 A'} \cos A'$$

und daher

$$A = A' - \frac{h}{\sin A'} \left\{ 1 + \frac{h \cos A'}{2 \sin^2 A'} + \frac{h^2 (1 + 2 \cos^2 A')}{6 \sin^4 A'} + \cdots \right\}. \quad (6)$$

Bleibt man bei h^3 stehen, so ist der Rest der Entwicklung gleich

$$-\frac{1}{8} h^4 \frac{3 + 2 \cos^2 A''}{\sin^7 A''} \cos A'', \quad (7)$$

wobei für A'' die Beziehung $\cos A'' = \cos A' + \vartheta h$ besteht, welche ergiebt:

$$\sin^2 A'' = \sin^2 A' \left(1 - \frac{\vartheta h}{\sin^2 A'} (2 \cos A' + \vartheta h)\right). \quad (8)$$

Als Bedingung der Brauchbarkeit dieser Entwicklung bis h^3 findet sich die, dafs $h : \sin^2 A'$ hinreichend klein ist, um seine 4. Potenz vernachlässigen zu können.

Vertauscht man im Vorstehenden A mit $\frac{\pi}{2} - A$, so ergeben sich Entwicklungen für $\tan A$ und $\sin A$.

§ 9. **Arcus und Gradmaſs.** Bezeichnet wie im Vorstehenden u einen Winkel in Bruchteilen des Radius, d. h. als Arcus ausgedrückt, so hat man, um u in Graden zu erhalten, die Proportion zu beachten:

$$u^0 : 360^0 = u : 2\pi,$$

also ist

$$u^0 = u \cdot \frac{180^0}{\pi} \text{ oder } u_{\text{in Graden}} = u\varrho^0, \tag{1}$$

wenn man zur Abkürzung einführt:

$$\varrho^0 = \frac{180}{\pi}. \tag{2}$$

In gleicher Weise folgt als Faktor für u zur Reduktion auf u in Minuten bezw. Sekunden:

$$\varrho' = \frac{180 \,.\, 60}{\pi}, \qquad \varrho'' = \frac{180 \,.\, 60 \,.\, 60}{\pi}. \tag{3}$$

§ 10. **Formeln für sehr kleine Winkel.** Vernachlässigt man u^5, so ist

$$\left.\begin{aligned} \sin u &= u\sqrt[3]{\cos u} + \cdots \\ \tan u &= u\sqrt[3]{\sec^2 u} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Um den Fehler dieser nach *Maskelyne* benannten*) Formeln zu erkennen, bildet man mittelst des binomischen Satzes:

$$\sqrt[3]{\cos u} = 1 - \frac{u^2}{6} - \frac{u^4}{72} - \cdots$$

$$\sqrt[3]{\sec^2 u} = 1 + \frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{9} + \cdots$$

und multipliziert dies mit u. Die Vergleichung mit den Reihen für $\sin u$ und $\tan u$ zeigt, daſs die Vernachlässigung von u^5 in der 1. Formel (1) einen etwas gröſsern, diejenige in der 2. Formel (1) dagegen einen etwas kleinern Fehler giebt, als die Abkürzung der Reihen auf die ersten beiden Glieder.

Für die praktische Rechnung können die Formeln (1) und ähnliche, wie $\log\sec\frac{1}{2}u = \frac{1}{4}\log\sec u + \cdots$, den Reihen oft vorzuziehen sein, denn sie erfordern statt der Berechnung eines Gliedes nur das Aufschlagen eines Cosinus u. s. f. Zu gleichem Zwecke wie

*) *Hoüel*, Fünfstellige Logarithmen S. XXXIX.

die (1) dienen die in mehreren Logarithmentafeln aufgeführten Hilfslogarithmen

$$\left.\begin{array}{l} S = \log \frac{\sin u}{u \varrho''} \\ T = \log \frac{\tan u}{u \varrho''} . \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die Tafeln 7ziffriger Logarithmen von *Bruhns* und *Schrön* geben S und T 8ziffrig. *Bremikers* Tafeln enthalten die S ebenfalls, aber nur 7stellig. Die *Schrön*schen Tafeln haben insbesondere den Vorteil, dafs unter andern als Argument zu S nicht blofs der Winkel in Sekunden, sondern auch der log sin gegeben ist.

In gleicher Weise setzt man häufig sehr vorteilhaft bei Auswertung von $\sqrt{1 - v^2}$ und $\sqrt{1 + v^2}$, wenn v klein genug ist, für v bezw. $\sin u$ und $\tan u$ und hat dann

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{1 - v^2} = \cos u \text{ für } v = \sin u \\ \sqrt{1 + v^2} = \sec u \text{ für } v = \tan u . \end{array}\right\} \quad (3)$$

§ 11. **Interpolation.** Ist eine Tafel der Funktionswerte $f(x)$ für in gleichmäfsigem Intervall fortschreitende Werte der Variablen x, insbesondere für $x = a$, $(a + \omega)$, $(a + 2\omega)$, ... gegeben, und es ist $f(a + n\omega)$, $n < 1$, zu suchen, so bildet man erste, zweite, dritte Differenzen u. s. w. nach dem Schema:

	1. Differenzen	2. Differenzen	3. Differenzen
$f(a)$	$\Delta_0 = f(a+\omega) - f(a)$	$\Delta_0'' = \Delta_1' - \Delta_0'$	$\Delta_0''' = \Delta_1'' - \Delta_0''$
$f(a+\omega)$	$\Delta_1 = f(a+2\omega) - f(a+\omega)$	$\Delta_1'' = \Delta_2' - \Delta_1'$	.
$f(a+2\omega)$	$\Delta_2 = f(a+3\omega) - f(a+2\omega)$	.	
$f(a+3\omega)$	.		
.			

und hat dann zur Berechnung von $f(a + n\omega)$ die nachstehende *Newton*sche Interpolationsformel (welche für unsere Zwecke ausreicht):

$$f(a + n\omega) = f(a) + \frac{n}{1} \Delta_0' + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \Delta_0'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \Delta_0''' + \cdots \quad (1)$$

Dieselbe findet man leicht, wenn man von *Taylors* Reihe ausgeht:

$$f(a + n\omega) = f(a) + \frac{n\omega}{1} f'(a) + \frac{n^2\omega^2}{1 \,.\, 2} f''(a) + \cdots \quad (2)$$

und sie auf $n = 0, 1, 2 \ldots$ anwendet, mittelst der entstehenden Gleichungen aber die Differentialquotienten $f'(a)$, $f''(a) \ldots$ durch die Δ ausdrückt. Die Anwendung führt natürlich nur dann zu zuverlässigen Werten, wenn die Funktion nach *Taylors* Satz entwickelt werden kann. Über eine andere sehr vorteilhafte Formel (von *Bessel*, *Astronomische Nach-*

richten Band 2 No. 33 angegeben) nebst einer Tafel ihrer Koefficienten vergleiche S. 215 des Werkes:

Albrecht, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen u. s. w. 2. Auflage. Leipzig 1879.

Bei der Interpolation in *Logarithmentafeln* mit 10 Decimalstellen des Logarithmus genügt oft nicht die einfache Interpolation, weil die Δ'' ... noch einflufsreiche Werte haben. Alsdann kann man mittelst (1) die höheren Differenzen berücksichtigen. Meist reicht es aus, bis Δ_0'' zu gehen. Man setzt dann recht bequem:

$$f(a + n\omega) = f(a) + n\left(\Delta_0 - \frac{1-n}{2}\Delta_0''\right) + \cdots \tag{3}$$

und bemerkt leicht, dafs der Faktor von n zwischen Δ_0' und Δ_{-1}' liegt, was eine Kontrolle für das Vorzeichen des Subtrahenden dieses Faktors giebt. Anstatt (3) kann man auch die nachstehenden ebenso genauen (nämlich noch die Glieder mit h^2 enthaltenden) Formeln anwenden, die aus (7) S. 26 für $n = 1$ hervorgehen:

$$\left.\begin{aligned}
\log(a+h) &= \log a + M\frac{h}{a+\frac{h}{2}} + \cdots \\
\log\sin(a+h) &= \log\sin a + Mh\cot\left(a+\frac{h}{2}\right) + \cdots \\
\log\tan(a+h) &= \log\tan a + Mh\csc\left(a+\frac{h}{2}\right)\sec\left(a+\frac{h}{2}\right) + \cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ist zum Logarithmus die Zahl oder der Winkel zu suchen, so geben (3) und (4) eine indirekte Rechnung, welche sich für den 1. Fall in (4) durch die bequemere direkte Rechnung nach der Formel

$$a_1 + h_1 = a_1 + \frac{1}{M}(\log(a_1+h_1) - \log a_1)\sqrt{(a_1+h_1)\,a_1} + \cdots \tag{5}$$

ersetzen läfst. Diese Formel ist genau bis auf Glieder h_1^3 (excl.) und sie folgt aus (7) S. 26, wenn $f(a) = a_1$, $a = \log a_1$ genommen und $f'\left(a+\frac{h}{2}\right)$ durch $f'(a)\,f'(a+h)$ mittelst (9) ebenda ersetzt wird.

Über die bei Berechnung von Tafeln anzuwendende Interpolation siehe *Encke, Berliner Astronomisches Jahrbuch* 1852 S. 331 und *Astrand, Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft* Band 10. 1875. S. 279. Ersterer gab in seinen Abhandlungen zu den Berliner Jahrbüchern 1830—1862 überhaupt zahlreiche Winke für praktische Rechner. Diese Abhandlungen sind 1866 gesammelt erschienen unter dem Titel: *J. F. Enckes astronomische Abhandlungen.*

Die Interpolation in Tafeln vielstelliger Logarithmen behandelt u. a. *Puissant, Traité de Géodésie,* Bd. 1. (z. T. nach *Legendre*).

I. Teil.

Die mathematischen Theorieen der höhern Geodäsie.

1. Kapitel.

Das abgeplattete Rotationsellipsoid.

§ 1. Elemente der Meridianellipse. Wir bezeichnen mit

a_0 die grofse Halbaxe (in der Äquatorebene),

b_0 die kleine Halbaxe (in der Rotationsaxe).

Dann sind:

$\mathfrak{a} = \dfrac{a_0 - b_0}{a_0}$ die Abplattung,

$e^2 = \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2}$ das Quadrat der numerischen Excentricität,

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0} \\ \delta &= \frac{a_0^2 - b_0^2}{b_0^2} \\ m &= \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2 + b_0^2} \end{aligned}\right\} \text{ oft benutzte Hilfsgröfsen.}$$

Zwischen diesen fünf Gröfsen finden Relationen statt, die leicht herzustellen sind, indem man obige Gleichungen nach b_0 auflöst und die verschiedenen Ausdrücke für b_0 einander gleichsetzt:

$$b_0 = a_0 (1 - \mathfrak{a}) = a_0 \frac{1 - n}{1 + n}$$

$$b_0^2 = a_0^2 (1 - e^2)$$

$$e^2 = 2\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2$$

$$\mathfrak{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \frac{5e^8}{128} + \cdots$$

$$\mathfrak{a} = \frac{2n}{1 + n} = 2n - 2n^2 + 2n^3 - 2n^4 + \cdots$$

$$n = \frac{\mathfrak{a}}{2 - \mathfrak{a}} = \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right) + \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$e^2 = \frac{4n}{(1 + n)^2} = 4n - 8n^2 + 12n^3 - 16n^4 + \cdots$$

$$n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64} + \frac{7e^8}{128} + \cdots$$

$$\delta = \frac{e^2}{1-e^2} = e^2 + e^4 + e^6 + e^8 + \cdots$$

$$m = \frac{e^2}{2-e^2} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{8} + \frac{e^8}{16} + \cdots$$

$$m = \frac{2n}{1+n^2} = 2n - 2n^3 + 2n^5 - \cdots$$

$$m = \mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{a}^2}{2} - \frac{\mathfrak{a}^4}{4} - \frac{\mathfrak{a}^5}{4} \cdots$$

$$1 - e^2 = \frac{1-m}{1+m} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 = (1-\mathfrak{a})^2 = \frac{1}{1+\delta}.$$

Alle im Vorstehenden entwickelten Reihen sind, wie mittelst der gewöhnlichen Regeln über die Konvergenz zu ersehen ist, absolut konvergent, da n, m, $\mathfrak{a}$ und e^2 fürs Ellipsoid < 1 sind und die Reihen zum Teil sogar für noch gröfsere Werte konvergieren.

Nach *Bessel* (1841; vergleiche *Rud. Engelmann*, *Abhandlungen von F. W. Bessel.* Leipzig 1876. Band 3, S. 62) ist für das Erdellipsoid

$$n = 0{,}0016741848; \qquad \mathfrak{a} = 1 : 299{,}1528$$
$$a_0 = 3272077{,}14^t \qquad [6{,}5148235.337]$$
$$b_0 = 3261139{,}33 \qquad [6{,}5133693.539],$$

wobei die eckige Klammer den Briggischen Logarithmus andeutet. *Encke*, der im *Berliner Astronomischen Jahrbuch* von 1852 S. 322 ff. für einige Funktionen von a_0 und b_0 Tafeln giebt, setzt

$$n = 0{,}001674184767 \quad [7{,}2238033.861 - 10]. \tag{1}$$

Diesen Wert behalten wir, da er von andern Tafelberechnern meist ebenfalls angewandt ist, bei und setzen, zu Metermafs übergehend (Verwandlungslogarithmus 0,2898199.2994)

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 6377397{,}15500 \quad [6{,}8046434.637] \\ b_0 &= 6356078{,}96325 \quad [6{,}8031892.839]. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die im Hinblick auf die wirkliche Genauigkeit dieser Zahlen als Repräsentanten des mittlern Erdellipsoids sehr weit getriebene Schärfe, ist wünschenswert, insofern sie als Fundamentalzahlen auftreten, die allen Rechnungen zu grunde gelegt werden sollen und die ein bestimmtes Ellipsoid thunlichst scharf geometrisch zu kennzeichnen haben. Man erhält weiter:

$$\left.\begin{aligned} e^2 &= 0{,}006674372096 \quad [7{,}8244104.149 - 10] \\ \mathfrak{a} &= 0{,}003342773114 \quad [7{,}5241069.005 - 10] \\ m &= 0{,}003348360149 \quad [7{,}5248321.645 - 10] \\ \delta &= 0{,}006719218662 \quad [7{,}8273187.745 - 10] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$n^2 = 0{,}00000280289463 \qquad \mathfrak{n}^2 = 0{,}000011174132$$
$$n^3 = 0{,}00000000469256 \qquad \mathfrak{n}^3 = 0{,}000000037352$$
$$n^4 = 0{,}00000000000786 \qquad \mathfrak{n}^4 = 0{,}000000000125$$
$$e^4 = 0{,}000044547243 \qquad m^2 = 0{,}000011211516$$
$$e^6 = 0{,}000000297325 \qquad m^3 = 0{,}000000037540$$
$$e^8 = 0{,}000000001984 \qquad m^4 = 0{,}000000000126$$
$$e^{10} = 0{,}000000000013$$

$$2 \log (1 - \mathfrak{n}) = \log (1 - e^2) = 9{,}9970916.4046 - 10$$
$$\log \frac{2}{2 - e^2} = \log (1 + m) = 0{,}0014517.4521$$
$$\log (1 - m) = 9{,}9985433.8566 - 10$$
$$\log (1 + n) = 0{,}0007264.8124$$
$$\log (1 - n) = 9{,}9992723.0147 - 10.$$

Vorstehende Zahlen sind einerseits mit Anwendung des *Thesaurus logarithmorum completus* von *G. Vega* (Leipzig 1794) berechnet, andrerseits zur Kontrolle durch direkte abgekürzte Multiplikation und Division und mit teilweiser Benutzung der Rechenmaschine von *Thomas*; die letzten 11ziffrigen Logarithmen sind direkt durch Reihenentwicklung gefunden worden. *Diese Zahlen sind im Folgenden stets zu grunde gelegt.*

Wir fügen hier noch bei die Zentriwinkel, welche zu Arcus 1 gehören (S. 32):

$$\varrho'' = 206264{,}806247 \qquad [5{,}3144251.332]$$
$$\varrho' = 3437{,}74677078 \qquad [3{,}5362738.828]$$
$$\varrho^0 = 57{,}2957795131 \qquad [1{,}7581226.324],$$

sowie den Zahlwert für den Modulus des Briggischen Logarithmensystems:

$$M = 0{,}4342944819 \qquad [9{,}6377843.113 - 10].$$

§ 2. **Koordinaten in der Meridianellipse.** Wir zählen vom Mittelpunkt M aus auf der grofsen Axe und kleinen Axe die rechtwinkligen Koordinaten x bezw. z, Fig. 1, und haben alsdann bekanntlich

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{b_0^2} = 1.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch die Substitutionen

$$x = a_0 \cos \beta \qquad z = b_0 \sin \beta, \tag{1}$$

deren unabhängige Variable β *reduzierte Breite* heifst.*) Sie entsprechen

*) Nach *Puissant, Traité de Géodésie,* ist der Ausdruck von *Legendre.*

der bekannten geometrischen Konstruktion aus umschriebenem und eingeschriebenem Kreis. Die Lage eines Punktes P ist durch β vollständig gegeben; gewöhnlich dient aber die *geographische Breite* B zur Bezeichnung derselben.

Fig. 1.

Um die Beziehung der letzteren zu x, z und β zu finden, verschieben wir P unendlich wenig in Richtung wachsender B nach P'. In dem dadurch entstehenden unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse das als geradlinig zu betrachtende Bogenelement dM der Ellipse ist und dessen Kathetenlängen die absoluten Werte $-dx$ und dz haben, ist der Winkel bei P' gleich B bis auf einen unendlich kleinen Fehler, der gegen B verschwindet. Man hat nun

$$\tan B = -\frac{dx}{dz}.$$

Aus obigen Formeln für x und z folgt aber andrerseits:

$$-dx = a_0 \sin\beta\, d\beta \qquad dz = b_0 \cos\beta\, d\beta;$$

setzt man dies ein und berücksichtigt den Wert von $a_0 : b_0$ nach § 1 S. 37, so folgt

$$\tan\beta = \sqrt{1-e^2}\tan B. \tag{2}$$

Eliminiert man hiermit $\tan\beta$ aus den goniometrischen Formeln

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \qquad \sin\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$$

und multipliziert sodann rechter Hand Zähler und Nenner mit $\cos B$, so wird

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta &= \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = \frac{\cos B}{W}\\ \sin\beta &= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B}{W},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei gesetzt ist:

$$W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B}. \tag{4}$$

Durch Auflösung nach $\sin B$ und $\cos B$ folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned}\cos B &= \frac{\sqrt{1-e^2}\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}} = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos\beta}{w}\\ \sin B &= \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}} = \frac{\sin\beta}{w}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

sowie
$$Ww = \sqrt{1 - e^2} \tag{6}$$
$$w = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}. \tag{7}$$

Aufserdem erhält man für x und z durch Substitution der letztgefundenen Werte für $\cos \beta$ und $\sin \beta$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a_0 \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a_0 \cos B}{W} \\ z &= \frac{a_0 (1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a_0 (1 - e^2) \sin B}{W}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nach diesen Formeln kann man x und z nicht für die ganze Ellipse berechnen, sondern immer nur für eine Hälfte auf einer Seite der kleinen Axe, weil B nicht, wie es die Formel $\tan B = -dx : dz$ fordert, von 0° bis $\pm$ 180° gezählt wird, sondern nur bis $\pm$ 90°. Es kommt aber in der That nur die eine Hälfte in betracht.

Der Abstand MK' des Durchschnittspunktes der Normalen von P mit der Rotationsaxe ist gleich $(x \tan B - z)$; also ist auch

$$MK' = \frac{a_0 e^2 \sin B}{W} = \frac{a_0 e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \sin \beta. \tag{9}$$

Dieser Abstand beträgt demnach im Maximum gegen 43^{km}.

§ 3. **Verwandlung der geographischen Breite in reduzierte und umgekehrt.** Es ist

$$\frac{\tan \beta}{\tan B} = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1 - n}{1 + n}. \tag{1}$$

Hiermit kann man B in β verwandeln und umgekehrt. Man hat z. B. für

$$B = 52^0\, 30'\, 16{,}7''$$

$\log \tan B = 0{,}1150923.1$	$0{,}1150923.336$
$\log \sqrt{1 - e^2} = 9{,}9985458.2 - 10$	$9{,}9985458.202 - 10$
$\log \tan \beta = 0{,}1136381.3$	$0{,}1136381.538$
$\beta = 52^0\, 24'\, 43{,}01''$	$52^0\, 24'\, 43{,}01144''$.

Die erste Rechnung ist mit 7ziffrigen Logarithmen geführt, die achte Decimalstelle der Proportionalteile aber zur Erhöhung der Sicherheit beigeschrieben. Dadurch wird $\log \tan \beta$ höchstens auf $^1/_2$ Einheit der siebenten Decimale unsicher und β nicht mehr als 0,02″ fehlerhaft. Die zweite Rechnung mit 10 Decimalen ist nicht entsprechend genau, weil hier die 10. Stelle nicht so scharf bestimmt ist als dort die 7. Stelle.*)

*) Nach *Bremikers* Vorrede zu seiner Ausgabe von *Vegas* 7ziffrigen Logarithmen ist zwar die 10. Decimale der Logarithmen der Zahlen im *Thes. log.* sicher, aber nicht die der trigonometrischen Funktionen, wo Fehler bis zu 4 Einheiten vorkommen.

Um mittelst 7ziffriger Logarithmen eine gröfsere Schärfe als oben zu erreichen, hat man Formeln für $(B - \beta)$ aufgestellt, deren wichtigste wir hier ableiten. Aus (1) folgt durch Auflösung nach n:

$$n = \frac{\tan B - \tan \beta}{\tan B + \tan \beta} = \frac{\sin (B - \beta)}{\sin (B + \beta)}. \tag{2}$$

Für den Augenblick $B - \beta = u$ gesetzt, folgt mit Benutzung der Relation $B + \beta = 2B - u$

$$\sin u = n \sin (2B - u). \tag{3}$$

Wenn man rechts den Sinus auflöst und $\sin u$ und $\cos u$ nach Potenzen von u entwickelt, findet man leicht eine Reihe für u. Wir schlagen indessen einen andern noch oft zu betretenden Weg ein, nämlich den der Einführung des Imaginären.

Sei $i = \sqrt{-1}$ und ε die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist*)

$$\varepsilon^{iu} - \varepsilon^{-iu} = n\left(\varepsilon^{2iB - iu} - \varepsilon^{-2iB + iu}\right).$$

Multipliziert man mit ε^{iu} und reduziert auf ε^{2iu}, so wird

$$2iu = \log \text{nat}\,(1 + n\varepsilon^{2iB}) - \log \text{nat}\,(1 + n\varepsilon^{-2iB}).$$

Beide Logarithmen verwandeln wir in Reihen und erhalten, da $n < 1$ ist, die konvergente Entwicklung:

$$u = n\,\frac{\varepsilon^{2iB} - \varepsilon^{-2iB}}{2i} - \frac{n^2}{2}\,\frac{\varepsilon^{4iB} - \varepsilon^{-4iB}}{2i} + \frac{n^3}{3}\,\frac{\varepsilon^{6iB} - \varepsilon^{-6iB}}{2i} - \cdots$$

oder

$$B - \beta = n \sin 2B - \frac{n^2}{2} \sin 4B + \frac{n^3}{3} \sin 6B - \frac{n^4}{4} \sin 8B + \cdots \tag{4}$$

Vorstehende Formel giebt den Arcus; für Sekunden ist rechts mit ϱ'' zu multiplizieren. Das Glied mit n^4 hat auf die 5. Decimale der Sekunden keinen Einflufs. Wir setzen daher:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sekunden}}{\beta - \acute{B}} &= [2{,}5382285.2_n] \sin 2B \\ &\quad + [9{,}76203 - 10] \sin 2B \cos 2B \\ &\quad + [6{,}51n - 10] \sin 6B + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

*)

$$\sin u = \frac{\varepsilon^{iu} - \varepsilon^{-iu}}{2i},$$

$$\cos u = \frac{\varepsilon^{iu} + \varepsilon^{-iu}}{2};$$

$$\log \text{nat}\,(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots;$$

$$\text{mod}\ u < 1.$$

Vertauscht man in Gleichung (1) B mit β, n mit $(-n)$, so bleibt sie ungeändert. Man hat daher aus (4) durch dieselbe Vertauschung

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sekunden}}{B-\beta} &= [2{,}5382285.2]\sin 2\beta \\ &+ [9{,}76203-10]\sin 2\beta\cos 2\beta \\ &+ [6{,}51-10]\sin 6\beta + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Für $B = 52^0\ 30'\ 16{,}7''$ giebt (5), wobei das 1. Glied mit 8 richtigen Decimalen berechnet wurde:

$2{,}5382285.2_n$	$9{,}76203-10$	$6{,}51_n-10$
$\log\sin 2B = 9{,}9849249.3$	$9{,}98492-10$	$\log\sin 6B = 9{,}85_n-10$
$2{,}5231534.5_n$	$\log\cos 2B = 9{,}41326_n-10$	$6{,}36-10$
$-5'\ 33{,}54425''$	$9{,}16021_n-10$	$+0{,}00023''$
	$-0{,}14461''$	

$$\beta - B = -5'\ 33{,}68863'' \qquad \beta = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''.$$

Ist man im Besitz einer Tafel für W, so kann man sich der Formeln

$$\sin(B-\beta) = \frac{n\sin 2B}{2W} = \frac{n\sin 2\beta}{2w} \quad (7)$$

bedienen, um $B-\beta$ zu finden. Sie folgen leicht aus $\sin(B-\beta) = n\sin(B+\beta)$, wenn rechter Hand aufgelöst und B oder β eliminiert wird (S. 40). Von $\sin(B-\beta)$ gelangt man zu $(B-\beta)$ in Sekunden mittelst des Hilfslogarithmus S (S. 33).

$$\text{Für } B = 52^0\ 30'\ 16.7'' \text{ ist } \left.\begin{aligned} \log\sin 2B &= 9{,}9849249.3-10 \\ -\log W &= 0{,}0009142.5 \\ \log\frac{n}{2} &= 7{,}2230769.0-10 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Summa}\quad & 7{,}2089160.8 \\ \text{S für } 334'' &= 4{,}6855746.7 \\ \log(B-\beta) &= 2{,}5233414.1 \end{aligned}$$

$$B-\beta = 5'\ 33{,}68863'' \qquad \beta = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''.$$

Zur bequemen Anwendung von (7) gab *Bremiker* in seinen *Studien über höhere Geodäsie* 1869 eine Tafel für $\log\frac{B-\beta}{\sin 2B}$ mit 8 Decimalen, sodafs man nur $\log\sin 2B$ zu addieren braucht, um $B-\beta$ in Sekunden zu erhalten. Ist β gegeben, so hat man $B = 90-\beta$ als Argument der Tafel und $\sin 2\beta$ für $\sin 2B$ zu nehmen. (Im Auszug und auf 7 Decimalen bei *Albrecht* S. 198.)

Eine Tafel für $B-\beta$ auf 2 Decimalstellen giebt *Albrecht* S. 197.

§ 4. Krümmungsradius im Meridian. Bezeichnen wir denselben mit ϱ_m, so ist einerseits (Fig. 1, S. 40):

$$\varrho_m dB = dM; \tag{1}$$

andrerseits hat man aus dem unendlich kleinen Dreieck, welches an dM angrenzt:

$$dM = dz : \cos B;$$

somit ist

$$\varrho_m = \frac{dz}{d(\sin B)}.$$

Führt man hierin z nach (8) S. 41 ein, so folgt:

$$\varrho_m = \frac{a_0(1-e^2)}{W^3} = \frac{[6{,}8017351.042]}{W^3}. \tag{2}$$

Diese Formel giebt ϱ_m, falls eine Tafel für W vorliegt, sehr bequem. Die Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf den Nenner in (2) ergiebt andrerseits:

$$\varrho_m = a_0(1-e^2)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2 B + \frac{15}{8}e^4\sin^4 B + \frac{35}{16}e^6\sin^6 B + \cdots\right), \tag{3}$$

und diese Formel würde ganz geeignet sein, um ein einzelnes ϱ_m, teilweise durch direkte Multiplikation, teilweise mittelst 7ziffriger Logarithmen, auf 9 bis 10 Ziffern scharf zu berechnen. Eine Tafel für $\log \varrho_m$ auf 7 Decimalen giebt *Albrecht* S. 199.

Eine Tafel für $\log \frac{\varrho_m}{\varrho''}$ auf 8 Decimalen gab auch *Börsch* in seinen *Tafeln für geodätische Berechnungen für* $B = 35$ *bis* 71^0, (Anlage zum Programm der höhern Gewerbeschule in Kassel).

§ 5. **Berechnung von log W.** Im einzelnen Falle wird man $\log(e \sin B) = \log \sin \psi$ setzen, womit $\log W$ in $\log \cos \psi$ übergeht.

Bei Berechnung einer Tafel jedoch ist eine Reihenentwicklung vorzuziehen. Man hat sofort:

$$\log W = -\frac{1}{2}M\left(e^2\sin^2 B + \frac{e^4}{2}\sin^4 B + \frac{e^6}{3}\sin^6 B + \frac{e^8}{4}\sin^8 B + \cdots\right) \tag{1}$$

Hier hat das 3. Glied noch auf die 7. Decimalstelle, das 4. Glied auf die 10. Stelle Einfluſs.

Eine stärker konvergierende Reihe erhält man durch Einführung der Hilfsgröſse n und der trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von B. Anstatt dies für jede Potenz von $\sin B$ einzeln auszuführen, entwickeln wir allgemein mittelst Einführung von $\cos 2B = \frac{1}{2}(\varepsilon^{2iB} + \varepsilon^{-2iB})$. Man hat nach und nach, unter Beachtung der Relation $e^2 = 4n : (1+n)^2$,

$$\sqrt{1 - e^2\sin^2 B} = \sqrt{1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\cos 2B} = \frac{\sqrt{1 + 2n\cos 2B + n^2}}{1+n}$$

also

$$W = \frac{\sqrt{(1 + n\varepsilon^{2iB})(1 + n\varepsilon^{-2iB})}}{1 + n}. \tag{2}$$

Nun gilt aber für die beiden Faktoren des Radikanden die Formel (S. 42):

$$\log \text{nat}\,(1 + n\varepsilon^{\pm 2iB}) = n\varepsilon^{\pm 2iB} - \frac{n^2}{2}\varepsilon^{\pm 4iB} + \frac{n^3}{3}\varepsilon^{\pm 6iB} - \dots.$$

Addiert man die Logarithmen beider Faktoren und geht von den Exponentialgröfsen zu den Cosinus über, so wird für Brigg. Logarithmen:

$$\log W = \left\{\begin{array}{l} -\log(1+n) \\ +Mn\cos 2B \\ -M\frac{n^2}{2}\cos 4B \\ +M\frac{n^3}{3}\cos 6B - \dots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \quad[9{,}9992735.1876 - 10] \\ +[3{,}8615877.0]\cos 2B \\ +[0{,}78436_n]\cos 4B \\ +[0{,}83-3]\cos 6B + \dots . \end{array}\right\} \tag{3}$$

In den periodischen Gliedern sind die Zahlwerte der Koefficienten in Einheiten der 7. Decimalstelle des Logarithmus angesetzt. Die Logarithmen der Koefficienten zeigen, dafs bei 7stelliger Rechnung schon das Glied mit n^2 wenig Einflufs hat.

Für $B = 52^0\, 30'\, 16{,}7''$ ist

$$\begin{array}{rr} \log W = & 9{,}9992735.188 - 10 \\ - & 1882.983 \\ + & 5.270 \\ + & .005 \\ \hline \log W = & 9{,}9990857.480 - 10. \end{array}$$

Die Formel (3) hat vor (1) nicht nur den Vorzug stärkerer Konvergenz, sondern auch den bei Tabellenrechnung hervortretenden, dafs bei ihr die Periode der höhern Glieder kleiner ist, als in (3). Es sind daher z. B. nur halb so viel Werte des Gliedes mit $\cos 2B$ zu berechnen, als solche mit $\sin^2 B$. Diesem Werk ist eine Tafel für $\log W$ auf 10 Decimalstellen beigegeben von $B = 47$ bis 57^0 und eine Tafel für $\log W$ und $\log w$ auf 8 Decimalstellen, B und $\beta = 0^0$ bis 90^0. Beide Tafeln sind nach Formel (3) berechnet.

Encke rechnet (a. a. O. S. 328), wie zuerst angegeben: mittelst 10stelliger Logarithmentafeln erhält er zu $\log\sin\psi$ direkt $\log\cos\psi$, wobei zur Interpolation die abgekürzte Reihe dient: $\log\cos\psi = \log\cos\psi_0 - \tan^2\frac{\psi+\psi_0}{2} \times (\log\sin\psi - \log\sin\psi_0)$, in welcher ψ_0 das nächstgelegne runde Argument der Tafeln ist. Die Rechnung nach Formel (3) dürfte indes ebenso bequem sein, und zwar hat man, wenn die 7ziffrigen Logarithmen der Zahlen und

trigonometrischen Funktionen besonders eingebunden sind, kein weiteres Aufschreiben nötig, als für den resultierenden Wert der Glieder der Reihe selbst.

§ 6. **Rektifikation des Meridianbogens.** Dieselbe läfst sich mittelst der Formel $dM = \varrho_m dB$ bewirken, wenn ϱ_m als Funktion von B dargestellt ist. Die Integration ist ohne Reihenentwicklung nicht möglich. Um integrieren zu können, müssen in der Reihe (3) S. 44 die Sinuspotenzen in trigonometrische Funktionen der Vielfachen von B verwandelt werden. Die stärkste Konvergenz der hierbei auftretenden Koefficientenreihen giebt die Anwendung von n. Mit Rücksicht auf (2) S. 45 folgt in diesem Falle, wenn im Ausdrucke für ϱ_m für $1 - e^2$ gesetzt wird $(1-n)^2 : (1+n)^2$, ohne Schwierigkeit:

$$dM = a_0 (1-n)(1-n^2) \left\{(1 + n\varepsilon^{2iB})(1 + n\varepsilon^{-2iB})\right\}^{-\frac{3}{2}} dB. \quad (1)$$

Nun ist

$$(1+n\varepsilon^{\pm 2iB})^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} n\varepsilon^{\pm 2iB} + \frac{15}{8} n^2 \varepsilon^{\pm 4iB} - \frac{35}{16} n^3 \varepsilon^{\pm 6iB} + \frac{315}{128} n^4 \varepsilon^{\pm 8iB} - \cdots \quad (2)$$

Multipliziert man die beiden hierin enthaltenen Reihen und führt statt des Imaginären die Cosinus ein, so folgt:

$$dM = a_0 (A_0 - A_2 \cos 2B + 2A_4 \cos 4B - 3A_6 \cos 6B + 4A_8 \cos 8B - \cdots) dB \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= (1-n)(1-n^2)\left\{1 + \frac{9}{4} n^2 + \frac{225}{64} n^4 + \cdots\right\} \\
A_2 &= (1-n)(1-n^2)\left\{3n + \frac{45}{8} n^3 + \cdots\right\} \\
A_4 &= (1-n)(1-n^2)\left\{\frac{15}{8} n^2 + \frac{105}{32} n^4 + \cdots\right\} \\
A_6 &= (1-n)(1-n^2)\left\{\frac{35}{24} n^3 + \cdots\right\} \\
A_8 &= (1-n)(1-n^2)\left\{\frac{315}{256} n^4 + \cdots\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Integration giebt nunmehr für den Meridianbogen M vom Äquator bis zur Breite B:

$$M = a_0 \left(A_0 B - \frac{1}{2} A_2 \sin 2B + \frac{1}{2} A_4 \sin 4B - \frac{1}{2} A_6 \sin 6B + \frac{1}{2} A_8 \sin 8B - \cdots\right). \quad (5)$$

Subtrahiert man die Ausdrücke für 2 Werte B_1 und B_2 und setzt

$$B_2 - B_1 = \varDelta B \qquad \frac{1}{2}(B_2 + B_1) = B, \quad (6)$$

so ergiebt sich für den Meridianbogen $\varDelta M$ von B_1 bis B_2, $B_2 > B_1$, unter Anwendung der Relation $\sin \lambda B_2 - \sin \lambda B_1 = 2 \cos \lambda B \sin \frac{\lambda}{2} \varDelta B$:

$$\Delta M = a_0 \left\{ \begin{array}{l} A_0 \Delta B - A_2 \cos 2B \sin \Delta B + A_4 \cos 4B \sin 2\Delta B \\ \qquad - A_6 \cos 6B \sin 3\Delta B + A_8 \cos 8B \sin 4\Delta B - \cdots \end{array} \right\} \quad (7)$$

Hierin sind B und ΔB als Arcus zu verstehen. Ist ΔB in Sekunden gegeben, so hat man zur Berechnung des Arcus:

$$\Delta B = \frac{1}{\varrho''} (\Delta B \text{ in Sek.}) . \quad (8)$$

Die Konvergenz der vorstehenden Reihen erhellt daraus, dafs die (2) wegen $n < 1$ absolut konvergent sind, ebenso ihr Produkt. Die Integration verstärkt die Konvergenz wegen auftretender Divisoren.

§ 7. **Die Koefficienten A.** Die Konvergenz der Reihen für die A wächst, wenn man sie mit $(1 - n^2)^2$ ausmultipliziert. Es folgt damit:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{1+n} \left(1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \cdots\right) \\ A_2 &= \frac{3}{1+n} \left(n - \frac{1}{8} n^3 - \cdots\right) \\ A_4 &= \frac{15}{8(1+n)} \left(n^2 - \frac{1}{4} n^4 - \cdots\right) \\ A_6 &= \frac{35}{24(1+n)} (n^3 - \cdots) \\ A_8 &= \frac{315}{256(1+n)} (n^4 - \cdots) . \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dagegen geben Entwicklungen für M mit e^2 oder m Folgendes:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \frac{175}{16384} e^8 - \cdots \\ A_2 &= \frac{3}{4} \left(e^2 + \frac{1}{4} e^4 + \frac{15}{128} e^6 + \frac{35}{512} e^8 + \cdots\right) \\ A_4 &= \frac{15}{128} \left(e^4 + \frac{3}{4} e^6 + \frac{35}{64} e^8 + \cdots\right) \\ A_6 &= \frac{35}{1536} \left(e^6 + \frac{5}{4} e^8 + \cdots\right) \\ A_8 &= \frac{315}{65536} (e^8 + \cdots) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \left(1 - \frac{1}{16} m^2 - \frac{15}{1024} m^4 - \cdots\right) : \sqrt{1+m} \\ A_2 &= \frac{3}{2} \left(m + \frac{3}{32} m^3 + \cdots\right) : \sqrt{1+m} \\ A_4 &= \frac{15}{32} \left(m^2 + \frac{5}{16} m^4 + \cdots\right) : \sqrt{1+m} \\ A_6 &= \frac{35}{192} (m^3 + \cdots) : \sqrt{1+m} \\ A_8 &= \frac{315}{4096} (m^4 + \cdots) : \sqrt{1+m} . \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Am ungünstigsten sind die (2); auch die (3) sind weniger gut als die (1), wie mit Rücksicht auf die Beziehung m gleich nahezu $2n$, leicht zu ersehen ist.

Die Entwicklung mittelst e^2 giebt bereits *Delambre* in seinen *Méthodes analytiques* (1799) bis e^8. Formeln mit m gab *Puissant, Traité de Géodésie*, Band 1 und neuerdings *Ph. Fischer* in seinen *Untersuchungen*; *Bessel* benutzte n (*Abhandlungen* Band 3, S. 44) 1837. Die Einführung von n oder von Sinuspotenzen gewährt keine Vorteile, wie Verf. sich überzeugt hat.

§ 8. Einführung der mittlern Länge G eines Meridiangrades.

Für den Meridianquadranten wird nach (5) S. 46, indem $B = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist:

$$\text{Mer. Quadr.} = \frac{\pi}{2} a_0 A_0 . \tag{1}$$

Setzt man ihn andrerseits gleich 90 G, so hat man sofort für G die Formel:

$$G = \frac{1}{\varrho^0} a_0 A_0 = \frac{1 + \frac{1}{4} n^2 + \cdots}{1 + n} \frac{a_0}{\varrho^0} . \tag{2}$$

Für den Meridianbogen M vom Äquator bis zur Breite B folgt hiermit:

$$\left.\begin{aligned}
M = G \Big\{ & B \text{ in Graden} \\
& - \frac{3}{2} \varrho^0 \left(n - \frac{3}{8} n^3\right) \sin 2B \\
& + \frac{15}{16} \varrho^0 \left(n^2 - \frac{1}{2} n^4\right) \sin 4B \\
& - \frac{35}{48} \varrho^0 n^3 \sin 6B \\
& + \frac{315}{512} \varrho^0 n^4 \sin 8B + \cdots \Big\} \\
M = [5{,}0457946.544] & \, B \text{ in Graden} \\
& + [4{,}2038114.754_n] \sin 2B \\
& + [1{,}2234947] \sin 4B \\
& + [8{,}3382\,n - 10] \sin 6B \\
& + [5{,}49 - 10] \sin 8B + \cdots \\
M = 111120{,}6196090 & \, B \text{ in Graden} \\
& - 15988{,}63821 \sin 2B \\
& + 16{,}72995 \sin 4B \\
& - 0{,}02178 \sin 6B \\
& + 0{,}00003 \sin 8B + \cdots .
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dagegen ist für den Meridianbogen $\varDelta M$ von B_1 bis B_2:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta M = G \, \Big\{ & \varDelta B \text{ in Graden} \\
& - 3\varrho^0 \left(n - \frac{3}{8} n^3\right) \cos 2B \sin \varDelta B \\
& + \frac{15}{8} \varrho^0 \left(n^2 - \frac{1}{2} n^4\right) \cos 4B \sin 2\varDelta B \\
& - \frac{35}{24} \varrho^0 n^3 \cos 6B \sin 3\varDelta B \\
& + \frac{315}{256} \varrho^0 n^4 \cos 8B \sin 4\varDelta B + \cdots \Big\} \\
\varDelta M = [5{,}0457946.544] \, \Big\{ & \varDelta B \text{ in Graden} \\
& + [9{,}4590468.167_n - 10] \cos 2B \sin \varDelta B \\
& + [6{,}4787300 - 10] \cos 4B \sin 2\varDelta B \\
& + [3{,}5934_n - 10] \cos 6B \sin 3\varDelta B \\
& + [0{,}74_n - 10] \cos 8B \sin 4\varDelta B + \cdots \Big\} .
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

In Bezug auf die in (3) und (4) auftretenden Koefficienten der periodischen Glieder, welche Koefficienten durch Division von A_0 in A_2, $A_4 \cdots$ entstehen, ist zu bemerken, dafs wegen des kleinen Wertes von n fürs Erdellipsoid die Konvergenz nicht zweifelhaft bleibt, da A_0 abgesehen von dem sich hebenden allgemeinen Faktor aller A die Form $1 + u$ hat, wo u eine so kleine Gröfse ist, dafs der reziproke Wert von $1 + u$ jedenfalls, nach Potenzen von u geordnet, eine absolut konvergente Reihe giebt.

Die Berechnung einer Tafel nach Formel (3) kann mit 7ziffrigen Logarithmen erfolgen, wenn man aufserdem im Besitze einer 10ziffrigen direkten Tafel der Sinus ist, um für das 2. Glied $16000 \sin 2B$ bilden zu können. Eine solche Tafel von Grad zu Grad, welche ausreicht, fügte unter andern *Hoüel* seiner Tafel 5ziffriger Logarithmen bei. Die Tabelle der Meridianbögen schreitet dann zunächst von 30′ zu 30′ vor und wird durch Interpolation verfeinert. Wenn die Tafel aber nicht in sehr engem Intervall interpoliert wird, hat sie wenig praktischen Wert.

Encke geht bei Berechnung einer Tafel der Meridianbögen (a. a. O.) nicht von einer dieselben direkt gebenden Formel aus. Er berechnet vielmehr zunächst nur die Bogenlängen für 1°, welche zu den Meridiankrümmungsradien gehören, im Intervall von 30′. Durch mechanische Quadratur folgt hieraus dann die Tafel der Meridianbögen. Die *Encke*sche Tafel bezieht sich auf Toisen. Für Meter gab *Börsch* von $B = 35°$ bis $71°$ eine Tafel in den oben genannten *Tafeln für geodätische Berechnungen.*

§ 9. **Kleiner Meridianbogen.** Für den Fall, dafs der Meridianbogen eine Länge von nicht mehr als einigen Graden hat, führt man mit Vorteil den zur mittlern Breite B gehörenden Radius ϱ_m ein. Es ist nach S. 47 (7) und S. 46 (3):

$$\varDelta M = a_0 (A_0 \varDelta B - A_2 \cos 2B \sin \varDelta B + A_4 \cos 4B \sin 2\varDelta B \\ - A_6 \cos 6B \sin 3\varDelta B + A_8 \cos 8B \sin 4\varDelta B - \cdots)$$

$$\varrho_m \varDelta B = a_0 (A_0 \varDelta B - A_2 \cos 2B . \varDelta B + A_4 \cos 4B . 2 \varDelta B$$
$$- A_6 \cos 6B . 3 \varDelta B + A_8 \cos 8B . 4 \varDelta B - \cdots).$$

Hieraus folgt durch Subtraktion sofort mit Beachtung der Sinusreihe S. 28:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta M = \varrho_m \varDelta B + a_0 A_2 \cos 2B \left(\frac{\varDelta B^3}{6} - \frac{\varDelta B^5}{120} + \cdots\right) \\ - a_0 A_4 \cos 4B \left(\frac{8 \varDelta B^3}{6} - \cdots\right) + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei die weggelassenen Glieder unerheblich bleiben, wenn man ein bis zwei Zehntelmillimeter vernachlässigen kann. Es ist nämlich rund:

$$\left.\begin{aligned} a_0 A_2 &= 31977 \qquad a_0 A_6 = 0.04 \qquad A_2 = \tfrac{1}{200} \\ a_0 A_4 &= \quad 33 \qquad a_0 A_8 = 0.00006 \qquad A_4 = \tfrac{1}{200000} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und man findet leicht, dafs für

$$\varDelta B = 0{,}1 \text{ d. h. } \varDelta B_{\text{in Graden}} = 5{,}7$$

die ersten weggelassenen Teile der Glieder den Betrag von $0{,}2^{\text{mm}}$ nicht übersteigen.

Da oftmals log $\varDelta M$ verlangt wird, reduzieren wir nun darauf; die Rechnung wird für $\varDelta M$ selbst dadurch nicht komplizierter.

Wir setzen $\varDelta M = \varrho_m \varDelta B \, (1 + u)$ und beachten die Reihe für $\log (1 + u)$ S. 27. Im vorliegenden Falle ist u im Maximum nahezu $\frac{A_2}{600}$, also $\frac{1}{120000}$; man kann daher das Glied mit u^2 vernachlässigen, denn es würde die 10. Decimale des Logarithmus nicht beeinflussen. Damit wird

$$\left.\begin{aligned} \log \varDelta M = \log \left(\frac{\varrho_m \varDelta B}{\varrho''}\right) + \beta_4 \varDelta B^2 + \beta_6 \varDelta B^4 + \cdots \\ \text{für } \varDelta B \text{ in Sek.} \\ \varrho_m \text{ zur Mittelbreite } B = \tfrac{1}{2}(B_1 + B_2) \text{ gehörend,} \\ \beta_4 = \frac{a_0 \text{ Mod.}}{6 \varrho_m \varrho''^2} \left(A_2 \cos 2B - 8 A_4 \cos 4B + \cdots\right) \\ \beta_6 = - \frac{a_0 \text{ Mod.}}{120 \varrho_m \varrho''^4} (A_2 \cos 2B - \cdots) . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Für die Werte von $\log \beta_4$ und $\log \beta_6$ wird man ein Täfelchen anlegen; es genügt, die ersteren auf 5, die letzteren auf 2 Decimalstellen zu berechnen. Dabei ist es vorteilhaft, die Ausdrücke umzuformen. Zu dem Zwecke setzt man in β_4 an Stelle von ϱ_m den Wert $a_0 (A_0 - A_2 \cos 2B)$ und in β_6 einfach $a_0 A_0$. Die Fehler betragen dann nur $\frac{1}{100000}$ bezw. $\frac{1}{200}$ der betreffenden Glieder. Es wird nun

$$\beta_4 = \frac{\text{Mod.}}{6\varrho''^2}\left(\frac{A_2}{A_0}\cos 2B - 8\frac{A_4}{A_0}\cos 4B + \cdots\right) : \left(1 - \frac{A_2}{A_0}\cos 2B + \cdots\right)$$

$$\beta_6 = -\frac{\text{Mod.}}{120\varrho''^4}\left(\frac{A_2}{A_0}\cos 2B + \cdots\right).$$

Man hat aber die nachfolgenden Ausdrücke für die Quotienten der A:

$$\frac{A_2}{A_0} = 3\left(n - \frac{3}{8}n^3 + \cdots\right) \qquad \frac{A_4}{A_0} = \frac{15}{8}\left(n^2 - \frac{1}{2}n^4 + \cdots\right),$$

kann jedoch bei den ersten Gliedern dieser Reihen stehen bleiben, ohne die zehnte Decimale von $\log \varDelta M$ zu beeinflussen.

Zugleich setzen wir für den Divisor in β_4, welcher die Form $1 - u$ hat, den Faktor $1 + u + u^2 + \cdots$ und lassen das quadratische Glied weg, was im Maximum $\frac{1}{40000}$ des Wertes von β_4, d. h. beinahe eine Einheit der 10. Decimale, Fehler giebt. Hiermit findet sich unter Substitution von $\cos 4B = 2\cos^2 2B - 1$

$$\left.\begin{aligned}\beta_4 &= \frac{n\,\text{Mod.}}{2\varrho''^2}\left(\cos 2B - 7n\cos^2 2B + 5n + \cdots\right)\\ \beta_6 &= -\frac{n\,\text{Mod.}\cos 2B}{40\varrho''^4} + \cdots = -\frac{\beta_4}{20\varrho''^2} + \cdots.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Setzt man für n die Entwicklung nach e^2, so ergiebt sich

$$\beta_4 = \frac{e^2\,\text{Mod.}}{8\varrho''^2}\left(\cos 2B + 6e^2\sin^2 B - 7e^2\sin^4 B + \cdots\right), \quad (5)$$

welche Form des Koefficienten *Andrae* benutzt (*Den Danske Gradmaaling*, 3. Bd. S. 291).

Die Formel (3) giebt, wie aus obiger Entwicklung hervorgeht, die 10. Decimalstelle des $\log \varDelta M$ erst bei $\varDelta B = 0{,}1$ nicht mehr ganz scharf. Analytisch genommen vernachlässigt sie Glieder 9. und höherer Ordnung, wenn e und $\varDelta B$ als Glieder 1. Ordnung angesehen werden. Die gleiche Genauigkeit hat die Formel

$$\log \varDelta B_{\text{in Sek.}} = \log\left(\frac{\varrho''\varDelta M}{\varrho_m}\right) - \beta_4\left(\frac{\varrho''\varDelta M}{\varrho_m}\right)^2 - \beta_6\left(\frac{\varrho''\varDelta M}{\varrho_m}\right)^4 + \cdots, \quad (6)$$

welche aus Formel (3) folgt, wenn man nach $\varDelta B$ auflöst. Zunächst steht rechter Hand als Faktor von β_4 und β_6 eine Potenz von $\varDelta B$; dies kann man aber durch $\varrho''\varDelta M : \varrho_m$ ersetzen. Da nämlich in Formel (3) der Maximalbetrag des Gliedes mit β_4 35000 Einheiten der 10. Decimale ist, so ist $\varDelta B$ in Sek. $= \varrho''\varDelta M : \varrho_m$ bis auf $\frac{1}{100000}$ seines Betrages.*)

*) Ist der Fehler in der Zahl Z gleich $\frac{1}{u}Z$, so ist er in $\log Z$ gleich $\frac{\text{Mod.}}{u}$, wie die Reihenentwicklung zeigt.

Der Fehler, welcher im Gliede mit β_4 bei Formel (6) entsteht, wird daher $\frac{1}{50000}$ des Betrags. Hiernach ist die Genauigkeit von (6) wesentlich dieselbe wie von (3).

Die Berechnung von $\varDelta B$ nach Formel (6) ist eine indirekte, weil ϱ_m von $\varDelta B$ abhängt, insofern es zum Argument B gehört. Man mufs also mit einem Näherungswerte von ϱ_m die Rechnung beginnen und mit dem erhaltenen $\varDelta B$ alsdann ϱ_m und $\varDelta B$ schärfer bestimmen.

Übersichtstafel für β_4.*)

B_m	β_4	$\log \beta_4$ für Einheiten der 7. Dec.
0^0	$+ 85161 : 10^{19}$	$2,93024 - 10$
45	$+ 715$ „	$0,85443$ „
47	$- 5250$ „	$1,72018_n - 10$
48	$- 8228$ „	$1,91528_n$ „
49	$- 11196$ „	$2,04907_n$ „
50	$- 14153$ „	$2,15084_n$ „
51	$- 17094$ „	$2,23284_n$ „
52	$- 20015$ „	$2,30136_n$ „
53	$- 22914$ „	$2,36009_n$ „
54	$- 25786$ „	$2,41138_n$ „
55	$- 28627$ „	$2,45677_n$ „
56	$- 31435$ „	$2,49742_n$ „
57	$- 34206$ „	$2,53410_n$ „
90	$- 85734$ „	$2,93315_n$ „

Für $B = 45^0$ und $\varDelta B = 5^0$ giebt Formel (4) S. 49 $\log \varDelta M = 5,7447601.171$. Dagegen giebt Formel (3) des laufenden § $\log \varDelta M = 5,7447600.939 + .232 + .000$ also dasselbe. $\varDelta M = 555597,2879^m$.

Für $B = 0^0$ und $\varDelta B = 5^0$ wird ebenso beziehungsweise erhalten 5,7425852.343 und andrerseits $5,7425824.761 + 27.5925 - .0105$ d. i. dasselbe. $\varDelta M = 552821,8937^m$.

Vernachlässigt man die Glieder mit β_4 und β_6, so wird der Fehler im Maximum für $\varDelta B = 10'$ in $\varDelta M$ gleich $0,0001^m$

„ $\varDelta B = 1^0$ „ $\varDelta M$ „ $0,03^m$

„ $\varDelta B = 5,7^0$ „ $\varDelta M$ „ 5^m.

*) Kann leicht durch Interpolation spezialisiert werden.



§ 10. **Berechnung der geographischen Breite des Endpunktes eines von gegebenem Anfangspunkte ausgehenden Meridianbogens.** Wir setzen für den vom Äquator ab gerechneten Meridianbogen M die Beziehung fest:

$$\frac{M}{G\varrho^0} = \sigma. \tag{1}$$

Alsdann haben wir nach S. 48 (3) für σ die nachstehende Gleichung, worin B als Arcus zu verstehen ist:

$$\sigma = B - \frac{3}{2}\left(n - \frac{3}{8}n^3\right)\sin 2B + \frac{15}{16}n^2 \sin 4B - \frac{35}{48}n^3 \sin 6B + \cdots . \tag{2}$$

Hierin sind die Glieder mit n^4 u. s. f. vernachlässigt, da sie höchstens einige Hundertel Millimeter geben. Die Differenz $\sigma - B$, welche jetzt als Funktion von B erscheint, stellen wir nun als solche von σ dar. Da $(\sigma - B)$ augenscheinlich im Verhältnis zu B und also auch zu σ eine kleine Gröfse ist, stöfst diese Rechnung auf keine Schwierigkeit.

Zunächst bilden wir mittelst (2):

$$\sin 2\sigma = \sin 2B \cos\left\{3n \sin 2B - \frac{15}{8}n^2 \sin 4B + \cdots\right\}$$
$$- \cos 2B \sin\left\{3n \sin 2B - \frac{15}{8}n^2 \sin 4B + \cdots\right\}.$$

Indem wir die Reihen für Cosinus und Sinus beachten und konsequent n^3 u. s. f. vernachlässigen, wird hieraus:

$$\sin 2\sigma = \sin 2B - 3n \sin 2B \cos 2B - \frac{9}{2}n^2 \sin^3 2B + \frac{15}{8}n^2 \cos 2B \sin 4B \cdots . \tag{3}$$

Multiplizieren wir dies mit $\frac{3}{2}\left(n - \frac{3n^3}{8}\right)$ beiderseits und addieren Seite für Seite zu (2), so folgt:

$$\sigma + \frac{3}{2}\left(n - \frac{3n^3}{8}\right)\sin 2\sigma$$
$$= B - \frac{21}{16}n^2 \sin 4B - \frac{117}{32}n^3 \sin 2B + \frac{227}{96}n^3 \sin 6B - \cdots, \tag{4}$$

wobei zur Reduktion der in n^3 multiplizierten Glieder die Relationen

$$\sin^3 2B = \frac{3}{4}\sin 2B - \frac{1}{4}\sin 6B$$
$$\cos 2B \sin 4B = \frac{1}{2}\sin 6B + \frac{1}{2}\sin 2B$$

benutzt und Glieder mit n^4 u. s. f. vernachlässigt sind. Aus (2) folgt weiter mit Vernachlässigung von n^2 u. s. f.

$$\sin 4\sigma = \sin 4B \cos (6n \sin 2B + \cdots) - \cos 4B \sin (6n \sin 2B + \cdots)$$

also

$$\sin 4\sigma = \sin 4B - 6n \sin 2B \cos 4B + \cdots. \tag{5}$$

Multipliziert man dies mit $\frac{21}{16} n^2$ beiderseits und addiert es zu (4), so folgt ebenso genau als bisher, wenn man zugleich für $2 \sin 2B \cos 4B$ den Wert $\sin 6B - \sin 2B$ einführt und überhaupt etwas zusammenzieht:

$$\sigma + \frac{3}{2}\left(n - \frac{3n^3}{8}\right) \sin 2\sigma + \frac{21}{16} n^2 \sin 4\sigma$$

$$= B + \frac{9}{32} n^3 \sin 2B - \frac{151}{96} n^3 \sin 6B + \cdots.$$

Nimmt man die kleinen Glieder alle auf die gleiche Seite mit σ und setzt in denselben, soweit sie noch B enthalten, σ, so giebt das nur Vernachlässigungen von Gliedern mit n^4 u. s. f. Man erhält schliefslich

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{B} &= \underset{\text{in Sek.}}{\sigma} + \frac{8}{2} \varrho'' \left(n - \frac{9}{16} n^3\right) \sin 2\sigma \\ &+ \frac{21}{16} \varrho'' n^2 \sin 4\sigma \\ &+ \frac{151}{96} \varrho'' n^3 \sin 6\sigma + \cdots, \\ \underset{\text{in Sek.}}{\sigma} &= \frac{3600\, M}{G}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Man kann diese Formel auch nach der Methode der unbestimmten Koefficienten ableiten; die hier gegebene Entwicklung zeigt aber zugleich auch deutlich die Zulässigkeit des Verfahrens.

Zur Berechnung der geographischen Breite B_2 aus B_1 und der Länge $\varDelta M$ des Meridianbogens $P_1 P_2$ ist es am einfachsten, für $\varDelta B$ eine besondere Formel herzustellen. Wendet man Formel (6) auf B_1 mit σ_1 und auf B_2 mit σ_2 an und subtrahiert, so folgt, wenn man $\sigma_2 - \sigma_1$ mit $\varDelta\sigma$ und $\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1)$ mit σ bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta B} &= \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma} + 3\varrho'' \left(n - \frac{9}{16} n^3\right) \cos 2\sigma \sin \varDelta\sigma \\ &+ \frac{21}{8} \varrho'' n^2 \cos 4\sigma \sin 2\varDelta\sigma \\ &+ \frac{151}{48} \varrho'' n^3 \cos 6\sigma \sin 3\varDelta\sigma + \cdots \\ \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma} &= 3600 \frac{\varDelta M}{G}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Zur Berechnung von 2σ ist anzuwenden, mit Rücksicht darauf, dafs in (7) Glieder mit n^4 u. s. f. vernachlässigt sind:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{2\sigma_1} &= \underset{\text{in Sek.}}{2B_1} - 3\varrho'' n \sin 2B_1 + \tfrac{15}{8}\varrho'' n^2 \sin 4B_1 - \cdots \\ 2\sigma &= 2\sigma_1 + \Delta\sigma . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Diese Formeln geben für beliebige Bogenlängen ΔM die 5. Decimalstelle der Sek. im Maximum nur etwa 1 Einheit irrig.

§ 11. **Meridianbogen mittelst reduzierter Breite.** Für spätere Entwicklungen ist es wünschenswert, den Meridianbogen als Funktion der reduzierten Breite kennen zu lernen. Nach S. 40 ist wegen $dM^2 = dx^2 + dz^2$

$$dM = \sqrt{a_0^2 \sin^2\beta + b_0^2 \cos^2\beta}\, d\beta,$$

und führt man für b_0^2 den gleichwertigen Ausdruck $a_0^2(1 - e^2)$ ein, so folgt sofort

$$dM = a_0 \sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}\, d\beta. \tag{1}$$

Da es sich mit Rücksicht auf S. 47 nun alsbald zeigen wird, dafs es vorteilhaft ist, auch hier statt e^2 n einzuführen, setzen wir hierin $e^2 = 4n : (1 + n)^2$ und erhalten

$$dM = \frac{a_0}{1+n} \sqrt{1 + n^2 - 2n\cos 2\beta}\, d\beta. \tag{2}$$

Setzt man $\cos 2\beta = \frac{1}{2}(\varepsilon^{2i\beta} + \varepsilon^{-2i\beta})$, so zerfällt die Wurzelgröfse in die beiden Faktoren

$$(1 - n\varepsilon^{2i\beta})^{\frac{1}{2}} \text{ und } (1 - n\varepsilon^{-2i\beta})^{\frac{1}{2}}$$

und es ergiebt die wegen $n < 1$ konvergente Entwicklung nach dem binomischen Satz:

$$(1 - n\varepsilon^{\pm 2i\beta})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\varepsilon^{\pm 2i\beta} - \frac{n^2}{8}\varepsilon^{\pm 4i\beta} - \frac{n^3}{16}\varepsilon^{\pm 6i\beta} - \frac{5n^4}{128}\varepsilon^{\pm 8i\beta} - \cdots.$$

Die Multiplikation der Reihe mit den oberen Zeichen und der Reihe mit den unteren Zeichen führt zu:

$$dM = a_0\left(A_0 - \frac{1}{3}A_2\cos 2\beta - \frac{2}{15}A_4\cos 4\beta - \frac{3}{35}A_6\cos 6\beta - \frac{4}{63}A_8\cos 8\beta - \cdots\right)d\beta, \tag{3}$$

wo A_0 bis A_8 dieselben Gröfsen wie S. 47 sind. Dies zeigt sich ohne Mühe wenigstens insoweit, als die ersten 4 Potenzen von n in betracht kommen. Will man sich überzeugen, ob man ganz allgemein die A vor sich hat, so kann das dadurch geschehen, dafs man die

sogenannten allgemeinen Glieder vergleicht. Es hat indes hier gar keinen Wert, dies auszuführen; Verfasser hat sich aber für A_0, A_2 und A_4 von der strengen Gleichheit mit den frühern Werten überzeugt, wonach auf dasselbe Verhalten für die übrigen A zu schliefsen war.

Wir erhalten weiter für den Bogen $\varDelta M$ von β_1 bis β_2:

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta M = a_0 \left\{ \begin{array}{l} A_0 \varDelta\beta - \frac{1}{3} A_2 \cos 2\beta \sin \varDelta\beta - \frac{1}{15} A_4 \cos 4\beta \sin 2\varDelta\beta \\ \qquad - \frac{1}{35} A_6 \cos 6\beta \sin 3\varDelta\beta - \frac{1}{63} A_8 \cos 8\beta \sin 4\varDelta\beta - \cdots \end{array} \right\} \\ \varDelta\beta = \beta_2 - \beta_1 \qquad \beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1). \end{array} \right\} \quad (4)$$

Diese Reihe konvergiert rascher, als diejenige mit der geographischen Breite B und das Glied mit A_8 ist ganz überflüssig; dasjenige mit A_6 giebt auch nur 1^{mm}. Trotzdem also die Einführung von β die Konvergenz erhöht, ist doch die Anwendung der betreffenden Reihe im allgemeinen kein Vorteil, falls erst die Breiten der Endpunkte reduziert werden müssen und nicht direkt gegeben sind.

§ 12. **Querkrümmungshalbmesser.** Für zwei Punkte, welche demselben Parallelkreis angehören, schneiden sich die Normalen in *einem* Punkte K' der Rotationsaxe. Legen wir nun durch beide Normalen eine Ebene und lassen die Punkte einander näher rücken und schliefslich in *einem* Punkte P zusammenfallen, so ergiebt sich eine den Parallelkreis tangierende Vertikalebene, welche demnach im Tangentialpunkt gegen die Meridianebene rechtwinklig d. h. im Azimut 90^0 liegt. Der Krümmungsradius des unendlich kleinen an P grenzenden Bogenelements der Oberfläche in dieser Richtung ist aber die Länge der Normale PK', weil sich in K' die Normalen zweier zusammenfallender Punkte des Bogenelements schneiden, wie die vorher gegebene Darstellung erkennen läfst. Wir setzen

$$PK' = \varrho_n \tag{1}$$

und haben mit Rücksicht auf Figur 1 (S. 40) folgende Relationen für den Querkrümmungshalbmesser (Krümmungsradius im Perpendikel). Es ist

$$\varrho_n = x \sec B = \frac{a_0}{W} \tag{2}$$

$$\varrho_n = \frac{\varrho_m W^2}{(1 - e^2)}.$$

Die letzte dieser Formeln zeigt, dafs jederzeit $\varrho_n > \varrho_m$ ist d. h.

in jedem Punkt der Oberfläche ist im Meridian die Krümmung stärker als im Perpendikel.

Zur Berechnung eines einzelnen ϱ_n kann anstatt (2) auch die Formel

$$\varrho_n = a_0 \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 B + \frac{5}{16} e^6 \sin^6 B + \cdots\right) \quad (3)$$

dienen; in der Regel aber wird $\log \varrho_n$ nach der obén gegebenen Formel unter Anwendung einer Tafel für W numerisch ausgewertet. Eine Tafel für $\log \varrho_n$ auf 7 Decimalen giebt *Albrecht* S. 199, für $\log \frac{\varrho_n}{\varrho''}$ auf 8 Decimalen *Börsch* a. a. O.

§ 13. Krümmungsradius in einem beliebigen Azimut. Um den Krümmungsradius ϱ_α des an P angrenzenden Bogenelements der Durchschnittslinie der Oberfläche mit einer im Punkte P unter dem Azimut α zur Meridianebene geneigten Vertikalebene zu ermitteln, benutzt man den *Euler*schen Satz

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_m} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_n}. \quad (1)$$

Dieser Satz gilt mit angemessener Abänderung der Bedeutung von ϱ_m und ϱ_n für jede krumme Fläche, wir beschränken uns indessen darauf, ihn hier für das Rotationsellipsoid allein zu beweisen.

Irgend einen Punkt P des Rotationsellipsoids, für welchen vorstehender Satz bewiesen werden soll, nehmen wir als Anfang rechtwinkliger Koordinaten ξ, η, ζ. In der allgemeinen Gleichung vom 2. Grade, welche auch fürs Rotationsellipsoid als Repräsentant dienen kann, verschwindet dann das von den Koordinaten freie Glied, weil für ξ, η und ζ gleich null die Gleichung richtig bleiben mufs; sie lautet daher:

$$0 = 2A\xi + 2B\eta + 2C\zeta + D\xi^2 + E\eta^2 + F\zeta^2 + 2G\xi\eta + 2H\xi\zeta + 2I\eta\zeta,$$

worin $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ gegebene Koefficienten vorstellen, die von der Lage des Punktes und den Axendimensionen abhängen. Nehmen wir nun die $\xi\eta$-Ebene tangential zur Oberfläche, also die Vertikale des Punktes als ζ-Axe, so verschwinden A und B, weil die beiden Differentialquotienten $d\zeta : d\xi$ und $d\zeta : d\eta$ jetzt für ξ, η und ζ gleich null auch gleich null werden.

Legen wir aufserdem die ξ-Axe in die Meridianebene, so wird diese letztere $\xi\zeta$-Ebene und da sie auch Symmetrieebene ist, müssen G und I verschwinden, damit die Gleichung nach η rein quadratisch wird. Somit findet sich nunmehr als Gleichung der Oberfläche

$$0 = 2C\zeta + D\xi^2 + E\eta^2 + F\zeta^2 + 2H\xi\zeta.$$

In der $\xi\eta$-Ebene führen wir jetzt Polarkoordinaten ϑ und α nach den Relationen

$$\xi = \vartheta \cos\alpha \quad \eta = \vartheta \sin\alpha$$

ein. Die Gleichung geht damit nach einfacher Reduktion über in

$$\vartheta^2 = -\zeta \frac{2C + 2H\vartheta \cos\alpha + F\zeta}{D\cos^2\alpha + E\sin^2\alpha},$$

und dies ist zugleich die Gleichung der Schnittkurve der Oberfläche mit der Vertikalebene im Azimut α. Ein Kreisbogen vom Radius ϱ_α, der die Schnittkurve in P tangiert (Fig. 2), hat die Gleichung

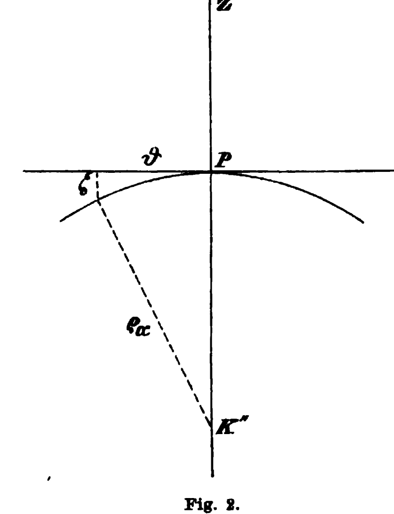


Fig. 2.

$$\vartheta^2 = \zeta(2\varrho_\alpha - \zeta);$$

wählt man also ϱ_α nach der Formel

$$\varrho_\alpha = \frac{-C}{D\cos^2\alpha + E\sin^2\alpha}, \tag{2}$$

so stimmen die Gleichungen beider Kurven bis auf Glieder der Ordnung $\vartheta\zeta$ und ζ^2 zusammen, die für unendlich kleine ϑ gegen die in ζ allein multiplizierten Glieder zu vernachlässigen sind. Der Kreisbogen fällt sonach bei dieser Wahl von ϱ_α am Punkte P näher an die Schnittkurve als bei irgend einer andern Annahme für ϱ_α. Dieser Wert heifst daher *Krümmungsradius* der Oberfläche im Azimut α.

Für $\alpha = 0^0$ und 90^0 ist bezw. $\varrho_\alpha = \varrho_m$ und ϱ_n, also

$$\varrho_m = -\frac{C}{D} \text{ und } \varrho_n = -\frac{C}{E}. \tag{3}$$

Eliminiert man mittelst dieser Relationen die Koefficienten C, D und E aus (2), so folgt Formel (1).

Diese zeigt, dafs wegen $\varrho_n > \varrho_m$, ϱ_n unter allen ϱ_α ein Maximum, ϱ_m ein Minimum ist. ϱ_m und ϱ_n heifsen daher *Hauptkrümmungsradien*.

§ 14. **Berechnung von ϱ_α.** Aus (1) des vorigen § folgt unter Einsetzung der Werte für ϱ_m und ϱ_n von S. 44 und 56:

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{W}{a_0}\left(\frac{W^2}{1-e^2}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = \frac{W}{a_0}(1 + \delta\cos^2 B\cos^2\alpha) \cdot \tag{1}$$

Führt man $\tan h = \sqrt{\delta} \cos B \cos \alpha$ ein, so ergiebt sich die bequeme Formel:

$$\left.\begin{aligned} \log \varrho_\alpha &= \log a_0 - \log W + 2 \log \cos h \\ \tan h &= \sqrt{\delta} \cos B \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Um eine Reihenentwicklung zu erhalten, ersetzen wir den Logarithmus von $(1 + \delta \cos^2 B \cos^2 \alpha)$ durch die bekannte Reihe S. 27. Schreibt man in Verfolg dessen einfach

$$\log \varrho_\alpha = \log a_0 - \log W - M\delta \cos^2 B \cos^2 \alpha + \cdots, \qquad (3)$$

so ist der Fehler nicht gröfser als 1 Einheit der 5. Decimalstelle. Für val. abs. $B > 45$ ist aber die 6. Stelle meist noch richtig.

Eine sehr ausführliche Tafel für $\log \varrho_\alpha$ auf 6 Stellen mit B und α als Argument, aber Toisenmafs, ist in *Bremikers Studien* . . . enthalten. *Albrecht* giebt S. 201 eine ebensolche für Metermafs, aber in zu weitem Intervall, um bequem interpolieren zu können. Eine Tafel für 8ziffrige Werte, die indes einige Rechnung erfordert, und auf die Entwicklung von

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_m} + \frac{1}{\varrho_n}\right)\left\{1 + \frac{\varrho_n - \varrho_m}{\varrho_n + \varrho_m} \cos 2\alpha\right\}$$

gegründet ist, fügte *Bremiker* seinen Tafeln 6ziffriger Logarithmen bei.

§ 15. **Das Krümmungsmafs.** Nach *Gaufs* bezeichnet man den reziproken Wert des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien mit dem Namen Krümmungsmafs. Wir setzen für die geographische Breite B

$$\frac{a_0^2}{\varrho_m \varrho_n} = K, \qquad (1)$$

das *Krümmungsmafs* unter der Breite B ist also

$$K : a_0^2. \qquad (2)$$

Die Substitution der Werte für ϱ_m und ϱ_n giebt

$$K = \frac{W^4}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2}{w^4}. \qquad (3)$$

Eine Tafel für $\log \sqrt{\varrho_m \varrho_n}$ auf 5 Decimalen und für K auf 7 Decimalen giebt *Albrecht* S. 199 und 213; für K auf 8 Stellen und in engem Intervall: *Sadebeck* im 3. Heft der *Rechnungsmethoden des Zentralbureaus* (als Manuskript gedruckt.)

§ 16. **Radiusvektor und geozentrische (verbesserte) Breite.** Wir bezeichnen den vom Mittelpunkt des Ellipsoids nach einem Punkt der Oberfläche gezogenen Radiusvektor MP mit r, seinen Neigungs-

winkel zur Äquatorebene, d. i. die geozentrische Breite, mit φ. Dann ist, Fig. 1 S. 40:

$$x = r\cos\varphi \qquad z = r\sin\varphi, \tag{1}$$

und je nachdem man aus diesen zwei Gleichungen r oder φ eliminiert, erhält man, unter Substitution der Ausdrücke von x und z, φ oder r als Funktionen von B:

$$\left.\begin{aligned} \tan\varphi &= (1 - e^2)\tan B = \frac{1-m}{1+m}\tan B\,; \\ r &= a_0\sqrt{\frac{1 - e^2(2-e^2)\sin^2 B}{1 - e^2\sin^2 B}} = a_0\sqrt{\frac{1+m^2}{1+m}}\sqrt{\frac{1+\frac{2m}{1+m^2}\cos 2B}{1+m\cos 2B}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Eliminiert man aus beiden Formeln B mit Benutzung der Relation $\sin^2 B = \tan^2 B : (1 + \tan^2 B)$, so wird erhalten:

$$r = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \delta\sin^2\varphi}} = \frac{a_0\sqrt{1-m}}{\sqrt{1 - m\cos 2\varphi}}. \tag{3}$$

Vergleicht man S. 41, so ist leicht zu ersehen, daſs φ von B und m gerade so abhängt, als β von B und n. Daher ist unter andern für arc $(B - \varphi)$ in konvergenter Entwicklung:

$$\underset{\text{in Sek.}}{B - \varphi} = \varrho''\left\{m\sin 2B - \frac{m^2}{2}\sin 4B + \frac{m^3}{3}\sin 6B - \cdots\right\}. \tag{4}$$

Aus den Formeln (2) und (3) erhält man folgende Entwicklungen für r:

$$\left.\begin{aligned} \log r = \left\{\log a_0\sqrt{\frac{1+m^2}{1+m}} - \frac{3Mm^2}{8} + \cdots\right\} &= 6{,}8039181.997 \\ + \frac{M}{2}\left(m - \frac{m^3}{4} + \cdots\right)\cos 2B \qquad & + [3.8615853]\cos 2B \\ - \frac{3Mm^2}{8}\cos 4B + \cdots \qquad & + [1.26148_n]\cos 4B \\ + \frac{7Mm^3}{24}\cos 6B + \cdots \qquad & + [0.677 - 2]\cos 6B + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Zahlwerte der Koefficienten sind in Einheiten der 7. Decimalstelle angesetzt.

$$r = a_0\left(1 - \frac{1}{2}\delta\sin^2\varphi + \frac{3}{8}\delta^2\sin^4\varphi - \frac{5}{16}\delta^3\sin^6\varphi + \frac{35}{128}\delta^4\sin^8\varphi\cdots\right) \tag{6}$$

$$r = a_0\sqrt{1-m}\left\{\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{2}{1}\left(\frac{m}{4}\right)^2 + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{4.3}{1.2}\left(\frac{m}{4}\right)^4 + \cdots\right) \\ &\qquad + \left(\frac{m}{2} + \frac{15m^3}{64} + \cdots\right)\cos 2\varphi \\ &\qquad + \left(\frac{3m^2}{16} + \cdots\right)\cos 4\varphi \\ &\qquad + \left(\frac{5m^3}{64} + \cdots\right)\cos 6\varphi + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Tafeln für r und $B - \varphi$ giebt *Albrecht* S. 195.

Setzt man allgemein die Polargleichung des Meridians für einen beliebigen Rotationskörper in der Form an:

$$r = a_0 (1 - \alpha_1 \sin^2 \varphi + \alpha_2 \sin^4 \varphi - \alpha_3 \sin^6 \varphi + \alpha_4 \sin^8 \varphi \cdots),$$

so bestehen im Falle der Ellipse die Beziehungen

$$2\alpha_2 = 3\alpha_1 \alpha_1; \quad 3\alpha_3 = 5\alpha_1 \alpha_2; \quad 4\alpha_4 = 7\alpha_1 \alpha_3; \quad \text{u. s. w.}$$

§ 17. **Komplanation der Oberfläche.** Ein unendlich schmaler Streifen dZ zwischen zwei Parallelkreisen im Abstande dM, auf dem Meridian gemessen, hat als Inhalt das Produkt von dM in die (als gleich zu betrachtende) Länge der Parallelbögen zwischen zwei begrenzenden Meridianbögen, deren geographischer Längenunterschied L heifsen mag. Der Radius des Parallelkreises unter der geographischen Breite B ist aber nach Fig. 1 (S. 40) gleich

$$x = a_0 \cos \beta = a_0 \cos B : W.$$

Wir erhalten somit für den erwähnten Streifen als Inhalt:

$$dZ = a_0 L \cos \beta dM = a_0 L \cos B dM : W. \tag{1}$$

Hierin hat man nach S. 44 u. 55 als Wert von dM zu setzen:

$$dM = a_0 w d\beta = \frac{a_0 (1 - e^2) dB}{W^3},$$

womit sich findet:

$$dZ = a_0^2 L \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} \cos \beta d\beta = \frac{a_0^2 (1 - e^2) L \cos B dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}. \tag{2}$$

Für die Zone vom Äquator bis zur geographischen Breite B folgt hieraus:

$$Z = a_0^2 (1 - e^2) L \int_0^{\sin B} \frac{d (\sin B)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2}.$$

Die Integration nach sin B läfst sich geschlossen bewirken, doch ist für die numerische Ausrechnung die Benutzung einer Reihenentwicklung bequemer. Da

$$(1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = 1 + 2e^2 \sin^2 B + 3e^4 \sin^4 B + 4e^6 \sin^6 B + \cdots,$$

so wird:

$$Z = a_0^2 (1 - e^2) L \sin B \left(1 + \frac{2e^2}{3} \sin^2 B + \frac{3e^4}{5} \sin^4 B + \frac{4e^6}{7} \sin^6 B + \cdots\right). \tag{3}$$

Zur scharfen Berechnung einer Zone zwischen zwei Parallelkreisen B_1 und B_2 ist es nun bequem, zunächst die Sinuspotenzen mittelst der (durch Einführung des Imaginären leicht abzuleitenden) Formeln

$$\left.\begin{aligned}\sin^3 B &= \frac{3}{4}\sin B - \frac{1}{4}\sin 3B\\ \sin^5 B &= \frac{5}{8}\sin B - \frac{5}{16}\sin 3B + \frac{1}{16}\sin 5B\\ \sin^7 B &= \frac{35}{64}\sin B - \frac{21}{64}\sin 3B + \frac{7}{64}\sin 5B - \frac{1}{64}\sin 7B\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wegzuschaffen. Man erhält alsdann nachstehenden Ausdruck für Z:

$$Z = L\,(Z_1 \sin B - Z_3 \sin 3B + Z_5 \sin 5B - Z_7 \sin 7B + \cdots) \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}Z_1 &= a_0^2\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16} - \cdots\right) &&= [13{,}6078327.476]\\ Z_3 &= a_0^2\left(\frac{e^2}{6} + \frac{e^4}{48} + \text{null} + \cdots\right) &&= [10{,}6559083]\\ Z_5 &= a_0^2\left(\frac{3e^4}{80} + \frac{e^6}{40} + \cdots\right) &&= [7{,}83407]\\ Z_7 &= a_0^2\left(\frac{e^6}{112} + \cdots\right) &&= [5{,}04]\end{aligned}\right\} \text{für } Z \text{ in Quadratmetern.} \quad (6)$$

Für eine Zone $\varDelta Z$ mit der Mittelbreite $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ und der Amplitude $\varDelta B = B_2 - B_1$ in geographischer Breite zwischen zwei Meridianebenen im geographischen Längenunterschied L ist hiernach der Inhalt:

$$\varDelta Z = 2L\left\{\begin{aligned}&Z_1 \cos B \sin \frac{1}{2}\varDelta B - Z_3 \cos 3B \sin \frac{3}{2}\varDelta B\\ &+ Z_5 \cos 5B \sin \frac{5}{2}\varDelta B - Z_7 \cos 7B \sin \frac{7}{2}\varDelta B + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hierbei ist zu setzen:

$$\log L = \log (L \text{ in Gr.}) - 1{,}7581226.324. \quad (8)$$

Vorstehende Formel giebt $\varDelta Z$ gerade noch in allen Fällen so genau, als zehnziffrige Logarithmen dies gestatten, wie (6) unmittelbar zeigt und wie auch aus (3) mit Rücksicht auf den Faktor $(1 - e^2)$ erhellt. Es erschien daher nicht nötig, e^8 zu berücksichtigen.

Setzt man in Formel (3) $B = 90^0$ und $L = \frac{\pi}{2}$ und multipliziert mit 8, so folgt:

$$\text{Oberfläche} = 4a^2\pi\left(1 - \frac{e^2}{3} - \frac{e^4}{15} - \frac{e^6}{35} - \cdots\right), \quad (9)$$

wobei das Fortschreiten der Glieder in die Augen springt. Mit *Bessels* Dimensionen erhält man hieraus übereinstimmend mit einer Rechnung nach Formel (7):

509950714,1 Qu.-Kilometer.

Die Integration von dZ mittelst β giebt nach bekannten Formeln der Integralrechnung ohne Reihenentwicklung als Oberfläche

$$2a^2\pi\left(1 + \frac{1 - e^2}{2e}\log\text{nat}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right), \tag{10}$$

wonach die Rechnung die angegebene Inhaltszahl auf alle 10 Ziffern bestätigt. Benutzt man auch hier vor der Integration eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $\sin\beta$, so folgt die stark konvergente Reihe:

$$4a_0b_0\pi\left(1 + \frac{1}{6}\delta - \frac{1}{40}\delta^2 + \frac{1}{112}\delta^3 - \cdots\right). \tag{11}$$

Eine Tafel für Z giebt *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde Band 2, S. 54.

§ 18. Mittlerer Krümmungsradius in einem Punkte. Nach S. 57 Formel (1) ist

$$\varrho_\alpha = \frac{\varrho_m\varrho_n}{\varrho_n\cos^2\alpha + \varrho_m\sin^2\alpha}.$$

Hieraus erhält man einen durchschnittlichen Wert, wenn man sich die Vertikalschnitte um den Punkt herum unendlich dicht, aber gleichförmig verteilt denkt. Setzt man demgemäfs die Anzahl der ϱ_α für die Azimutaldifferenz $d\alpha$ proportional $d\alpha$, so ist der Durchschnitt gleich

$$\int_0^{2\pi}\frac{\varrho_m\varrho_n\,d\alpha}{\varrho_n\cos^2\alpha + \varrho_m\sin^2\alpha} : \int_0^{2\pi}d\alpha$$

d. i.

$$\frac{2}{\pi}\varrho_m\varrho_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\varrho_n\cos^2\alpha + \varrho_m\sin^2\alpha}.$$

Führt man hierin $\sqrt{\frac{\varrho_m}{\varrho_n}}\tan\alpha = t$ als Variable ein, so folgt:

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\varrho_m\varrho_n}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}$$

d. i.

$$\sqrt{\varrho_m\varrho_n} \quad \text{oder} \quad \frac{a_0}{\sqrt{K}}. \tag{1}$$

Der mittlere Krümmungsradius in einem Punkte der Oberfläche ist daher der reziproke Wert der Quadratwurzel des Krümmungsmafses in diesem Punkte.

Dieser Satz gilt für jede Fläche. Ebenso der andere leicht abzuleitende, daſs der Durchschnitt aller $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ in einem Punkte gleich ist:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_m}+\frac{1}{\varrho_n}\right).$$

§ 19. **Verschiedene mittlere Krümmungsradien.** Einen Durchschnittswert des mittleren Krümmungsradius in einem Punkt in Bezug auf alle Werte von B innerhalb des Meridianquadranten erhält man durch den ähnlich wie im vorigen § zu bildenden Ausdruck

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0}{\sqrt{K}}\, dB : \int_0^{\frac{\pi}{2}} dB$$

d. i.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_0 \sqrt{1-e^2}\, dB}{1-e^2 \sin^2 B} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} dB\,.$$

Die Substitution $u = \cot B : \sqrt{1-e^2}$ im Zählerintegral führt zu dem nachstehenden Wert des *mittleren Krümmungsradius für alle Punkte eines Meridians:*

$$\frac{2a_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2}$$

d. i.

$$a_0\,. \tag{1}$$

Selbstverständlich erhält man einen andern Wert, wenn man die gleichmäſsige Verteilung nach der reduzierten Breite β oder nach der Meridianbogenlänge nimmt. Hier darauf einzugehen, scheint nicht angemessen, weil es sich dabei um mathematische Aufgaben ohne erheblich praktischen Wert handelt.

Zieht man nicht den einzelnen Meridian, sondern die Oberfläche in betracht, so hat man die Werte $a_0 : \sqrt{K}$ gleichmäſsig über die Oberfläche verteilt anzunehmen, um im eigentlichen Sinn des Wortes den mittlern Krümmungsradius der Oberfläche zu erhalten. Derselbe ist also, wobei wir uns bei der Integration auf den Oktanten beschränken können, gleich:

$$a_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dZ}{\sqrt{K}} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} dZ\,.$$

Hierin ist die differentiale Zone dZ für die geographische Längendifferenz $L = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Die weitere Rechnung wird am bequemsten mit der reduzierten Breite als der Variablen, S. 40 (2).

Führt man K nach S. 59 (3) und das Nennerintegral nach S. 63 (11) ein, so findet sich:

$$\frac{a_0 \sqrt{1-e^2} \int\limits_0^1 \sqrt{1+\delta \sin^2 \beta}^{\,3} d\,(\sin \beta)}{1 + \frac{1}{6}\delta - \frac{1}{40}\delta^2 + \frac{1}{112}\delta^3 - \cdots}.$$

Entwickelt man im Zähler nach Potenzen von $\sin \beta$ und integriert, so wird das Integral gleich $1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{40}\delta^2 - \frac{1}{112}\delta^3 + \cdots$ und man erhält schliefslich als Wert des *mittlern Krümmungsradius der Oberfläche:*

$$\left.\begin{array}{l} b_0 \left(1 + \frac{1}{3}\delta + \frac{2}{45}\delta^2 - \frac{16}{945}\delta^3 + \cdots\right) \\ \text{oder} \\ a_0 \left(1 - \frac{1}{6}e^2 + \frac{31}{360}e^4 + \frac{1697}{15120}e^6 + \cdots\right). \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die hierzu nötige Division des Nenners in den Zähler ist erlaubt, da jener die Form $(1 + u)$ hat, worin die Reihe u auch bei positiv gesetzten Gliedern sicher < 1 ist, so lange es sich nur ums Erdellipsoid handelt.

Wertet man die Integrale in geschlossener Form aus, so ergiebt sich für den mittlern Krümmungsradius der Oberfläche der Ausdruck:

$$\frac{b_0 \left\{\frac{1}{4(1-e^2)^2} + \frac{3}{8(1-e^2)} + \frac{3}{16e} \log \text{nat} \frac{1+e}{1-e}\right\}}{\frac{1}{2(1-e^2)} + \frac{1}{4e} \log \text{nat} \frac{1+e}{1-e}}.$$

Wendet man hierauf Reihenentwicklung an, so läfst sich erkennen, dafs die zweite der Reihen (2) gilt für $e < 1$. [Vergl. dazu § 18 (10) und (9)].

Ein durch Einfachheit des mathematischen Ausdrucks ausgezeichneter Durchschnitt, der den vorigen Wert näherungsweise ersetzen kann, wird erhalten, wenn man $a_0 : \sqrt{K}$ nicht mit dZ, sondern mit $x\,dB$ multipliziert, also die Verteilung gleichmäfsig nach der geographischen Breite und auf dem Parallelkreise annimmt. Es folgt hier

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_0 e}{\text{arc} \sin e} \\ \text{d. i. auch} \\ a_0 \left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{367}{15120}e^6 - \cdots\right). \end{array}\right\} \quad (3)$$

§ 20. Mittlerer Radiusvektor. Auch in Bezug auf den Radiusvektor r lassen sich verschiedene Durchschnittswerte je nach den

Voraussetzungen ableiten. Es mögen hier nur die wichtigsten erwähnt werden.

Nimmt man innerhalb der Meridianebene die r in gleichmäfsiger Verteilung in Bezug auf die geozentrische Breite φ, so wird der Durchschnitt gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,d\varphi : \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \text{ oder } \frac{2a_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\delta\sin^2\varphi}}. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck führt durch einfache Transformationen auf ein vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung. Hier benutzen wir indes die Reihenentwicklung (7) S. 60 für r nach Cosinus der Vielfachen von 2φ und erhalten, insofern alle Integrale mit den Cosinus null ergeben, als *mittlern Radiusvektor des Meridians*

$$\left.\begin{array}{l} a_0\sqrt{1-m}\left(1+\frac{3}{16}m^2+\cdots\right) \\ \text{oder auch} \\ a_0\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{7}{64}e^4-\frac{17}{256}e^6-\cdots\right). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Der mittlere Radiusvektor der Meridianellipse weicht hiernach von dem entsprechenden mittlern Krümmungsradius a_0 um Gröfsen von der Ordnung der Abplattung ab.

Nimmt man die Radienvektoren r gleichmäfsig dicht nach allen Richtungen des Raumes um das Zentrum verteilt an, so erhält man ihren Durchschnittswert aus der Formel

$$\int r\,d\omega : \int d\omega,$$

worin ω das Oberflächenelement einer zum Ellipsoid konzentrischen Kugel vom Radius 1 ist und die Integrationen sich über die Oberfläche derselben erstrecken. Da r für konstante geozentrische Breite φ denselben Wert behält, kann man unter $d\omega$ sogleich die Zone verstehen, welche auf der Kugel zwischen den Parallelkreisen φ und $\varphi + d\varphi$ liegt, d. h. man kann

$$d\omega = 2\pi\cos\varphi\,d\varphi$$

setzen. Damit wird der *mittlere Radiusvektor der Oberfläche bei gleichmäfsiger Verteilung ums Zentrum herum:*

$$\frac{a_0\int_0^1 \frac{d(\sin\varphi)}{\sqrt{1+\delta\sin^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi} = b_0 \log\text{nat} \sqrt[2e]{\frac{1+e}{1-e}}. \tag{3}$$

Entwickelt man dagegen vor der Integration in eine Reihe, so folgt derselbe gleich

$$\left.\begin{aligned} & a_0\left(1 - \frac{1}{6}\,\delta + \frac{3}{40}\,\delta^2 - \frac{5}{112}\,\delta^3 + \cdots\right) \\ \text{oder} \quad & \\ & a_0\left(1 - \frac{1}{6}\,e^2 - \frac{11}{120}\,e^4 - \frac{103}{1680}\,e^6 - \cdots\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Der im eigentlichen Sinne des Worts mittlere Radiusvektor der Oberfläche ergiebt sich, wenn man die r gleichmäfsig über diese selbst verteilt annimmt und also den Ausdruck

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,dZ : \int_0^{\frac{\pi}{2}} dZ$$

bildet. S. 61 (2) giebt, indem man sich auf den Oktanten beschränken darf:

$$dZ = \frac{a^2\pi}{2}\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\,\cos\beta\,d\beta\,.$$

Das Nennerintegral ist die bereits berechnete Oktantenoberfläche. Im Zählerintegral setzen wir

$$r = \sqrt{a_0^2\cos^2\beta + b_0^2\sin^2\beta} = a_0\sqrt{1 - e^2\sin^2\beta}.$$

Dasselbe läfst sich in geschlossener Form durch vollständige elliptische Integrale ausdrücken.*) Indessen ist im vorliegenden Falle der Endausdruck in Reihengestalt weit einfacher. Wir setzen also im Zähler

$$\frac{a_0^3\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1 - e^2\cos^2\beta)\,(1 - e^2\sin^2\beta)}\,\cos\beta\,d\beta$$

$$= \frac{a_0^2 b_0\pi}{2}\int_0^1\sqrt{1 + \frac{e^4}{1 - e^2}\sin^2\beta\,(1 - \sin^2\beta)}\;d(\sin\beta).$$

Nehmen wir hinzu den Nenner nach S. 63 (11) so wird als *mittlerer Radiusvektor der Oberfläche* erhalten:

$$a_0\,\frac{1 + \frac{1}{15}\left(\frac{e^4}{1 - e^2}\right) - \cdots}{1 + \frac{1}{6}\,\delta - \frac{1}{40}\,\delta^2 + \frac{1}{112}\,\delta^3 - \cdots} \qquad (5)$$

---

*) Vergl. *Drobisch*, Berichte über die Verhandl. der Ges. der Wissensch. zu Leipzig. 1858. S. 159.

5*

oder

$$a_0\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{83}{3024}e^6 - \cdots\right). \tag{6}$$

§ 21. **Erdkugel.** Will man das Erdellipsoid durch eine Kugel von möglichst gleichen Eigenschaften ersetzen, so kommt der Umstand zu statten, dafs die verschiedenen Werte der mittleren Radienvektoren der Oberfläche unter sich und mit den Werten des mittleren Krümmungsradius der Oberfläche bis auf Glieder von der Ordnung des Quadrats der Abplattung übereinstimmen. Für *Bessels* Dimensionen der Erde ist der Wert

$$[3{,}80416] = 6370{,}3 \text{ Kilometer} \tag{1}$$

bis auf weniger als 30^m sowohl irgend ein mittlerer Radiusvektor der Oberfläche, als ihr mittlerer Krümmungsradius.

Dieser Wert entspricht auch sehr nahe dem Radius einer *Kugel gleicher Oberfläche* (vergl. S. 62 (9)):

$$\sqrt{\frac{\text{Oberfläche}}{4\pi}}$$

d. i.

$$a_0\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6 - \cdots\right), \tag{2}$$

ferner dem Radius einer *Kugel gleichen Inhalts:*

$$\sqrt[3]{a_0^2 b_0}$$

d. i.

$$a_0\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{5}{72}e^4 - \frac{55}{1296}e^6 - \cdots\right), \tag{3}$$

sowie dem *arithmetischen Mittel der drei Halbaxen* des Ellipsoids:

$$\frac{a_0 + a_0 + b_0}{3}$$

d. i.

$$a_0\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{24}e^4 - \frac{1}{48}e^6 - \cdots\right). \tag{4}$$

Wollte man einen *geschlossenen* Ausdruck haben, so würde sich (S. 65 Anm.) der nachstehende am besten eignen:

$$\frac{a_0 e}{\text{arc sin } e}.$$

---

2. Kapitel.

Dreiecke und Dreiecksnetze auf der Kugel.

§ 1. **Horizontale Entfernung, kürzeste und geodätische Linie.** Wir setzen in diesem und dem nächstfolgenden Kapitel voraus, dafs alle Niveauflächen konzentrische Kugelflächen sind, mithin alle Lotlinien gerade Linien durch das gemeinsame Zentrum jener.*) Je zwei Lotlinien haben dann eine gemeinsame Vertikalebene, welche die physische Erdoberfläche in einem mehr oder weniger welligen Profil, jede Niveaufläche aber in einem gröfsten Kreis schneidet. Schon S. 6 ist für den vorliegenden Fall der gröfste Kreisbogen zwischen den vertikalen Projektionen zweier Punkte auf irgend eine Niveaufläche als *horizontale Entfernung* bezeichnet worden; es wurde auch die Abhängigkeit dieser Entfernung von der Höhenlage der Niveaufläche erwähnt. Den Radius der letzteren setzen wir = 1.

Die horizontale Entfernung zweier Punkte giebt auf der betreffenden Niveaufläche zugleich die *kürzeste Entfernung* der Projektionen beider Punkte an.

Um dies nachzuweisen, teilen wir den gröfsten Kreisbogen $P_0 P_n$ (Fig. 3) zwischen den mit P_0 und P_n bezeichneten Projektionen in unendlich kleine Strecken P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, u. s. f. und beschreiben mit P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3, u. s. f. als Radien um P_0 herum Kreise. Diese Kreise sind kleine Kugelkreise, die paarweise überall ringsum denselben Abstand haben. Die kürzeste Verbindung von P_0 und P_n auf der Kugeloberfläche ist nun darum der gröfste Kreisbogen selbst und nicht irgend eine andere Linie $P_0 P_1' P_2' P_3' \ldots P_n$, weil nur er überall dem kleinsten Abstand der kleinen Kugelkreise folgt. Dagegen ist im allgemeinen

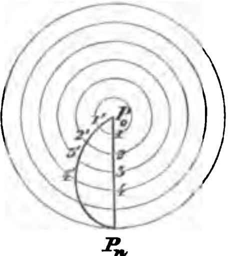


Fig. 3.

$$P_0P_1' \geqq P_0P_1;\; P_1'P_2' \geqq P_1P_2;\; P_2'P_3' \geqq P_2P_3;\; \text{u. s. f.}$$

Es ist also

$$P_0P_1'P_2'P_3' \ldots P_n > P_0P_1P_2P_3 \ldots P_n.$$

Eine Ausnahme tritt nur ein für $P_0 P_n > \pi$. Für diesen Fall ist die kürzeste Entfernung gleich dem Umfang der Kugel weniger $P_0 P_n$. Dagegen

*) Späteren Untersuchungen bleibt es vorbehalten zu entscheiden, in wieweit die Entwicklungen des 2. und 3. Kapitels für die thatsächlichen Verhältnisse brauchbar sind.

ist $P_0 P_n$ auch nicht einmal ein relatives Minimum mehr, da jede unendlich benachbarte Verbindung von P_0 und P_n auf einem kleinen Kreise kürzer ist.

Die Ebene des gröfsten Kreisbogens ist die gemeinsame Vertikalebene nicht nur der Endpunkte, sondern auch aller Zwischenpunkte, weil alle Radien Normalen der Kugeloberfläche sind und jene Ebene durch den Kugelmittelpunkt hindurchgeht. Es ist daher auch die drei unendlich benachbarten Punkten des gröfsten Kreisbogens entsprechende Ebene, d. i. die Schmiegungsebene desselben an der betreffenden Stelle, daselbst eine Vertikalebene. Wegen dieser Eigenschaft des gröfsten Kreisbogens darf man denselben auch als die *geodätische Linie* auf der Kugeloberfläche bezeichnen.

Zur Erklärung dieser Ausdrucksweise denke man sich für Bewohner einer beliebig krummen Oberfläche, die zugleich Niveaufläche sei, die Aufgabe gestellt, eine im Sinne der geodätischen Praxis gerade Linie von einem Punkt P_0 aus in gegebener Richtung zu legen.

Dann wird man zunächst eine Vertikalebene von P_0 aus in dieser Richtung legen und darin auf der Oberfläche einen Punkt P_1 annehmen, in P_1 eine Vertikalebene durch P_0 legen und in ihr einen Punkt P_2 annehmen (Fig. 3), von P_2 aus in der Vertikalebene durch P_1 einen neuen Punkt P_3 annehmen, u. s. f., wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, dafs die benachbarten Punkte so dicht liegen, dafs kein merkbarer Unterschied der benachbarten Vertikalebenen vorhanden ist, dafs mithin je drei benachbarte Punkte in einer Ebene liegen, die an dieser Stelle Vertikalebene der Oberfläche ist.

Man sieht hieraus, dafs im vorigen Sinne die gerade Linie des Geodäten, d. h. in korrekterer Bezeichnung: die geodätische Linie, diejenige Eigenschaft in Bezug auf ihre Schmiegungsebene hat, die ihr oben beigelegt wurde.

§ 2. **Horizontalwinkel.** Die direkte Messung einer horizontalen Entfernung ist nur bei günstigen Profilverhältnissen ausführbar und empfehlenswert. In anderen Fällen wird man die schon S. 12 angedeutete Methode der Triangulation einschlagen und dabei die direkt zu messende Linie, die Grundlinie oder Basis des Dreiecksnetzes, so legen, dafs sie zur direkten Messung geeignet ist.

Die Entfernungen, welche man bei Landesvermessungen oder Gradmessungen direkt mifst, betragen jetzt in der Regel nur einige Kilometer. Die Seiten der Dreiecke, deren Winkel direkt gemessen worden sind, erreichen dagegen oftmals Beträge von 50^{km}. Bei der Vermessung Vorderindiens durch die Engländer kamen häufig Visuren von 160 bis 240^{km} nach Gipfeln des Himalaya vor; *eine* Länge beträgt sogar ca. 340^{km}.

Verbindet man je zwei der Horizontalprojektionen von drei Punkten einer Triangulation durch die gröfsten Kreisbögen, ihre horizontalen Entfernungen, so ergiebt sich ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel die Flächenwinkel der zu den betreffenden Kreisbögen gehörigen

Vertikalebenen sind. Als solche lassen sie sich mit geeigneten Winkelinstrumenten, namentlich dem Theodolit, der auf der physischen Erdoberfläche (und zwar rein theoretisch genommen: an einer *beliebigen* Stelle der Lotlinie des Winkelscheitels) aufgestellt wird, messen.

Die weiter zu lösenden Aufgaben sind nun identisch mit den Aufgaben der sphärischen Trigonometrie.

In den folgenden Paragraphen dieses Kapitels geben wir zunächst eine Entwicklung der Formeln für beliebig grosse sphärische Dreiecke, schliefsen daran die Formeln für Dreiecke, deren Seiten im Verhältnis zum Radius der Kugel klein sind und geben danach noch Formeln für die Lösung der Aufgaben mittelst des Sehnendreiecks.

§ 3. **Das sphärische Dreieck.** Legt man durch zwei Punkte der Kugeloberfläche einen gröfsten Kreis, so wird dieser im allgemeinen in zwei Teile geteilt, einen $> \pi$ und einen $< \pi$. Dieser letztere kommt in der Regel allein in betracht. Interessieren also besonders sphärische Dreiecke mit Seiten $< \pi$, so kommen doch auch andere, namentlich solche, wo eine Seite $> \pi$ ist, in der Geodäsie vor. Dreiecke, in denen 2 Seiten $> \pi$ sind, sind keine eigentlichen Dreiecke mehr, da aufser den Ecken noch eine Durchkreuzung dieser 2 Seiten vorhanden ist.

Die Dreieckswinkel zählen wir in der Weise, dafs sie bei einer angenommenen Reihenfolge der Seiten dasjenige Mafs der Drehung in einem festgesetzten Sinne bezeichnen, welches notwendig ist, um eine vorangehende Seite mit der nachfolgenden zusammenfallen zu lassen. Demgemäfs bleiben die Winkelräume immer auf derselben Seite, wenn der Contour durchlaufen wird.

Zählt man ferner von einer für jeden Eckpunkt vorläufig beliebig gewählten Richtung aus Azimute in demselben Drehungssinne, so ist alsdann der

Dreieckswinkel = dem Azimut der nachfolgenden Seite — dem der vorangehenden Seite. (1)

Sind nun α, β und γ die drei auf einander folgenden Seiten des Dreiecks, ausgedrückt in Bruchteilen des Kugelradius, und A, B und C die gegenüber liegenden Ecken, sind ferner $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{C}_\alpha$ die Azimute von α in den Ecken B und C; $\mathfrak{C}_\beta$, $\mathfrak{A}_\beta$ die Azimute von β in den Ecken C und A; $\mathfrak{A}_\gamma$, $\mathfrak{B}_\gamma$ diejenigen von γ in den Ecken A und B, so werden die Relationen zwischen den Winkeln und Azimuten:

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma \\ B &= \mathfrak{B}_\gamma - \mathfrak{B}_\alpha \\ C &= \mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sind die hiernach berechneten Winkel negativ, so denken wir uns noch 360^0 addiert.

Durch Umkehrung der Reihenfolge der Seiten treten an Stelle der bisherigen Winkel ihre Ergänzungen zu 360^0, weil z. B. A in $\mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_\beta$ übergeht.

§ 4. **Differentialformeln; Sinus- und Cosinussatz.** Um mathematische Beziehungen zwischen den Seiten nnd Winkeln zu erhalten, schlagen wir einen ähnlichen Weg wie später für geodätische Dreiecke auf dem Rotationsellipsoid ein. Zu dem Zwecke stellen wir zunächst die Differentialformeln auf, dabei nehmen wir die Seiten als unabhängige, die Winkel als abhängige Variable.

Dreht man die Seite α um den Endpunkt B um $d\mathfrak{B}_\alpha$, so beschreibt C das Bogendifferential CC' eines kleinen Kreises mit dem Radius $\sin\alpha$ für den Kugelradius 1. Also wird

$$CC' = \sin\alpha\, d\mathfrak{B}_\alpha\,.$$

Ist $\alpha > \pi$, so hat CC' gegen BC entgegengesetzte Lage wie in Fig. 4, was auch das negative Vorzeichen von $\sin\alpha$ andeutet.

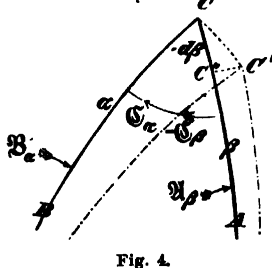


Fig. 4.

Der Lage C' des dritten Eckpunktes entsprechen Änderungen in β und $\mathfrak{A}_\beta$, die aus Fig. 4 leicht zu entnehmen sind. In derselben bedeutet $C'C''$ das Differential des von AC'' beschriebenen kleinen Kreises:

$$C''C' = \sin\beta\, d\mathfrak{A}_\beta\,.$$

Das Differentialdreieck $CC'C''$ ist in C'' rechtwinklig, seine Kathete CC'' giebt die Abnahme von β an:

$$CC'' = -\,d\beta\,.$$

Die Betrachtung des Differentialdreiecks giebt nun weiter:

$$-\,d\beta = \sin\alpha\, d\mathfrak{B}_\alpha \,.\, \sin(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta) \tag{1}$$

$$\sin\beta\, d\mathfrak{A}_\beta = \sin\alpha\, d\mathfrak{B}_\alpha \,.\, \cos(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta), \tag{2}$$

und zwar gelten diese Formeln allgemein für jeden Betrag der Azimute $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$, sowie für jeden Drehungssinn derselben, wenn er nur für alle Azimute derselbe ist. Wir können sie daher auch auf den Fall anwenden, wo anstatt α die Seite γ sich um die Ecke B um $d\mathfrak{B}_\gamma$ dreht, also die Ecke A sich entsprechend verschiebt und die Seite β sich entsprechend ändert.

Es wird dann durch Vertauschung von α und γ, sowie von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ aus (1):

$$-d\beta = \sin\gamma\, d\mathfrak{B}_\gamma \,.\, \sin(\mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_\beta)\,. \tag{3}$$

Nehmen wir nun $d\beta$ ebenso grofs an, wie vorher, so wird aus der Gleichsetzung beider Werte nach (1) und (3) erhalten:

$$\sin\alpha \sin(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta)\, d\mathfrak{B}_\alpha = \sin\gamma \sin(\mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_\beta)\, d\mathfrak{B}_\gamma\,. \tag{4}$$

Die beiden Dreiecke mit denselben Seiten $\alpha, \beta - d\beta$ und γ sind aber kongruent, und man kann sie durch eine differentiale Verschiebung zur Deckung bringen. Mithin hat Winkel B in beiden gleiche Gröfse. Mit Rücksicht auf S. 71 (2) ist aber dB d. h. die Änderung von B gegen seinen Betrag in dem ursprünglichen Dreieck,

bei der ersten Bewegung gleich $-d\mathfrak{B}_\alpha$,

„ „ zweiten „ „ $+d\mathfrak{B}_\gamma$,

welchen Werten also gleiche Gröfse zukommt. Wird dies in (4) eingeführt, so folgt der *Sinussatz* der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_\gamma)}{\sin(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta)}$$

d. i.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin A}{\sin C}. \tag{5}$$

Zugleich geht die Differentialformel (1) über in

$$d\beta = \sin\alpha \sin C\, dB. \tag{6}$$

Um diese Differentialgleichung zu integrieren, wenden wir (5) auf β und γ an und eliminieren mittelst der so erhaltenen Gleichung

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

aus (6) den Faktor $\sin C$, womit (6) übergeht in die Form

$$\sin\beta\, d\beta = \sin\alpha \sin\gamma \sin B\, dB,$$

woraus durch Integration, da α und γ konstant sind, sich sofort ergiebt:

$$\cos\beta = \sin\alpha \sin\gamma \cos B + \text{Konst.}$$

Zur Bestimmung der Konstanten dient der Umstand, dafs für $B = 180^0$ die Seite $\beta = (a + \gamma)$ oder $2\pi - (a + \gamma)$ sein mufs. Mithin ist

$$\cos(a + \gamma) = -\sin\alpha \sin\gamma + \text{Konst.}$$

Zieht man dies oben ab und reduziert auf $\cos\beta$, so erhält man den *Cosinussatz* (für Dreiecksseiten):

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos B. \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung, welche durch cyklische Vertauschung der Stücke des Dreiecks 3 Relationen giebt, läfst sich die ganze sphärische Trigonometrie ableiten. Eine der Formeln werden wir indes noch aus den Differentialformeln schöpfen.

Dividieren wir zu dem Zwecke die Gleichungen (1) und (2) Seite für Seite durch einander und beachten, dafs nach S. 71 (2) $d\mathfrak{A}_\beta = dA$ ist, so erhalten wir einerseits:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{A}_\beta}{d\beta} &= -\frac{1}{\tan(\mathfrak{C}_\alpha - \mathfrak{C}_\beta)\sin\beta} \\ \text{d. i.}\qquad \frac{dA}{d\beta} &= -\frac{1}{\tan C\sin\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Andrerseits giebt (1) durch Vertauschung von β und α, sowie von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$, mit Rücksicht auf S. 71 (2):

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{1}{\sin C\sin\beta}. \tag{9}$$

A ist aber eine Funktion von α, β und γ. In (8) sind α und γ konstant; in (9) sind β und γ konstant. Man schreibt daher zunächst besser mit Benutzung des Zeichens partieller Differentiation statt (8) und (9):

$$\frac{\partial A}{\partial\beta} = -\frac{1}{\tan C\sin\beta},$$

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sin C\sin\beta}.$$

Nun hat man zwei Wege, um $\frac{\partial^2 A}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ zu bilden. Indem wir sie beide betreten, folgt ohne Mühe:

$$\frac{1}{\sin^2 C\sin\beta}\,\frac{\partial C}{\partial\alpha} = -\frac{\cos C}{\sin^2 C\sin\beta}\,\frac{\partial C}{\partial\beta} - \frac{\cos\beta}{\sin C\sin^2\beta}. \tag{10}$$

Um die hierin auftretenden Differentialquotienten zu finden, vertauschen wir in der 2. Formel (8) $\alpha\beta\gamma$ cyklisch mit $\gamma\alpha\beta$ und ABC mit CAB, wodurch sie selbstverständlich ihre Gültigkeit nicht verliert; dann folgt

$$\frac{\partial C}{\partial\alpha} = -\frac{1}{\tan B\sin\alpha}.$$

Bewirkt man ferner in der 1. Formel (8) die hierin jedenfalls zulässigen Vertauschungen α und γ, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, so folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{C}_\beta}{\partial \beta} = - \frac{1}{\tan(\mathfrak{A}_\gamma - \mathfrak{A}_\beta)\sin\beta}$$

d. i.

$$\frac{\partial C}{\partial \beta} = - \frac{1}{\tan A \sin \beta}.$$

Substituiert man die erhaltenen Werte der Differentialquotienten in (10), multipliziert dann beiderseits mit $\sin A \sin^2 C \sin^2 \beta$ und beachtet linker Hand, dass $\sin A \sin \beta = \sin B \sin \alpha$ ist, so folgt der *Cosinussatz* (für Dreieckswinkel):

$$\cos B = - \cos A \cos C + \sin A \sin C \cos \beta. \tag{11}$$

Es mag hier nochmals hervorgehoben werden, dafs die Formeln (5), (7) und (11) zufolge ihrer Ableitung aus den Differentialformeln (1) und (2), sowie den Formeln (2) S. 71 an keine andre Bedingung geknüpft sind als diejenige, dafs für eine beliebig gewählte Reihenfolge der Seiten die Winkel dasjenige Mafs der Drehung bezeichnen, welches nötig ist, um eine vorangehende Seite mit der nachfolgenden zur Deckung zu bringen, entsprechend Formel (2) S. 71. Der Drehungssinn ist dabei ganz beliebig und nur identisch für alle 3 Winkel vorausgesetzt. *Negative Winkelwerte* sind nicht ausgeschlossen und die Seiten dürfen beliebig $\gtrless \pi$ sein.

§ 5. **Cotangentenformel und Formeln für 5 Stücke.** Die Formel (7) des vorigen Paragraphen giebt durch cyklische Vertauschung der Stücke des Dreiecks

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A.$$

Eliminiert man hieraus $\cos \beta$ mittelst der ebengenannten Formel (7), sowie $\sin \beta$ mittelst der aus (5) S. 73 durch Vertauschung der Stücke herzuleitenden Relation $\sin \beta = \sin B \sin \alpha : \sin A$, so ergiebt sich die *Cotangentenformel* für vier auf einander folgende Stücke:

$$\cot \alpha \sin \gamma - \cot A \sin B = \cos B \cos \gamma. \tag{1}$$

Die bisher entwickelten Formeln beziehen sich immer auf 4 Stücke. Andere Formeln mit 4 Stücken, die nicht aus jenen durch cyklische Vertauschung der Stücke hervorgehen, giebt es nicht, da 1 Seite und 3 Winkel, 3 Seiten und 1 Winkel, 2 Seiten und 2 Gegenwinkel, 2 Seiten und 1 Gegenwinkel und der Zwischenwinkel die einzig möglichen Fälle der Kombination der 6 Stücke des Dreiecks zu je 4 sind und nur je eine Formel geben. Dagegen giebt es noch Formeln mit 5 und 6 Stücken von Wert.

Setzt man in (1) für $\sin B$ den gleichwertigen Ausdruck $\sin\beta \sin A : \sin\alpha$, so folgt für 5 Stücke

$$\sin\beta \cos A = \cos\alpha \sin\gamma - \sin\alpha \cos\gamma \cos B. \tag{2}$$

Setzt man dagegen für $\sin\gamma$ den Ausdruck $\sin\alpha \sin C : \sin A$, so folgt

$$\sin C \cos\alpha = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos\gamma. \tag{3}$$

Bei der Anwendung der Formeln (5), (7) und (11) des vorigen Paragraphen und (1), (2), (3) dieses Paragraphen ist man an cyklische Vertauschungen nicht gebunden. Man darf auch beliebige 2 Seiten vertauschen, wenn zugleich die Gegenwinkel vertauscht werden. Für die erstgenannten 4 Formeln zeigt dies leicht eine Vergleichung mit den Ergebnissen cyklischer Vertauschung und da die letzten beiden Formeln einfach aus den ersten vier folgen, so gilt der Satz also auch für diese.

§ 6. **Gegeben 3 auf einander folgende Stücke.** Sind 3 auf einander folgende Stücke eines Dreiecks gegeben, so erhält man eine vollständige Auflösung mittelst einer von beiden nachstehenden Formelsystemen, die aus dem in § 4 und § 5 Gefundenen leicht durch passende Vertauschungen abzuleiten sind:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A\\ \sin\alpha\cos B &= \cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma\cos A\\ \sin\alpha\sin B &= \sin\beta\sin A\\ \sin\alpha\cos C &= \cos\gamma\sin\beta - \sin\gamma\cos\beta\cos A\\ \sin\alpha\sin C &= \sin\gamma\sin A.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha\\ \sin A\cos\beta &= \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos\alpha\\ \sin A\sin\beta &= \sin B\sin\alpha\\ \sin A\cos\gamma &= \cos C\sin B + \sin C\cos B\cos\alpha\\ \sin A\sin\gamma &= \sin C\sin\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Auflösung des 1. Systems giebt α, B und C, die des 2. Systems A, β und γ insoweit völlig bestimmt, als man sich nur entscheiden mufs, ob $\alpha \gtrless \pi$ bezw. $A \gtrless 180^0$ genommen werden soll. Diese Entscheidung ist notwendig, weil das 1. System das Vorzeichen von $\sin\alpha$ und das 2. System dasjenige von $\sin A$ unbestimmt läfst. Andernfalls hat man 2 Auflösungen, die indessen zu *derselben* Lage der 3 gröfsten Kreise führen; es entsprechen nämlich den Werten

α B C der einen Auflösung, die Werte

$2\pi - \alpha$ $180^0 + B$ $180^0 + C$ der andern Auflösung

für System (1); und bei System (2) den Werten

$$A \qquad \beta \qquad \gamma \quad \text{der einen Auflösung, die Werte}$$
$$360^0 - A \quad \pi + \beta \quad \pi + \gamma \quad \text{der andern Auflösung.}$$

Die numerische Genauigkeit der Formeln läfst nichts zu wünschen übrig, da jedes Stück aus der Tangente oder Cotangente hergeleitet werden kann; so giebt die Division der 2. und 3. Gleichung des 1. Systems zunächst $\cot B$ — es entspricht diese Bestimmung der Cotangentenformel — beide Formeln geben dann $\sin\alpha$ u. s. f. Die Bequemlichkeit der Formeln für logarithmische Rechnung ist aber nicht so grofs, dafs nicht für manche Fälle geeignetere Formeln erwünscht wären.

§ 7. **Die Formeln von Neper und Gaufs.** Aus den Formeln

$$\begin{aligned} \sin\alpha \sin B &= \sin\beta \sin A \\ \sin\alpha \sin C &= \sin\gamma \sin A \end{aligned} \tag{1}$$

folgt durch Addition resp. Subtraktion und einfache Reduktion:

$$\begin{aligned} \sin\alpha \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} &= \sin A \sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \\ \sin\alpha \cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2} &= \sin A \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ebenso behandelt ergeben die Formeln

$$\begin{aligned} \sin\alpha \cos B &= \cos\beta \sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma\cos A \\ \sin\alpha \cos C &= \cos\gamma \sin\beta - \sin\gamma\cos\beta\cos A \end{aligned} \tag{3}$$

leicht das System

$$\begin{aligned} \sin\alpha \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} &= \sin(\beta+\gamma)\sin^2\frac{A}{2} \\ \sin\alpha \sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2} &= \sin(\beta-\gamma)\cos^2\frac{A}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Division der 1. Gleichung (2) durch die 1. Gleichung (4) und der 2. Gleichung (2) durch die 1. Gleichung (4) ergiebt nachstehende *Nepersche Analogieen* für 2 Seiten und einen Zwischenwinkel als den gegebenen Stücken:

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{B+C}{2} &= \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\cot\frac{A}{2} \\ \tan\frac{B-C}{2} &= \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}\cot\frac{A}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Vertauscht man ferner in den Formeln (1) und (3) α mit $180^0 - A$, β mit B und γ mit C und umgekehrt, so ergeben sich wieder richtige Formeln. Die gleiche Vertauschung in (5) führt zu den *Neperschen Analogieen* für 2 Winkel und 1 Zwischenseite als gegebenen Stücken:

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{\beta+\gamma}{2} &= \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\beta-\gamma}{2} &= \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}\tan\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Bedient man sich dieser Formeln zur Auflösung der Aufgabe des § 6, so bleibt wie dort eine Unbestimmtheit, und man erhält zwei Auflösungen, die jedoch zu derselben gegenseitigen Lage der 3 gröfsten Kreise führen.

Setzen wir nun weiter für den Augenblick zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{A}{2} &= l, & \sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= l' \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{A}{2} &= m, & \cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= m' \\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{A}{2} &= n, & \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= n' \\ \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{A}{2} &= r, & \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= r', \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

so geben die (2) und (4) die Relationen:

$$\begin{aligned} m'n' &= mn, & m'r' &= nr \\ l'r' &= lr, & l'n' &= lm. \end{aligned} \tag{8}$$

Obgleich dies 4 Gleichungen sind, kann man mittelst derselben doch nur 3 Gröfsen aus den 5 andern bestimmen, da sich jede der Gleichungen aus den 3 andern ableiten läfst. Eine neue Relation giebt aber die oben für Ableitung von (6) aus (5) benutzte Vertauschung. Sie führt über: l in l', m in m', n in n', r in r' und umgekehrt.

Zu den vorigen Relationen gesellen sich damit 2 neue, deren eine in denselben noch nicht enthalten ist:

$$mr = n'r', \quad ln = l'm'. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt $m'n' \cdot n'r' = mn \cdot mr$ und da $m'r' = nr$ ist, wird

$$n'^2 = m^2; \quad n' = \pm m.$$

Hieraus folgt mittelst der Relationen (8) und (9) weiter:

für $n' = +m$ ist $m' = n$, $r' = r$, $l' = l$,

„ $n' = -m$ „ $m' = -n$, $r' = -r$, $l' = -l$.

Substituiert man endlich rückwärts die Werte der Symbole $lmnr$ u. s. f. nach (7), so ergeben sich die *Gaufsischen Gleichungen*:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{A}{2}\\
\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{A}{2}\\
\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{A}{2}\\
\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{A}{2},
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

worin die oberen und unteren Zeichen zusammengehören. Die doppelten Zeichen entsprechen dem Umstand, dafs in den bisherigen Formeln (vergl. § 6 S. 76) einerseits gewisse Vertauschungen zulässig waren, von denen die eine, nämlich die von A, β, γ mit bezw. $360^0 - A$, $\pi + \beta$, $\pi + \gamma$ in (10) zu einem Zeichenwechsel führt; dafs andererseits aber auch jede einzelne Seite um Vielfache von $\pm 2\pi$ und jeder einzelne Winkel um Vielfache von $\pm 360^0$ verändert werden, also namentlich die *Winkel negativ* gezählt werden durften, wodurch ebenfalls in den (10) eine Unbestimmtheit der Zeichen entstehen mufs. Trotz der Unbestimmtheit der Zeichen erhält man doch durch die Auflösung der (10) bei gegebenen 3 Stücken nur 2 Lösungen, die derselben Lage der 3 gröfsten Kreise angehören.

Beschränkt man sich aber auf Dreiecke, in denen alle Seiten und Winkel positiv genommen und wenigstens 2 Seiten $< \pi$ sind, während die 3. Seite bis 2π gehen kann, so gelten nur die *oberen* Zeichen:

Denn zunächst für 3 positive Seiten $< \pi$ und 3 positive Winkel $< 180^0$ zeigt die 2. der (10) unmittelbar die Unzulässigkeit des unteren Zeichens. Ist ferner jeder der drei Winkel $> 180^0$ und $< 360^0$, so ändert sich nichts, da es zulässig ist, in den mit positiven Zeichen angesetzten (10) die Winkel mit ihren Supplementen zu 360^0 zu vertauschen. Vertauschen wir endlich auch α mit $2\pi - \alpha$ und gleichzeitig B und C mit bezw. $180^0 + B$ und $180^0 + C$; oder vertauschen wir β mit $2\pi - \beta$ und gleichzeitig A und C mit bezw. $180^0 + A$ und $180^0 + C$, so bleiben die mit positiven Zeichen angesetzten (10) auch bestehen. Diese letztern Vertauschungen entsprechen aber nach leicht anzustellender geometrischer Betrachtung dem Übergang von einem Dreieck mit 3 Seiten $< \pi$ zu einem solchen mit nur 2 Seiten $< \pi$.

§ 8. **Gegeben 2 Seiten und 1 Gegenwinkel oder 2 Winkel und 1 Gegenseite.** Hier führt der Sinussatz entweder zu gar keinem oder zu 2 Werten des andern Gegenstückes, welche sich zu 180° bezw. π ergänzen und die *Neper*schen Analogieen geben zu jedem dieser Werte einen Wert des 5. und 6. Stückes. Man erhält also, falls die Stücke ein Dreieck bestimmen (wofür die Bedingungen aufzustellen für uns kein Interesse hat) im allgemeinen 2 Auflösungen, welche aber nicht wie bisher zu derselben gegenseitigen Lage der drei gröfsten Kreise, sondern zu 2 verschiedenen Stellungen derselben gehören. Dies zeigt am klarsten die Konstruktion der Dreiecke mittelst geometrischer Orte, welche wir indessen ebenso übergehen dürfen als den Nachweis der Bemerkung, dafs für Dreiecke mit Stücken $< 180^0$ bezw. π nur *eine* Lösung zur in Rede stehenden Aufgabe gehört, falls das gegebene Gegenstück dem gröfsern der beiden andern gegebenen Stücke gegenüberliegt.

§ 9. **Gegeben 3 Seiten oder 3 Winkel.** Sind α, β und γ bekannt, so giebt der auf α angewandte Cosinussatz, wenn man auf $\cos A$ reduziert:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}. \tag{1}$$

Diese Formel ist weder logarithmisch bequem, noch in allen Fällen zur scharfen numerischen Auswertung geeignet. Man bildet daher

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{-\cos\alpha + \cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Vereinigt man die Cosinus in den Zählern rechter Hand zu Produkten, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin s\sin(s-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}\\
\sin^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}\\
\tan^2\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}} = \frac{\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}{\sin s\sin(s-\alpha)}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei $s = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ zur Abkürzung gesetzt ist. Die Multiplikation von $\cos^2\frac{A}{2}$ und $\sin^2\frac{A}{2}$ giebt aufserdem

$$\sin^2 A = \frac{4 \sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)}{\sin^2 \beta \sin^2 \gamma}. \tag{3}$$

In ganz gleicher Weise ergeben sich die Formeln bei 3 bekannten Winkeln A, B und C. Man hat

$$\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C} \\
\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C} \\
\tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{4 \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin^2 B \sin^2 C}, \tag{6}$$

wobei $\varepsilon = A + B + C - 180^0$ den *sphärischen Excefs* des Dreiecks bedeutet.

Vorstehende Formeln hat man sich aufser auf A bezw. α auch auf B und C, bezw. β und γ angewandt zu denken. Für jedes unbekannte Stück ergeben sich nun, falls überhaupt die 3 Stücke einem Dreieck angehören, (wofür wir indes die Bedingungen nicht aufstellen werden) zwei sich zu 360^0 bezw. 2π ergänzende Werte, welche nach Mafsgabe des Sinussatzes

$$\sin A : \sin B : \sin C = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

sich zu 2 Auflösungen der ganzen Aufgabe gruppieren, wie § 6.

Führt man in vorstehende Proportion für die Verhältnisse $\sin A : \sin \alpha$, u. s. f. die Werte

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{A}{2}}{\tan \frac{A}{2} \sin \alpha} = \frac{2 \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)}{\tan \frac{A}{2} \sin (s - \alpha) \,.\, \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

u. s. f.

ein, welche mit Benutzung der zweiten Gleichung (2) erhalten werden, so resultiert der Satz:

$$\tan \frac{A}{2} : \tan \frac{B}{2} : \tan \frac{C}{2} = \csc (s - \alpha) : \csc (s - \beta) : \csc (s - \gamma), \tag{7}$$

welcher (nach *Puissant*) von *Mollweide* angegeben worden ist. Die Benutzung der zweiten Gleichung (5) führt zu dem analogen Satze:

$$\tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\beta}{2} : \tan\frac{\gamma}{2} = \sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right) : \sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right) : \sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot (8)$$

§ 10. **Inhalt und sphärischer Exceſs.** Von einem Dreiecksinhalt kann man im gewöhnlichen Sinne der Inhaltsbestimmung nur sprechen, wenn von den Dreiecksseiten höchstens eine Seite $> \pi$ ist (S. 71). Auf diesen für die Geodäsie allein wichtigen Fall beschränken wir uns und zwar bezeichnen wir als *Inhalt* denjenigen der beiden Teile der Kugeloberfläche, welcher von den Seiten bei Beschreibung der Dreieckswinkel überstrichen wird.

Zur bildlichen Darstellung kann nunmehr Fig. 5 dienen, nicht nur falls alle 3 Seiten $< \pi$ und alle 3 Winkel $< 180^0$, sondern auch falls nur 2 Seiten $< \pi$ sind und für beliebige Winkel.

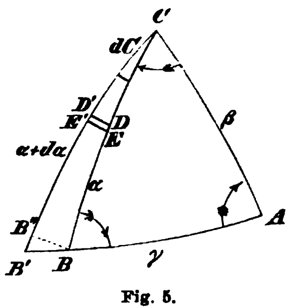


Fig. 5.

Dreht sich nun Seite α um die Ecke C um dC, so wächst die Dreiecksfläche um dF d. i. in Fig. 5 Dreieck CBB', welches von CBB'', wobei $CB = CB''$ genommen ist, nur unendlich wenig abweicht. Betrachtet man auf CB einen Bogen $CD = \alpha_1$ kleiner als α und dreht ihn ebenfalls um dC, so ist, wenn der Kugelradius als Einheit der Längen dient, der von D beschriebene unendlich kleine Weg DD' gleich $\sin\alpha_1 dC$. Zwei benachbarte Punkte D und E für α_1 und $\alpha_1 + d\alpha_1$ schlieſsen mit ihren Wegen ein kleines Viereck $DD'EE'$ ein, dessen Inhalt gleich $\sin\alpha_1 dC \,.\, d\alpha_1$ nach Gröſse und Vorzeichen gesetzt werden kann; also ist

$$dF = dC\int_0^\alpha \sin\alpha_1 d\alpha_1 = dC(1-\cos\alpha). \qquad (1)$$

Denselben Ausdruck erhält man für die Zunahme des Excesses. Es ist nämlich zunächst

$$d\varepsilon = dC + dB. \qquad (2)$$

Nun hat man im Dreieck $BB'C$

$$\sin(\alpha + d\alpha)\sin(B + dB) = \sin\alpha\sin B,$$

da Winkel B' mit $(B + dB)$ zu bezeichnen ist. Hieraus folgt aber mittelst der Entwicklungen

$$\sin(\alpha + d\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha d\alpha$$

und

$$\sin(B' + dB) = \sin B + \cos B dB$$

und unter Vernachlässigung des mit $d\alpha dB$ multiplizierten Gliedes:

$$dB = -\cot\alpha \tan B\, d\alpha.$$

Nach Fig. 5 ist $d\alpha$, d. h. $B'B'' = \sin\alpha\, dC \,.\, \cot B$; daher hat man

$$dB = -\cos\alpha\, dC,$$

und es wird schlieſslich, wie oben behauptet worden ist, durch Substitution dieses Wertes in die Formel (2) und mit Beachtung von (1):

$$d\varepsilon = dC(1 - \cos\alpha) = dF. \tag{3}$$

Die Integration giebt $\varepsilon = F +$ Konst. Die Konstante ist aber null, da ε und F gleichzeitig verschwinden. Berücksichtigt man dies und setzt endlich den Kugelradius anstatt gleich 1 gleich ϱ, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} F &= \varepsilon\varrho^2 \\ \text{oder}\qquad \varepsilon &= \frac{F}{\varrho^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hierbei ist ε als Arcus zu verstehen. Die häufigere Anwendung hat die Formel in der zweiten Gestalt, welche gestattet den Exceſs aus dem Inhalt zu finden.

Die direkte Entnahme des Excesses aus der Winkelsumme ist dagegen in der Geodäsie vielfach nicht möglich, auch wenn diese Summe bekannt ist. Hat man es nämlich mit beobachteten Winkeln zu thun, so haften an diesen Beobachtungsfehler; um deren Einfluſs auf $A + B + C$ zu erkennen, muſs man den Exceſs mindestens bis auf Gröſsen von der Ordnung des Quadrats der Beobachtungsfehler genau ermitteln. Hierzu gelangt man durch Berechnungen mit Benutzung wenigstens *einer* Seite des Dreiecks.

Wir geben dem entsprechend zunächst im Folgenden einige bemerkenswerte strenge Formeln für ε, wobei wenigstens 1 Seite als bekannt vorausgesetzt wird.

§ 11. **Strenge Formeln für den sphärischen Exceſs.** Sind α, B und C, d. h. eine Seite und die anliegenden Winkel, bekannt, so erhält man eine bequeme Formel zur Berechnung von ε für kleine Dreiecke aus der 2. Formel (5) S. 81. Setzt man darin

$$A = 180^0 + \varepsilon - B - C,$$

so folgt:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin\left(B + C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}. \tag{1}$$

Im allgemeinen hat diese Gleichung 2 Wurzeln

$$\varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_2 = 2(B + C) - \varepsilon_1$$

entsprechend der Unbestimmtheit der Aufgabe, ein Dreieck aus α, B und C zu ermitteln. Sind aber alle 3 Seiten klein, so gilt nur die Lösung, welche ε nahezu null oder (bei Winkeln $> 180^0$) nahezu 720^0 giebt.

Für letztern Fall ist es bequemer, insofern ε etwas kleiner als 720^0 ist, die 720^0 abzuziehen und es negativ zu nehmen. Unter dieser Voraussetzung hat nun jedenfalls ε einen kleinen positiven oder negativen Wert, der aus (1) durch successive Annäherung erhalten werden kann, wobei rechter Hand zuerst $\varepsilon =$ null zu setzen ist.

Sind 2 Winkel A und B und 1 Gegenseite α gegeben, so entsteht im allgemeinen die schon § 8 angegebene Zweideutigkeit, welche aber immer dann ohne Bedeutung bleibt, wenn das Dreieck als ein kleines bekannt ist, weil für diesen Fall die 2. Lösung einem Dreieck mit einer nahezu π betragenden Seite und mit grofsem Excefs angehört, auf welchen die wie oben einzuleitende Näherungsrechnung nicht hinführt. Die Formel ist:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin B \sin(A + B - \varepsilon)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}. \tag{2}$$

Um für 2 Seiten α und β und den Zwischenwinkel C eine direkte Formel zur Berechnung des Excesses zu haben, verbinden wir die 3. Formel (5) S. 81:

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

mit der folgenden Formel (8) von S. 82:

$$\frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

durch Multiplikation über einander stehender Seiten. Es wird hiermit

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\varepsilon}{2} &= \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \tan\frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\sin C}{1 + \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\cos C} = \frac{\tan C}{1 + \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\sec C}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die zweite dieser Formeln folgt aus der ersten durch Auflösung des Sinus rechter Hand, Division mit $\cos\frac{\varepsilon}{2}$ und Reduktion auf $\tan\frac{\varepsilon}{2}$. Man erhält durch die Auflösung 2 Werte von ε, die sich um 360^0 unterscheiden und die den beiden zu α, β und C gehörigen Dreiecken entsprechen. Für kleine Dreiecke ist eine auf die 1. Formel (3) gestützte Annäherungsrechnung am bequemsten.

Handelt es sich darum, aus 2 gegebenen Seiten und einem Gegenwinkel ε zu ermitteln, so dürfte die Berechnung des andern Gegenwinkels nach dem Sinussatz mit nachfolgender Anwendung von Formel (2) bei kleinen Dreiecken der passendste Vorgang sein.

§ 12. **Fortsetzung: Gegeben 3 Seiten.** Bildet man nach S. 81 (5) die Formeln

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C},$$

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin C},$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin A \sin B},$$

und hieraus

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \pm\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin C}, \tag{1}$$

und benutzt nun diese Formel (1), um aus der 1. Formel (3) des vorigen Paragraphen $\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ zu eliminieren, so folgt:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \pm\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\sin C. \tag{2}$$

Substituiert man hierin die auf C angewandte Formel (3) S. 81, so folgt weiter

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \pm\frac{\sqrt{\sin s \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{3}$$

Eliminiert man ferner aus der 2. Formel (3) des vorigen Paragraphen $\cos C$ mittelst der Relation

$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

so ergiebt sich unter Einführung der Funktionen halber Winkel:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin C}{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right)}. \tag{4}$$

Dies in Verbindung mit obiger Formel (2) führt endlich noch zu der Formel:

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} = \pm\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} - 1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{5}$$

Die Unbestimmtheit der Vorzeichen in den Ausdrücken rechter Hand in den Formeln (1), (2) und (5) verschwindet, wenn man voraussetzt, dafs wenigstens 2 Seiten $< \pi$ sind, denn dann gilt nur das *obere* Zeichen.

Nehmen wir nämlich zunächst an, dafs alle 3 Seiten $< \pi$ sind und bringen die Gleichung (2) in die Form

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\frac{\sin C}{\sin\gamma},$$

wo nun rechter Hand $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ jedenfalls positiv ist, so gilt sicher nur das obere Zeichen, da C und $\frac{\varepsilon}{2}$ gleichzeitig $\lesseqgtr 180^0$ sind. Vertauschen wir nun γ mit $2\pi - \gamma$, so wechselt die rechte Seite das Zeichen; dies geschieht jedoch auch linker Hand, indem jener Vertauschung eine Vertauschung von ε mit $360^0 + \varepsilon$ entspricht, wie geometrisch leicht zu ersehen ist. Mithin gilt in der That in (2) nur das obere Zeichen.

Die Entwicklung zeigt nun, dafs die obern und untern Zeichen in (1), (2) und (5) einander entsprechen, also gilt das *obere* Zeichen von (1), (2) und (5) allein, falls wenigstens 2 Seiten $< \pi$ sind.

Für Formel (3) mufs man aber *beide* Zeichen konservieren.

Formel (5) ergiebt jetzt weiter, indem wir voraussetzen, dafs wenigstens 2 Seiten $< \pi$ sind:

$$1 - \cos\frac{\varepsilon}{2} = 2\sin^2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{2\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-\alpha}{2}\sin\frac{s-\beta}{2}\sin\frac{s-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}, \tag{6}$$

wie man leicht mit Beachtung der nachfolgenden beiden Identitäten findet:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-\gamma}{2} &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ \sin\frac{s-\alpha}{2}\sin\frac{s-\beta}{2} &= \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Aus (6) und (3) erhält man nun nachstehende zur Berechnung von ε sehr geeignete Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{\varepsilon}{4} &= \sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-\alpha}{2}\sin\frac{s-\beta}{2}\sin\frac{s-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}}\\ \cos\frac{\varepsilon}{4} &= \pm\sqrt{\frac{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-\alpha}{2}\cos\frac{s-\beta}{2}\cos\frac{s-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}}\\ \tan\frac{\varepsilon}{4} &= \pm\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-\alpha}{2}\tan\frac{s-\beta}{2}\tan\frac{s-\gamma}{2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die positiven Wurzelzeichen der beiden letzten Formeln gelten, wenn alle Winkel $< 180^0$ sind, die negativen, wenn sie $> 180^0$ sind; u. s. w.

Ist der Exceſs bekannt, so kann man bei 3 gegebenen Seiten einen Winkel bestimmen, z. B. C nach einer der beiden Formeln:

$$\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\frac{\varepsilon}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$$

$$\tan\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = \cot\frac{\varepsilon}{4}\tan\frac{s-\alpha}{2}\tan\frac{s-\beta}{2}.$$

Die erste derselben ist nichts anderes als die 1. Formel (3) des vorigen Paragraphen; sie gilt für beliebige Dreiecke. Die 2. Formel gilt nur für Dreiecke mit wenigstens 2 Seiten $< \pi$.

Die Ableitung dieser letzteren Formel kann wie folgt geschehen. Man bestimmt zunächst $\cos\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, am bequemsten mittelst der Identität

$$\cos\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B-C}{2}\right),$$

indem man diese rechts zerlegt und $\sin\frac{B-C}{2}$ und $\cos\frac{B-C}{2}$ unter Benutzung der *Gauſs*ischen Gleichungen eliminiert. Es wird, wenn man an jener Beschränkung festhält:

$$\cos\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Man bildet weiter:

$$1 - \cos\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-\gamma}{2}\sin\frac{s-\alpha}{2}\sin\frac{s-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

wobei nächst der zweiten der Identitäten (7) die Identität

$$\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

zu beachten ist. Nun ist mithin $\sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ bekannt; dies giebt mit $\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ sofort $\cos\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ und hieraus folgt endlich leicht die für $\tan\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)$ angegebene Formel, wobei über das Vorzeichen kein Zweifel ist, weil sie mit der darüberstehenden für $\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, sobald wenigstens 2 Dreiecksseiten $< \pi$ angenommen werden, Glied für Glied gleiche Vorzeichen hat.

Eine sehr elegante Entwicklung der Formeln mit $\frac{\varepsilon}{4}$ gab *Werner* in dem *Journ. für Mathem. und Phys.* von *Schlömilch* 1861, S. 146. Im allgemeinen vergl. man *Baltzers* und *Schlömilchs* Lehrbücher, das des erstgenannten namentlich auch für historische Angaben.

§ 13. **Theorem von Legendre.** Die Anwendung der Formeln der sphärischen Trigonometrie erfordert die Verwandlung der Seitenlängen in Gradmafs und umgekehrt. Liegt hierin schon eine Unbequemlichkeit, weil der Geodät meist der wirklichen Längen der Seiten bedarf, so zeigt sich bei der Rechnung die weitere, dafs die Logarithmen der meisten trigonometrischen Funktionen der kleinen den Seiten entsprechenden Winkelwerte α, β und γ nicht bequem aus den Tafeln zu entnehmen sind. Die Anwendung der Hilfslogarithmen S und T (S. 33) beseitigt diesen Übelstand nur teilweise. Das Theorem von Legendre lehrt nun:

Ein kleines sphärisches Dreieck läfst sich berechnen als ein ebenes mit denselben Seiten, nachdem die Winkel je um ein Dritteil des Excesses vermindert worden sind.

Die Seiten des ebenen Hilfsdreiecks nennen wir a, b und c; die Winkel sind $A - \frac{\varepsilon}{3}$, $B - \frac{\varepsilon}{3}$, $C - \frac{\varepsilon}{3}$, und es ist ferner zu setzen für ε:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{F}{\varrho^2}; \\ \varepsilon_{\text{in Sek.}} &= \varrho'' \frac{F}{\varrho^2}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

F kann hierbei hinreichend genau nach den Formeln der ebenen Trigonometrie berechnet werden. ϱ bezeichnet den Kugelradius.

Behufs Ableitung des Satzes geht man von der Formel

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A, \tag{2}$$

worin α, β, γ die Quotienten $a:\varrho,\ b:\varrho,\ c:\varrho$ bedeuten, aus. Da diese klein sind, genügt es für ihre Cosinus und Sinus die ersten Glieder der Reihenentwicklungen (1) S. 28 zu substituieren.

Es findet sich dann, wenn α, β, γ als Glieder 1. Ordnung bezeichnet werden:

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} = \left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{24}\right)$$
$$+ \beta\gamma\left(1 - \frac{\beta^2}{6}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{6}\right)\cos A + Gl_6 .$$

Multipliziert man aus, sodann beiderseits mit $\left(1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}\right)$ und reduziert auf $\cos A$, dabei immer die Glieder der 6. Ordnung vernachlässigend, sowird nach und nach erhalten:

$$\beta\gamma\left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6}\right)\cos A = \frac{-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} + \frac{\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 6\beta^2\gamma^2}{24} + Gl_6,$$

$$\cos A = \frac{-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\beta\gamma} - \frac{2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{24\beta\gamma} + Gl_4 .$$

Werden nun die Winkel des ebenen Hilfsdreiecks mit A^*, B^* und C^*, der Inhalt mit F^* bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$\cos A^* = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\beta\gamma}, \tag{3}$$

und zwar für jede Zählungsweise der Winkel, da man A^* mit $360 - A^*$ in (3) vertauschen darf. Ferner ist

$$F^{*2} = \frac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$$

oder

$$F^{*2} = \frac{1}{16}\varrho^4\{2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4\}. \tag{4}$$

Führt man $\cos A^*$ und F^* im oben erhaltnen Ausdrucke für $\cos A$ ein und beachtet, dafs auch $F^* = \frac{1}{2}bc\sin A^*$ gesetzt werden kann, so ergiebt sich:

$$\cos A = \cos A^* - \frac{2}{3}\frac{F^{*2}}{bc\varrho^2} + Gl_4$$

oder

$$\cos A = \cos A^* - \frac{1}{3}\frac{F^*}{\varrho^2}\sin A^* + Gl_4 . \tag{5}$$

Nach S. 31 (5) und (6) findet sich hieraus und mit Beachtung von (4) S. 83:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \varrho'' \left\{ \frac{1}{3} \frac{F^*}{\varrho^2} + Gl_4 \right\} = \frac{1}{3} \varepsilon + \cdots. \tag{6}$$

Hierbei ist F für F^* gesetzt, was mit grofser Annäherung richtig ist, wenn die Dreieckswinkel $< 180^0$ sind.

Im allgemeinen ist F^* in (6) entsprechend dem Ausdruck $\frac{1}{2} bc \sin A^*$, d. h. für Dreieckswinkel $> 180^0$ negativ, einzuführen. Demgemäfs bedeutet ε im letztern Fall den Excefs mit Vernachlässigung von 720^0, weil alsdann streng genommen F nicht gleich F^*, sondern gleich $4\pi\varrho^2 + F^*$ zu setzen ist. ε wird damit negativ.

Zur genauern Ermittlung des Fehlers von (6) entwickeln wir im Folgenden die höhern Glieder bis zur 8. Ordnung.

§ 14. **Höhere Glieder zu Legendres Theorem.** Zu gröfserer Bequemlichkeit der Reihenentwicklung bringen wir die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen in die Form:

$$\cos A = \frac{2\cos\alpha - \cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)}{\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)} \tag{1}$$

und kombinieren dies mit der Formel (3) für $\cos A^*$ im vorigen Paragraphen. Es findet sich:

$$\cos A - \cos A^* = \frac{(s^2-d^2)\cos\alpha + (\alpha^2-s^2)\cos(\beta-\gamma) - (\alpha^2-d^2)\cos(\beta+\gamma)}{2\beta\gamma\left(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\right)}, \tag{2}$$

$$(\beta+\gamma)^2 = s^2 \quad \text{und} \quad (\beta-\gamma)^2 = d^2 \tag{3}$$

vorübergehend zur Abkürzung gesetzt. Den Zähler von (2) schreibt man besser

$$(\alpha^2 - s^2)\left(\cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha\right) - (\alpha^2 - d^2)\left(\cos(\beta+\gamma) - \cos\alpha\right)$$

und nun giebt die bekannte Reihenentwicklung der Cosinus sofort:

$$\cos A - \cos A^* =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha^2-s^2)\left(\frac{\alpha^2-d^2}{2} - \frac{\alpha^4-d^4}{24} + \frac{\alpha^6-d^6}{720} - \frac{\alpha^8-d^8}{40320}\right) \\ -(\alpha^2-d^2)\left(\frac{\alpha^2-s^2}{2} - \frac{\alpha^4-s^4}{24} + \frac{\alpha^6-s^6}{720} - \frac{\alpha^8-s^8}{40320}\right) + Gl_{12} \end{array} \right\} : 2\beta\gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{s^2-d^2}{2} - \frac{s^4-d^4}{24} \\ + \frac{s^6-d^6}{720} + Gl_8 \end{array} \right\}. \tag{4}$$

Hebt man im Zähler von (4) den Faktor $(\alpha^2 - s^2)(\alpha^2 - d^2)$ aus und beachtet, dafs mit Rücksicht auf den Ausdruck (4) für F^* im vorigen Paragraphen

$$16 F^{*2} = -(\alpha^2 - s^2)(\alpha^2 - d^2)\varrho^4 \tag{5}$$

ist, so läfst eine einfache Reduktion erkennen, dafs der Zähler auch den Faktor $(s^2 - d^2)$ hat; durch Division mit diesem Faktor im Zähler und Nenner von (4) ergiebt sich dann

$$\cos A^* - \cos A = \tag{6}$$

$$\frac{2F^{*2}\left(1 - \frac{\alpha^2 + s^2 + d^2}{30} + \frac{\alpha^4 + \alpha^2(s^2 + d^2) + (s^4 + s^2 d^2 + d^4)}{1680} - Gl_6\right)}{3\varrho^4\beta\gamma\left(1 - \frac{s^2 + d^2}{12} + \frac{s^4 + s^2 d^2 + d^4}{360} - Gl_6\right)}.$$

Für die Parenthese im Nenner (6) setzen wir jetzt im Zähler den Faktor

$$\left(1 + \frac{s^2 + d^2}{12} + \frac{3s^4 + 8s^2d^2 + 3d^4}{720} + Gl_6\right)$$

und erhalten damit endlich nach einiger Reduktion:

$$\cos A^* - \cos A = \frac{2}{3}\frac{F^{*2}}{\varrho^4\beta\gamma}\left\{1 + \frac{-2\alpha^2 + 3s^2 + 3d^2}{60}\right. \tag{7}$$
$$\left. + \frac{3\alpha^4 - 11\alpha^2(s^2 + d^2) + 10s^4 + 31s^2d^2 + 10d^4}{5040} + Gl_6\right\}.$$

Behufs weiterer Entwicklung ist wieder S. 31 (5) und (6) anzuwenden. Darin ist A^* für A' und die negativ angenommene rechte Seite von (7) für h zu setzen.

Man hat bei der Substitution des Wertes von h ferner die Relationen

$$\left.\begin{aligned} F^{*2} &= \frac{1}{4}\varrho^4\beta^2\gamma^2\sin^2 A^*, \\ 4\beta\gamma &= s^2 - d^2, \\ \cos A^* &= \frac{-2\alpha^2 + s^2 + d^2}{4\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

zu beachten und erhält dann nach und nach ohne Schwierigkeit:

$$A - A^* = -\frac{h}{\sin A^*}\left(1 + \frac{2\alpha^2 - s^2 - d^2}{48}\right.$$
$$\left. + \frac{16\alpha^4 + 8\alpha^2(s^2 + d^2) - 3(s^4 + d^4) - 26s^2d^2}{1440\,.\,12} + Gl_6\right)$$

und

$$A - A^* = \frac{1}{3}\frac{F^*}{\varrho^2}\left(1 + \frac{2\alpha^2 + 7(s^2 + d^2)}{240}\right. \tag{9}$$
$$\left. + \frac{16\alpha^4 + 128\alpha^2(s^2 + d^2) + 93(s^4 + d^4) + 310s^2d^2}{120960} + Gl_6\right).$$

Hierin ist das Vorzeichen von F^* zu nehmen, wie es die Berechnung aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel giebt.

In Bezug auf die Gültigkeit vorstehender Entwicklung ist Folgendes zu bemerken. Um den Ausdruck (7) für $\cos A^* - \cos A$ zu erhalten, konnten wir auch in der wie folgt modificierten Form von (1)

$$\cos A = \cos \alpha \csc \beta \csc \gamma - \cot \beta \cos \gamma$$

die Reihen für Cosinus, Cosecante und Cotangente anwenden. Die ersteren gelten aber allgemein, letztere nur für Werte $< \pi$. Die Entwicklung (7) gilt daher, so lange β und $\gamma < \pi$ sind. Die entsprechenden Entwicklungen für B und C fordern auch noch $\alpha < \pi$.

Selbstverständlich genügen die in (7) angesetzten Glieder nur für kleine Werte von α, β, γ zur Erreichung einer Genauigkeit auf Bruchteile Sekunden. Insbesondere mufs die 8. Potenz von α, β, γ zu vernachlässigen sein (vergl. S. 28 Schlufs von § 6).

Für solche Werte gilt dann auch sicher die Entwicklung (9) für $A - A^*$ aus (7), für welche nach S. 31 erforderlich ist, dafs $(h : \sin^2 A^*)^4$, d. h. näherungsweise $(\frac{1}{6}\beta\gamma)^4$, vernachlässigt werden kann.

§ 15. **Fortsetzung: Excefsanteile aus den 3 Seiten.** Setzt man in der für $(A - A^*)$ im vorigen Paragraphen erhaltenen Formel

$$\alpha^2 = \frac{a^2}{\varrho^2}, \qquad s^2 + d^2 = 2\,\frac{b^2 + c^2}{\varrho^2}, \qquad s^2 d^2 = \frac{(b^2 - c^2)^2}{\varrho^4},$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 3m^2 \\ a^4 + b^4 + c^4 &= 3n^4 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

sowie

$$s^4 + d^4 = \frac{-12n^4 + 10a^4 + 54m^4 - 36m^2a^2}{\varrho^4},$$

$$s^2 d^2 = \frac{6n^4 - 3a^4 - 9m^4 + 6m^2a^2}{\varrho^4},$$

so gelangt man nach einiger Reduktion zu dem Resultat:

$$A - A^* = \frac{F^*}{3\varrho^2}\left\{1 + \frac{7m^2 - 2a^2}{40\varrho^2} + \frac{31n^4 - 10a^4 + 93m^4 - 30m^2a^2}{5040\varrho^4} + Gl_6\right\}.$$

Durch cyklische Vertauschung von A, B, C und a, b, c folgt hieraus weiter:

$$B - B^* = \frac{F^*}{3\varrho^2}\left\{1 + \frac{7m^2 - 2b^2}{40\varrho^2} + \frac{31n^4 - 10b^4 + 93m^4 - 30m^2b^2}{5040\varrho^4} + Gl_6\right\},$$

$$C - C^* = \frac{F^*}{3\varrho^2}\left\{1 + \frac{7m^2 - 2c^2}{40\varrho^2} + \frac{31n^4 - 10c^4 + 93m^4 - 30m^2c^2}{5040\varrho^4} + Gl_6\right\}.$$

Die Addition dieser 3 Formeln giebt linker Hand ε falls die Winkel $< 180^0$ sind. Sind die Winkel $> 180^0$, so ist $A^* + B^* + C^* = 900^0$ und daher

$$(A + B + C) - (A^* + B^* + C^*) = \text{Excefs} - 720^0,$$

welchen negativen Wert wir aber wie früher mit ε bezeichnen. Man hat somit:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho'' \frac{F^*}{\varrho^2}\left(1 + \frac{m^2}{8\varrho^2} + \frac{n^4 + 3m^4}{240\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \log \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \log\left(\varrho'' \frac{F^*}{\varrho^2}\right) + M\left(\frac{m^2}{8\varrho^2} + \frac{8n^4 + 9m^4}{1920\varrho^4} + Gl_6\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nimmt man von ε ein Dritteil und subtrahiert es von $A - A^*$ u. s. f., so ergiebt sich weiter:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3\varrho^2}\left(\frac{m^2 - a^2}{20\varrho^2} + \frac{(n^4 - a^4) + 3m^2(m^2 - a^2)}{504\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{B - B^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3\varrho^2}\left(\frac{m^2 - b^2}{20\varrho^2} + \frac{(n^4 - b^4) + 3m^2(m^2 - b^2)}{504\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{C - C^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3\varrho^2}\left(\frac{m^2 - c^2}{20\varrho^2} + \frac{(n^4 - c^4) + 3m^2(m^2 - c^2)}{504\varrho^4} + Gl_6\right). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

In den Formeln (2) und (3) ist das Vorzeichen von F^* der Berechnung aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel entsprechend zu nehmen. Benutzt man (2), um aus (3) überhaupt F^* zu eliminieren, dann erhält man:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - a^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\} \\ B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - b^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - b^4) - 3m^2(m^2 - b^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\} \\ C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - c^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - c^4) - 3m^2(m^2 - c^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die hierbei notwendigen Divisionen der 1. Parenthese von (2) in die Parenthesen von (3) sind jedenfalls zulässig wegen der zur Brauchbarkeit der vorstehenden Entwicklungen erforderlichen Beschränkung auf kleine Seitenlängen.

Legendre gab sein Theorem zuerst in den Memoiren der französischen Akademie fürs Jahr 1787; er reproduzierte es 12 Jahre später in dem Werk *Delambres: Méthodes analytiques* ..., und zwar ging er vom Sinussatz aus, indem er

$$\sin\alpha : \sin\beta = \sin A : \sin : B$$

durch

$$\alpha : \beta = \sin(A - u) : \sin(B - u)$$

ersetzte und die Unbekannte u danach bestimmte. Da $u = \frac{\varepsilon}{3}$ wird, so ergab sich die Möglichkeit, überhaupt das sphärische Dreieck auf ein ebenes zu reduzieren. Den Cosinussatz wandte (nach *Puissant*, *Traité de Géodésie*) *Lagrange* an in dem *Mémoire sur la Trigonometrie sphérique* (*Journal de l'École Polytechnique*, Nr. 6).

Wir benutzten zum Teil *Grunerts* Abhandlung im *Archiv für Math. und Physik* Bd. 9, S. 8 (1847), die es sich zur Aufgabe stellt, eine beliebig weit anwendbare Entwicklung zu geben. *Grunert* erwähnt auch ältere Darstellungen. Neuerdings ging *Nell* von der 3. Formel (2) S. 80 aus in der *Zeitschr. für Math. und Phys.* von *Schlömilch* Bd. 19, 1874, S. 324 bis 344.

In ganz anderer Weise ging *Andrae* vor (1. Bd. der *Dänischen Gradmessung*, 1867, S. 544), indem er zwei Ausdrücke für den Cosinus des zum sphärischen Winkel A gehörigen Sehnenwinkels $\mathfrak{A}$ einander gleich setzt: einen der Ausdrücke giebt die ebene Trigonometrie aus dem Sehnendreieck, den andern die sphärische Trigonometrie aus A und den Neigungswinkeln der Schenkel von $\mathfrak{A}$ gegen die Tangentialebene in A. Diese Methode, welche *Zachariae* in seinem Werke *Die geodätischen Hauptpunkte*... (deutsch von *Lamp*, 1878, S. 126—128) reproduziert, hat den Vorteil, unmittelbar auch bei kleinen Dreiecken auf dem Ellipsoid angewandt werden zu können.

Auch *Hansen* entwickelt das Theorem und giebt die Glieder 6. Ordnung in ε und $A - A^*$, u. s. f. S. 219—221 der *Geodätischen Untersuchungen* (1865) an.

Neuerdings hat *Meissel* in den Astronom. Nachr. Bd. 95 (1879) S. 70, Nr. 2261 mittelst der elliptischen Funktionen Formeln abgeleitet, die die Auflösung eines beliebig grofsen sphärischen Dreiecks auf die eines *ebenen* zurückführen. Diese Formeln sind aber für Dreiecke mit *kurzen* Seiten, wie man leicht findet, viel weniger einfach als *Legendres* Satz, namentlich auch im Hinblick auf spitze Dreiecke. *Meissels* eigne Formelangaben für diesen Fall sind zu sehr abgekürzt.

§ 16. Numerischer Betrag der höhern Glieder. Ein gleichseitiges Dreieck mit $0{,}1\,\varrho$ als Wert der Seiten a, b, c giebt, weil $m = n = 0{,}1\,\varrho$ wird:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = 2062{,}65\,\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{0{,}01}{8} + \frac{0{,}0001}{60}\right)$$

oder

$$\varepsilon = 893{,}16'' + 1{,}12'' + 0{,}0015''. \tag{1}$$

Andere Dreiecke mit demselben Durchschnitt m^2 für die Quadrate der Seitenlängen haben kleinere Flächen F^*; führt man nämlich im Ausdruck (5) S. 91 für F^* die Gröfse m und die Hilfsgröfse

$$\vartheta^2 = b^2 - c^2$$

ein — wobei man sich immer $b > c$ denken kann —, so wird

$$F^{*2} = \frac{1}{16}\,(6a^2m^2 - 3a^4 - \vartheta^4), \tag{2}$$

und dies zeigt, dafs $\vartheta = 0$ und $a = m$, d. h. das gleichseitige Dreieck, die Fläche F^* zu einem Maximum machen.

Hiernach nehmen das 1. und 2. Glied von ε ab, sobald bei gleichem Werte von m das Dreieck sich von der gleichseitigen Form entfernt.

Was nun das 3. Glied anbetrifft, so ist zunächst mit Rücksicht auf die Bedeutung von n nach Formel (1) S. 92

$$n^4 = \frac{1}{6}(9m^4 - 6m^2a^2 + 3a^4 + \vartheta^4) \text{ d. i. } \frac{1}{6}(9m^4 - 16F^{*2}). \quad (3)$$

Dies in das Produkt $F^*(n^4 + 3m^4)$, von welchem das 3. Glied wesentlich abhängt, eingeführt, findet sich leicht für dieses der Ausdruck

$$\varrho'' \frac{F^*(27m^4 - 16F^{*2})}{1440\varrho^6}, \quad (4)$$

dessen Differentialquotient nach F^* stets positiv ist, weil für das gleichseitige Dreieck (dessen F^* ein Maximum ist) F^{*2} nur $3m^4 : 16$ beträgt.

*Sonach sind alle drei Glieder des Excesses für das gleichseitige Dreieck ein Maximum mit Bezug auf alle Dreiecke gleichen Durchschnittswertes der Quadrate der 3 Seiten.**)

Man hat damit unter Zugrundelegung der Werte (1) folgendes Täfelchen der

Maximalwerte der Glieder in ε:

$m =$	$m =$	2. Glied	3. Glied
$0{,}2\varrho$	1274^{km}	18″	0,1″
0,1	637	1,12″	0,0015″
0,05	319	0,070	.
0,02	127	0,0018	.
0,01	64	0,0001	.
0,001	6,4	$\varepsilon = 0{,}09''$	

(5)

Um nunmehr den Einflufs derjenigen Glieder, um welche die

*) Für die Annahme eines konstanten Durchschnittswertes der 1. Potenzen der Seiten würde nichts wesentlich anderes resultieren; der Kalkül ist aber mit konstantem m^2 einfacher und aufserdem ist es praktisch ganz gleichgültig, was von beiden genommen wird. Dagegen würde ein Resultat in Bezug auf verschiedene Dreiecke konstanten Inhalts wenig Wert besitzen, weil die Geodäsie die Dreiecke in Ordnungen nach ihrer Seitenlänge und *nicht* nach dem Inhalt klassifiziert.



Reduktionen $A - A^*$, u. s. f. von $\frac{\varepsilon}{3}$ abweichen, zu untersuchen, betrachten wir zunächst das 2. Glied in $\left(A - A^* - \frac{\varepsilon}{3}\right)$ nach Formel (3) S. 93:

$$\frac{\varrho'' F^* (m^2 - a^2)}{60 \varrho^4}. \tag{6}$$

Die Einführung von (2) zeigt sofort, dafs zu einem Maximum des Gliedes jedenfalls $\vartheta = 0$ erforderlich ist. Weiter giebt die Differentiation nach a als Bedingung $a^2 = m^2 \left(1 \pm \sqrt{0,5}\right)$ an, mit

$$\mp \varrho'' \frac{\sqrt{3}}{480} \frac{m^4}{\varrho^4} \tag{7}$$

als Maximalwert von (6). Derselbe beträgt sonach:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{für } m \text{ gleich} & 0,2\varrho & 0,1\varrho & 0,05\varrho & 0,02\varrho \\ & \mp 1,2'' & \mp 0,074'' & \mp 0,005'' & \mp 0,0001''. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Er ist weit geringer als der Maximalwert des entsprechenden Gliedes in $\frac{\varepsilon}{3}$. Man kann daher sagen:

Eine gleichmäfsige Verteilung des Excesses auf die 3 Winkel reicht jedenfalls aus, sobald ε nach der einfachen Formel $\varrho'' F^* : \varrho^2$ berechnet werden darf.

Hierbei ist als selbstverständlich vorausgesetzt, dafs das 3. Glied in den Reduktionen $A - A^* - \frac{\varepsilon}{3}$ u. s. f. nach den Formeln (3) S. 93 und ebenso in denen nach den Formeln (4) S. 93 gegen das 2. Glied zurücktritt, weil es von höherer Ordnung ist. Man sieht aber auf einen Blick, dafs dies Glied notwendig kleiner ist, als das entsprechende in $\frac{\varepsilon}{3}$, Formel (2) S. 93, man darf es also mit diesem gleichzeitig vernachlässigen.

Anstatt die Glieder 4. und 6. Ordnung zu entwickeln, kann man auch zur Ermittlung der Genauigkeit des *Legendre*schen Theorems einen Grenzwert für die Summe aller höhern Glieder aufsuchen, welchen sie nicht überschreiten können. Vergl. hierzu *Mertens, Zeitschr. für Math. und Phys.* von *Schlömilch* 1875, S. 286.

Ein anderes Verfahren wandte *Gaufs* an, indem er für ($a \sin B^* : b \sin A^*$) einen strengen Ausdruck aufstellte, der für sehr kleine Dreiecke augenscheinlich von der Einheit nur wenig abweicht. (*Crelles Journal* 1841, Bd. 22, S. 96 u. ff. oder *Bauernfeinds Vermessungskunde* Bd. 2, 6. Aufl., S. 259).

§ 17. Excefsanteile aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel.

Der Fall, dafs 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben

sind, ist ohne Zweifel häufiger als derjenige, dafs die 3 Seiten bekannt sind. Wir müssen ihn daher besonders betrachten, wobei wir zunächst die Formeln des § 15 zu einer indirekten Rechnung benutzen.

Sind gegeben b, c und A, so ist bei diesem Verfahren

$$\left.\begin{array}{c} F^* = \frac{1}{2}\, bc \sin A^* \\ \text{und} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A^* \end{array}\right\} \quad (1)$$

durch *successive Annäherung* aufzusuchen. In 1. Annäherung nimmt man $A^* = A$, berechnet mittelst Formel

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \frac{\varrho'' bc \sin A}{2\varrho^2} + Gl_4 \quad (2)$$

den Excefs, nimmt sodann in 2. Annäherung $A^* = A - \frac{\varepsilon}{3}$ und erhält nun aus den Formeln (1) die Gröfsen F^* und a^2 jedenfalls so genau, dafs man für die Formeln (2), (3) und (4) S. 93 die 2. und 3. Glieder bereits definitiv berechnen kann, während das Hauptglied in ε noch einen Fehler 6. Ordnung aufweist, der durch eine folgende Annäherung beseitigt wird.

Diese Annäherungsrechnung ist nicht unbequem. Will man aber *direkte Formeln*, so mufs man diese Rechnung einmal mit den allgemeinen Ausdrücken selbst durchführen.

Die Formeln (1) geben, darin $A^* = A - (A - A^*)$ gesetzt und $\sin(A - A^*)$, sowie $\cos(A - A^*)$ in Reihen verwandelt:

$$F^* = \frac{1}{2}\, bc \left\{ \sin A - (A - A^*) \cos A - \frac{(A - A^*)^2}{2\varrho^2} \sin A + Gl_6 \right\},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2bc \{ \sin A\, (A - A^*) + Gl_4 \}.$$

Nach S. 92 hat man aber in einer für den Zweck der Substitution in vorstehende Formeln passenden Gestalt:

$$A - A^* = \frac{F^*}{3\varrho^2} \left(1 + \frac{7m^2 - 2a^2}{40\varrho^2} + Gl_4 \right)$$

und diese Formel giebt mit jenen bei successiver gegenseitiger Substitution:

$$F^* = \frac{1}{2}\, bc \sin A \left(1 - \frac{bc \cos A}{6\varrho^2} + Gl_4 \right),$$

$$bc \cos A = \frac{3}{2}\, m^2 - a^2 + bc\, Gl_2,$$

$$A - A^* = \frac{1}{6}\, bc \sin A \left(1 + \frac{14a^2 - 9m^2}{120\varrho^2} + Gl_4\right),$$

$$bc \cos A = \frac{3}{2}\, m^2 - a^2 - \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{6\varrho^2} + bc\, Gl_4,$$

$$F^* = \frac{1}{2}\, bc \sin A \left(1 - \frac{3m^2 - 2a^2}{12\varrho^2} - \frac{(3m^2 - 2a^2)(14a^2 - 9m^2)}{1440\varrho^4} + \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{72\varrho^4} + Gl_6\right),$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{bc \sin A}{2\varrho^2} \left(1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24\varrho^2} + \frac{14a^4 - 15a^2m^2 + 3n^4}{720\varrho^4} + \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{72\varrho^4} + Gl_6\right). \qquad (3)$$

Bei diesen Entwicklungen ist nur das Eine fraglich, ob es nämlich zulässig ist, in F^* und damit in ε $\sin A$ als Faktor zu ziehen. Die Entscheidung behalten wir uns vor.

Mit Benutzung der bekannten Reihe $\log(1 + u) = M\left(u - \frac{u^2}{2} + \cdots\right)$ stellen wir nun ε in logarithmischer Form dar und erhalten schliefslich mit Benutzung der (4) S. 93 nachstehendes Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a^2}{\varrho^2} &= \frac{b^2}{\varrho^2} + \frac{c^2}{\varrho^2} - \frac{2bc \cos A}{\varrho^2} - \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{3\varrho^4} + Gl_6 \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \log \frac{\varrho'' bc \sin A}{2\varrho^2} + M\left\{\frac{4a^2 - 3m^2}{24\varrho^2} + \frac{32a^4 - 45m^4 + 24n^4}{5760\varrho^4} + \frac{b^2c^2 \sin^2 A}{72\varrho^4}\right\} + Gl_6 \\
A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - a^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\} \\
B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - b^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - b^4) - 3m^2(m^2 - b^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\} \\
C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - c^2}{20\varrho^2} + \frac{20(n^4 - c^4) - 3m^2(m^2 - c^2)}{10080\varrho^4} + Gl_6\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

In Bezug auf die Gültigkeit vorstehender Entwicklung bemerken wir, dafs man (3) auch als eine Umformung der 2. Formel (3) S. 84, welche in Anwendung auf β, γ und A

$$\varepsilon = 2 \operatorname{arctan} \frac{\tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2} \sin A}{1 + \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2} \cos A}$$

ergiebt, auffassen darf. Da die Reihe für $\operatorname{arctan} u$ für val. abs. $u < 1$ gilt, so mufs man sich jedenfalls auf val. abs. $\varepsilon < 90^0$ beschränken. Die Auflösung des Nenners $1 + \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2} \cos A$ in eine Reihe im Zähler und die weitere Verwandlung in eine Reihe nach Potenzen von β und γ fordern sodann noch β und $\gamma < \frac{\pi}{2}$,

und man bemerkt nun leicht die Zulässigkeit der Entwicklung (3) für kleine Werte von β und γ; aufserdem sieht man sogleich, dafs ε den Faktor sin A hat.

Der Einflufs des 2. Gliedes in ε und log ε auf ε ist näherungsweise gleich

$$\varrho'' \frac{F^*}{\varrho^2} \frac{4a^2 - 3m^2}{24\varrho^2}, \tag{5}$$

worin man nach (2) S. 94 einem Maximum entsprechend mit $\vartheta = 0$ d. h. $b = c$ setzen kann:

$$F^{*2} = \frac{3}{16} a^2 (2m^2 - a^2). \tag{6}$$

Die Differentiation nach a zeigt bei konstantem m^2 ein Maximum an für a^2 nahezu gleich $\frac{3}{2} m^2$, wofür (5) übergeht in

$$\varrho'' \frac{3}{64} \frac{m^4}{\varrho^4}. \tag{7}$$

Für $m = 0{,}1\varrho$ giebt dies den Betrag von 1″, nahe übereinstimmend mit dem entsprechenden Glied in (2) S. 93.

Das 3. und 4. Glied in log ε haben auf ε einen Einflufs näherungsweise gleich

$$\varrho'' \frac{F^*}{\varrho^2} \frac{32a^4 - 45m^4 + 24n^4 + 320F^{*2}}{5760\varrho^4}$$

d. i. für $\vartheta = 0$ mit F^* nach (6) und n^4 nach (3) S. 95 auch gleich

$$\varrho'' \frac{\sqrt{3a^2(2m^2 - a^2)}}{4\varrho^2} \frac{96m^2a^2 - 16a^4 - 9m^4}{5760\varrho^4}. \tag{8}$$

Dies ist im Maximum nicht erheblich kleiner als der Einflufs entsprechender Glieder in (2) S. 93.

Täfelchen (5) S. 95 gilt daher im wesentlichen auch für den Fall, dafs Formel (4) zur Anwendung gelangt.

§ 18. **Beliebige drei Stücke gegeben.** In anderen als den bisher betrachteten beiden Fällen kann man sich immer durch successive Annäherung nach den Formeln des § 15 S. 92 helfen, in der Weise, dafs ähnlich wie S. 97 F^* wiederholt aus verbesserten Näherungswerten derjenigen Stücke des ebenen Hilfsdreiecks berechnet wird, die den gegebenen Stücken des sphärischen Dreiecks entsprechen.

Wir gehen darauf nicht weiter ein, teilen dagegen noch eine Formel mit, die für ungewöhnlich grofse beobachtete Dreiecke, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel als bekannt vorausgesetzt werden, von nutzen ist.

Hier wird zwar immer eine gleichmäfsige Verteilung von ε auf die drei Winkel ausreichen, aber unter Umständen der Wunsch entstehen, den Einflufs der Glieder 4. Ordnung auf ε kennen zu lernen. Nun ist nach S. 83 (1)

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(B+C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\,. \tag{1}$$

Setzt man hierin $\frac{\varepsilon}{2}$ für $\sin\frac{\varepsilon}{2}$, so giebt dies einen Fehler von der Ordnung ε^3 oder 6. Ordnung. Ferner ist nach S. 32 (1)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\cos\frac{\alpha}{2}} + Gl_5.$$

Man hat daher

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\varrho^2}\,\frac{\sin B\sin C}{\sin\left(B+C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\sqrt[3]{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + Gl_6.$$

Führt man rechter Hand die 1. Formel (5) S. 81 ein, so folgt:

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\varrho^2}\sqrt[3]{\frac{\sin^2 B\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin^2 C\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(B+C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} + Gl_6. \tag{2}$$

Hieraus ergiebt sich endlich für logarithmische Rechnung, wenn $\Delta\log\sin$ die Änderung des Briggischen Logarithmus für eine Sekunde anzeigt:

$$\log\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \log\frac{\varrho'' a^2\sin B\sin C}{2\varrho^2\sin(B+C)} \tag{3}$$

$$+\frac{\varepsilon\text{ in Sek.}}{2}\left\{\Delta\log\sin(B+C) - \frac{\Delta\log\sin B + \Delta\log\sin C}{3}\right\} + \cdots .^{*)}$$

Sind alle drei Winkel beobachtet, so wird man es vorziehen, mit A anstatt mit $(B+C)$ zu rechnen, und zwar genügt es, in vorstehender Formel $(B+C)$ durch A zu ersetzen, wie leicht zu finden.

Ist z. B. $a = 0{,}05\varrho$ mit B und $C = 300^0$, so wird, da abgesehn vom Vorzeichen des Sinus $\Delta\log\sin(B+C) = +\Delta\log\sin 60^0$ ist,

$$\log\varepsilon = 2{,}348866_n - 0{,}000227;\quad \varepsilon = -223{,}172'';$$

übereinstimmend mit einer Rechnung nach der strengen Ausgangsformel (1).

§. 19. Zahlenbeispiel. $b = c = 0{,}25\varrho$; $A = 270^0$.

*) Mit Benutzung eines Gedankens von *Kummell*, *Astronom. Nachr.* Bd. 89, S. 54 (Nr. 2116).

Die *Gaufsischen Gleichungen* geben hierzu, da $\beta = \gamma = 14^0 19' 26{,}202''$ wird und die oberen Zeichen gelten:

$$\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = [9{,}2428916.5 - 10]$$

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = [9{,}8494850.0_n - 10]$$

$$\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = [9{,}8357695.2 - 10].$$

Hierin ist die 8. Ziffer nur Interpolationsziffer aus den Proportionalteilen bei Anwendung 7ziffriger Logarithmen. Die 3. und 4. Gleichung geben, wenn man $\alpha < \pi$ fordert:

$$\frac{B+C}{2} = 360^0 - 45^0 54' 16{,}489'', \text{ dazu die 1. und 2.}$$

$$\frac{B-C}{2} = 0$$

$$B = C = 314^0 5' 43.511''$$

$$\varepsilon = 718^0 11' 27{,}022'' = -1^0 48' 32{,}978''.$$

Die 1. und 2., bezw. die 3. und 4. Gleichung geben ferner:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = [9{,}2428916.5 - 10] \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = [9{,}9932505.3 - 10],$$

$$\frac{\alpha}{2} = 10^0 4' 30{,}813'' \quad \alpha = 20^0 9' 1{,}626'',$$

$$a = 0{,}35169173\,\varrho.$$

Zur *Kontrolle* kann eine der Formeln (3) S. 84 dienen. Die 2. giebt:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = -\tan^2\frac{\beta}{2} \quad \text{also} \quad \varepsilon = -6512{,}978''.$$

Die *Formeln* (*4*) *S. 98* führen dagegen zu nachstehenden Zahlen:

$$b^2 = c^2 = 0{,}0625\varrho^2, \quad a^2 = 0{,}123698\varrho^2, \quad m^2 = 0{,}082899\varrho^2,$$
$$b^4 = c^4 = 0{,}003906\varrho^4, \quad a^4 = 0{,}015301\varrho^4, \quad n^4 = 0{,}007704\varrho^4,$$
$$m^4 = 0{,}006872\varrho^4,$$

$$\log \varepsilon_{\text{in Sek.}} = 3{,}8092751.5_n + 44532.4 + 275.5 + 235.7$$
$$= 3{,}8137795.1_n$$
$$\varepsilon = -6512{,}976'' = -1^0 48' 32{,}976''.$$

$$A - A^* = -2170{,}992 + 4{,}429 + 0{,}033 - 0{,}002 = -2166{,}532'',$$

$$\left.\begin{array}{l} B - B^* = \\ C - C^* = \end{array}\right\} - 2170{,}992 - 2{,}215 - 0{,}016 + 0{,}001 = - 2173{,}222''.$$

Hieraus folgt

$$A^* = 270^0\,36'\,6{,}532'' \quad \text{und da} \quad A^* + B^* + C^* = 900^0 \text{ ist,}$$
$$B^* = C^* = 314^0\,41'\,56{,}734'', \quad \text{also}$$
$$B = C \;= 314 \quad 5 \;\; 43{,}512.$$

Ferner giebt *der Sinussatz*

$$a = 0{,}25\varrho \sin A^* : \sin B^* = 0{,}35169173\,\varrho.$$

§ 20. **Polarkoordinaten.** Für Gradmessungszwecke kann es zweckmäfsig erscheinen, aus dem Dreiecksnetze die Entfernungen der astronomisch bestimmten Dreieckspunkte zu ermitteln. Man wird damit zu der Aufgabe geführt, aus einer Reihe von Seiten beobachteter Dreiecke, etwa P_0P_1, $P_1P_2, \ldots P_{n-1}P_n$, welche an einen astronomischen Dreieckspunkt P_0 anschliefsen, successive die Radienvektoren P_0P_2, $P_0P_3, \ldots P_0P_n$ und ihre Azimute gegen eine durch P_0 gehende Anfangsrichtung zu berechnen.

Es genügt, das Verfahren für P_0P_2 zu erörtern. Der Einfachheit halber schreiben wir nur die Indices der Punkte P an.

Im Dreieck 0 . 1 . 2 sind gegeben die Seiten 0 . 1 und 1 . 2, sowie der Zwischenwinkel als Differenz der Azimute α der Seiten. Wir führen folgende Bezeichnungen ein, wobei die cyklische Reihenfolge 0 . 1 . 2 . 0 zu beachten ist (vergl. S. 71):

$$\left.\begin{array}{c} \text{Seite } 0\,.\,1 \text{ mit } b, \quad \text{Seite } 0\,.\,2 \text{ mit } a, \\ \text{Seite } 1\,.\,2 \text{ mit } c, \\ \sphericalangle\binom{2\,.\,0}{1} = -\alpha_{1\,.\,2} + \alpha_{1\,.\,0} \text{ mit } A, \\ \sphericalangle\binom{1\,.\,2}{0} = -\alpha_{0\,.\,1} + \alpha_{0\,.\,2} \quad ,, \quad C, \\ \sphericalangle\binom{0\,.\,1}{2} = -\alpha_{2\,.\,0} + \alpha_{2\,.\,1} \quad ,, \quad B. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Jetzt ist das Formelsystem (4) S. 98 anzuwenden und das ebene Dreieck aufzulösen mittelst der Formeln

$$\left.\begin{array}{l} a \sin \dfrac{B^* - C^*}{2} = (b - c) \sin \dfrac{B^* + C^*}{2}, \\ a \cos \dfrac{B^* - C^*}{2} = (b + c) \cos \dfrac{B^* + C^*}{2}, \\ \dfrac{B^* + C^*}{2} \left| \begin{array}{l} = \;\; 90^0 - \dfrac{A^*}{2};\; A^* < 180, \\ = 450^0 - \dfrac{A^*}{2};\; A^* > 180. \end{array}\right. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Diese Formeln der ebenen Trigonometrie gehen aus den beiden ersten *Gaufs*ischen Gleichungen S. 79 hervor, wenn man die Sinus der Seiten in Reihen verwandelt, beiderseits mit ϱ multipliziert und dann $\varrho = \infty$ setzt. Die 3. und 4. Gleichung (10) S. 79 geben die Gleichung für $\frac{B^* + C^*}{2}$.

Aus B^* und C^* folgen nun B und C mittelst der (4) S. 98 und es ist sodann:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{0\,.\,2} &= C + \alpha_{0\,.\,1}, \\ \alpha_{2\,.\,0} &= \alpha_{2\,.\,1} - B, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

womit man alles hat, um die Rechnung im Dreieck 0.2.3 fortsetzen zu können.

Sind die Logarithmen von b und c gegeben, so ist bequemer als (2) das Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned} &\log \cot \lambda = \log b - \log c, \\ &\tan \frac{B^* - C^*}{2} = \tan \frac{B^* + C^*}{2} \cot(\lambda + 45^0), \\ &\frac{B^* + C^*}{2} \begin{cases} = 90^0 - \frac{A^*}{2}; & A^* < 180^0, \\ = 450^0 - \frac{A^*}{2}; & A^* > 180^0, \end{cases} \\ &a = b \frac{\sin A^*}{\sin B^*} = c \frac{\sin A^*}{\sin C^*}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

zu welchem man gelangt, wenn man den Ausdruck

$$\frac{\frac{\sin B^*}{\sin C^*} - 1}{\frac{\sin B^*}{\sin C^*} + 1} = \frac{\cot \lambda - 1}{\cot \lambda + 1} \tag{5}$$

bildet. Dies System (4) setzt aber voraus, dafs das Dreieck nicht sehr stumpf ist, welcher Fall bei Berechnung von Polarkoordinaten gerade häufig eintritt.

§ 21. Die Additamentenmethode. Das *Legendre*sche Theorem gewährt die Möglichkeit, ohne Benutzung der sphärischen Trigonometrie nach den Formeln der ebenen Trigonometrie von einer gegebenen Basis ausgehend alle Seiten des Dreiecksnetzes zu berechnen. Soweit es sich hierbei um beobachtete Dreiecke handelt, ist die Anwendung des Theorems noch durch den Umstand erleichtert, dafs behufs Ausgleichung der Dreieckswinkel nach der Methode der kleinsten

Quadrate jedenfalls die Excesse schon vorher berechnet werden müssen und somit für die weitere Rechnung nur die geringfügige Arbeit der Subtraktion von $\frac{\varepsilon}{3}$ von jedem sphärischen Winkel erforderlich ist, um danach sofort die ebene Trigonometrie anwenden zu können. Aber auch dann, wenn ε erst berechnet werden mufs, ist das Verfahren ein so einfaches und übersichtliches, dafs es jetzt wohl ausschliefslich benutzt werden dürfte. Immerhin ist doch zweier anderen Methoden zu gedenken, die vielleicht unter Umständen mit dieser Berechnungsweise zu konkurrieren imstande sind, mindestens aber ein wissenschaftliches Interesse beanspruchen. Zunächst die Additamentenmethode.

Dieselbe setzt allgemein für eine Dreieckseite s

$$\log \sin \frac{s}{\varrho} = \log \frac{s}{\varrho} - A_s = \log s - \log \varrho - A_s. \tag{1}$$

Handelt es sich nur um die *Anwendung des Sinussatzes* auf a, b, A und B, so hat man also in der Gleichung

$$\sin \frac{b}{\varrho} = \sin \frac{a}{\varrho} \frac{\sin B}{\sin A}$$

zu substituieren:

$$\log \sin \frac{b}{\varrho} = \log b - \log \varrho - A_b,$$

$$\log \sin \frac{a}{\varrho} = \log a - \log \varrho - A_a.$$

Dies giebt:

$$(\log b - A_b) = (\log a - A_a) + \log \sin B - \log \sin A. \tag{2}$$

Steht eine Tafel der A_s mit dem Argument log sin s zur Disposition, so kann man in einer zusammenhängenden Dreieckskette nun in der Weise rechnen, dafs man den log Basis um sein Additament vermindert und nach (2) von Dreieck zu Dreieck für alle Seiten $(\log s - A_s)$ aufsucht, schliefslich aber alle diese Werte um A_s vermehrt.

Die Additamentenmethode erfordert die Konstruktion einer Tabelle für A_s. Man kann dazu $\log \sin \frac{s}{\varrho}$ in eine Reihe entwickeln, einfacher aber die S der Logarithmentafeln anwenden (S. 33). Es wird

$$S = \log \sin \frac{s}{\varrho} - \log \frac{\varrho'' s}{\varrho};$$

vergleicht man dies mit Formel (1), so folgt zur Bestimmung von A_s:

$$A_s = -S - \log \varrho'' = -S - 5{,}3144251.3, \tag{3}$$

S zum Argument $\frac{\varrho'' s}{\varrho}$ gehörig.

Beispielsweise giebt $\log s = 5{,}48000$ mit $\log \varrho = 6{,}80416$ zunächst

$$\log \frac{\varrho'' s}{\varrho} = 3{,}99027 \text{ mit } S = 4{,}6854121.8 - 10$$

und daraus folgt nun

$$A_s = 10 - 9{,}9998373.1 = + 1626.9.$$

Man kann A_s als Differenz von log sin und log arc auch aus *Bremikers* Logarithmentafeln mit 6 Stellen entnehmen, wo es als b neben den Sinuslogarithmen steht — allerdings nur zur Rechnung mit 7 Decimalstellen geeignet. Für 8ziffrige Rechnung vergl. eine Tafel in *Bremikers Studien* S. 80.

Da für Dreiecke mit Seiten gröfser als $0{,}05\varrho$ nach S. 96 (8) eine gleichmäfsige Verteilung des Excesses auf die 3 Dreieckswinkel nicht mehr zulässig ist, so wird hier die Additamentenmethode zur Seitenberechnung nach dem Sinussatz jedenfalls bequemer als *Legendres* Theorem. Wir werden aber später sehen, dafs Dreiecke von derartigen Dimensionen überhaupt nicht mehr als sphärische berechnet werden können und (ohne dafs wir darauf zurückkommen) wird sich zeigen, dafs der Sinussatz für Dreiecke auf dem Rotationsellipsoid auf die Anwendung von *Legendres* Theorem (in erweiterter Gestalt) *allein* hinweist.

Insoweit die Kugelgestalt der Niveauflächen eine zulässige Hypothese ist, führt die Additamentenmethode aber zu einem brauchbaren Verfahren.

Sie wurde in der 1. Hälfte dieses Jahrhunderts für süddeutsche Triangulierungen angewandt, namentlich von *Soldner* für die bayerische Landesvermessung, seit 1810. Vergl. *Die bayerische Landesvermessung u. s. w.* München 1873. S. 222; ferner *Jordan, Handbuch der Vermessungskunde* Bd. 2, S. 182, sowie *Nell* in der *Zeitschr. für Math. und Phys.* Bd. 19. 1874. S. 344—353. Hier finden sich auch Anwendungen der Additamentenmethode auf andere Fälle als den Sinussatz. In dieser Beziehung mag noch bemerkt werden, dafs man z. B. bei Auflösung der *Gaufs*ischen Gleichungen bei Seitenlängen bis zu $0{,}05\varrho$ genügend genau für Rechnung mit 7 Decimalen der Logarithmen

$$\log \cos \frac{s}{\varrho} = -3A_s$$

setzen kann, wie die 1. Formel (1) S. 32 § 10 zeigt.

§ 22. Strenge Formeln für Sehnen und Horizontalwinkel.

Wenn man nicht unmittelbar die Dreiecksseiten auf der Kugelfläche, sondern vorerst die zugehörigen Sehnen aus der Basissehne und den Winkeln ableitet, so giebt es dazu *strenge* Relationen zwischen den Sehnen und den Horizontalwinkeln.

Der Winkel der Sehnendreiecke bedarf man nicht. Die Sehnen

bezeichnen wir mit gotischen Buchstaben und setzen voraus, dafs a, b und $c < \pi\varrho$*) seien; dann erhalten wir sofort aus bekannten, einfachen geometrischen Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a} = 2\varrho \sin \frac{a}{2\varrho}, \quad \mathfrak{b} = 2\varrho \sin \frac{b}{2\varrho}, \quad \mathfrak{c} = 2\varrho \sin \frac{c}{2\varrho}, \\ \text{oder} \\ \mathfrak{a} = 2\varrho \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \mathfrak{b} = 2\varrho \sin \frac{\beta}{2}, \quad \mathfrak{c} = 2\varrho \sin \frac{\gamma}{2}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Setzt man dies in die Formel (8) S. 82, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c} = \cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) : \cos\frac{\beta}{2}\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) : \cos\frac{\gamma}{2}\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Nun hat man aber nach der 1. Formel (5) S. 81, indem man sie auf α, β und γ anwendet:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} : \cos^2\frac{\beta}{2} : \cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin A}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)} : \frac{\sin B}{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)} : \frac{\sin C}{\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)};$$

eliminiert man hiermit α, β, γ aus der vorigen Proportion, so folgt eine strenge Formel zur Berechnung der Seiten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bei gegebener Seite $\mathfrak{a}$ und bekannten 3 Winkeln A, B, C:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\sin A \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \frac{\mathfrak{b}}{\sqrt{\sin B \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{\sin C \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}}. \quad (2)$$

Zu der Berechnung von ε aus einer Sehne $\mathfrak{a}$ und den Horizontalwinkeln giebt Formel (1) § 11 S. 83 die Gleichung

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\mathfrak{a}^2}{4\varrho^2}\frac{\sin B \sin C}{\sin\left(B + C - \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{\mathfrak{a}^2}{4\varrho^2}\frac{\sin B \sin C}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \quad (3)$$

deren Auflösung durch Annäherungen schon am genannten Orte mit Bezug auf die in der Geodäsie in der Regel nur in betracht kommenden Werte von ε behandelt ist.

Zur vollständigen Berechnung eines Dreiecksnetzes sind auch Formeln für zwei Seiten und ihren Zwischenwinkel als gegebene Stücke unter Umständen erforderlich. Der Versuch, auch hierzu strenge Formeln aufzustellen, führt nicht völlig zum Ziele, insofern

*) Da zu 3 Punkten auf der Kugel nur *ein* Sehnendreieck gehört, welches immer mit einem sphärischen Dreieck korrespondiert, dessen Seiten dieser Bedingung genügen, so liegt in derselben keine Beschränkung.

man nur zu Formeln gelangt, die eine successive Annäherungsrechnung erheischen und sich wenig zur Anwendung eignen. Wir unterlassen daher deren Mitteilung und gehen sogleich zu den Näherungsformeln über.

§ 23. **Näherungsformeln. Grunerts Satz.** Zur Reduktion von der Sehne $\mathfrak{a}$ auf die Seite a und umgekehrt erhält man mittelst der 1. Formeln von (3) und (4) S. 29 u. 30 für $u = \frac{a}{2\varrho}$ und $\sin u = \frac{\mathfrak{a}}{2\varrho}$ leicht die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \log \mathfrak{a} &= \log a - \tfrac{1}{6} M \left\{ \left(\tfrac{a}{2\varrho}\right)^2 + \tfrac{1}{30} \left(\tfrac{a}{2\varrho}\right)^4 + \cdots \right\}, \\ \log a &= \log \mathfrak{a} + \tfrac{1}{6} M \left\{ \left(\tfrac{\mathfrak{a}}{2\varrho}\right)^2 + \tfrac{11}{30} \left(\tfrac{\mathfrak{a}}{2\varrho}\right)^4 + \cdots \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

In der Regel wird man sich aber der S. 105 erwähnten Hilfstafeln für die Differenz von Sinus und Arcus bedienen.

Es folgt nun ferner ohne weiteres aus den Relationen (2) des vorigen Paragraphen mit Vernachlässigung von Gliedern 4. Ordnung (in Bezug auf $\frac{s}{\varrho}$):

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c} = \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right) : \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right) : \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right). \quad (2)$$

Dies ist Grunerts Satz. Er unterscheidet sich von *Legendres* Satz dadurch, dafs die reduzierten Winkel *keinem* Dreieck angehören.

Zur Kenntnis der Glieder 4. Ordnung führt folgende Rechnung. Die Proportion

$$\mathfrak{b} : \mathfrak{c} = \sqrt{\sin B \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)} : \sqrt{\sin C \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad (3)$$

giebt durch Auflösung von $\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ in die Bestandteile und Division beider Wurzeln mit $\cos\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin B}{\sin C} \sqrt{\frac{1 - \cot B \tan\frac{\varepsilon}{2}}{1 - \cot C \tan\frac{\varepsilon}{2}}}. \quad (4)$$

Zähler und Nenner der Wurzel dieser Formel lassen sich für kleine Dreiecke nach dem binomischen Satze entwickeln. Es ist nämlich z. B. für den Nenner nach S. 84 2. Formel (3):

$$\cot C \tan\frac{\varepsilon}{2} = 1 : \left(1 + \cot\frac{\alpha}{2} \cot\frac{\beta}{2} \sec C\right) \quad (5)$$

und für kleine α und β ist demnach das Produkt $\cot C \tan \frac{\varepsilon}{2}$ stets zwischen -1 und $+1$ enthalten. Im allgemeinen und bei beliebigen Werten von C findet dies sicher statt, so lange $\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} > 2$ ist, d. h. die Dreiecksseiten in Gradmafs genommen ca. 70^0 nicht übersteigen. Beschränkt man sich auf kleine Werte von α, β und γ und betrachtet diese wie bisher als Gröfsen 1. Ordnung, so sind die Ausdrücke $\cot C \tan \frac{\varepsilon}{2}$, $\cot B \tan \frac{\varepsilon}{2}$ u. s. f., wie (5) zeigt, Gröfsen 2. Ordnung.

Man erhält nun aus (4)

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \cot B \tan \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \cot B \tan \frac{\varepsilon}{2}\right) + Gl_6}{1 - \frac{1}{2} \cot C \tan \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \cot C \tan \frac{\varepsilon}{2}\right) + Gl_6}$$

und hieraus folgt, wenn man Zähler und Nenner mit

$$1 - \frac{1}{8} \cot B \cot C \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32}$$

multipliziert, sowie unter der Annahme, dafs ε wie früher bei aufserhalb gezählten Dreieckswinkeln negativ genommen wird:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \cot B \tan \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \tan \frac{\varepsilon}{2} [\cot B + \cot C]\right) - \frac{\varepsilon^2}{32} + Gl_6}{1 - \frac{1}{2} \cot C \tan \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \tan \frac{\varepsilon}{2} [\cot B + \cot C]\right) - \frac{\varepsilon^2}{32} + Gl_6},$$

oder mit Benutzung einer (wie man rückwärts verificieren kann) völlig zulässigen einfachen Umformung in Zähler und Nenner:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin \left(B - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{32 \varrho''} [\cot B + \cot C]\right) + Gl_6}{\sin \left(C - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{32 \varrho''} [\cot B + \cot C]\right) + Gl_6}. \tag{6}$$

In dieser Formel ist angenommen, dafs ε in Sekunden ausgedrückt sei. Aufserdem mag bemerkt werden, dafs die Glieder 6. Ordnung u. s. f. im Zähler und Nenner ε nicht immer in Verbindung mit $\cot B$ und $\cot C$ enthalten, sondern auch *ein*mal wenigstens frei davon, dafs sie mithin wie $\sin B$ und $\sin C$ (also wie die Hauptglieder im Zähler und Nenner) verschwinden. Es ist aber *nicht* angänglich, sie ohne weiteres mit in diese Hauptglieder (als Incremente von B und C) hereinzunehmen.

Zur Berechnung des Excesses ε dient, mit Benutzung logarithmischer Differenzen, bis auf Glieder 6. Ordnung genau wieder Formel

(3) des vorigen Paragraphen, wobei es genügt, linker Hand $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ mit (ε in Sek.) : $2\varrho''$ zu vertauschen.

§ 24. 2 Sehnen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und der Horizontalwinkel A gegeben. Indem man $(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}):(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ bildet, folgt aus (6) S. 108 zunächst nachstehende Formel zur Berechnung von $(B+C)$:

$$\frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)+Gl_6}{\tan\left(\frac{B+C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{32}[\cot B+\cot C]\right)+Gl_6}, \tag{1}$$

wobei man beachten mag, dafs die Gl_6 für $B=C$ verschwinden, wie die oben gegebene Entwicklung unzweifelhaft nachweist. Linker Hand führt man einen Hilfswinkel ein wie S. 103, um die logarithmische Rechnung zu erleichtern, und rechter Hand setzt man im Nenner besser

$$\frac{\varepsilon^2}{32}[\cot B+\cot C]=\frac{\varepsilon\mathfrak{a}^2}{64\varrho^2}+\cdots. \tag{2}$$

Dafs diese Substitution zulässig ist, erkennt man leicht mittelst nachstehender, aus (4) S. 98 zu entnehmender Relationen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2ab\cos C}{\varrho^2}&=\frac{a^2+b^2-c^2}{\varrho^2}+Gl_4=\frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{\varrho^2}+Gl_4,\\ \frac{ab\sin C}{\varrho^2}&=2\varepsilon+Gl_4.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hieraus folgt für $\varepsilon\cot C$ und analog für $\varepsilon\cot B$:

$$\left.\begin{aligned}4\varepsilon\cot C&=\frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2}{\varrho^2}+Gl_4,\\ 4\varepsilon\cot B&=\frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}{\varrho^2}+Gl_4.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Entnimmt man nun noch zur Berechnung des Excesses die Formel (2) S. 85 mit gehöriger Vertauschung der Stücke des Dreiecks, so hat man:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\sin A}{4\varrho^2\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{5}$$

Durch Reihenentwicklung von $\cos\frac{\alpha}{2}$ gelangt man weiter zu der Formel:

$$\varepsilon=\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}\sin A}{2\varrho^2}\left(1+\frac{\mathfrak{a}^2}{8\varrho^2}+Gl_4\right). \tag{6}$$

Somit gestaltet sich endlich das Formelsystem zur Auflösung des Dreiecks aus $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und A wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{a}^2}{\varrho^2} &= \frac{\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos A}{\varrho^2} + Gl_4,\\
\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \frac{\varrho''\mathfrak{b}\mathfrak{c}\sin A}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{\mathfrak{a}^2}{8\varrho^2} + Gl_4\right),\\
\log\cot\lambda &= \log\mathfrak{b} - \log\mathfrak{c},\\
\frac{B+C}{2} &\begin{cases} = 90^0 - \frac{A}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, & A < 180^0,\\ = 450^0 - \frac{A}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, & A > 180^0,\end{cases}\\
\tan\frac{B-C}{2} &= \tan\left(\frac{B+C}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\left[1 + \frac{\mathfrak{a}^2}{16\varrho^2}\right]\right)\cot(\lambda + 45^0) + Gl_6,
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$\mathfrak{a}$ folgt aus Formel (6) des vorigen Paragraphen, welche Formel auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ angewandt werden kann, nachdem B und C bekannt geworden sind.

Diese Rechnung genügt aber nur, wenn A nicht sehr stumpf ist. Da nun ein dem System (2) S. 102 analoges System selbst dann kompliziert wird, wenn man ε^2 in genannter Formel (6) vernachlässigt, so mufs man noch eine Formel nach Art des Cosinussatzes der ebenen Geometrie für $\mathfrak{a}^2$ aufstellen. Es ist aber im Sehnendreieck:

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\mathfrak{A}, \tag{8}$$

worin $\mathfrak{A}$ den Sehnenwinkel zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Die Vertikale in der Ecke A und die Sehnen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bilden eine dreiseitige Ecke mit den Seiten $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$ und $\mathfrak{A}$; letzterer Seite liegt der Flächenwinkel A gegenüber. Daher ist

$$\cos\mathfrak{A} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos A. \tag{9}$$

Führt man hier die Formeln (5) S. 81, angewandt auf β und γ, ein, so folgt nach einfacher Reduktion:

$$\cos\mathfrak{A} = \cos\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{\frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin B\sin C}} = \cos\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{10}$$

Entwickelt man noch $\cos\frac{\alpha}{2}$ nach Potenzen von $\sin\frac{\alpha}{2}$, so ergiebt sich nunmehr für $\mathfrak{a}^2$ die Gleichung:

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 - 2\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cos\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2}{8\varrho^2} - \frac{\mathfrak{a}^4}{128\varrho^4}\right) + \varrho^2 Gl_8. \tag{11}$$

Vorstehende Entwicklungen dürften zeigen, dafs die Rechnung mit Sehnen und Horizontalwinkeln nicht mühsamer ist, als diejenige

mit horizontalen Entfernungen und Horizontalwinkeln, namentlich wenn man auf Polarkoordinaten verzichtet. Doch ist hervorzuheben, dafs die Gl_4 bei der Sehnenrechnung im allgemeinen rascher als beim *Legendre*schen Theorem merklich werden. Das Glied $\frac{1}{32}\varepsilon^2[\cot B + \cot C]$ $= \frac{1}{64}\varepsilon \mathfrak{a}^2 : \varrho^2$ im Zähler von (6) S. 108 insbesondere ist im allgemeinen weit gröfser als das entsprechende Glied $\frac{1}{60}\varepsilon(m^2 - a^2) : \varrho^2$ in der 1. Formel (4) S. 93, wie die Substitution $a^2 = m^2$ zeigt.

Ob man wirklich eine Triangulation mit Benutzung von Sehnen und Horizontalwinkeln zu berechnen für vorteilhaft erachten kann, wird davon abhängen, wie sich die entsprechenden Formeln fürs Rotationsellipsoid gestalten und wie sich die weitere Verwertung der Resultate einer Triangulation in der Form von Sehnen und Horizontalwinkeln gestaltet. Diese Erörterung bleibt vorbehalten.

In früherer Zeit (u. A. bei den französischen Vermessungen zu Ende des vorigen Jahrhunderts durch *Delambre* [vgl. *Méthodes analytiques* p. 36—42] und bei den österreichischen Vermessungen im 1. Viertel dieses Jahrhunderts durch General *Fallon* [vgl. *Nagels* weiter unten citierte Abh.]) wurden die gemessenen Winkel auf Sehnenwinkel bezw. Horizontalwinkel reduziert, eine allerdings mühsame Arbeit, die aber dann nicht zu umgehen ist — auch nicht bei Anwendung des *Legendre*schen Satzes —, wenn wie damals in Frankreich die schiefen Winkel mit dem *Borda*schen *Kreis* und nicht wie jetzt allgemein geschieht, die Horizontalwinkel mit dem Theodolit gemessen werden. Die Reduktion der direkt gemessenen Horizontalwinkel auf Sehnenwinkel ist jedoch eine nutzlose Weitläufigkeit, wie man aus den dazu aufgestellten und überdies nur bis auf Glieder 4. Ordnung genauen Formeln *Fabers* und *Grunerts* ersehen kann. Man findet dieselben neben *Grunerts* oben erwähntem Satz, sowie andern interessanten Sätzen *Riedl von Leuensterns* (1827), die eine geometrische Interpretation der Reduktionsgröfsen der Winkel gestatten, in der umfassenden Abhandlung *Nagels: Über die Reduktion eines sphärischen Dreiecks von geringer Krümmung auf sein Sehnendreieck,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. von *Schlömilch*, Bd. 1, 1856, S. 257—275 dargestellt.

Die strenge Relation (2) § 22, S. 106 lernte Verfasser durch *Kummells* Aufsatz, Astronom. Nachr. Bd. 89, 1877. Nr. 2116 kennen. Der Satz (2) des vorigen Paragraphen wurde von *Grunert* im 25. Bde. des Archivs f. Math. u. Phys. (1855) bewiesen, gelegentlich andrer Entwicklungen zur Reduktion der Horizontalwinkel auf Sehnenwinkel. Dieser Satz ist leider nicht so bekannt geworden, als er es verdient, namentlich weil man der Meinung gewesen zu sein scheint, dafs man ihn nur verwenden könne, wenn 1 Sehne und 3 Horizontalwinkel gegeben sind. Dafs er bei *gehöriger* Anwendung aber auch eine Auflösung in jedem andern Falle gestattet, und daher *die wirkliche Reduktion auf Sehnenwinkel ganz überflüssig* macht, dürfte aus unsern Entwicklungen hervorgehen.

§ 25. Zahlenbeispiel. Gegeben $\mathfrak{a} = 0{,}15\varrho$; $B = 350^0$; $C = 330^0$. *Formel* (3) S. 106 giebt hier $\log\sin\frac{\varepsilon}{2} = 6{,}880696_n - 2.51\,\frac{\varepsilon}{2}$, das

2. Glied in Einheiten der 6. Decimalstelle mit ε in Sek., und da $\frac{\varepsilon}{2}$ klein genug ist, folgt durch Addition von 5,314425 sofort:

$$\log \frac{\varepsilon}{2} \text{ in Sek.} = 2{,}195121_n - 2.51 \frac{\varepsilon}{2} \text{ in Sek.}; \; \frac{\varepsilon}{2} = -2'36{,}861''.$$

Ferner ist $A = 900^0 - 5'13{,}722'' - 680^0 = 219^0\,54'\,46{,}278''$ und man hat zur Anwendung der strengen *Formel* (2) S. 106 und unter Benutzung 8ziffriger Logarithmen:

$A = 219^0 54' 46{,}278''$	$A - \frac{\varepsilon}{2} = 219^0 57' 23{,}139''$	$\log \sqrt{\sin A \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ $= 9{,}8074763.3_n - 10$
$B = 350\;0\;0$	$B - \frac{\varepsilon}{2} = 350\;\;2\;36{,}861$	$\log \sqrt{\sin B \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ $= 9{,}2387316.0_n - 10$
$C = 330\;0\;0$	$C - \frac{\varepsilon}{2} = 330\;\;2\;36{,}861$	$\log \sqrt{\sin C \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ $= 9{,}6986837.2_n - 10.$

Da nun $\log \frac{\mathfrak{a}}{\varrho} = 9{,}1760912.6 - 10$ ist, so folgt weiter nach genannter Formel (2):

$$\log \frac{\mathfrak{b}}{\varrho} = 8{,}6073465.3 - 10; \; \log \frac{\mathfrak{c}}{\varrho} = 9{,}0672986.5 - 10.$$

Gehen wir nun *umgekehrt* von diesen letzten beiden Zahlen und dem Winkel $A = 219^0\,54'\,46{,}278''$ aus, so giebt das *Formelsystem* (7) des vorigen Paragraphen zunächst:

$$\mathfrak{a}^2 = (0{,}00164 + 0{,}01363 + 0{,}00725)\,\varrho^2 = 0{,}02252\,\varrho^2$$

$$\varepsilon = -312{,}838''\left(1 + \frac{0{,}02252}{8}\right) \text{ d. i. } -5'\,13{,}719''.$$

Die Differenz in ε mit dem oben erhaltenen Wert beruht auf der Vernachlässigung der Glieder 6. Ordnung, denn eine strenge Formel giebt aus $\log \mathfrak{b}$, $\log \mathfrak{c}$ und A wieder den frühern Wert. Man erhält ferner

$$\lambda = 70^0\,52'\,29{,}024''; \; \log \cot(\lambda + 45^0) = 9{,}6857676.8_n - 10$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{B+C}{2} &= 450^0 - 109^0\,57'\,23{,}139'' - 2'\,36{,}860'' = 340^0\,0'\,0{,}001'' \\ -\frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{a}^2}{16\,\varrho^2}\right) &= +78{,}431''.1{,}00141 = +\;1\;18{,}542 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{Summa} = 340\;1\;18{,}543$$

$$\log \tan 340^0\,1'\,18{,}543'' = 9{,}5605510.8_n - 10$$

$$\log \tan \frac{B-C}{2} = 9{,}2463187.6 - 10; \quad \frac{B-C}{2} = 9^0\, 59'\, 59{,}999''$$

$$B = 350^0\, 0'\, 0{,}000'' \qquad C = 330^0\, 0'\, 0{,}002''.$$

Hieraus folgt wieder mittelst *Formel* (2) S. 106 die dritte Seite $\mathfrak{a}$ und zwar ist bezw. aus beiden Winkeln

$$\log \frac{\mathfrak{a}}{\varrho} = 9{,}1760912.5 \text{ und } .6 - 10,$$

also im Mittel gleich 9,1760912.6 — 10, wie oben angenommen.

Will man sich der *Formel* (6) S. 108 bedienen, so hat man zunächst

$$\frac{\varepsilon}{4} = -\, 1'\, 18{,}430''$$

$$-\frac{\varepsilon''^2}{32\varrho''} \cot A = -\, 0{,}0178''$$

$$-\frac{\varepsilon''^2}{32\varrho''} \cot B = +\, 0{,}0848''$$

$$-\frac{\varepsilon''^2}{32\varrho''} \cot C = +\, 0{,}0258''$$

und hiermit:

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \sin(219^0\, 56'\, 4{,}708'' + 0{,}067'') : \sin(330^0\, 1'\, 18{,}430'' + 0{,}067'')$$
$$\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = \sin(219\;\; 56\;\; 4{,}708\;\; + 0{,}008\;) : \sin(350\;\; 1\;\; 18{,}430\;\; + 0{,}008\;),$$

woraus übereinstimmend folgt:

$$\log \frac{\mathfrak{a}}{\varrho} = 9{,}1760912.5 - 10\,.$$

Wenden wir nun die *2. Formel* (1) S. 107 an, um die horizontalen Entfernungen a, b, c zu erhalten, so folgt für a zunächst:

$$\log \frac{a}{\varrho} = 9{,}1760912.6 - 10 + 4071.5 + 8.4 = 9{,}1764992.5 - 10$$

und entsprechend

$$\log \frac{b}{\varrho} = 8{,}6073762.0 - 10 \quad \log \frac{c}{\varrho} = 9{,}0675456.7 - 10.$$

Es ist nicht ohne Interesse diese Zahlen noch mittelst der Formeln (4) § 15 S. 93 zu prüfen. Die Berechnung von ε nach Formel (2) dieses Paragraphen unterdrückend, setzen wir sofort $\frac{\varepsilon}{3} = -\, 104{,}574''$. Nun ist:

$a^2 = 0{,}0225\varrho^2$	$m^2 - a^2 = -\, 0{,}0099\varrho^2$	$\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{m^2-a^2}{20\varrho^2} = +\, 0{,}052''$
$b^2 = 0{,}0016\varrho^2$	$m^2 - b^2 = +\, 0{,}0110\varrho^2$	$\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{m^2-b^2}{20\varrho^2} = -\, 0{,}058$
$c^2 = 0{,}0136\varrho^2$	$m^2 - c^2 = -\, 0{,}0010\varrho^2$	$\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{m^2-c^2}{20\varrho^2} = +\, 0{,}005$
$m^2 = 0{,}0126\varrho^2$		

$A - A^* = -1'44{,}522''$	$A^* = 219^0 56' 30{,}800''$	$\log\sin =$	$9{,}8075420.2 - 10$
$B - B^* = -1\ 44{,}632$	$B^* = 350\ \ 1\ 44{,}632$		$9{,}2384189.7 - 10$
$C - C^* = -1\ 44{,}569$	$C^* = 330\ \ 1\ 44{,}569$		$9{,}6985884.3 - 10.$

Diese log sin geben mit den Logarithmen der Gegenseiten bezw. die Differenzen

$$9{,}3689472.3;\ .3;\ .4 - 10.$$

---

3. Kapitel.

Rechtwinklige und geographische Koordinaten auf der Kugel.*)

§ 1. **Rechtwinklige sphärische Koordinaten.** Für Zwecke einer Landesvermessung ist es vorteilhaft, zur Erhöhung der Bequemlichkeit in der Benutzung der Resultate einer Triangulierung, rechtwinklige Koordinaten der Dreieckspunkte abzuleiten. Man wählt als Axe der x einen gröfsten Kreis und zählt x von einem Anfangspunkte bis zum Fufspunkte desjenigen gröfsten Kreisbogens, der normal zur x-Axe durch einen Punkt, um dessen Lage es sich handelt, gelegt werden kann. Das Perpendikel bezeichnet die Ordinate y. Derartige Koordinaten hat *Soldner* zu Anfange des Jahrhunderts für die bayerische Landesvermessung angewandt (vergl. das betreffende Werk S. 271) und seitdem sind sie zu fast ausschliefslichem Gebrauche gelangt.

Ein anderes System rechtwinkliger sphärischer Koordinaten erhält man dadurch, dafs normal zur x-Axe ein gröfster Kreis als y-Axe gelegt wird, und dafs man unter x und y die Längen der Perpendikel von einem Punkte bis zu den betreffenden Axen versteht. Wir werden jedoch diesen Modus hier nicht verfolgen, weil er weniger vollkommen als der zuerst angeführte ist. Mängel zeigen sich bei der Übertragung des Systems aufs Ellipsoid und bei der Berechnung geographischer Koordinaten, sowie in dem Umstande, dafs die Linien der konstanten x und y nicht normal auf einander stehen.

Indem wir also zu dem *Soldner*schen System zurückkehren, tritt uns als erste Aufgabe unmittelbar die entgegen, aus den Koordinaten

---

*) Wir behandeln in diesem Kapitel nur den Fall, dafs mit horizontalen Entfernungen gerechnet wird. *Sehnen* erweisen sich für rechtwinklige Koordinaten direkt nicht bequem, man geht besser erst zu horizontalen Entfernungen über. Für die Berechnung geographischer Positionen sind sie dagegen sehr gut direkt verwendbar; trotzdem haben wir auch dafür die Ausführung nicht gegeben, weil das 4. Kapitel diese Aufgabe fürs Rotationsellipsoid behandelt und die Lösung für die Kugel an sich kein Interesse bietet.



eines Punktes P_1 und der horizontalen Entfernung $P_1 P_2$ eines zweiten Punktes P_2 sowie der Richtung nach demselben, die Koordinaten dieses Punktes P_2 abzuleiten. Es ist dazu vor allem nötig anzugeben, wie die Richtung eines gröfsten Kreisbogens $P_1 P_2$ festgestellt wird.

Man denke sich durch P_1 eine Parallele zur x-Axe, d. h. eine Linie im Abstand y gelegt (ein kleiner Kreis, dessen Ebene parallel zur Ebene der x-Axe ist). Von der positiven Seite dieser Linie aus zählt man nun *Richtungswinkel* von 0° bis 360°, dergestalt, dafs der Richtungswinkel wachsender y 90° beträgt. Da man selbstverständlich die Richtung positiver y so nehmen wird, dafs dieser Drehungssinn für Richtungswinkel und gemessene Winkel übereinstimmt, man also die letztern als Differenzen der ersteren für beide Schenkel auffassen kann wie S. 71 (1), so ergiebt sich zur Berechnung des Richtungswinkels für $P_1 P_3$ aus demjenigen für $P_1 P_2$ und dem Zwischenwinkel die Relation:

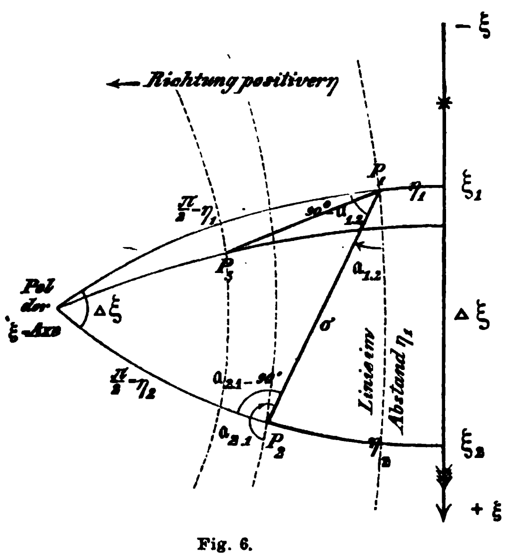


Fig. 6.

$$\mathfrak{a}_{1.3} = \mathfrak{a}_{1.2} + \sphericalangle\binom{2.3}{1}, \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{a}_{1.3}$ und $\mathfrak{a}_{1.2}$ die Richtungswinkel für $P_1 P_3$ bezw. $P_1 P_2$ im Punkte P_1 bezeichnen. Fig. 6 zeigt die Kugeloberfläche; der Radius ist als Einheit der Längen genommen und es bedeuten demgemäfs

$$\left.\begin{aligned} \xi &\text{ den Quotient } \frac{x}{\varrho}, \\ \eta &\text{ den Quotient } \frac{y}{\varrho}, \\ \sigma &\text{ den Quotient } \frac{s}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

§ 2. **Ordinatendifferenz und Abscissendifferenz.** Zur Berechnung von η_2 hat man im sphärischen Dreieck mit den Ecken P_1, P_2 und dem Pol der ξ-Axe nach dem Cosinussatz:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right)\cos\sigma + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right)\sin\sigma\cos(90^0 - \mathfrak{a}_{1.2})$$

oder

$$\sin \eta_2 = \sin \eta_1 \cos \sigma + \cos \eta_1 \sin \sigma \sin \mathfrak{a}_{1.2}. \qquad (1)$$

Hieraus folgt, wenn man noch $\eta_2 = \eta_1 + \varDelta\eta$ setzt und ferner zur Vereinfachung $\mathfrak{a}_{1.2}$ kurz mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet, nach leichter Reduktion:

$$\sin \varDelta\eta = \sin \sigma \sin \mathfrak{a} + \tan \eta_1 (\cos \sigma - \cos \varDelta\eta). \qquad (2)$$

In diese Gleichung führen wir nachstehende Reihenentwicklungen ein, wobei wir uns auf Werte von σ und η beschränken, die als Gröfsen 1. Ordnung bezeichnet werden können (S. 25), sodafs die Zulässigkeit dieser Substitutionen und der nachfolgenden Entwicklungen aufser Frage steht:

$$\sin \sigma = \sigma - \frac{1}{6}\sigma^3 + \frac{1}{120}\sigma^5 + Gl_7$$

$$\tan \eta_1 = \eta_1 + \frac{1}{3}\eta_1^3 + Gl_5$$

$$\cos \sigma = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{24}\sigma^4 + Gl_6$$

$$\cos \varDelta\eta = 1 - \frac{1}{2}\varDelta\eta^2 + \frac{1}{24}\varDelta\eta^4 + Gl_6.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung v für $\sigma \sin \mathfrak{a}$, dann findet sich

$$\sin \varDelta\eta = v - \frac{v\sigma^2}{6} + \frac{v\sigma^4}{120} - \eta_1 \frac{\sigma^2 - \varDelta\eta^2}{2}\left(1 - \frac{\sigma^2 + \varDelta\eta^2}{12}\right) - \eta^3 \frac{\sigma^2 - \varDelta\eta^2}{6} + Gl_7. \qquad (3)$$

Führt man dies in die beiden ersten Glieder der Arcussinusreihe S. 29 ein, so folgt

$$\varDelta\eta = v - v\,\frac{\sigma^2 - v^2}{6} - \eta_1 \frac{\sigma^2 - \varDelta\eta^2}{2} + Gl_5,$$

oder auch, wenn $\sigma \cos \mathfrak{a}$ mit u bezeichnet wird und wenn man beachtet, dass $u^2 + v^2 = \sigma^2$ also $\sigma^2 - v^2 = u^2$, dafs ferner $\varDelta\eta^2 = v^2 + Gl_4$ ist:

$$\varDelta\eta = v - \frac{1}{6}u^2 v - \frac{1}{2}u^2\eta_1 + Gl_5.$$

Substituiert man den hieraus folgenden Wert von $\varDelta\eta^2$ in der Reihe (3), so ergiebt sich

$$\sin \varDelta\eta = v - \frac{1}{6}v\sigma^2 - \frac{1}{2}u^2\eta_1 + \frac{1}{120}v\sigma^4 + \frac{1}{24}u^4\eta_1$$
$$- \frac{1}{12}u^2v^2\eta_1 - \frac{1}{2}u^2 v\eta_1^2 - \frac{1}{6}u^2\eta_1^3 + Gl_7.$$

Dies ist nunmehr in die bereits oben angeführte Arcussinusreihe

mit Beachtung der 3 ersten Glieder derselben einzusetzen und führt zu der Formel:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\eta = v - \frac{1}{6}u^2v - \frac{1}{2}u^2\eta_1 \\ + \frac{1}{24}u^4\eta_1 - \frac{1}{3}u^2v^2\eta_1 - \frac{1}{2}u^2v\eta_1^2 \\ - \frac{1}{6}u^2\eta_1^3 - \frac{1}{15}u^2v^3 + \frac{1}{120}u^4v + Gl_7;\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\varDelta\eta = \eta_2 - \eta_1.$$

Zur Berechnung von $\varDelta\xi$ giebt das sphärische Dreieck P_1P_2Pol, indem man den Sinussatz anwendet:

$$\sin\varDelta\xi = \sin\sigma\cos\mathfrak{a}_{1.2}\sec\eta_2\,. \quad (5)$$

Unter Substitution der Reihenentwicklungen für $\sin\sigma$ und $\sec\eta_2$ folgt hieraus:

$$\sin\varDelta\xi = \left(\sigma - \frac{1}{6}\sigma^3 + \frac{1}{120}\sigma^5\right)\left(1 + \frac{1}{2}\eta_2^2 + \frac{5}{24}\eta_2^4\right)\cos\mathfrak{a} + Gl_7,$$

oder

$$\begin{aligned}\sin\varDelta\xi = u - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{6}uv^2 + \frac{1}{2}u\eta_2^2 \\ + \frac{1}{120}u^5 + \frac{1}{60}u^3v^2 + \frac{1}{120}uv^4 - \frac{1}{12}u^3\eta_2^2 \\ - \frac{1}{12}uv^2\eta_2^2 + \frac{5}{24}u\eta_2^4 + Gl_7\,.\end{aligned}$$

Führt man diesen Ausdruck für $\sin\varDelta\xi$ in die Arcussinusreihe S. 29 ein, so folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\xi = u - \frac{1}{6}uv^2 + \frac{1}{2}u\eta_2^2 \\ - \frac{1}{15}u^3v^2 + \frac{1}{120}uv^4 + \frac{1}{6}u^3\eta_2^2 \\ - \frac{1}{12}uv^2\eta_2^2 + \frac{5}{24}u\eta_2^4 + Gl_7\,;\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\varDelta\xi = \xi_2 - \xi_1.$$

Man kann mittelst Formel (4) hieraus η_2 eliminieren, indem man $\eta_2 = \eta_1 + \varDelta\eta$ setzt; es ergiebt sich dann

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\xi = u + \frac{1}{3}uv^2 + \frac{1}{2}u\eta_1^2 + uv\eta_1 \\ - \frac{1}{15}u^3v^2 + \frac{2}{15}uv^4 - \frac{1}{3}u^3v\eta_1 \\ + \frac{2}{3}uv^3\eta_1 - \frac{1}{3}u^3\eta_1^2 + \frac{7}{6}uv^2\eta_1^2 + \frac{5}{6}uv\eta_1^3 \\ + \frac{5}{24}u\eta_1^4 + Gl_7\,;\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

doch ist diese Formel augenscheinlich weniger vorteilhaft als (6).

Restituieren wir nun in den Formeln (4) und (6) für ξ und η bezw. $x:\varrho$ und $y:\varrho$ und ändern die Bedeutung von u und v wie weiter unten angegeben ab, so findet sich:

$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= v - \left(y_1 + \frac{1}{3}v\right)\frac{u^2}{2\varrho^2} \\ &\quad + \left(y_1 + \frac{1}{5}v\right)\left(\frac{u^4}{24\varrho^4} - \frac{u^2v^2}{3\varrho^4}\right) - (y_1 + 3v)\frac{u^2y_1^2}{6\varrho^4} + \varrho\, Gl_7 \\ x_2 - x_1 &= u\left\{1 + \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{5\varrho^2}\right)\frac{u^2}{8\varrho^2} + \frac{5}{6}\left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{10\varrho^2}\right)^2\right\} + \varrho\, Gl_7; \end{aligned}\right\}(8)$$

$$s \sin \mathfrak{a}_{1.2} = v \qquad s \cos \mathfrak{a}_{1.2} = u.$$

Von vorstehenden Formeln reichen für das praktische Bedürfnis die Glieder bis zur 3. Ordnung incl. völlig aus. Die höheren Glieder gewähren aber die Möglichkeit, die begangene Vernachlässigung zu schätzen. Diese Schätzung versparen wir auf § 4.

Es ist noch hervorzuheben, dafs vorstehende Entwicklungen nicht nur für die spezielle Form der Figur 6, sondern allgemein gelten, da die Bildung der Ausdrücke für die Dreieckswinkel zu den Formeln (1) und (5) der systematischen Herleitung nach (2) S. 71 entspricht.

§ 3. **Differenz der Richtungswinkel.** Bei dem Übergange vom Punkte P_1 zu dem Punkte P_2 ist nächst den Differenzen der Koordinaten auch noch diejenige der Richtungswinkel im Anfangs- und Endpunkt der Linie P_1P_2 von Wichtigkeit, um für andere von P_2 ausgehende Linien die Rechnung fortsetzen zu können. Das mehrfach benutzte sphärische Dreieck der Fig. 6 giebt hier mittelst der 1. *Neper*schen Analogie (5) S. 77:

$$\tan\frac{(\mathfrak{a}_{2.1} - 90^0) + (90^0 - \mathfrak{a}_{1.2})}{2} = \frac{\cos\dfrac{\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \eta_2\right)}{2}}{\cos\dfrac{\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \eta_2\right)}{2}} \cdot \cot\frac{\Delta\xi}{2}$$

und zwar gilt diese Formel allgemein für jede Lage von P_1P_2 (wie die Formeln des vorigen Paragraphen).

Wir setzen nun mit Rücksicht darauf, dafs für $\varrho = \infty$ das Azimut $\mathfrak{a}_{2.1} = \mathfrak{a}_{1.2} + 180^0$ ist und bei endlichem ϱ und kleinen Distanzen diese Gleichung noch näherungsweise gelten mufs:

$$\mathfrak{a}_{2.1} = \mathfrak{a}_{1.2} + 180^0 + \Delta\mathfrak{a} \qquad (1)$$

und erhalten nach einfacher Reduktion, rechts und links reziproke Werte nehmend:

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{\Delta\mathfrak{a}}{2} &= -\tan\frac{\Delta\xi}{2}\,\frac{\sin\eta}{\cos\frac{\Delta\eta}{2}},\\ \eta &= \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\cdot\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

In (2) führen wir nun nachstehende Reihenentwicklungen ein:

$$\sin\eta = \eta\left(1-\frac{1}{6}\eta^2+Gl_4\right)$$

$$\sec\frac{\Delta\eta}{2} = 1+\frac{v^2}{8\varrho^2}+Gl_4$$

$$\tan\frac{\Delta\xi}{2} = \frac{1}{2}\Delta\xi\left(1+\frac{u^2}{12\varrho^2}+Gl_4\right)$$

und erhalten damit die folgenden Umformungen von (2):

$$\tan\frac{\Delta\mathfrak{a}}{2} = -\frac{\Delta x}{2\varrho}\,\frac{y}{\varrho}\left(1-\frac{y^2}{6\varrho^2}+\frac{u^2}{12\varrho^2}+\frac{v^2}{8\varrho^2}+Gl_4\right)\qquad(3)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= -\varrho''\,\frac{\Delta x}{\varrho}\,\frac{y}{\varrho}\left(1-\frac{y^2}{6\varrho^2}+\frac{u^2}{12\varrho^2}+\frac{v^2}{8\varrho^2}+Gl_4\right)\\ \Delta x = x_2 - x_1 &\qquad y = \frac{1}{2}(y_1+y_2)\\ \mathfrak{a}_{2.1} &= \mathfrak{a}_{1.2}+180^0+\Delta\mathfrak{a}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Die Zulässigkeit dieser Entwicklung bleibt ebenso wie diejenige der (8) im vorigen Paragraphen für kleine Werte σ und η im Betrage von Gröfsen 1. Ordnung aufser Zweifel.

Eliminiert man Δx und y_2 (auch insofern es in y vorkommt) mittelst (4) und (7) des vorigen Paragraphen, so folgt endlich noch:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = -\varrho''\,\frac{u}{\varrho}\left\{\left(\frac{y_1}{\varrho}+\frac{v}{2\varrho}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{y_1}{\varrho}+\frac{v}{4\varrho}\right)\frac{5v^2-u^2}{6\varrho^2}+\left(\frac{y_1}{3\varrho}+\frac{v}{\varrho}\right)\frac{y_1^2}{\varrho^2}+Gl_5\right\}\cdot(5)$$

§ 4. Numerischer Betrag der höhern Glieder. Sieht man von der Krümmung der Kugel ab, so ist

$$(x_2-x_1)=u;\quad (y_2-y_1)=v;\quad \Delta\mathfrak{a}=\text{null}.$$

Für sehr kleine Bezirke darf in der That nach diesen Relationen gerechnet werden. Um nun genauer zu erfahren, bis zu welcher Ausdehnung man alle höhern Glieder vernachlässigen darf, nehmen wir eine Schätzung vor. In $y_2 - y_1$ ist das gröfste vernachlässigte Glied nach (8) S. 118 gleich $\frac{u^2}{2\varrho^2}\left(y_1+\frac{1}{3}v\right)$, in $x_2 - x_1$ ist es $u\left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2}-\frac{v^2}{6\varrho^2}\right)\cdot$ Setzen wir nun den Maximalwert von Dreiecksseiten *und* Ordinaten

gleich s, so sind diese Glieder beide kleiner als $\frac{1}{2}\frac{s^3}{\varrho^2}$. Halten wir dies als Grenzwert fest und nehmen den letzteren $< 0{,}001^m$, so folgt als Bedingung

$$\frac{1}{2}\frac{s^3}{\varrho^2} < 0{,}001^m$$

und für $\varrho = 6370000$ hieraus $\frac{s}{\varrho} < \frac{1}{1500}$ rund oder

$$s < 4^{km}. \tag{1}$$

Für diesen Betrag von $(x_2 - x_1)$ und y wird das Glied 2. Ordnung in $\varDelta\mathfrak{a}$ nach Formel (4) S. 119 gleich 0,1″, ein bei so kleinen Distanzen zu vernachlässigender Betrag. Dies führt zu dem Satze:

Die rechtwinkligen Koordinaten auf der Kugel können als ebene Koordinaten bis auf den Millimeter genau berechnet werden, so lange die gröfsten Längen der Seiten und Ordinaten ca. 4^{km} nicht wesentlich überschreiten.

In Bezug auf die Glieder 5. Ordnung in $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ nach (8) S. 118 findet sich zunächst, dafs die darin vorkommenden Produkte $u^2v^2 = \frac{1}{4}s^4 \sin 2\mathfrak{a}_{1.2}$ und $u^2v = s^3 \cos^2 \mathfrak{a}_{1.2} \sin \mathfrak{a}_{1.2}$ wie die Differentiation nach $\mathfrak{a}_{1.2}$ zeigt, die Maximalwerte $0{,}25s^4$ und $0{,}38s^3$ erlangen können. Nehmen wir als Maximalwert der Ordinaten ebenfalls s wie für die Seiten und vernachlässigen in $y_2 - y_1$ das Glied mit dem Faktor $\frac{1}{24}$, in $x_2 - x_1$ die negativen Glieder, so folgt als Maximalbetrag der Glieder 5. Ordnung rund $0{,}4s^5 : \varrho^4$. Setzen wir nun

$$0{,}4\frac{s^5}{\varrho^4} < 0{,}001^m,$$

so wird für $\varrho = 6370000$ hiernach $\frac{s}{\varrho} < \frac{1}{75}$ rund oder

$$s < 100^{km}. \tag{2}$$

Für diesen Betrag werden die Glieder 4. Ordnung von $\varDelta\mathfrak{a}$ nach (4) S. 119 sicher $< 0{,}002''$, was völlig ausreicht und der Genauigkeit von $y_2 - y_1$ und $x_2 - x_1$ entspricht, da 0,002″ auf 100^{km} $0{,}001^m$ Verschiebung geben.

Die Glieder 3. Ordnung in $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ und diejenigen 2. Ordnung in $\varDelta\mathfrak{a}$ genügen daher zu einer Genauigkeit auf $0{,}001^m$, so lange die Dreiecksseiten und Ordinaten $< 100^{km}$ bleiben.

Aus Tafel (5) S. 95 läfst sich nun ersehen, dafs bei der Berechnung eines sphärischen Dreiecks als ebenes Dreieck mit denselben Seiten die Glieder 2. und 4. Ordnung (1. und 2. Glied) in den Winkel-

reduktionen bis zu mittleren Seitenlängen von demselben Betrage vernachlässigt werden dürfen, wie (1) und (2) festsetzen. Man kann hieraus schliefsen, dafs die Mitnahme der Glieder bis zur 5. Ordnung incl. in den Formeln für $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ und $\Delta \mathfrak{a}$ ebenso lange ausreichen wird, als diejenige der 6. Ordnung incl. (3. Glied) in jenen Winkelreduktionen, d. i. also bis zu Dimensionen von ca. 600^{km}. Dies wird aus dem folgenden Paragraphen noch schärfer hervortreten.

§ 5. Anderer Entwicklungsgang. *Zachariae* entwickelt in seinem Werke: *Die geodätischen Hauptpunkte*, die Formeln für rechtwinklige sphärische Koordinaten mittelst des *Legendre*schen Satzes, indem er ein Hilfsdreieck konstruiert, von welchem P_1 und P_2 2 Ecken sind, die dritte aber durch einen Punkt mit den Koordinaten x_2 und y_1 gegeben ist; die 3 Seiten sind also σ, $\eta_2 - \eta_1$ und ein gröfster Kreisbogen durch P_1 und den Punkt (x_2, y_1). Die Formeln werden dann:

$$x_2 - x_1 = s \cos \left(\mathfrak{a}_{1.2} - 2(E + \varepsilon)\right) \cdot \left(1 + \frac{y_1^2}{2\varrho^2}\right) + \varrho Gl_5$$

$$y_2 - y_1 = s \sin \left(\mathfrak{a}_{1.2} - (E + \varepsilon)\right) + \varrho Gl_5$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{E} = \frac{1}{2} \varrho'' \frac{u y_1}{\varrho^2}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \frac{1}{6} \varrho'' \frac{u v}{\varrho^2}$$

$$\Delta \mathfrak{a} = -(2E + 3\varepsilon),$$

übereinstimmend mit den hier gegebenen Entwicklungen. Die Bedeutung von $2E$ und 3ε als sphärischer Excesse eines Vierecks und eines Dreiecks springt in die Augen.

§ 6. Distanz und Richtungswinkel aus den Koordinaten. Mittelst der Formeln (8) S. 118 hat man in successiver Annäherung, $x_2 - x_1 = \Delta x$, $y_2 - y_1 = \Delta y$ gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} u &= \Delta x + \varrho Gl_3 \\ v &= \Delta y + \varrho Gl_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \Delta x \left(1 - \frac{y_1^2}{2\varrho^2} - \frac{y_1 \Delta y}{\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{3\varrho^2}\right) + \varrho Gl_5 \\ v &= \Delta y + \left(y_1 + \frac{\Delta y}{3}\right) \frac{\Delta x^2}{2\varrho^2} + \varrho Gl_5. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Aus der 2. Formel (8) S. 118 folgt nach Division beider Seiten durch den Faktor von u:

$$u = \Delta x \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2}\right) \\ + \left(\frac{y_2^4}{24\varrho^4} - \frac{y_2^2 v^2}{12\varrho^4} + \frac{7v^4}{360\varrho^4}\right) - \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{5\varrho^2}\right)\frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} \end{array} \right\} + \varrho Gl_7.$$

Setzt man hierin für v in den Gliedern 3. und 5. Ordnung den Ausdruck (2) bezw. (1), so findet sich:

$$\left. \begin{array}{l} u = \Delta x \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{6\varrho^2}\right) \\ + \left(\frac{y_2^4}{24\varrho^4} - \frac{y_2^2 \Delta y^2}{12\varrho^4} + \frac{7\Delta y^4}{360\varrho^4}\right) - \left(\frac{y_1 y_2}{2\varrho^2} + \frac{2\Delta y^2}{15\varrho^2}\right)\frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} \end{array} \right\} + \varrho Gl_7; \\ \qquad\qquad\qquad u = s \cos \mathfrak{A}_{1.2}. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Führt man ferner die Ausdrücke (2) für u und v in die Glieder 3. Ordnung der 1. Formel (8) auf S. 118 ein, in die Glieder 5. Ordnung daselbst aber die Ausdrücke (1), so ergiebt sich nach einfacher Reduktion:

$$\left. \begin{array}{l} v = \Delta y + \left(y_1 + \frac{1}{3}\Delta y\right)\frac{\Delta x^2}{2\varrho^2} \\ \quad - \left\{\left(y_1 + 2\Delta y\right)\frac{y_1^2}{\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{2}{15}\Delta y\right)\frac{\Delta y^2}{\varrho^2}\right\}\frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{7}{15}\Delta y\right)\frac{\Delta x^4}{24\varrho^4} + \varrho Gl_7; \\ \qquad\qquad v = s \sin \mathfrak{A}_{1.2} \\ \qquad \Delta y = y_2 - y_1 \qquad \Delta x = x_2 - x_1. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Diese und die vorige Formel geben ein Mittel zur Berechnung von s und $\mathfrak{A}_{1.2}$ und die Formel (4) S. 119 giebt dann noch $\mathfrak{A}_{2.1}$, welches aber auch durch vorstehende beiden Formeln nach erfolgter Vertauschung der beiden Punkte bestimmt werden kann.

Aus den Formeln für u und v kann man auch noch Formeln für s^2 und tan $\mathfrak{A}_{1.2}$ ableiten, von denen aber nur erstere bequem ist. Substituiert man die Ausdrücke für u und v in die Gleichung $s^2 = u^2 + v^2$, so findet sich, wenn man $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ anstatt y_1 und y_2 zu weiterer Abkürzung der Formel einführt:

$$\left. \begin{array}{l} s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 - \left(\frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{12\varrho^2}\right)\Delta x^2 \\ \quad + \left(\frac{y^4}{3\varrho^4} - \frac{y^2\Delta y^2}{6\varrho^4} - \frac{\Delta y^4}{720\varrho^4}\right)\Delta x^2 - \left(\frac{y^2}{12\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{720\varrho^2}\right)\frac{\Delta x^4}{\varrho^2} + \varrho^2 Gl_8. \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Einige Vereinfachung der Formeln (3) und (4) würde sich wahrscheinlich noch erzielen lassen, wenn man ausgehend von den *Gauss*ischen

Gleichungen anstatt der zu beiden Punkten unsymmetrischen Gröfsen $\cos \mathfrak{a}_{1.2}$ und $\sin \mathfrak{a}_{1.2}$ die symmetrischen $s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)$ und $s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)$ berechnen wollte. Indessen ziehen wir obige Formeln vor, insofern sie im oben angedeuteten Sinne eine Kontrolle gestatten, und begnügen uns, die erwähnten Ausdrücke nur bis auf die 5. Ordnung genau mittelst der bereits entwickelten Formeln herzustellen.

Zunächst ist in einfacher Entwicklung:

$$s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{\Delta\mathfrak{a}}{2}\right) = u - v\frac{\Delta\mathfrak{a}}{2} + \varrho Gl_5$$

$$s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{\Delta\mathfrak{a}}{2}\right) = v + u\frac{\Delta\mathfrak{a}}{2} + \varrho Gl_5 .$$

Hieraus resultiert nach Substitution der Ausdrücke für u und v, sowie für $\Delta\mathfrak{a}$:

$$\left.\begin{aligned} s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{\Delta\mathfrak{a}}{2}\right) &= \Delta x\left(1 - \frac{y^2}{2\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{24\varrho^2}\right) + \varrho Gl_5 \\ s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} + \frac{\Delta\mathfrak{a}}{2}\right) &= \Delta y\left(1 - \frac{\Delta x^2}{12\varrho^2}\right) + \varrho Gl_5 \\ \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= -\varrho''\frac{\Delta x}{\varrho}\frac{y}{\varrho} + Gl_4 . \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§ 7. Übertragung geographischer Länge und Breite mittelst horizontaler Entfernung und Azimut.

Auf der Kugeloberfläche denken wir uns, insofern sie die mathematische Erdoberfläche repräsentirt, nach S. 7 einen gröfsten Kreis und seine 2 Pole bezw. als Äquator und Nord- und Südpol angenommen, ferner einen Meridian als 1. Meridian gewählt und das Koordinatensystem der geographischen Breiten und Längen eingeführt.

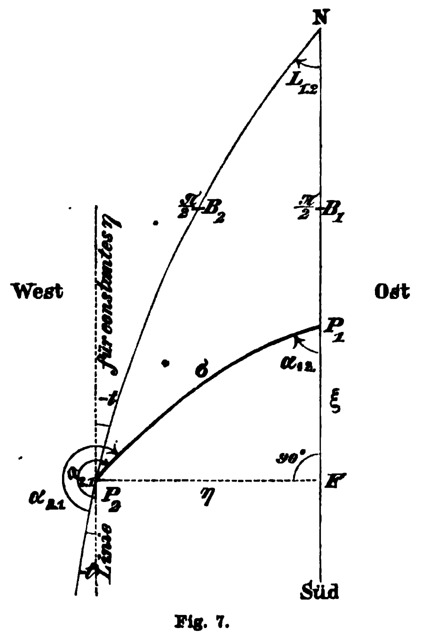


Fig. 7.

Den Meridian eines durch seine geographische Breite gegebenen Ausgangspunktes P_1 nehmen wir für den Augenblick als 1. Meridian und zählen von demselben aus *Längenunterschiede* in demselben *Drehungssinne* wie Azimute von seinem südlich von P_1 gelegenen Teile aus. In der Fig. 7 ist die Längendifferenz $L_{1.2}$ ostwestlich, das Azimut $\alpha_{1.2}$ südwestlich gezählt. Der Kugelradius dient als Längeneinheit.

Die Auflösung des Dreiecks zwischen Nordpol N, P_1 und P_2 kann mittelst der *Gaufs*ischen Gleichungen geschehen. Dieses übergehend, wenden wir uns sogleich zu einer andern von *Gaufs* gegebenen Methode, welche für kleine σ vorteilhaft ist. Hierbei wird zunächst der gröfste Kreis $P_2 F$ rechtwinklig zum 1. Meridian gelegt und das Dreieck $P_1 P_2 F$ aufgelöst. Die Formeln (1) S. 76 geben dazu, wenn die Ecken F, P_1, P_2 als A, B, C und also

$$\left.\begin{array}{ll} A = 90^0 & \alpha = \sigma \\ B = \alpha_{1.2} & \beta = \eta \\ C = 270^0 - \mathfrak{a}_{2.1} = 90^0 - \mathfrak{a}_{1.2} - \Delta\mathfrak{a} & \gamma = \xi \end{array}\right\} \quad (1)$$

genommen werden, nachstehendes System zur Berechnung von η, ξ und $\Delta\mathfrak{a}$, welche letztere Gröfse dieselbe Bedeutung wie bei den rechtwinkligen Koordinaten hat, indem $\alpha_{1.2}$ identisch mit dem Richtungswinkel $\mathfrak{a}_{1.2}$ ist:

$$\left.\begin{array}{r} \sin\eta = \sin\sigma \sin\alpha_{1.2} \\ \cos\eta \sin\xi = \sin\sigma \cos\alpha_{1.2} \\ \cos\eta \cos\xi = \cos\sigma \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{r} \sin\sigma \sin(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a}) = \sin\eta \cos\xi \\ \sin\sigma \cos(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a}) = \sin\xi. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Diese Gleichungen gelten für jede Lage von P_2 gegen P_1, vergleiche den Schlufs des § 2, S. 118. Da ferner val. abs. $\eta < \frac{\pi}{2}$ ist, wird die Auflösung auch ganz bestimmt.

Die (2) sind für die Ermittlung von η und ξ sehr geeignet; die Gleichungen (3) aber, welche $\Delta\mathfrak{a}$ geben, wandelt man mit Rücksicht auf den vorausgesetzten geringen Betrag von σ besser um, indem man sie, sowie die 1. und 2. Formel (2) in die rechte Seite der Identität $\sin\Delta\mathfrak{a} = \sin(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a})\cos\alpha_{1.2} - \cos(\alpha_{1.2} + \Delta\mathfrak{a})\sin\alpha_{1.2}$ substituiert. Dies giebt

$$\sin\Delta\mathfrak{a} = \sin\xi \sin\eta \, \frac{\cos\xi \cos\eta - 1}{\sin^2\sigma} = \sin\xi \sin\eta \, \frac{\cos\sigma - 1}{\sin^2\sigma},$$

woraus endlich folgt, indem man noch für $\sin\eta$ seinen Wert aus (2) setzt:

$$\sin\Delta\mathfrak{a} = -\sin\xi \tan\frac{\sigma}{2} \sin\alpha_{1.2}. \quad (4)$$

Bei beliebig grofsen σ kann diese Formel mit den (3) natürlich nicht konkurrieren; sie gestattet dagegen kleine $\Delta\mathfrak{a}$, die kleinen Werten von σ entsprechen, schärfer zu berechnen.

Dass bei dieser Voraussetzung über σ auch $\varDelta\mathfrak{a}$ klein ist und nicht, wie Formel (4) allein zulassen würde, nahe 180° beträgt, zeigen die (3), die mittelst der (2) reduziert, übergehen in:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha_{1.2} + \varDelta\mathfrak{a}) &= \sin\alpha_{1.2}\cos\xi \\ \cos(\alpha_{1.2} + \varDelta\mathfrak{a}) &= \cos\alpha_{1.2}\sec\eta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ist nun σ klein, so sind ξ und η kleine positive oder negative Werte, $\cos\xi$ und $\sec\eta$ mithin nahezu $+1$, und es ist daher $\alpha_{1.2} + \varDelta\mathfrak{a}$ in gleichem Quadranten mit $\mathfrak{a}_{1.2}$ gelegen und wenig von ihm verschieden.

Das grofse rechtwinklige Dreieck zwischen Nordpol N, F und P_2 giebt nunmehr nach dem Formelsystem (1) S. 76, wenn gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} A &= 90^0 & \alpha &= \frac{\pi}{2} - B_2 \\ B &= L_{1.2} & \beta &= \eta \\ C &= 90^0 + t & \gamma &= \frac{\pi}{2} - F \\ t &= \alpha_{2.1} - \mathfrak{a}_{2.1} & F &= B_1 - \xi, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

die nachstehenden Gleichungen zur Bestimmung von B_2, $L_{1.2}$ und t, welche letztere Grösse *Meridiankonvergenz* heifst:

$$\left.\begin{aligned} \sin B_2 &= \cos\eta\sin F \\ \cos B_2\sin L_{1.2} &= \sin\eta \\ \cos B_2\cos L_{1.2} &= \cos\eta\cos F \\ \cos B_2\sin t &= -\sin\eta\sin F \\ \cos B_2\cos t &= \cos F. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Diese Gleichungen gelten ebenso wie die (2) und (3) ganz allgemein und insbesondere auch für negative Werte von η.

Die 2. und 3. der Gleichungen (7) geben $\tan L_{1.2}$, die 4. und 5. $\tan t$, und da $\cos B_2$ positiv ist, so ist $L_{1.2}$ seinem Quadranten nach völlig bestimmt.

Was nun B_2 anlangt, so empfiehlt es sich, weil $F - B_2$ für kleine Werte σ auch klein ist, diese Differenz direkt herzuleiten. Dazu eliminiert man aus der Identität $\sin(F - B_2) = \sin F\cos B_2 - \cos F\sin B_2$ mittelst der 1. und 3. Gleichung (7) die Breite B_2 und erhält zunächst (den Index von L unterdrückend)

$$\sin(F - B_2) = \sin F\cos F\cos\eta\,\frac{1 - \cos L}{\cos L}.$$

Multipliziert man dies rechter Hand mit $\cot L\tan\eta\sec F$, — das ist soviel als 1, — so gelangt man zu der Formel:

$$\sin(F - B_2) = \sin\eta\tan\frac{L_{1.2}}{2}\sin F. \tag{8}$$

Hieraus folgt $F - B_2$ unzweideutig, da bei mäfsigen Distanzen $F - B_2$ ein kleiner positiver oder negativer Wert sein mufs.

Alles zusammengestellt und mit Benutzung einiger einfacher Transformationen erhält man endlich zur Lösung der Aufgabe das Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\eta &= \sin\sigma\sin\alpha_{1.2} \\
\tan\xi &= \tan\sigma\cos\alpha_{1.2} \\
F &= B_1 - \xi \\
\tan L_{1.2} &= \tan\eta\sec F = \sin\xi\tan\alpha_{1.2}\sec F \\
\tan t &= -\sin\eta\tan F \\
\sin(F - B_2) &= \sin\eta\tan\frac{L_{1.2}}{2}\sin F = -\tan t\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cos F \\
\sin\Delta\mathfrak{a} &= -\tan\eta\tan\frac{\sigma}{2}\cos\alpha_{1.2} = -\sin\xi\tan\frac{\sigma}{2}\sin\alpha_{1.2} \\
\alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\mathfrak{a} + t.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die zweiten Ausdrücke rechter Hand sind etwas bequemer als die ersten, weil sie $\tan\eta$ und $\sin F$ nicht enthalten und anstatt dessen nur $\sin\xi$ erfordern, welches indes leicht aufzuschlagen ist, da auch ξ gesucht werden mufs. Die Berechnung beider Systeme von Ausdrücken würde einige Kontrolle bieten, die man indes, wie sich später zeigen wird, meist auf andere Art erlangt — ohnehin ist sie keine vollständige.

Bei der Auflösung der (9) werden die S und T der 7ziffrigen Logarithmentafeln gute Dienste leisten, so lange eben solche Tafeln eine ausreichende Genauigkeit gewähren. In andern Fällen wird man meist Reihenentwicklungen vorteilhaft finden, um das direkte Aufschlagen der Logarithmen trigonometrischer Funktionen kleiner Winkel zu umgehen.

§ 8. **Reihenentwicklungen zur vorigen Aufgabe.** Man hat, wenn η, ξ und F vorläufig als bekannt angesehen werden, aus der 4. Formel (9) sofort:

$$\tan L_{1.2} = \eta\left(1 + \frac{1}{3}\eta^2 + \frac{2}{15}\eta^4 + Gl_6\right)\sec F. \quad (1)$$

Entwickelt man hieraus $L_{1.2}$ mittelst der Arcustangensreihe (2) S. 29 so folgt:

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = \varrho''\eta\sec F\left\{1 - \frac{1}{3}\eta^2\tan^2 F + \frac{1}{15}\eta^4\tan^2 F[3\tan^2 F + 1] + Gl_6\right\}. \quad (2)$$

Dagegen giebt die Einführung von $\tan L_{1.2}$ in die 2. Formel (4) S. 30, $L_{1.2}$ für u gesetzt:

$$\log\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = \log(\varrho''\eta\sec F) - \frac{1}{3}M\eta^2\tan^2 F$$
$$+ \frac{1}{90}M\eta^4\tan^2 F[13\tan^2 F + 6] + Gl_6. \quad (3)$$

Was die Brauchbarkeit dieser Entwicklungen anbetrifft, so sieht man leicht, dafs dieselbe für (1) gesichert bleibt, so lange η nur eine Gröfse 1. Ordnung ist. Dagegen fordern (2) und (3), insofern sie Entwicklungen von $L_{1.2}$ sind, dafs dieses eine Gröfse 1. Ordnung sei. Nun ist aber $L_{1.2}$ absolut genommen $<$ val. abs. $\eta \sec F$. Man erhält somit zu (2) und (3) als Bedingung der Brauchbarkeit: Es mufs $\eta \sec F$ eine kleine Gröfse sein.*)

Die 6. Formel (9) giebt nun ferner durch Einführung von Reihenentwicklungen rechter Hand (den Index von L einstweilen unterdrückt):

$$\sin(F - B_2)$$

$$= \frac{1}{2}\eta L \sin F \left(1 - \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{120}\eta^4 + Gl_6\right)\left(1 + \frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{120}L^4 + Gl_6\right).$$

Hieraus folgt mit Benutzung von (2) ohne Schwierigkeit:

$$\sin(F - B_2) = \frac{1}{2}\eta^2 \tan F \begin{Bmatrix} 1 - \frac{1}{12}\eta^2 [3\tan^2 F + 1] \\ + \frac{1}{360}\eta^4 [45 \tan^4 F + 15 \tan^2 F + 1] + Gl_6 \end{Bmatrix}.$$

Führt man dies endlich in die Arcussinusreihe ein, 1. Formel (2) S. 29, so ergiebt sich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{F - B_2} = \frac{1}{2}\varrho''\eta^2 \tan F \begin{Bmatrix} 1 - \frac{1}{12}\eta^2 [3\tan^2 F + 1] \\ + \frac{1}{360}\eta^4 [45 \tan^4 F + 30 \tan^2 F + 1] + Gl_6 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Dagegen giebt die Einführung in die 1. Reihe (4) S. 30 sofort:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \log\left(\frac{1}{2}\varrho''\eta^2 \tan F\right) - \frac{1}{12}M\eta^2 [3 \tan^2 F + 1]$$
$$+ \frac{1}{1440}M\eta^4 [135 \tan^4 F + 90 \tan^2 F - 1] + Gl_6. \quad (5)$$

Aus der 5. Gleichung (9) wird durch Entwicklung von $\sin \eta$ in eine Reihe und Anwendung der 2. Reihe (2) S. 29 auf den Übergang von $\tan t$ zu t, erhalten:

$$\underset{\text{in Sek.}}{t} = -\varrho''\eta \tan F \begin{Bmatrix} 1 - \frac{1}{6}\eta^2 [2\tan^2 F + 1] \\ + \frac{1}{120}\eta^4 [24 \tan^4 F + 20 \tan^2 F + 1] + Gl_6 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Dagegen giebt die Anwendung der 2. Reihe (4) S. 30 die Formel:

---

*) Auch bei unbeschränkter Fortsetzung gelten diese Entwicklungen nur für Längenunterschiede bis 45°.

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = \log(-\varrho''\eta \tan F) - \frac{1}{6} M\eta^2 [2\tan^2 F + 1]$$
$$+ \frac{1}{180} M\eta^4 [26\tan^4 F + 20\tan^2 F - 1] + Gl_6. \qquad (7)$$

Auch diese Entwicklungen (4) bis (7) gewähren eine genügende Konvergenz nur so lange, als $\eta \sec F$ eine kleine Gröſse bleibt.

§ 9. **Fortsetzung.** Um nun jetzt auch noch zu Reihen für η, ξ und $\Delta\mathfrak{a}$ zu gelangen, genügt es in den Formeln (4) und (7) S. 117 und in Formel (5) S. 119 $\eta_1 = 0$ zu setzen. Man hat alsdann:

$$\left.\begin{aligned} u &= s\cos\alpha_{1.2} \\ v &= s\sin\alpha_{1.2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{v}{\varrho}\left(1 - \frac{u^2}{6\varrho^2} - \frac{u^2v^2}{15\varrho^4} + \frac{u^4}{120\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\xi} &= \varrho''\frac{u}{\varrho}\left(1 + \frac{v^2}{3\varrho^2} - \frac{u^2v^2}{15\varrho^4} + \frac{2v^4}{15\varrho^4} + Gl_6\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= -\varrho''\frac{uv}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{5v^2 - u^2}{12\varrho^2} + Gl_4\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Es ist aber auch jetzt für die Benutzung von η und ξ bequemer, die logarithmische Form herzustellen. Dazu dient die 1. Reihe (1) § 5 S. 27 und man erhält ohne Schwierigkeit die nachfolgenden, wie die (2) für kleine Werte von $s:\varrho$ brauchbaren Entwicklungen:

$$\left.\begin{aligned} \log\eta &= \log\frac{v}{\varrho} - M\left(\frac{u^2}{6\varrho^2} + \frac{u^2v^2}{15\varrho^4} + \frac{u^4}{180\varrho^4}\right) + Gl_6 \\ \log\underset{\text{in Sek.}}{\xi} &= \log\varrho''\frac{u}{\varrho} + M\left(\frac{v^2}{3\varrho^2} - \frac{u^2v^2}{15\varrho^4} + \frac{7v^4}{90\varrho^4}\right) + Gl_6 \\ \log\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} &= \log\left(-\varrho''\frac{uv}{2\varrho^2}\right) + M\frac{5v^2 - u^2}{12\varrho^2} + Gl_6 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$
$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\mathfrak{a} + t.$$

An Stelle der Formeln (3) kann man sich auch der Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten σ, η und ξ nach *Legendres* Satz (unter Berücksichtigung der höhern Glieder) bedienen. Um ebenso genau zu rechnen, wie die (3) es gestatten, sind 2 Annäherungsrechnungen auszuführen.

§ 10. **Gegeben geographische Breite und Länge für 2 Punkte.** Um in diesem Falle Entfernung und Azimute herzuleiten, kann man ebenfalls sich des Systemes rechtwinkliger Koordinaten als Zwischengliedes bedienen. Im Anschluſs an Fig. 7 S. 123 und die Formeln (7) und (9) S. 125 und 126 erhält man leicht:

$$\left.\begin{aligned}\sin\eta &= \cos B_2 \sin L_{1.2}\\ \sin(F-B_2) &= \tan\eta \tan\frac{L_{1.2}}{2}\sin B_2 = \sin^2\frac{L_{1.2}}{2}\sec\eta\sin 2B_2\\ \tan t &= -\sin\eta\sec L_{1.2}\tan B_2 = -\tan L_{1.2}\sin B_2 .\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Die (2) und (4) auf S. 124 geben, wenn η, F und t gefunden sind:

$$\left.\begin{aligned}\sin\sigma\sin\alpha_{1.2} &= \sin\eta\\ \sin\sigma\cos\alpha_{1.2} &= \cos\eta\sin\xi\\ \xi &= B_1 - F\\ \sin\Delta\mathfrak{a} &= -\sin\xi\tan\frac{\sigma}{2}\sin\alpha_{1.2}\\ \alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\mathfrak{a} + t .\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Bei der Anwendung dieser Formeln ist (wie § 7 S. 124) Voraussetzung, dafs σ klein sei. Für beliebige Werte von σ gelten sie zwar noch, verlieren aber ihre Brauchbarkeit zu scharfer Berechnung der unbekannten Gröfsen.

Eine vollständige Kontrolle der Rechnung gewährt eine 2. Auflösung mit Vertauschung der Punkte.

Erscheint bei der Auflösung die Anwendung der Formeln unbequem, weil etwa die S und T nicht genügende Schärfe gestatten, so kann man wieder Reihenentwicklungen vornehmen. Die Formeln (1) geben zunächst durch Entwicklung der rechten Seiten (und mit Unterdrückung des Index von $L_{1.2}$):

$$\sin\eta = L\cos B_2\left(1 - \frac{1}{6}L^2 + \frac{1}{120}L^4 + Gl_6\right)$$

$$\sin(F-B_2) = \frac{1}{4}L^2\sin 2B_2\left(1 - \frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{360}L^4 + Gl_6\right)$$

$$\times\left(1 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{5}{24}\eta^4 + Gl_6\right)$$

$$\tan t = -L\sin B_2\left(1 + \frac{1}{3}L^2 + \frac{2}{15}L^4 + Gl_6\right).$$

Führt man dies in die Reihen (2) S. 29 ein, so ergiebt sich weiter:

$$\left.\begin{aligned}\eta &= L\cos B_2\left(1 - \frac{1}{6}L^2\sin^2 B_2 - \frac{1}{120}L^4\sin^2 B_2[8-9\sin^2 B_2] + Gl_6\right)\\ \underset{\text{in Sek.}}{F-B_2} &= \frac{1}{4}\varrho'' L^2\sin 2B_2\left\{\begin{aligned}&1 + \frac{1}{12}L^2[5-6\sin^2 B_2]\\ &+\frac{1}{6}L^4\cos^2 B_2[1-2\sin^2 B_2] + \frac{1}{360}L^4 + Gl_6\end{aligned}\right\}\\ \underset{\text{in Sek.}}{t} &= -\varrho'' L\sin B_2\left\{\begin{aligned}&1 + \frac{1}{3}L^2\cos^2 B_2\\ &+\frac{1}{15}L^4\cos^2 B_2[2-3\sin^2 B_2] + Gl_6\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$L = \frac{L_{1.2}\ \text{in Sek.}}{\varrho''}.$$

Was insbesondere die Entwicklung der 2. dieser Formeln anlangt, so wird dabei als Zwischenglied erhalten:

$$\sin(F - B_2) = \frac{1}{4} L^2 \sin 2B_2 \Big(1 + \frac{1}{12} L^2 [5 - 6 \sin^2 B_2]$$
$$+ \frac{1}{24} L^4 \cos^2 B_2 [4 - 9 \sin^2 B_2] + \frac{1}{360} L^4 + Gl_6\Big).$$

Zur logarithmischen Rechnung bequemer findet sich durch Anwendung der (4) S. 30 auf $\sin \eta$, $\sin (F - B_2)$ und $\tan t$:

$$\left.\begin{aligned}
\log \eta &= \log (L \cos B_2) - \frac{1}{6} ML^2 \sin^2 B_2 \\
&\quad - \frac{1}{120} ML^4 \sin^2 B_2 [12 - 11 \sin^2 B_2] + Gl_6 \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} &= \log\Big(\frac{1}{4} \varrho'' L^2 \sin 2B_2\Big) + \frac{1}{12} ML^2 [5 - 6 \sin^2 B_2] \\
&\quad + \frac{1}{1440} ML^4 [119 - 420 \sin^2 B_2 + 300 \sin^4 B_2] + Gl_6 \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{t} &= \log(- \varrho'' L \sin B_2) + \frac{1}{3} ML^2 \cos^2 B_2 \\
&\quad + \frac{1}{90} ML^4 \cos^2 B_2 [7 - 13 \sin^2 B_2] + Gl_6\,;
\end{aligned}\right\} (4)$$

$$L = \frac{L_{1.2} \text{ in Sek.}}{\varrho''}.$$

Vorstehende Entwicklungen (3) und (4) gelten sicher und genügen, so lange L nur eine Gröfse 1. Ordnung ist, wie unschwer zu ersehen.

Die den Formeln (2) entsprechenden Reihen entnimmt man nun am einfachsten den Formeln (1) und (2) für v und u S. 122, indem man darin $y_1 = 0 = x_1$ setzt und den Index von y_2 und x_2 unterdrückt. Es ist danach, sicher ausreichend, sobald die (3) und (4) genügen und $s : \varrho$ eine Gröfse 1. Ordnung ist:

$$\left.\begin{aligned}
s \sin \alpha_{1.2} &= \varrho \eta \Big(1 + \frac{1}{6} \xi^2 - \frac{2}{45} \eta^2 \xi^2 + \frac{7}{360} \xi^4 + Gl_6\Big) \\
s \cos \alpha_{1.2} &= \varrho \xi \Big(1 - \frac{1}{3} \eta^2 - \frac{2}{45} \eta^2 \xi^2 - \frac{1}{45} \eta^4 + Gl_6\Big) \\
\xi &= \frac{(B_1 - F) \text{ in Sek.}}{\varrho''} \\
\underset{\text{in Sek.}}{\Delta \mathfrak{a}} &= - \frac{1}{2} \varrho'' \xi \eta \Big(1 + \frac{1}{12} (\eta^2 + \xi^2) + Gl_4\Big) \\
\alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta \mathfrak{a} + t,
\end{aligned}\right\} (5)$$

und in logarithmischer Form hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \log(s\sin\alpha_{1.2}) &= \log(\varrho\eta) + \frac{1}{6}M\xi^2 - \frac{2}{45}M\eta^2\xi^2 + \frac{1}{180}M\xi^4 + Gl_6 \\ \log(s\cos\alpha_{1.2}) &= \log(\varrho\xi) - \frac{1}{3}M\eta^2 - \frac{2}{45}M\eta^2\xi^2 - \frac{7}{90}M\eta^4 + Gl_6 \\ \log \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\mathfrak{a}} &= \log\left(-\frac{1}{2}\varrho''\xi\eta\right) + \frac{1}{12}M(\eta^2+\xi^2) + Gl_4. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§11. Lösung der vorigen Aufgabe mittelst Gaufs' Gleichungen. Wir bezeichnen die beiden gegebenen Punkte wieder mit P_1 und P_2 und wenden die Gleichungen (10) S. 79 an, indem wir substituieren:

$$\left.\begin{array}{ll} L_{1.2} \text{ für } A & \sigma \text{ für } \alpha \\ \alpha_{2.1} - 180^0 \text{ „ } B & \frac{\pi}{2} - B_1 \text{ „ } \beta \\ 180^0 - \alpha_{1.2} \text{ „ } C & \frac{\pi}{2} - B_2 \text{ „ } \gamma. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Es ergeben sich dann unmittelbar folgende Formeln zur Bestimmung von $\alpha_{1.2}$, $\alpha_{2.1}$ und σ:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\sigma}{2} &= -\sin\frac{B_2-B_1}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2} \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\sigma}{2} &= -\cos\frac{B_2+B_1}{2}\sin\frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\sigma}{2} &= +\cos\frac{B_2-B_1}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2} \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\sigma}{2} &= +\sin\frac{B_2+B_1}{2}\sin\frac{L_{1.2}}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Hierbei sind von den genannten Formeln nur die oberen Zeichen benutzt, weil die Seiten des Dreiecks bis auf die eine σ immer $< \pi$ sind. σ selbst kann $\gtrless \pi$ genommen werden; in der Regel interessiert aber die kürzere Verbindung $< \pi$ und hiermit ist die Auflösung der (2) eine ganz bestimmte.

Die Anwendung der (2) setzt voraus, dafs die Winkel des Dreiecks (1) positiv zwischen null und 360^0 gelegen sind. Wenn indessen $L_{1.2} > 180^0$ wird, so werden im Falle $\sigma < \pi$ die Ausdrücke (1) für B und C gleichzeitig negativ. Denkt man sich daher zu B und C 360^0 addiert, so ergeben sich doch wieder die Formeln (2). Mithin gelten die (2) allgemein für jede Lage von $P_1\, P_2$.

Setzen wir in vorstehenden Formeln (2) zur Abkürzung ein:

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_1 = \varDelta B \qquad & \frac{B_2+B_1}{2} = B \\ \frac{\alpha_{1.2}+\alpha_{2.1}-180^0}{2} &= \alpha \\ \alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} &+ 180^0 + \varDelta\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wo $\varDelta\alpha$ nichts anderes als $\varDelta\mathfrak{A} + t$ in der Bezeichnung der vorhergehenden Paragraphen ist, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha\sin\frac{\sigma}{2} &= -\sin\frac{\varDelta B}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin\alpha\sin\frac{\sigma}{2} &= +\cos B\sin\frac{L_{1.2}}{2}\\
\cos\frac{\varDelta\alpha}{2}\cos\frac{\sigma}{2} &= +\cos\frac{\varDelta B}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin\frac{\varDelta\alpha}{2}\cos\frac{\sigma}{2} &= -\sin B\sin\frac{L_{1.2}}{2};
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{1.2} &= \alpha - \frac{\varDelta\alpha}{2}\\
\alpha_{2.1} &= \alpha + \frac{\varDelta\alpha}{2} + 180^0.
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Diese Formeln geben eine möglichst scharfe Auflösung, die auch für kleine gegenseitige Entfernungen der Punkte bei Anwendung der Hilfsgröfsen S und T bequem ist.

Gaufs benutzt (in den *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie* Teil 1 (1844) S. 33) diese Formeln zu einer indirekten Auflösung der Aufgabe des § 7 dieses Kapitels, S. 123, wobei sehr stark konvergente Reihenentwicklungen entstehen. Wir gehen im Folgenden nur auf diejenigen Reihenentwicklungen ein, welche der Aufgabe dieses Paragraphen entsprechen.

§ 12. **Reihenentwicklungen zur vorigen Aufgabe.** Man hat zunächst aus den (4) die *Neper*sche Analogie:

$$\tan\alpha = -\tan\frac{L_{1.2}}{2}\csc\frac{\varDelta B}{2}\cos B.$$

Diese Formel logarithmieren wir und substituieren darin die Reihen (3) S. 29 für $\log\tan\frac{L_{1.2}}{2}$ und $\log\sin\frac{\varDelta B}{2}$. Das führt zu der Formel:

$$\left.\begin{aligned}
\log\tan\alpha = \log\left(-\frac{L\cos B}{\varDelta B}\right) &+ \frac{1}{24}M[2L^2 + \varDelta B^2]\\
&+ \frac{1}{2880}M[14L^4 + \varDelta B^4] + Gl_6
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$L = \frac{L_{1.2}\,\text{in Sek.}}{\varrho''}\qquad \varDelta B = \frac{\varDelta B\,\text{in Sek.}}{\varrho''}.$$

Hierbei ist $L_{1.2}$ als kleiner positiver oder negativer Wert vorausgesetzt. Zur Bestimmung des Quadranten für α hat man die aus Fig. 7 S. 123 unter Annahme eines kleinen Wertes für $\varDelta\alpha$ ersichtliche Bedingung, dafs $\alpha \lesseqgtr 180^0$ für $\pm L_{1.2}$.

Man erhält nun weiter aus den genannten Formeln (4):

$$\tan\frac{\Delta\alpha}{2} = -\tan\frac{L_{1.2}}{2}\sin B\sec\frac{\Delta B}{2}.$$

Rechter Hand setzen wir für $\tan\frac{L_{1.2}}{2}$ die Reihenentwicklung und führen dann den Ausdruck für $\tan\frac{\Delta\alpha}{2}$ in die 2. Reihe (2) S. 29 ein, womit sich findet:

$$\Delta\alpha = -Lb\left(1 + \frac{1-b^2}{12}L^2 + \frac{(1-b^2)(2-3b^2)}{240}L^4 + Gl_6\right),$$

wenn $\sin B\sec\frac{\Delta B}{2}$ vorübergehend mit b bezeichnet wird. Unter Restitution dieses Ausdrucks und zu Logarithmen übergehend, folgt:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\alpha} = \log\left(-\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}}\sin B\sec\frac{\Delta B}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{12}ML^2\cos B_1\cos B_2\sec^2\frac{\Delta B}{2}\left(1-\tfrac{1}{120}L^2[13\sin^2 B - 7]\right) + Gl_6, \qquad (2)$$

wobei die leicht zu verificierende Identität $1-b^2 = \cos B_1\cos B_2\sec^2\frac{\Delta B}{2}$ benutzt und im letzten Gliede rechter Hand $b^2 = \sin^2 B + Gl_2$ gesetzt ist.

Die Entwicklungen (1) und (2) sind brauchbar, wenn L und ΔB als Gröfsen 1. Ordnung angesehen werden können (die Bedingung, dafs σ klein sei, genügt somit, ebenso wie bei den vorhergehenden Aufgaben, allein noch nicht).

Zur Berechnung von σ und s geben die beiden ersten Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen zur Auswahl die Formeln:

$$\sin\frac{\sigma}{2} = \left(-\cos\frac{L_{1.2}}{2}\sec\alpha\right)\sin\frac{\Delta B}{2} = (\cos B\csc\alpha)\sin\frac{L_{1.2}}{2}.$$

Beide haben die Gestalt $\sin\frac{\sigma}{2} = p\sin\frac{q}{2}$. Die Anwendung der Sinusreihe auf $\sin\frac{q}{2}$ und der Arcussinusreihe (2) S. 29, bezw. der Reihe für deren Logarithmus, S. 30 (4), auf $\sin\frac{\sigma}{2}$ giebt aber mit Rücksicht auf die Gleichung $s = \sigma\varrho$:

$$\left.\begin{aligned} s &= pq\varrho\left(1 - \frac{1-p^2}{24}q^2 + \frac{(1-p^2)(1-9p^2)}{1920}q^4 + Gl_6\right) \\ \log s &= \log(pq\varrho) - \frac{1}{24}Mq^2[1-p^2]\left(1+\tfrac{1}{120}q^2[1+11p^2]\right) + Gl_6. \end{aligned}\right\}(3)$$

Hierbei ist zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} p &= -\cos\frac{L_{1.2}}{2}\sec\alpha & q &= \frac{\Delta B \text{ in Sek.}}{\varrho''} \\ &\text{oder} \\ p &= \cos B\csc\alpha. & q &= \frac{L_{1.2}\text{ in Sek.}}{\varrho''} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die schärfste Rechnung hat man (wie bei Berechnung einer Hypotenuse aus den Katheten) mittelst des kleinsten p-Wertes.

Wäre $\log \sin \frac{\sigma}{2}$ erwünscht, so würde man die Substitutionen (4) in die Formel

$$\log \sin \frac{\sigma}{2} = \log \frac{pq}{2} - \frac{1}{24} Mq^2 - \frac{1}{2880} Mq^4 + Gl_6 \qquad (5)$$

einzuführen haben.

Die Entwicklungen (3) und (5) sind bezüglich ihrer Brauchbarkeit an dieselben Bedingungen wie die (1) und (2) geknüpft.

---

4. Kapitel.

Der vertikale Schnitt und das Sehnendreieck für das abgeplattete Rotationsellipsoid.

§. 1. Abweichung gegenseitiger Vertikalschnitte von einander. Indem wir uns nunmehr zu der Geodäsie auf einer Niveaufläche von der Form des abgeplatteten Rotationsellipsoids spezieller wenden, sei zunächst hervorgehoben, dafs wir *von der Krümmung der Lotlinien absehen*, dafs also in den Fällen, wo Punkte betrachtet werden müssen, die nicht auf der zu grunde gelegten Niveaufläche selbst liegen, auch *deren* Lotrichtungen stets als Normalen dieser Niveaufläche gedacht werden.*)

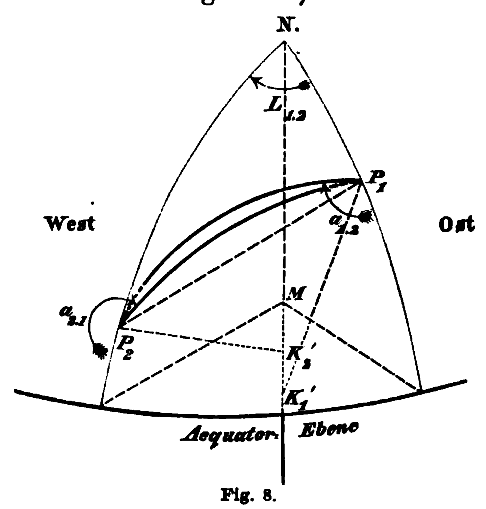


Fig. 8.

Legt man von einem Punkte P_1 eine Vertikalebene, also eine die Lotlinie P_1K_1' enthaltende Ebene, durch einen andern Punkt P_2 der Oberfläche (Fig. 8), so liegt des letztern Lotlinie P_2K_2' im allgemeinen nicht in der genannten Vertikalebene, weil die Schnittpunkte K_1' und K_2' der Lotlinien mit der Rotationsaxe im allgemeinen nicht zusammenfallen. Nach S. 41 (9) ist

*) Diese Annahme wird nicht nur in Kapitel 4, sondern auch in allen folgenden Kapiteln, welche die Geodäsie auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoid betreffen, beibehalten werden.

$$K_1'K_2' = a_0 e^2 \left(\frac{\sin B_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} - \frac{\sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \right) = a_0 e^2 \frac{\sin \beta_2 - \sin \beta_1}{\sqrt{1 - e^2}},$$

mithin genähert für kurze Distanzen $P_1 P_2$, und $\varDelta B$ als Gröfse 1. Ordnung, e^2 als Gröfse 2. Ordnung genommen:

$$K_1'K_2' = a_0 e^2 (\cos B \sin \varDelta B + Gl_3) \tag{1}$$

für

$$\varDelta B = B_2 - B_1 \qquad B = \frac{1}{2}(B_2 + B_1). \tag{2}$$

Haben beide Punkte gleiche geographische Breite B, so fallen die beiden Punkte K_1' und K_2' zusammen; alsdann haben P_1 und P_2 auch eine gemeinsame Vertikalebene. Ebenso ist dies der Fall, wenn sie in einem und demselben Méridian liegen. In allen andern Fällen erzeugen aber die von einander abweichenden Vertikalebenen von P_1 nach P_2 und von P_2 nach P_1 auf der Oberfläche *zwei Vertikalschnitte*, die in P_1 und P_2 sich unter kleinen Winkeln schneiden.

Zeigt sich nun bereits hier ein wesentlicher Unterschied gegen die Kugel, so bemerkt man sogleich einen andern, wenn man sich die Punkte P_1 und P_2 in ihren Lotlinien emporgehoben denkt; dann tritt P_2 aus der Vertikalebene von P_1 nach der Anfangslage von P_2, und P_1 aus derjenigen von P_2 nach der Anfangslage von P_1 heraus. Oder mit andern Worten:

Die Höhe des Objekts über der zu grunde gelegten Niveaufläche hat einen Einflufs auf die astronomischen Azimute der Vertikalebenen (S. 7) und also auch auf die Horizontalwinkel.

§. 2. **Gleichung des Ellipsoids und des Vertikalschnitts.** Dieselbe lautet in rechtwinkligen Koordinaten, bezogen auf den Mittelpunkt als Ursprung und die Rotationsaxe als z-Axe:

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{a_0^2} + \frac{z^2}{a_0^2(1 - e^2)} = 1. \tag{1}$$

Denken wir uns nun die Meridianebene von P_1 als xz-Ebene, in 90° westlichem Längenunterschied dazu die yz-Ebene und nehmen positive z nach Norden, dann folgt mit Rücksicht auf die Formeln des § 2 S. 39 und mit Beachtung von Fig. 8:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_0 \cos \beta_1 = \frac{a_0 \cos B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= b_0 \sin \beta_1 = \frac{a_0 (1 - e^2) \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= a_0 \cos \beta_2 \cos L_{1.2} = \frac{a_0 \cos B_2 \cos L_{1.2}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} \\ y_2 &= a_0 \cos \beta_2 \sin L_{1.2} = \frac{a_0 \cos B_2 \sin L_{1.2}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} \\ z_2 &= b_0 \sin \beta_2 \qquad\qquad = \frac{a_0 (1 - e^2) \sin B_2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Bezüglich der Bildung von x_2 und y_2 ist zu bemerken, dafs $a_0 \cos \beta_2$ (d. i. das x auf S. 40) in der Äquatorebene gegen die x-Axe die Neigung $L_{1.2}$ besitzt.

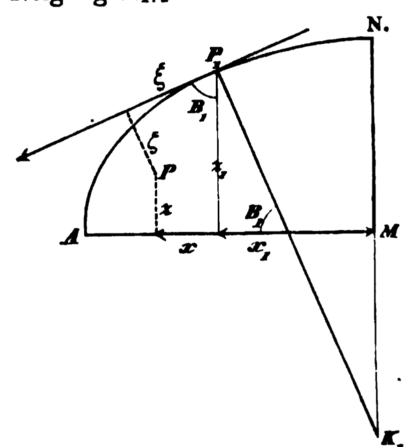


Fig. 9. Projektion auf die xz-Ebene.

Wir denken uns ferner in der xz-Ebene, wie es Fig. 9 zeigt, eine Axe der ξ als Tangente der Meridiankurve, positiv nach Süden, und normal dazu, also in der Richtung der Lotlinie, eine Axe der ζ, positiv nach dem Innern des Ellipsoids. Legen wir endlich eine Axe der η durch P_1 parallel zur y-Axe, so ergeben sich für einen beliebigen Punkt P des Raumes folgende Relationen zwischen den Koordinaten xyz und $\xi\eta\zeta$:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (x - x_1) \sin B_1 - (z - z_1) \cos B_1 \\ \eta &= y \\ \zeta &= -(x - x_1) \cos B_1 - (z - z_1) \sin B_1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \xi \sin B_1 - \zeta \cos B_1 \\ y &= \eta \\ z &= z_1 - \xi \cos B_1 - \zeta \sin B_1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wie man leicht durch Projektion auf die verschiedenen Axen findet.

Substituiert man die (5) in die Gleichung (1), so geht sie über in:

$$\begin{gathered} \xi^2(1 - e^2 \sin^2 B_1) + \eta^2(1 - e^2) + \zeta^2(1 - e^2 \cos^2 B_1) + 2\xi\zeta e^2 \sin B_1 \cos B_1 \\ + 2\xi \left(x_1(1 - e^2) \sin B_1 - z_1 \cos B_1\right) - 2\zeta \left(x_1(1 - e^2) \cos B_1 + z_1 \sin B_1\right) \\ = a_0^2(1 - e^2) - x_1^2(1 - e^2) - z_1^2, \end{gathered}$$

was sich mit Rücksicht auf die (2) wesentlich vereinfacht, wie folgt:

$$\begin{gathered} \xi^2 (1 - e^2 \sin^2 B_1) + \eta^2 (1 - e^2) + \zeta^2 (1 - e^2 \cos^2 B_1) \\ + 2\xi\zeta e^2 \sin B_1 \cos B_1 - 2\zeta \frac{a_0 (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Setzt man hierin wie S. 58 für ξ und η die Ausdrücke in Polarkoordinaten:

$$\xi = \vartheta \cos \alpha \qquad \eta = \vartheta \sin \alpha, \tag{7}$$

so ergiebt sich, falls α konstant bleibt, eine Gleichung zwischen ϑ und ζ allein, *die Gleichung des Vertikalschnittes*, welcher von P_1 im Azimut α ausgeht:

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta^2 (1 - e^2 + e^2 \cos^2 B_1 \cos^2 \alpha) + \zeta^2 (1 - e^2 \cos^2 B_1) \\ + 2\vartheta\zeta e^2 \sin B_1 \cos B_1 \cos \alpha - 2\zeta \dfrac{a_0 (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \end{array}\right\} = 0. \tag{8}$$

Diese Schnittkurve ist eine Ellipse, weil die Gleichung vom 2. Grade und die Kurve geschlossen ist; die kleine Axe liegt in derjenigen Meridianebene, welche normal zur Schnittebene steht und die grofse Axe liegt in der Äquatorebene, wie mit Rücksicht darauf folgt, dafs jene Meridianebene des Rotationsellipsoids und ebenso die Äquatorebene Symmetrieebenen sind, die grofse Axe aber jedenfalls nur in der Äquatorebene liegen kann.

Die Meridianebene, welche normal zur Schnittebene steht, ist auch die Ebene des *Neigungswinkels der Rotationsaxe zur Schnittebene*, den wir mit $90^0 - U$ bezeichnen.

Um denselben zu ermitteln, denken wir uns um K_1' eine Kugel vom Radius 1 gelegt und zu allen interessierenden Linien Parallelen durch K_1' gezogen. Dann geben die gröfsten Kreisbögen zwischen den Durchschnitten der Linien durch K_1' mit der Kugeloberfläche die Neigungswinkel der Linien an. Fig. 10 zeigt die entstehende Figur auf der Kugelfläche. N entspricht dem nördlichen Teile der Rotationsaxe, P_1 der Lotlinie von P_1, NP_1 der Meridianebene durch P_1, $P_0P_1P_2$ der Vertikalebene P_1P_2 und NP_0 derjenigen Meridianebene, welche normal zu jener steht.

Fig. 10.

Das sphärische Dreieck NP_0P_1 ist in P_0 rechtwinklig. Der Winkel bei P_1, das astronomische Azimut der Vertikalebene von P_1 nach P_2, soll jetzt mit $a_{1.2}$ bezeichnet werden. Man hat dann nach dem Sinussatz

$$\cos U = \cos B_1 \sin a_{1.2}. \tag{9}$$

Auf die Rektifikation der Bogenlänge gehen wir hier nicht ein, da wir dieselbe später, für den beabsichtigten Zweck besser passend, mit der



Sehne in Beziehung bringen werden. (Vgl. überdies über die Rektifikation *Hansen, Geodät. Untersuchungen* S. 66.)

Hier notieren wir nur noch die Gleichung des Vertikalschnitts, dargestellt mittelst der Polarkoordinaten $K_1' P = r$ und $\sphericalangle \binom{P_0 P}{K_1'} = \Theta$; sie lautet:

$$r^2 (1 - e^2 + e^2 \cos^2 U \cos^2 \Theta) - r \frac{2 a_0 e^2 \cos U \sin B_1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} \cos \Theta = \frac{a_0^2 (1 - e^2 - e^2 \sin^2 B_1)}{1 - e^2 \sin^2 B_1},$$

wie man durch die folgenden Substitutionen aus (8) herleiten kann:

$$\vartheta = r \sin (\Theta - \Theta_1) \text{ und } \zeta = \left(\frac{a_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}} - r \cos (\Theta - \Theta_1)\right).$$

§ 3. **Das astronomische Azimut als Funktion der geographischen Positionen.** Für die Vertikalebene von P_1 nach P_2 ist das astronomische Azimut $\alpha_{1.2}$ durch die Formeln gegeben (vergl. (7) und (4) des vorigen Paragraphen):

$$\left.\begin{aligned} \cot \alpha_{1.2} &= \frac{\xi_2}{\eta_2} \\ \xi_2 &= (x_2 - x_1) \sin B_1 - (z_2 - z_1) \cos B_1 \\ \eta_2 &= y_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei man für x_1, z_1, x_2, y_2 und z_2 noch die Formeln (2) und (3) des vorigen Paragraphen zu benutzen hat.

Wendet man die Ausdrücke an, welche die *reduzierten* Breiten enthalten, so ergiebt sich:

$$\cot \alpha_{1.2} = \frac{(\cos \beta_2 \cos L_{1.2} - \cos \beta_1) \sin B_1 - (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \cos B_1 \sqrt{1 - e^2}}{\cos \beta_2 \sin L_{1.2}}.$$

Wird hierin

$$\sin B_1 = \sin \beta_1 : \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}$$

und

$$\cos B_1 = \cos \beta_1 \sqrt{1 - e^2} : \sqrt{1 - e^2 \cos \beta_1}$$

gesetzt, S. 40 (5), so geht dieser Ausdruck über in:

$$\cot \alpha_{1.2} = \frac{(\cos \beta_2 \sin \beta_1 \cos L_{1.2} - \sin \beta_2 \cos \beta_1) + 2 e^2 \sin \frac{\Delta \beta}{2} \cos \beta \cos \beta_1}{\cos \beta_2 \sin L_{1.2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}}, \tag{2}$$

$$\Delta \beta = \beta_2 - \beta_1; \qquad \beta = \frac{1}{2} (\beta_2 + \beta_1). \tag{3}$$

Indem wir für $\cos L_{1.2}$ schreiben $\left(1 - 2 \sin^2 \frac{L_{1.2}}{2}\right)$ und $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}$ wie früher mit w_1 bezeichnen, ergiebt sich folgende zu scharfer Rechnung geeignete Transformation:

$$\cot \alpha_{1.2} = - \frac{1}{w_1} \left\{ \frac{\sin \Delta \beta}{\cos \beta_2 \sin L_{1.2}} \left(1 - e^2 \cos \beta_1 \cos \beta \sec \frac{\Delta \beta}{2}\right) + \sin \beta_1 \tan \frac{L_{1.2}}{2} \right\}. \tag{4}$$

Für $a_{2.1}$, d. i. das astronomische Azimut des Vertikalschnitts von P_2 nach P_1, bedarf es einer besondern Formel nicht, denn es geht $\cot a_{2.1}$ aus $\cot a_{1.2}$ hervor, wenn man der Vertauschung der Punkte entsprechend die Indices 1 und 2 mit einander vertauscht und daher, wenn $\Delta\beta$ immer noch $\beta_2 - \beta_1$ bedeuten soll, es negativ nimmt. Auch kann man noch hervorheben, dafs

$$L_{2.1} = -L_{1.2}.$$

Wir geben nunmehr den Ausdruck für $\cot a_{1.2}$ mittelst *geographischer* Breiten. Derselbe läfst sich am bequemsten direkt durch Substitution der passenden Werte für die x, y und z in die Gleichung (1) herstellen. Es findet sich:

$$\cot a_{1.2} = \frac{(\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1) + e^2 \cos B_1 \left(\sin B_2 - \sin B_1 \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}\right)}{\cos B_2 \sin L_{1.2}}, \quad (5)$$

und hieraus geeigneter zu scharfer Rechnung und mittelst Einführung von W für $\sqrt{1-e^2\sin^2 B}$:

$$\cot a_{1.2} = -\left\{\frac{\sin \Delta B}{\sin L_{1.2} \cos B_2} + \sin B_1 \tan \frac{L_{1.2}}{2} + \frac{e^2 \cos B_1}{\sin L_{1.2} \cos B_2}\left(\sin B_1 \frac{W_2}{W_1} - \sin B_2\right)\right\}. \quad (6)$$

Die Formeln (4) und (6) lassen $a_{1.2}$ um 180° unbestimmt, jedoch ist das unwesentlich, weil beide Werte von $a_{1.2}$ dieselbe Vertikalebene bezeichnen. Aufserdem erkennt man ohne weiteres, dafs die Sehne P_1P_2 immer westlich vom Meridian durch P_1 liegt, wenn die *westliche* geographische Länge von P_2 gegen $P_1 < 180°$ ist; hingegen östlich, wenn sie $> 180°$ ist.

Demgemäfs wird man setzen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{das südwestl. Azimut } a_{1.2} < 180^0 \text{ für die westliche Länge } L_{1.2} < 180^0 \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad a_{1.2} > 180^0 \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad L_{1.2} > 180^0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

§ 4. Reihenentwicklungen zur vorigen Aufgabe. Die Formel (6) kann man noch dadurch weiter entwickeln, dafs man das in e^2 multiplizierte Glied in folgender Weise transformiert. Es ist zunächst

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2} = \sqrt{1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\cos(2B_1 + 2\Delta B)}.$$

Löst man den Cosinus auf, so ergiebt eine einfache Reduktion:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2} = \sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}\,\sqrt{1 - \left\{\frac{e^2 \sin 2B \sin \Delta B}{1 - e^2 \sin^2 B_1}\right\}}.$$

Die Reihenentwicklung nach dem binomischen Satze giebt hieraus in endlicher Form (2. Formel (3) S. 27 § 4):



$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} = 1 - \frac{1}{2}\left\{\frac{e^2 \sin 2B \sin \varDelta B}{1-e^2\sin^2 B_1}\right\}\left(1+\frac{1}{4}\left\{\div\right\} + \frac{\varkappa}{8(1-\{\div\})}\left\{\div\right\}^2\right), \quad (1)$$

worin $\varkappa$ einen echten Bruch bedeutet. Führt man Vorstehendes in die Formel für $\cot \alpha_{1.2}$ ein und betrachtet e^2 wie bisher als Gröfse 2. Ordnung, so resultiert:

$$\cot \alpha_{1.2} = -\left\{\frac{\sin \varDelta B}{\sin L_{1.2}\cos B_2}\left[\begin{array}{l}1 - e^2\cos B_1 \cos B \sec\frac{\varDelta B}{2} + Gl_8 \\ -\frac{e^4 \sin 2B_1 \sin 2B}{4(1-e^2\sin^2 B_1)}\left(1+\frac{e^2\sin 2B \sin\varDelta B}{4(1-e^2\sin^2 B_1)}\right)\end{array}\right] + \sin B_1 \tan\frac{L_{1.2}}{2}\right\}. \quad (2)$$

Diese Formel giebt stets eine für die Anwendung 10ziffriger Logarithmen ausreichende Schärfe. Es betragen nämlich mit Vernachlässigung einiger Faktoren im Nenner, die jederzeit nahezu 1 geben, die Gl_8 in der eckigen Klammer nur

$$+\frac{1}{32}\varkappa e^8 \sin 2B_1 \sin^3 2B \sin^2 \varDelta B,$$

das ist weniger als 1 : 16000 000000. Der Einflufs auf den Logarithmus der eckigen Klammer ist somit $< M : 16000\,000000$ d. i. nur 2 Einheiten der 11. Decimalstelle.

Ist $\varDelta B$ eine kleine Gröfse 1. Ordnung, so fällt das kleingedruckte Glied in (2) auch noch weg, weil alsdann der kurzen Distanz wegen $\alpha_{1.2}$ nicht so scharf berechnet zu werden braucht, wie für grofse Distanzen.

Die Formel (2) läfst sich mit Vorteil noch weiter umformen, wenn man kleine Werte für $\varDelta B$ und $L_{1.2}$ voraussetzt.

Wir führen in die eckige Parenthese von (2) anstatt B_1 und B eine Breite

$$B' = \frac{3B_1 + B_2}{4} = B_1 + \frac{\varDelta B}{4} \quad (3)$$

ein, sodafs zu substituieren ist $B_1 = B' - \frac{\varDelta B}{4}$ und $B = B' + \frac{\varDelta B}{4}$. Löst man dann die betreffenden Cosinus und Sinus auf, so ergiebt sich für die eckige Klammer:

$$[\div] = 1 - e^2 \sec\frac{\varDelta B}{2}\left(\cos^2 B' - \sin^2\frac{\varDelta B}{4}\right) - \frac{e^4}{4}\,\frac{\sin^2 2B' - \sin^2\frac{\varDelta B}{2}}{1-e^2\sin^2 B_1} + Gl_7.$$

Im letzten Nenner rechts kann man für B_1 einfach B' setzen; denn der dabei begangene Fehler ist von der 7. Ordnung. Hiermit und durch einige einfache Reduktionen erhält man:

$$\left[\div\right] = \left(1 - e^2 \cos^2 B' - \frac{e^4}{4} \frac{\sin^2 2B'}{1 - e^2 \sin^2 B'}\right)$$

$$- \frac{e^2}{2} \cos 2B' \left(\sec \frac{\Delta B}{2} - 1\right) + \frac{e^4}{4} \frac{\sin^2 \frac{\Delta B}{2}}{1 - e^2 \sin^2 B'} + Gl_7 .$$

Das erste dieser Glieder ist in Strenge $(1 - e^2) : W^2$, W für die Breite B'; denn man hat

$$\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 B'} = (1 - e^2) \left(1 + e^2 \sin^2 B' + \frac{e^4 \sin^4 B'}{1 - e^2 \sin^2 B'}\right),$$

woraus sofort jenes 1. Glied folgt. Führt man dies und die Reihen für Secante und Sinus ein, so folgt:

$$\left[\div\right] = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 B'} - \frac{e^2}{2} \cos 2B' \left(\frac{\Delta B^2}{8} + \frac{5 \Delta B^4}{384}\right) + \frac{e^4 \Delta B^2}{16} + Gl_7$$

oder

$$\left[\div\right] = \frac{1 - e^2}{W'^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{16} e^2 \Delta B^2 \Big(\cos 2B' \left[1 + \frac{5}{48} \Delta B^2\right] \\ \quad - e^2 \sin^2 B' \left[2 + \cos 2B'\right]\Big) + Gl_7 \end{array} \right\}, \quad (4)$$

wobei neuerdings nur Glieder 8. Ordnung vernachlässigt worden sind. Für kleine Werte von ΔB und $L_{1.2}$ können wir nun ferner setzen, den Index von L unterdrückend:

$$\frac{\sin \Delta B}{\sin L} = \frac{\Delta B}{L} \left(1 - \frac{1}{6} \Delta B^2 + \frac{1}{120} \Delta B^4 + Gl_6\right) \left(1 + \frac{1}{6} L^2 + \frac{7}{360} L^4 + Gl_6\right).$$

Multipliziert man rechts aus und führt den entstehenden Ausdruck, sowie (4) in (2) ein, so folgt endlich:

$$\left.\begin{array}{l} \cot a_{1.2} = - \frac{(1 - e^2) \Delta B}{W'^2 L \cos B_2} F - \frac{1}{2} L \sin B_1 \left(1 + \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{120} L^4 + Gl_6\right), \\ \text{wobei} \\ F = \left\{1 - \frac{1}{6} \left[\Delta B^2 - L^2\right] \left(1 - \frac{1}{60} \left[3 \Delta B^2 - 7 L^2\right]\right) - \frac{1}{16} e^2 \Delta B^2 \cos 2B' + Gl_6\right\} \\ \Delta B = \frac{\Delta B \text{ in Sek.}}{\varrho''} \qquad L = \frac{L_{1.2} \text{ in Sek.}}{\varrho''}. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die gröſsten hierbei vernachlässigten Glieder sind folgende Glieder 6. Ordnung der geschlungenen Parenthese F:

$$+ \frac{1}{16} e^4 \Delta B^2 \sin^2 B' \left[2 + \cos 2B'\right] + \frac{1}{256} e^2 \Delta B^4 \cos 2B'$$

$$- \frac{1}{96} e^2 \Delta B^2 L^2 \cos 2B' + \frac{31}{15120} L^6 . \quad (6)$$

Multipliziert man dieselben in M, so ergiebt sich der Einflufs auf den Logarithmus der geschlungenen Parenthese. Den gröfsten Einflufs haben das 1. und 3. Glied. Er ist im Maximum in Einheiten der 7. Decimalstelle des Logarithmus näherungsweise gleich

$$13 \Delta B^2 \text{ bezw. } 300 \Delta B^2 L^2, \tag{7}$$

sodafs selbst für $\Delta B = 0{,}1$ und $L = 0{,}1$ erst die 8. Decimalstelle der geschlungenen Parenthese in (5) (und zwar nur allein wegen des 1. Gliedes) um 1 Einheit irrig wird.

Wendet man (5) auf $\Delta B = 0{,}02$ und $L = 0{,}08$ an, so ist der Fehler des Logarithmus der geschlungenen Parenthese in (5) mit Rücksicht auf alle vernachlässigten Glieder im Maximum 8 Einheiten der 10. Decimalstelle.

§ 5. **Sehne und Azimute aus der geographischen Lage zweier Punkte mittelst Benutzung der reduzierten Breiten.** Bisher wurde angenommen, dafs nur *ein* Azimut zu berechnen sei. Sind aber beide Azimute und auch die Sehne zu ermitteln, so wird man die Formeln zur Berechnung des Azimuts angemessen abändern. Zunächst betrachten wir die Sehne $P_1P_2 = \mathfrak{k}$. Für diese hat man unmittelbar die Gleichung:

$$\mathfrak{k}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Substituiert man die Ausdrücke der Koordinaten mittelst der reduzierten Breiten nach (2) und (3) S. 135 u. 136, so ergiebt sich hieraus:

$$\mathfrak{k}^2 = a_0^2 \left\{ (\cos\beta_2 \cos L_{1.2} - \cos\beta_1)^2 + \cos^2\beta_2 \sin^2 L_{1.2} + (1-e^2)(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)^2 \right\},$$

was nach einiger Reduktion und insbesondere nach Einführung der halben Winkel übergeht in:

$$\mathfrak{k}^2 = 4a_0^2 \left(\sin^2\frac{\Delta\beta}{2} \cos^2\frac{L_{1.2}}{2} + \cos^2\beta \sin^2\frac{L_{1.2}}{2} - e^2 \sin^2\frac{\Delta\beta}{2} \cos^2\beta \right). \tag{1}$$

Diese Formel wird zur Vermeidung der Rechnung mit vielziffrigen Zahlen zweckmäfsig dadurch transformiert, dafs man setzt:

$$\left.\begin{aligned} -\sin\frac{\Delta\beta}{2} \cos\frac{L_{1.2}}{2} &= \sin\frac{\sigma'}{2} \cos\alpha' \\ +\cos\beta \sin\frac{L_{1.2}}{2} &= \sin\frac{\sigma'}{2} \sin\alpha' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\sin q' = \frac{e}{\sin\frac{\sigma'}{2}} \sin\frac{\Delta\beta}{2} \cos\beta. \tag{3}$$

Es geht damit die Formel (1) über in die weit einfachere:

$$\mathfrak{k} = 2 a_0 \sin \frac{\sigma'}{2} \cos q'. \tag{4}$$

Die Bedeutung der Hilfsgröfsen a' und σ' ergiebt sich aus der Betrachtung eines sphärischen Dreiecks mit nachstehenden Seiten und Winkeln:

$$\left.\begin{array}{c|c|c} \sigma' & \frac{\pi}{2} - \beta_1 & \frac{\pi}{2} - \beta_2 \\ L_{1.2} & a'_{2.1} - 180^0 & 180^0 - a'_{1.2} \end{array}\right\} \tag{5}$$

Setzt man nämlich zugleich

$$\left.\begin{array}{l} a'_{2.1} = a'_{1.2} + 180^0 + \Delta a' \\ \dfrac{a'_{1.2} + a'_{2.1} - 180^0}{2} = a' \end{array}\right\} \tag{6}$$

so geben die *Gaufs*ischen Gleichungen für dieses Dreieck, vergl. S. 131:

$$\left.\begin{array}{l} \cos a' \sin \frac{\sigma'}{2} = - \sin \frac{\Delta \beta}{2} \cos \frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin a' \sin \frac{\sigma'}{2} = + \cos \beta \sin \frac{L_{1.2}}{2} \\ \cos \frac{\Delta a'}{2} \cos \frac{\sigma'}{2} = + \cos \frac{\Delta \beta}{2} \cos \frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin \frac{\Delta a'}{2} \cos \frac{\sigma'}{2} = - \sin \beta \sin \frac{L_{1.2}}{2}; \\ \Delta \beta = \beta_2 - \beta_1 \qquad \beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1) \\ a'_{1.2} = a' - \frac{\Delta a'}{2} \qquad a'_{2.1} = a' + \frac{\Delta a'}{2} + 180^0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Denkt man sich hieraus, den (2) entsprechend, σ', aufserdem aber auch noch $a'_{1.2}$ und $a'_{2.1}$ berechnet, so lassen sich nun damit auch die astronomischen Azimute $a_{1.2}$ und $a_{2.1}$ finden. Offenbar nämlich geht die Formel (2) S. 138 in eine Formel für $\cot a'_{1.2}$ über, wenn man $e =$ null setzt. Damit aber läfst sich jene wie folgt reduzieren:

$$\cot a_{1.2} = \frac{\cot a'_{1.2} + 2 e^2 \dfrac{\sin \frac{\Delta \beta}{2} \cos \beta \cos \beta_1}{\sin L_{1.2} \cos \beta_2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}}.$$

Setzen wir den 2. Teil des Zählers gleich $\tan \varepsilon_{1.2}$ und benutzen die Bezeichnung $w_1 = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \tan \alpha_{1.2} &= \frac{w_1 \sin \alpha'_{1.2} \cos \varepsilon_{1.2}}{\cos(\alpha'_{1.2} - \varepsilon_{1.2})} \\ \tan \varepsilon_{1.2} &= 2e^2 \frac{\sin \frac{\Delta\beta}{2} \cos\beta \cos\beta_1}{\sin L_{1.2} \cos \beta_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die Vertauschung der Indices 1 und 2 giebt hieraus, da $L_{2.1} = -L_{1.2}$ ist,

$$\left.\begin{aligned} \tan \alpha_{2.1} &= \frac{w_2 \sin \alpha'_{2.1} \cos \varepsilon_{2.1}}{\cos(\alpha'_{2.1} - \varepsilon_{2.1})} \\ \tan \varepsilon_{2.1} &= 2e^2 \frac{\sin \frac{\Delta\beta}{2} \cos\beta \cos\beta_2}{\sin L_{1.2} \cos \beta_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Die gesamte Auflösung ist nunmehr in den Formeln (7), (3), (4), (8) und (9) enthalten. Zu (7) ist noch zu bemerken, dafs man σ' stets $< \pi$ zu nehmen hat, damit die Azimute der Lage der Sehne entsprechen (vergl. S. 139 § 3). Hierdurch wird die Auflösung der (7) eine ganz bestimmte.

Wendet man die Formeln dieses Paragraphen auf 2 Punkte in geringer Entfernung von einander an, so wird es unter Umständen passend erscheinen, an die Formeln (7) Reihenentwicklungen zu knüpfen. Da nun die (7) völlig den (4) S. 132 entsprechen, so kann man mit ganz geringen Änderungen in der Bezeichnung die Formeln des § 12 S. 132 auf vorliegenden Fall übertragen, wobei nun auch Formel (5) daselbst zur Anwendung gelangt.

Die ε, zu deren Bestimmung 7ziffrige Logarithmen (event. unter Anwendung der Hilfslogarithmen T) immer ausreichen dürften, können aber wie oben ermittelt werden, nur wird man in den Ausdrücken für $\tan \varepsilon$ mittelst der ersten beiden Gleichungen (7)

$$\frac{\sin \frac{\Delta\beta}{2}}{\sin L_{1.2}} \text{ ersetzen durch } \left(-\frac{1}{2} \sec^2 \frac{L_{1.2}}{2} \cos\beta \cot \alpha'\right).$$

§ 6. **Sehne und Azimute mittelst der geographischen Breiten und des Längenunterschieds zweier Punkte.** Wir betrachten zunächst das sphärische Hilfsdreieck mit den nachstehenden Seiten und Winkeln:

$$\left.\begin{array}{c|c|c} \sigma' & \frac{\pi}{2} - B_1 & \frac{\pi}{2} - B_2 \\ L_{1.2} & \alpha'_{2.1} - 180^0 & 180^0 - \alpha'_{1.2}. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Für dasselbe ergeben sich wie im ähnlichen Falle des vorigen Paragraphen die zur Bestimmung von σ', $\alpha'_{2.1}$ und $\alpha'_{1.2}$ geeigneten Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\cos a' \sin\frac{\sigma'}{2} &= -\sin\frac{\varDelta B}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin a' \sin\frac{\sigma'}{2} &= +\cos B \sin\frac{L_{1.2}}{2}\\
\cos\frac{\varDelta a'}{2}\cos\frac{\sigma'}{2} &= +\cos\frac{\varDelta B}{2}\cos\frac{L_{1.2}}{2}\\
\sin\frac{\varDelta a'}{2}\cos\frac{\sigma'}{2} &= -\sin B \sin\frac{L_{1.2}}{2}\\
\varDelta B = B_2 - B_1 \qquad & B = \frac{1}{2}(B_2 + B_1)\\
a'_{1.2} = a' - \frac{\varDelta a'}{2} \qquad & a'_{2.1} = a' + \frac{\varDelta a'}{2} + 180^0.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

In diesen Formeln bedeuten $a'_{1.2}$ u. s. f. nicht dieselben Gröfsen wie im vorigen Paragraphen. Dagegen ist $a'_{1.2}$ identisch mit demjenigen Wert von $a_{1.2}$, welchen Formel (6) S. 139 für $e^2 =$ null ergiebt. Man hat daher

$$\cot a_{1.2} = \cot a'_{1.2} + \frac{e^2 \cos B_1}{\sin L_{1.2} \cos B_2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right). \quad (3)$$

Setzt man den Zusatz zu $\cot a'_{1.2}$ gleich $\tan \varepsilon'_{1.2}$, so folgt leicht für $a_{1.2}$ und zugleich durch Vertauschung der Indices 1 und 2 auch für $a_{2.1}$:

$$\left.\begin{aligned}
\tan a_{1.2} = \frac{\sin a'_{1.2}\cos\varepsilon'_{1.2}}{\cos(a'_{1.2}-\varepsilon'_{1.2})} \qquad & \tan a_{2.1} = \frac{\sin a'_{2.1}\cos\varepsilon'_{2.1}}{\cos(a'_{2.1}-\varepsilon'_{2.1})}\\
\tan\varepsilon'_{1.2} &= \frac{e^2\cos B_1}{\sin L_{1.2}\cos B_2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right)\\
\tan\varepsilon'_{2.1} &= \frac{e^2\cos B_2}{\sin L_{1.2}\cos B_1}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right)\frac{W_1}{W_2}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Für die Sehne $\mathfrak{k}$ erhält man ähnlich wie zu Beginn des vorigen Paragraphen die Gleichung:

$$\mathfrak{k}^2 = a_0^2\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\cos B_2\cos L_{1.2}}{W_2} - \frac{\cos B_1}{W_1}\right)^2 + \left(\frac{\cos B_2 \sin L_{1.2}}{W_2}\right)^2\\ &+ (1-e^2)^2\left(\frac{\sin B_2}{W_2} - \frac{\sin B_1}{W_1}\right)^2\end{aligned}\right\}.$$

Hieraus folgt mit Beachtung des Umstandes, dafs für $e =$ null $\mathfrak{k}^2$ in $4a_0^2 \sin^2\frac{\sigma'}{2}$ übergehen mufs:

$$\mathfrak{k} = 2a_0 \sin\frac{\sigma'}{2}\cos q' : \sqrt{W_1 W_2} \quad (5)$$

$$2\sin\frac{\sigma'}{2}\sin q' = \sqrt{\frac{W_1}{W_2}}\sqrt{e^2(2-e^2)\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right)^2 - \left(1-\frac{W_2}{W_1}\right)^2}. \quad (6)$$

Die letztere Relation für $\sin q'$ schreibt man mit Rücksicht darauf, dafs der 2. Teil im Radikanden unter dem grofsen Wurzelzeichen immer e^4 als Faktor hat, der erste aber nur e^2, während in Bezug auf ΔB die Ordnung die gleiche ist, besser wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin q' &= \frac{e\sqrt{2-e^2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right)}{2\sin\frac{\sigma'}{2}}\sqrt{\frac{W_1}{W_2}}\cos q'' \\ \sin q'' &= \left(1-\frac{W_2}{W_1}\right) : e\sqrt{2-e^2}\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Es kann vorteilhaft sein, einige der Ausdrücke, welche in den obigen Formeln vorkommen, durch Reihen zu berechnen. Nach S. 140 (1) ist aber, und zwar mit einer in allen Fällen, wo zehnziffrige Logarithmen zur Berechnung von $\mathfrak{k}$ genügen, ausreichenden Genauigkeit:

$$1-\frac{W_2}{W_1} = \left\{\frac{e^2\sin 2B\sin\Delta B}{2W_1^2}\right\}\left(1+\frac{1}{2}\left\{\frac{e^2\sin 2B\sin\Delta B}{2W_1^2}\right\}+Gl_4\right).$$

Man hat hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \log\left(1-\frac{W_2}{W_1}\right) &= \log E + \frac{M}{2}E + Gl_4 \\ E &= \frac{e^2\sin 2B\sin\Delta B}{2W_1^2}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Gl_4 haben die 4. Ordnung wegen des Faktors e^4. Da noch der Faktor $\sin^2\Delta B$ vorhanden ist, erhalten sie die 6. Ordnung für kleine ΔB. Nach S. 140 (1) folgt nun weiter:

$$\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1 = 2\sin\frac{\Delta B}{2}\cos B + E\sin B_1\left(1+\frac{1}{2}E+Gl_4\right)$$

und durch Logarithmieren hieraus:

$$\left.\begin{aligned} &\log\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right) \\ &= \log D + \frac{ME}{D}\sin B_1\left(1-\frac{E}{2D}\sin B_1 + \frac{1}{2}E + Gl_4\right), \\ &D = 2\sin\frac{\Delta B}{2}\cos B, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wobei jetzt die Gl_4 zum Teil auch für kleine ΔB ihre Ordnung nicht ändern, da ihnen der Faktor $\sin^2\Delta B$ fehlt.

§ 7. **Reihenentwicklungen zur vorigen Aufgabe.** Wir betrachten von jetzt ab $\mathfrak{k}$ als Gröfse 1. Ordnung, sodafs auch σ' und

ΔB Gröſsen 1. Ordnung sind, während L beliebig groſs sein kann, insoweit nicht jene Bedingung für k ein kleines L erfordert.

Wir knüpfen an die Formel (3) S. 145 an, wonach man schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned} \cot a_{1.2} &= \cot a'_{1.2} + h \\ h &= \frac{e^2 \cos B_1}{\sin L_{1.2} \cos B_2} \left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1} \sin B_1\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nach S. 140 (1) und in weiterer Entwicklung nach S. 146 ist aber auch

$$h = \frac{2e^2 \sin \frac{\Delta B}{2} \cos B \cos B_1}{\sin L_{1.2} \cos B_2} \left\{1 + \frac{e^2 \sin B \sin B_1 \cos \frac{\Delta B}{2}}{1 - e^2 \sin^2 B_1}\left(1 + \frac{e^2 \sin 2B \sin \Delta B}{4(1 - e^2 \sin^2 B_1)} + Gl_4\right)\right\}, (2)$$

wobei nach S. 140 das Restglied Gl_4 für jeden Wert von ΔB unerheblich ist, also umsomehr für Werte ΔB im Betrage von Gröſsen 1. Ordnung, weil es dann wegen seines Faktors $\sin^2 \Delta B$ in Bezug auf die geschlungene Parenthese von (2) die 8. Ordnung hat.

Setzen wir nun im vorstehenden Ausdruck (2)

$$\frac{1}{1 - e^2 \sin^2 B_1} = 1 + e^2 \sin^2 B_1 + \frac{e^4 \sin^4 B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_1},$$

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 B_1)^2} = 1 + \frac{e^2 \sin^2 B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_1} + \frac{e^2 \sin^2 B_1}{(1 - e^2 \sin^2 B_1)^2},$$

ferner zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} 2 \cos \frac{\Delta B}{2} \sin B &= \sin B_2 + \sin B_1 = S \\ 2 \sin \frac{\Delta B}{2} \cos B &= \sin B_2 - \sin B_1 = D \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und beachten, daſs $\sin \Delta B \sin 2B = SD$ wird, so ergiebt sich:

$$h = \frac{e^2 D \cos B_1}{\sin L_{1.2} \cos B_2} \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} e^2 S \sin B_1 \\ &\quad + \frac{1}{8} e^4 S \sin B_1 (3 \sin^2 B_1 + \sin^2 B_2) + \varkappa_1 e^6 \sin^6 B \end{aligned}\right\}. (4)$$

Dabei zeigt sich deutlich, daſs der in $\varkappa_1 e^6 \sin^6 B$ zusammengefaſste Rest ein kleines Glied ist, dessen gröſster Bestandteil

$$\frac{1}{2} e^6 S \sin^5 B_1 : (1 - e^2 \sin^2 B_1)$$

von $e^6 \sin^6 B$ nur unerheblich abweicht, sodafs $\varkappa_1$ sehr nahe gleich 1 ist.

Um mit Hilfe des Vorstehenden jetzt den Unterschied von $\alpha'_{1.2}$ und $\alpha_{1.2}$ herzuleiten, benutzen wir die Entwicklung S. 30 für

$$\cot \alpha_{1.2} = \cot \alpha'_{1.2} + h$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\alpha_{1.2} = \alpha'_{1.2} - h\sin^2\alpha'_{1.2}\left\{1 - h\sin\alpha'_{1.2}\cos\alpha'_{1.2} - \frac{1}{3}h^2\sin^2\alpha'_{1.2}(1-4\cos^2\alpha'_{1.2})\right\}& \\ + \frac{1}{4}h^4\sin^4\alpha''_{1.2}\sin 4\alpha''_{1.2},&\end{aligned} \tag{5}$$

und zwar entspricht im letzten Gliede $\alpha''_{1.2}$ einem Winkel, dessen Cotangente gleich $\cos\alpha'_{1.2} + \vartheta h$ ist, ϑ ein positiver echter Bruch. Das sphärische Dreieck (1) S. 144 giebt aber

$$\sin\alpha'_{1.2}\sin\sigma' = \sin L_{1.2}\cos B_2.$$

Mittelst dieser Relation findet sich:

$$h\sin^2\alpha'_{1.2} = \frac{e^2 D\cos B_1\cos B_2\sin L_{1.2}}{\sin^2\sigma'}$$

$$\times\left(1 + \frac{1}{2}e^2 S\sin B_1 + \frac{1}{8}e^4 S\sin B_1(3\sin^2 B_1 + \sin^2 B_2) + \varkappa_1 e^6\sin^6 B\right)$$

und

$$h\sin\alpha'_{1.2} = \frac{e^2 D\cos B_1}{\sin\sigma'}\left(1 + \frac{e^2 S}{2}\sin B_1 + \varkappa_2 e^4\sin^4 B\right),$$

worin $\varkappa_2$ eine Zahl bezeichnet, die wie $\varkappa_1$ sehr nahe gleich 1 ist. Dies giebt in (5) eingesetzt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{1.2} &= \alpha'_{1.2} - \frac{e^2 D\cos B_1\cos B_2\sin L_{1.2}}{\sin^2\sigma'}\cdot F \\ &+ \frac{1}{4}h^4\sin^4\alpha''_{1.2}\sin 4\alpha''_{1.2} - \varkappa_{1.2}e^8\frac{D\cos B_1\sin\alpha'_{1.2}}{\sin\sigma'},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$F = \left\{\begin{aligned}&1 + e^2\left(\frac{S}{2}\sin B_1 - \frac{D\cos B_1\cos\alpha'_{1.2}}{\sin\sigma'}\right) + e^4\left(\frac{S}{8}\sin B_1(3\sin^2 B_1 + \sin^2 B_2)\right) \\ &- e^4\left[\frac{DS\sin B_1\cos B_1\cos\alpha'_{1.2}}{\sin\sigma'} + \frac{D^2\cos^2 B_1(1-4\cos^2\alpha'_{1.2})}{3\sin^2\sigma'}\right]\end{aligned}\right\}.$$

Dabei sind die Glieder mit e^8 u. s. f., welche von h, h^2 und h^3 herrühren, in den Term vereinigt, welcher $\varkappa_{1.2}$ als Faktor enthält. Dieser Koefficient ist im Maximum rund gleich 1. Nun ist hinreichend genau zur Substitution in die Restglieder $D:\sin\sigma' = \cos B\cos\alpha'$, daher der Maximalwert des in $\varkappa_{1.2}$ multiplizierten Gliedes rund $\frac{1}{2}e^8$.

Um auch das in h^4 multiplizierte Glied zu schätzen, beachten wir zunächst, dafs nach S. 31 $\alpha''_{1.2}$ in hinreichender Annäherung gleich $\alpha'_{1.2}$ oder α' gesetzt werden kann. Setzt man überdies für $D:\sin\sigma'$ den oben angegebenen Wert, so geht das Glied in

$$\frac{1}{4}\,e^8\cos^8 B\cos^4\alpha'\sin 4\alpha'$$

über, dessen Maximalwert noch erheblich unter demjenigen des vorher behandelten Restgliedes bleibt.

Die Restglieder 8. Ordnung betragen hiernach im Maximum, in Sekunden ausgedrückt, rund $\frac{1}{2}\,\varrho'' e^8$ d. i. nur 0,0002″.

Vertauscht man in Formel (6) die Indices 1 und 2, so mufs auch D mit $-D$ und $L_{1.2}$ mit $-L_{1.2}$ vertauscht werden. Subtrahiert man sodann beide Formeln Glied für Glied, so ergiebt sich:

$$\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}=\alpha'_{2.1}-\alpha'_{1.2}-\frac{e^4 D\cos B_1\cos B_2\sin L_{1.2}}{\sin^2\sigma'}(A_1+A_2+A_3), \quad (7)$$

$$A_1=D\left(\frac{S}{2}+\frac{\cos B_2\cos\alpha'_{2.1}+\cos B_1\cos\alpha'_{1.2}}{\sin\sigma'}\right)$$

$$A_2=e^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}S\,(3\sin^3 B_2-3\sin^3 B_1+\sin^2 B_1\sin B_2-\sin^2 B_2\sin B_1)\\ \quad+DS\,\dfrac{\sin B_2\cos B_2\cos\alpha'_{2.1}+\sin B_1\cos B_1\cos\alpha'_{1.2}}{\sin\sigma'}\\ -D^2\,\dfrac{\cos^2 B_2-\cos^2 B_1-4\cos^2 B_2\cos^2\alpha'_{2.1}+4\cos^2 B_1\cos^2\alpha'_{1.2}}{3\sin^2\sigma'}\end{array}\right\},$$

A_1 und A_2 reduzieren wir durch Elimination der α' mittelst der Relationen:

$$\left.\begin{array}{l}\cos B_1\cos\alpha'_{1.2}\sin\sigma'=\cos\sigma'\sin B_1-\sin B_2=-D-2\sin B_1\sin^2\frac{\sigma'}{2}\\ \cos B_2\cos\alpha'_{2.1}\sin\sigma'=\cos\sigma'\sin B_2-\sin B_1=+D-2\sin B_2\sin^2\frac{\sigma'}{2},\end{array}\right\}\quad(8)$$

zu welchen der Cosinussatz im sphärischen Dreieck führt. Eine längere, jedoch nicht schwierige Rechnung giebt schliefslich:

$$\left.\begin{array}{r}A_1=-\frac{1}{2}\,DS\tan^2\frac{\sigma'}{2},\\ A_2=-\frac{1}{2}\,e^2DS\left((\sin^2 B_1+\sin^2 B_2)\tan^2\frac{\sigma'}{2}+\frac{1}{4}\,D^2\right).\end{array}\right\}\quad(9)$$

Was nun die Gröfse A_3 anlangt, welche aus den Restgliedern in (6) hervorgeht, so ist deren Einflufs auf $\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}$ ohne Zweifel noch weit kleiner als 0,0002″, dem Maximalwert jener Restglieder. Denn sobald $\varDelta B$ eine kleine Gröfse ist, also B_1 und B_2 wenig von einander verschieden sind, werden auch voraussichtlich die Restglieder,

welche nach (6) zu den Formeln für $a_{1.2}$ und $a_{2.1}$ gehören, sich teilweise vernichten müssen. Die Substitution von (9) in (7) giebt nunmehr:

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{in Sek.}}{a_{2.1} - a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} - a'_{1.2}} \\ + \varrho'' \dfrac{e^4 D^2 S \cos B_1 \cos B_2 \sin L_{1.2}}{2 \sin^2 \sigma'} \left(\tan^2 \dfrac{\sigma'}{2} + e^2 \left[(\sin^2 B_1 + \sin^2 B_2) \tan^2 \dfrac{\sigma'}{2} + \dfrac{1}{4} D^2 \right] + \ldots \right) \\ D = \sin B_2 - \sin B_1 = 2 \sin \dfrac{\Delta B}{2} \cos B \\ S = \sin B_2 + \sin B_1 = 2 \cos \dfrac{\Delta B}{2} \sin B. \end{array} \right\} (10)$$

§. 8. **Dalbys Satz.** Die Formel (10) zeigt, dafs, wie *Dalby* annahm, für kleine Werte der Distanz die Azimutaldifferenz rein sphärisch berechnet werden darf. Denn das beträchtlichste Glied, welches hierbei vernachlässigt wird, ist nach einfacher Reduktion in Sekunden:

$$+ \frac{1}{8} \varrho'' e^4 \sin L_{1.2} \cos B \sin^2 \Delta B \sec \frac{\Delta B}{2} \sec^4 \frac{\sigma'}{2} \sin 2B \cos B_1 \cos B_2 , \quad (1)$$

worin der Wert von $\sin 2B \cos B_1 \cos B_2$, alle B gleich grofs angenommen, im Maximum etwa 0,65 ist; das Glied (1) wird daher im Maximum nahezu gleich

$$\frac{3}{4} \sin^2 \Delta B \cdot \sin L_{1.2} \cos B \text{ Sek.}$$

Setzt man hierin $\sin L_{1.2} \cos B = \sin \sigma' \sin \alpha'$ und $\sin \Delta B = \sin \sigma' \cos \alpha'$, was völlig ausreicht, und beachtet den Maximalwert von $\cos^2 \alpha' \sin \alpha'$, welcher rund 0,4 beträgt, so folgt als Maximalwert von (1)

$$0{,}3'' \sin^3 \sigma'. \quad (2)$$

Es ist daher selbst für $\sin \sigma' = 0{,}2$ der Fehler der Formel

$$a_{2.1} - a_{1.2} = a'_{2.1} - a'_{1.2} + \cdots \quad (3)$$

nur einige Tausendstelsekunden. (Übrigens gilt der Ausdruck (2) nur, so lange σ' klein ist. Man darf ihn daher auf wesentlich gröfsere Werte von $\sin \sigma'$ als 0,2 nicht anwenden.)

Die von e^6 abhängigen Glieder in (10) geben nur etwa 1 Prozent des Betrags von (1). Lassen wir sie weg, berücksichtigen aber die in e^4 multiplizierten Glieder nach Formel (1) und setzen darin $\sec \frac{\Delta B}{2} = 1$, $\sec^4 \frac{\sigma'}{2} = 1$ und $\cos B_1 \cos B_2 = \cos^2 B$, wodurch nur Bruchteile 2. Ordnung des Betrags von (1) vernachlässigt werden, so findet sich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{a_{2.1} - a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} - a'_{1.2}} + \frac{1}{4}\varrho'' e^4 \sin L_{1.2} \sin^2 \varDelta B \sin B \cos^4 B + \cdots \qquad (4)$$

Diese Formel giebt erst für $\varDelta B$ und $\sin L_{1.2} \cos B$ gleich 0,2 eine geringfügige Unsicherheit der Zehntausendstelsekunden.

Das *Dalby*sche Problem wird mittelst geometrischer Betrachtung in dem Hauptwerke der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 235 untersucht. Dasselbe besprachen bereits *Ivory* und *Tiark* im *Phil. Magazine* von 1828 (Vol. 4 p. 241, 364 u. 432) und 1829 (Vol. 5 p. 24, 52 u. 106), sowie 1831 *Anger, Astronom. Nachr.* Nr. 212 Bd. 9, S. 359). Neuerdings ist es auch im 3. Bande der *Dänischen Gradmessung* durch *Andrae* untersucht worden, S. 324.

Dalby wandte schon 1790 und 1795 in den *Phil. Transactions* die Formel (3) dazu an, um aus den geographischen Breiten und Azimuten einer geodätischen Linie den Längenunterschied mittelst rein sphärischer Rechnung zu finden, vergl. die 3. und 4. Formel (2) S. 145. Dabei werden noch die für kurze Distanzen geringen und für beide Azimute beinahe gleichen, sich daher aufhebenden Unterschiede der astronomischen Azimute und der Azimute der geodätischen Linie vernachlässigt.

Es sei noch erwähnt, dafs bei Anwendung der reduzierten Breiten ein ähnlicher Satz wie der *Dalby*sche nicht existiert; hier ist die Differenz

$$\{(a_{2.1} - a_{1.2}) - (a'_{2.1} - a'_{1.2})\}$$

von der Ordnung $e^2\sigma'$.

§ 9. Fortsetzung der Entwicklungen für kleine Distanzen.

Nachdem im Vorigen eine Formel für $a_{2.1} - a_{1.2}$ aufgestellt worden ist, liegt es nahe, auch noch eine Formel für $a_{2.1} + a_{1.2}$ herzuleiten. Zu dem Zwecke benutzen wir wieder Formel (6) S. 148, wenden sie wie früher durch Vertauschung der Indices auch auf $a'_{2.1}$ an und addieren beide Formeln. Dann folgt:

$$a_{2.1} + a_{1.2} = a'_{2.1} + a'_{1.2} - \frac{e^2 D \cos B_1 \cos B_2 \sin L_{1.2}}{\sin^2 \sigma'}(2 + e^2 A' + e^4 A'' + Gl_6), \quad (1)$$

wobei die Koefficienten A' und A'' nachstehende Werte annehmen:

$$A' = \frac{1}{2} S^2 + D \frac{\cos B_2 \cos a'_{2.1} - \cos B_1 \cos a'_{1.2}}{\sin \sigma'},$$

$$A'' = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{8} S \left(3 (\sin^2 B_1 + \sin^2 B_2) + S \sin B_1 \sin B_2\right) \\ &+ DS \frac{\sin B_2 \cos B_2 \cos a'_{2.1} - \sin B_1 \cos B_1 \cos a'_{1.2}}{\sin \sigma'} \\ &- D^2 \frac{\cos^2 B_1 + \cos^2 B_2 - 4 (\cos^2 B_1 \cos^2 a'_{1.2} + \cos^2 B_2 \cos^2 a'_{2.1})}{3 \sin^2 \sigma'} \end{aligned} \right\}.$$

Wir benutzen nunmehr die Relationen (8) S. 149, um durch Elimination der $\cos a'$ die beiden Hilfsgröfsen A zu vereinfachen. Dabei hat man aufserdem zu beachten, dafs nach (10) S. 150

$$S = 2 \cos \frac{\varDelta B}{2} \sin B \quad \text{und} \quad D = 2 \sin \frac{\varDelta B}{2} \cos B \tag{2}$$

ist, mit Rücksicht auf die 1. Formel (2) S. 145 aber auch gesetzt werden kann:

$$\sin \frac{\varDelta B}{2} = - \sin \frac{\sigma'}{2} \cos \alpha' \sec \frac{L_{1.2}}{2}. \tag{3}$$

Zunächst ergiebt sich für A' die Formel:

$$A' = 2 \left(\sin^2 B \cos^2 \frac{\varDelta B}{2} + \cos^2 B \sec^2 \frac{L_{1.2}}{2} \cos^2 \alpha' \right).$$

Die beiden ersten Gleichungen (2) S. 145 geben aber auch:

$$\cos B \cos \alpha' \tan \frac{L_{1.2}}{2} = - \sin \frac{\varDelta B}{2} \sin \alpha' \tag{4}$$

und hiermit erhält man anstatt des vorigen Ausdrucks, darin zunächst $\sec^2 = 1 + \tan^2$ setzend:

$$A' = 2 \left(\sin^2 B \cos^2 \frac{\varDelta B}{2} + \cos^2 B \cos^2 \alpha' + \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \sin^2 \alpha' \right). \tag{5}$$

Bei der Reduktion des Ausdrucks für A'' führen wir vorerst für $\sin B_1$ und $\sin B_2$ die Gröfsen S und D ein, wozu nach S. 150 (10) die Relationen dienen:

$$\sin B_1 = \frac{S - D}{2} \qquad \sin B_2 = \frac{S + D}{2}.$$

Es folgt hiermit

$$A'' = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{S^4}{8} + \frac{7 D^2 S^2}{6 \sin^2 \sigma'} - \frac{2 D^2}{3 \sin^2 \sigma'} + \frac{D^4}{6 \sin^4 \frac{\sigma'}{2}} \right) \\ + \left(\frac{D^2 S^2}{4} - \frac{D^2 S^2}{2 \cos^2 \frac{\sigma'}{2}} + \frac{D^2 S^2}{6 \cos^4 \frac{\sigma'}{2}} + \frac{D^4}{6 \sin^2 \sigma'} \right) \end{array} \right\}, \tag{6}$$

worin wir unter Beachtung von (2), (3) und (4) nun für S, DS und D die Substitutionen einführen:

$$\left. \begin{array}{c} S = 2 \sin B \cos \frac{\varDelta B}{2} \qquad DS = \sin \varDelta B \sin 2B \\ \frac{D^2}{\sin^2 \sigma'} = \cos^2 B \cos^2 \alpha' \sec^2 \frac{\sigma'}{2} + \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \sin^2 \alpha' \sec^2 \frac{\sigma'}{2} \\ \frac{D^2}{\sin^2 \frac{\sigma'}{2}} = 4 \cos^2 B \cos^2 \alpha' + 4 \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \sin^2 \alpha'. \end{array} \right\} \tag{7}$$

Dabei zeigt sich aber, dafs die 2. Parenthese des Ausdrucks (6) ein

Glied 2. Ordnung ist, das sich (mit einigen kleinen zulässigen Vernachlässigungen) auf

$$\frac{1}{12}\sin^2 \varDelta B\,(-\sin^2 2B + 2\cos^4 B\cos^2 a') \tag{8}$$

reduziert. Bedenkt man nun, dafs der Faktor von A'' höchstens $\frac{1}{2}e^6\varrho''$ oder $\frac{1}{34}$ Sek. und das Maximum des vorstehenden Ausdrucks (8) gleich $\frac{1}{12}\sin^2 \varDelta B$ wird, so ist hiernach dessen Einflufs auf $a_{2.1} + a_{1.2}$ für $\varDelta B = 0{,}1$ höchstens $0{,}000025''$ und mithin zu vernachlässigen.

Für A'' wird mit Berücksichtigung dessen nach Einführung der (7) erhalten:

$$A'' = 2\,(1 - \cos^2 B\sin^2 a')^2 - \frac{1}{6}\cos^4 B\sin^2 2a' + Gl_2. \tag{9}$$

Die Restglieder 2. Ordnung nehmen, abgesehen von den (8), näherungsweise die Gestalt an:

$$\varDelta B^2\left(\frac{7}{6}\sin^2 B\sin^2 a' - \sin^4 B + \frac{7}{24}\sin^2 2B\sin^2 a' - \frac{1}{6}\sin^2 a' - \frac{1}{6}\cos^2 B\cos 4a'\right), \tag{10}$$

wobei zur Elimination von σ' die Relation

$$\varDelta B^2\cos^2 B = \sigma'^2\cos^2 a'\cos^2 B + Gl_4 \tag{11}$$

benutzt ist, welche aus der 3. Formel (7) bequem abgeleitet werden kann. Die Vergleichung von (8) und (10) zeigt, dafs der Einflufs von (10), wie aus der Betrachtung seiner ersten beiden Glieder (den hauptsächlichsten aller) hervorgeht, wesentlich gröfser als derjenige von (8) ist; dennoch kann man A'' nach (9) beibehalten, ohne mehr als etwa $0{,}0002''$ Fehler in $a_{2.1} + a_{1.2}$ befürchten zu müssen.

Indem wir jetzt A' und A'' in (1) oben substituieren, reduzieren wir noch den Faktor der Parenthese von (1) mittelst der aus den beiden ersten Gleichungen (2) S. 145 folgenden Relation

$$D\sin L_{1.2} = 2\sin^2\frac{\sigma'}{2}\sin 2a' \tag{12}$$

und erhalten

$$\underset{\text{in Sek.}}{a_{2.1} + a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} + a'_{1.2}} + \varrho'' e^2\cos B_1\cos B_2\sin 2a'\sec^2\frac{\sigma'}{2}\cdot F, \tag{13}$$

$$F = \left\{\begin{aligned} &1 + e^2\left[1 - \cos^2 B\sin^2 a' + \sin^2\frac{\varDelta B}{2}(\sin^2 a' - \sin^2 B)\right] \\ &+ e^4\left[(1 - \cos^2 B\sin^2 a')^2 - \frac{1}{12}\cos^4 B\sin^2 2a'\right] + Gl_6 \end{aligned}\right\},$$

welche Formel für $\varDelta B = 0{,}1$ nur einige Zehntausendstelsekunden Fehler giebt.

Schreiben wir einfacher

$$\underset{\text{in Sek.}}{a_{2.1} + a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} + a'_{1.2}} + \frac{\varrho'' e^2 \cos B_1 \cos B_2 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2}}{1 - e^2 (1 - \cos^2 B \sin^2 a')} + Gl_6, \quad (14)$$

so ist der Fehler, insoweit er von den Gliedern 6. Ordnung abhängt, näherungsweise gleich

$$\varrho'' e^4 \cos^2 B \left\{ \frac{1}{4} \varDelta B^2 (\sin^2 a' - \sin^2 B) \sin 2a' - \frac{1}{12} e^2 \cos^4 B \sin^3 2a' \right\}. \quad (15)$$

Beide Teile dieses Ausdrucks sind am gröſsten für $B =$ null. Die Differentiation nach a' zeigt, daſs für diesen Wert von B und für $\varDelta B = 0{,}1$ der 1. Teil den Maximalbetrag $0{,}015''$ annimmt, während der 2. Teil unabhängig von $\varDelta B$ den Maximalbetrag $0{,}005''$ hat.

Da die Beträge beider Teile sich einigermaſsen kompensieren, so kann man den Fehler von (14) auf rund $0{,}01''$ im Maximum ansetzen. Ist $B = 45^0$, so giebt der 1. Teil mit $\varDelta B = 0{,}1$ nur $0{,}003''$ und der 2. weniger als $0{,}001''$ im Maximum.

Es kann nach all' dem die Formel (14) in vielen Fällen als ausreichend angesehen werden. Sie ist bequemer als (13). Ihr Nenner insbesondere läſst sich leicht logarithmisch behandeln mittelst der Substitution

$$\cos B \sin a' = \cos u, \quad (16).$$

wodurch er in W^2, W mit Argument u, übergeht.

§ 10. **Fortsetzung. Die Sehne.** Die Sehne wird wohl immer am bequemsten nach den, sich für kleine Distanzen nicht unerheblich vereinfachenden allgemeinen Formeln des § 6, S. 145 berechnet. Nichts desto weniger wollen wir doch hier auch in kürze eine andere Art der Berechnung anführen und zwar mit Benutzung des Krümmungsradius im mittlern Azimut und in der mittlern geographischen Breite.

Wir schreiben zu dem Zwecke

$$\mathfrak{k}^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{\sigma'}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B_1)(1 - e^2 \sin^2 B_2)}} \right.$$

$$\left. - \frac{e^2 (2 - e^2)(\sin B_2 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1} - \sin B_1 \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2})^2 - (\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2} - \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1})^2}{4 \sin^2 \frac{\sigma'}{2} (1 - e^2 \sin^2 B_1)(1 - e^2 \sin^2 B_2)} \right\}$$

und entwickeln die Glieder der geschlungenen Parenthese in Reihen mit Vernachlässigung aller Terme, die von höherer als 6. Ordnung in Bezug auf e oder $\varDelta B$ sind. Der Minuend giebt:

$$1 + e^2 \sin^2 B + \left(\frac{1}{4} e^2 \varDelta B^2 - \frac{1}{48} e^2 \varDelta B^4\right) \cos 2B + e^4 \sin^4 B$$

$$+ e^6 \sin^6 B + e^4 \varDelta B^2 \sin^2 B \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 B\right) + Gl_8.$$

Der Subtrahend giebt:

$$\frac{2e^2 \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} \cos^2 B}{\sin^2 \frac{\sigma'}{2}} \Bigg\{ 1 + e^2 \left(\frac{5}{2} \sin^2 B - \frac{1}{2}\right)$$

$$- \frac{1}{8} e^2 \varDelta B^2 (7 \sin^2 B - 2) + \frac{3}{2} e^4 \sin^2 B (3 \sin^2 B - 1) + Gl_6 \Bigg\},$$

worin noch mit Benutzung der Gleichungen (3) und (4) S. 152 zu substituieren ist:

$$\frac{\sin^2 \frac{\varDelta B}{2}}{\sin^2 \frac{\sigma'}{2}} = \cos^2 a' \left(1 + \tan^2 \frac{L}{2}\right)$$

$$= \cos^2 a' + \sin^2 a' \sec^2 B \left(\frac{1}{4} \varDelta B^2 - \frac{1}{48} \varDelta B^4 + Gl_6\right).$$

Wird dies eingeführt, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die geschlungene Parenthese:

$$\left\{\begin{aligned} &1 + e^2 (\sin^2 B - 2 \cos^2 B \cos^2 a') + e^4 \left(\sin^4 B - \cos^2 B \cos^2 a' (5 \sin^2 B - 1)\right) \\ &+ e^6 \left(\sin^6 B - 3 \cos^2 B \cos^2 a' (3 \sin^4 B - \sin^2 B)\right) + \frac{1}{4} e^2 \varDelta B^2 (\cos 2B - 2 \sin^2 a') \\ &- \frac{1}{48} e^2 \varDelta B^4 (\cos 2B - 2 \sin^2 a') + e^4 \varDelta B^2 \left\{ - \frac{1}{4} \sin^2 B (1 + 6 \sin^2 B) \right\} \\ &+ e^4 \varDelta B^2 \left\{ \frac{7}{4} \sin^2 B \cos^2 a' (1 + \cos^2 B) + \frac{1}{4} (1 - 3 \cos^2 a') \right\} + Gl_8. \end{aligned}\right\}$$

Diesen Ausdruck multiplizieren wir mit der rechten Seite der nachstehenden, aus Formel (1) S. 58 folgenden Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 B)(1 - e^2 + e^2 \cos^2 B \cos^2 a')^2}{a_0^2 (1 - e^2)^2},$$

welche dem Krümmungsradius im Azimut a' und in der Breite B entspricht. Dadurch ergiebt sich endlich:

$$\mathfrak{k} = 2\varrho \sin \frac{\sigma'}{2} \left\{ 1 + \frac{3}{8} e^4 \cos^4 B \sin^2 2a' + \frac{1}{8} e^2 \varDelta B^2 (\cos 2B - 2 \sin^2 a') + R \right\}, \quad (1)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} R = &\frac{1}{4} e^4 \cos^4 B \sin^2 2a' (3 - 2 \cos^2 B + \cos^2 B \cos^2 a') - \frac{1}{96} e^2 \varDelta B^4 (\cos 2B - 2 \sin^2 a') \\ &+ \frac{1}{8} e^4 \varDelta B^2 (1 - 4 \sin^4 B - 2 \cos 2B \cos^2 a' - 3 \cos^4 B \cos^2 a' + 4 \cos^2 B \cos^4 a') + Gl_8; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

es umfaſst mithin R die Glieder, welche in Bezug auf e und $\varDelta B$ die 6. und höhere Ordnung haben.

Wenn aber die ganze Transformation eine Erleichterung gewähren soll, muſs man R vernachlässigen können.

Der Einfluſs von R auf log $\mathfrak{k}$ ist gleich R mal dem Modulus M. Hiernach giebt das 1. Glied in R für $B = 0^0$ im Maximum 4 Einheiten der 8. Decimalstelle des Logarithmus, welcher Betrag aber für zunehmende Breite sich vermindert und bei $B = 45^0$ bereits nicht mehr 2 Einheiten ausmacht. Das 2. Glied in R beeinfluſst für $\varDelta B = 0{,}1$ nur die 9. Stelle ein wenig; das 3. Glied giebt im Maximum rund 7 Einheiten der 8. Stelle, doch trifft dieses Maximum auf einem Nullwert des 1. Gliedes, wie sich überhaupt diese beiden Glieder nicht ungünstig kombinieren.

Die Vernachlässigung von R entspricht mithin einer Genauigkeit, wie die Rechnung mit 7ziffrigen Logarithmen unter Beibehaltung der 8. Stelle aus den Proportionalteilen gewährt. Ebenso genau ist die folgende logarithmische Form:

$$\log \mathfrak{k} = \log\left(2\varrho \sin\frac{\sigma'}{2}\right) + \frac{1}{8} M \left\{3\, e^4 \cos^4 B \sin^2 2a' + e^2 \varDelta B^2 (\cos 2B - 2 \sin^2 a')\right\} + Gl_6 \tag{3}$$

ϱ zu den Argumenten B und a'.

Da Formel (3) die Berechnung von ϱ zu dem *sphärischen* Azimut a' als Argument voraussetzt, so liegt es nahe, auch noch das entsprechende *astronomische* Azimut einzuführen.

Nach Formel (14) S. 154 können wir aber setzen, wenn

$$\frac{a_{1.2} + a_{2.1} - 180^0}{2} \tag{4}$$

mit a bezeichnet wird:

$$a = a' + \frac{1}{2} e^2 \cos B_1 \cos B_2 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2} \left\{1 + e^2 (1 - \cos^2 B \sin^2 a') + Gl_4\right\}.$$

Hieraus folgt:

$$a' = a - \frac{1}{2} e^2 \sin 2a \left\{\cos^2 B \left[1 + e^2 (1 - \cos^2 B \cos^2 a) + \frac{\sigma'^2}{4}\right] - \frac{1}{4} \varDelta B^2\right\} + Gl_6.$$

Führt man dies in den Ausdruck

$$\log(\varrho \text{ für } a') = \log \frac{a_0 (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} - \log(1 - e^2 + e^2 \cos^2 B \cos^2 a')$$

ein, so folgt mit Rücksicht auf (11) S. 153:

$$\begin{aligned} \log(\varrho \text{ für } a') &= \log(\varrho \text{ für } a) \\ &- \frac{1}{2} e^4 \cos^4 B \sin^2 2a \left(1 + e^2 (2 - 3 \cos^2 B \cos^2 a + \frac{1}{2} \cos^2 B)\right) \\ &- \frac{1}{2} e^4 \varDelta B^2 \cos^2 B \sin^2 a (\cos^2 B - \cos^2 a) + Gl_8. \end{aligned} \tag{5}$$

Behalten wir zunächst nur die Glieder 4. Ordnung bei, entsprechend der Formel (3), so folgt durch Substitution dieses Ausdrucks für log (ϱ für a') in dieselbe:

$$\log \mathfrak{k} = \log \left(2\varrho \sin \frac{\sigma'}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{8} M \left\{ - e^4 \cos^4 B \sin^2 2a + e^2 \Delta B^2 (\cos 2B - 2 \sin^2 a) \right\} + Gl_6, \qquad (6)$$

ϱ zu den Argumenten B und a.

Die Formel giebt dieselbe Genauigkeit wie Formel (3). Dies erkennt man, indem man bei Substitution von log (ϱ für a) die Glieder 6. Ordnung beibehält, und in den Gliedern 4. Ordnung von (3) $a' = a - \frac{1}{2} e^2 \sin 2a \cos^2 B + Gl_4$ setzt. Alsdann ergeben sich, abgesehen vom Faktor M nachstehende Glieder des Restes von (6):

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{4} e^6 \cos^4 B \sin^2 2a\,(1 - \cos^2 B \cos^2 a) - \frac{1}{96} e^2 \Delta B^4 (\cos 2B - 2 \sin^2 a) \\ & + \frac{1}{8} e^4 \Delta B^2 \left\{ -3 + 2 \sin^2 2B + \cos^2 a\,(2 + \cos^4 B + 4 \cos^2 B \sin^2 a) \right\} . \end{aligned} \right\} \qquad (7)$$

Diese Glieder haben angenähert denselben Einfluſs wie früher die entsprechenden in (2). Jedoch ist immerhin der Vorteil bei Anwendung des astronomischen Azimuts vorhanden, daſs die von der Distanz unabhängigen Glieder kleiner als früher sind (um ungefähr die Hälfte), so daſs für Werte ΔB, wesentlich kleiner als 0,1, die Formel (6) genauer als (3) wird.

§ 11. Zusammenstellung der Formeln für Distanzen $< 0{,}1\, a_0$.

Gegeben B_1, B_2 und $L_{1.2}$.

$$\Delta B = B_2 - B_1 \qquad B = \frac{1}{2}(B_2 + B_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a' \sin \frac{\sigma'}{2} &= - \sin \frac{\Delta B}{2} \cos \frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin a' \sin \frac{\sigma'}{2} &= + \cos B \sin \frac{L_{1.2}}{2} \\ \cos \frac{\Delta a'}{2} \cos \frac{\sigma'}{2} &= + \cos \frac{\Delta B}{2} \cos \frac{L_{1.2}}{2} \\ \sin \frac{\Delta a'}{2} \cos \frac{\sigma'}{2} &= - \sin B \sin \frac{L_{1.2}}{2} \end{aligned} \right\} \qquad (1)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\frac{a_{2.1} - a_{1.2} - 180^0}{2}} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\Delta a'}{2}} + Gl_7 . \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\frac{a_{2.1}+a_{1.2}-180^0}{2}} &= \underset{\text{in Sek.}}{a'} + \frac{1}{2}\varrho'' e^2 \frac{\cos B_1 \cos B_2 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2}}{W_u^2} + Gl_6 \\ \cos u = \cos B \sin a'&, \quad u \text{ Argument für } W_u . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \log \mathfrak{k} &= \log\left(2\varrho \sin\frac{\sigma'}{2}\right) + \frac{1}{8}M\left\{3e^4\cos^4 B \sin^2 2a' + e^2 \varDelta B^2(\cos 2B - 2\sin^2 a')\right\} + Gl_6 \\ \varDelta B &= \frac{\varDelta B \text{ in Sek.}}{\varrho''} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ϱ zu den Argumenten a' und B.

Nach S. 59 hat man zur Berechnung von ϱ:

$$\left.\begin{aligned} \log \varrho &= \log a_0 - \log W + 2 \log \cos h \\ \tan h &= \sqrt{\delta} \cos B \cos a' \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

W zum Argument B.

Mit *Bessels* Dimensionen des Erdellipsoids sind die Logarithmen der im Vorstehenden auftretenden Konstanten:

$$\log\left(\frac{1}{2}\varrho'' e^2\right) = 2{,}8378056 \qquad \log \varrho'' = 5{,}31443$$

$$\left.\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{8}M \,.\, 3e^4\right) &= 1{,}86064 \\ \log\left(\frac{1}{8}M \,.\, e^2\right) &= 3{,}55910 \end{aligned}\right\} \text{ für Einheiten der 7. Decimale des Logarithmus } \mathfrak{k}.$$

$$\log a_0 = 6{,}8046434.637 \quad \log \sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9 - 10$$

Für $\varDelta B = 0{,}1$ und $\mathfrak{k} = 0{,}1$ ist im Maximum der Fehler der Azimute $< 0{,}01''$, derjenige von $\log \mathfrak{k}$ aber < 1 Einheit der 7. Decimalstelle. Über die Genauigkeit im speziellen vergl. die §§ 8—10.

§. 12. **Zahlenbeispiel I.** Wir nehmen für B_1, B_2 und $L_{1.2}$ folgende Zahlwerte (*Bremiker, Studien über höhere Geodäsie,* sowie *Förster* und *Tietjen, Berliner Astronomisches Jahrbuch 1880*):

$$\left.\begin{aligned} \text{Berlin } B_1 &= 52^0\ 30'\ 16{,}7'' \\ \text{Königsberg } B_2 &= 54\ \ 42\ \ 50{,}6 \end{aligned}\right\} \quad L_{1.2} = 7^0\ 6'\ 0{,}0'' \text{ östlich.}$$

Die sphärische Rechnung, wobei anstatt §. 6 (2) S. 145 die Reihenentwicklungen S. 132 angewandt wurden, führt zu nachstehenden Zahlen:

$\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = -25560{,}00000 \quad \log = 4{,}4075608.495_n \quad \log L = 9{,}0931357.163_n - 10$

$\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta B} = + \ 7953{,}90000 \quad 3{,}9005801.265 \quad \log \varDelta B = 8{,}5861549.933 - 10$

$B = 53^0 36' 33{,}65'' \quad \log\cos B = 9{,}7732652.484 - 10 \quad \log\sin B = 9{,}9057908.074 - 10;$

$$\log\frac{M}{24} = 5{,}2575731 \text{ und } \log\frac{M}{2880} = 3{,}1784 \text{ für Einh. der 7. Dec.}$$

Formel (1) S. 132 giebt insbesondere:

$$\left\{\begin{array}{lrr}
\log\left(-\frac{L\cos B}{\Delta B}\right) = & 0{,}2802459.714 & \\
+\frac{1}{24}M.2L^2 = + & 5557.436 & \log = 3{,}7448745 \\
+\frac{1}{24}M.\Delta B^2 = + & 269.081 & 2{,}4298831 \\
+\frac{1}{2880}M.14L^4 = + & 4.977 & 0{,}6970 \\
+\frac{1}{2880}M.\Delta B^4 = + & .003 & 0{,}52 - 3
\end{array}\right.$$

$$\log\tan\alpha' = 0{,}2808291.211 \qquad \alpha' = 242^0\,21'\,14{,}9790''.$$

Da L^6 voraussichtlich auf die 10. Decimale des Logarithmus ein wenig Einfluſs hat, so ist α' um etwa eine Einheit der 4. Decimalstelle der Sekunden unsicher.

Formel (2) S. 133 entsprechen die Zahlen:

$$\log\sec\frac{\Delta B}{2} = 0{,}0000807.294 \qquad \log\cos B_1 = 9{,}7844013 - 10$$
$$\log\cos B_2 = 9{,}7616703 - 10$$

$$\left\{\begin{array}{lrr}
\log\left(-\underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}}\sin B\sec\frac{\Delta B}{2}\right) = & 4{,}3134323.863 - 10 & \underset{\text{für Einh. der 7. Dec.}}{\log M = 6{,}6377843} \\
\left\{\frac{1}{12}M.L^2\cos B_1\cos B_2\sec^2\frac{\Delta B}{2}\right\} = + & 1954.824 & \log = 3{,}2911076 \\
-\frac{13}{120}\sin^2 B\,L^2.\{\div\} = - & 2.107 & 0{,}3237 \\
+\frac{7}{120}L^2.\{\div\} = + & 1.751 & 0{,}2433
\end{array}\right.$$

$$\log\underset{\text{in. Sek.}}{\Delta\alpha'} = 4{,}3136278.331 \qquad \frac{\Delta\alpha'}{2} = 2^0\,51'\,34{,}3241''.$$

Es wird nunmehr:

$$\alpha'_{1.2} = 239^0\,29'\,40{,}6549'' \qquad \alpha'_{2.1} = 65^0\,12'\,49{,}3031''.$$

Formel (5) S. 134 giebt, wenn $q = \Delta B$ und $p = -\cos\frac{L_{1.2}}{2}\sec\alpha'$ genommen werden:

$$\log\cos\frac{L_{1.2}}{2} = 9{,}9991658.506 - 10 \qquad \log\cos\alpha' = 9{,}6665225.564_n - 10$$

$$\left\{\begin{array}{lrl}
\log\frac{pq}{2} = & 8{,}6177682.918 - 10 & \\
-\frac{1}{24}M.\Delta B^2 = - & 269.081 & \Big\}\ \text{schon oben} \\
-\frac{1}{2880}M.\Delta B^4 = - & .003 & }\ \text{berechnet.}
\end{array}\right.$$

$$\log\sin\frac{\sigma'}{2} = -\,8{,}6177413.834 - 10.$$

Setzt man aber $q = L$ und $p = \cos B \csc \alpha'$, so hat man, da $\log \sin \alpha' = 9{,}9473516.775_n - 10$ ist:

$$\left\{\begin{array}{rl} \log \frac{pq}{2} = & 8{,}6180192.915 - 10 \\ -\frac{1}{24} M.L^2 = - & 2778.718 \\ -\frac{1}{2880} M.L^4 = - & .355 \end{array}\right. \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\} \text{schon oben berechnet.}$$

$$\log \sin \frac{\sigma'}{2} = 8{,}6177413.842 - 10.$$

Die Differenz beider Werte von $\log \sin \frac{\sigma'}{2}$ läſst sich schon durch nicht ganz 0,0002″ Zuwachs in α' erklären. Der 2. Wert ist als der schärfere beizubehalten, oder noch besser ist unter Annahme dieses Zuwachses zu setzen als

$$\text{Resultat der sphärischen Rechnung:} \left\{\begin{array}{rl} \log \sin \frac{\sigma'}{2} = & 8{,}6177413.840 - 10 \\ \alpha'_{1.2} = & 239^0\ 29'\ 40{,}6549'' \\ \alpha'_{2.1} = & 65^0\ 12'\ 49.3031''. \end{array}\right.$$

Es ist notwendig, zu Vorstehendem hinzuzufügen, daſs im vorliegenden Falle die Anwendung der Formeln (2) S. 145, ohne Reihenentwicklung, bequemer gewesen wäre. Wenn jedoch ΔB und L noch kleiner als oben werden, kann bei 10stelliger Rechnung die Benutzung der Reihen doch vorzuziehen sein. Jetzt kam es überdies nur darauf an, die Reihenglieder in Zahlen vor sich zu sehen.

Für *Formel* (8) S. 146 hat man:

$$\log e^2 = 7{,}8244104 - 10 \qquad \log\left(\frac{1}{2} \sin 2B\right) = 7{,}6790560 - 10,$$

$$-\log W_1 = 0{,}0009143 \qquad \log \sin \Delta B = 8{,}5860473 - 10,$$

letzteres aus $\log \Delta B$ in Sek. mittelst des Hilfslogarithmus S.

$$\left\{\begin{array}{rl} \log E = & 6{,}09134 - 10 \\ +\frac{1}{2} M.E = & 3 \end{array}\right.$$

$$\log\left(1 - \frac{W_2}{W_1}\right) = 6{,}09137 - 10.$$

Für *Formel* (9) S. 146 erhält man:

$$\log\left(2\sin\frac{\Delta B}{2}\right) = \log\sin\Delta B + \log\sec\frac{\Delta B}{2} = 8{,}5861280 - 10$$

$\log M = 6{,}63778$ für Einh. der 7. Dec., $\log\sin B_1 = 9{,}89949 - 10$

$$\left\{\begin{array}{rll} \log D & = 8{,}3593932-10 & \\ +\left\{\frac{ME}{D}\sin B_1\right\} & = +\quad 18588 & \log = 4{,}26922 \\ -\frac{E\sin B_1}{2D}\left\{\frac{ME}{D}\sin B_1\right\} & = -\quad 40 & 1{,}600 \\ +\frac{1}{2}E\left\{\frac{ME}{D}\sin B_1\right\} & = +\quad 1 & 0{,}060 \end{array}\right.$$

$$\log\left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1}\sin B_1\right) = 8{,}3612481 - 10.$$

Zu den *Formeln* (7) S. 146 hat man:

$$\log e\sqrt{2-e^2} = 9{,}0619943 - 10$$

$\log\sin q'' = 8{,}66813 \quad -10$ $\qquad \log\cos q'' = 9{,}9995285 \quad -10$

$\log W_2 = 9{,}9990321 - 10$ $\qquad \log\sqrt{\frac{W_1}{W_2}} = 0{,}0000268$

$\log\sin q' = 8{,}5040263 - 10$ $\qquad \log\cos q' = 9{,}9997786.761 - 10.$

Hiermit geben die *Formeln* (5) und (6) S. 145, da

$$\left.\begin{array}{l} \log 2a_0 = 7{,}1056734.594 \text{ und} \\ \log W_1 = 9{,}9990857.480-10, \\ \log W_2 = 9{,}9990321.461-10: \end{array}\right\} \log k = 5{,}7241345.725.$$

Die *Formeln* (4) S. 145 führen zu folgenden Zahlen:

$\log\sin L_{1.2} = 9{,}0920237_n - 10$ $\qquad \log\frac{\cos B_1}{\cos B_2} = 0{,}0227310$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\tan\varepsilon'_{1.2} & = 7{,}1163658_n - 10 \\ T & = 4{,}6855751 \quad -10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} \log\tan\varepsilon'_{2.1} & = 7{,}0709574_n - 10 \\ T & = 4{,}6855751 \quad -10 \end{array}\right.$$

$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon'_{1.2}} = 2{,}4307907_n$ $\qquad \log \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon'_{2.1}} = 2{,}3853823_n$

$\varepsilon'_{1.2} = -\quad 4'\ 29{,}6440''$ $\qquad \varepsilon'_{2.1} = -\quad 4'\ 2{,}8747''$

$\alpha'_{1.2} - \varepsilon'_{1.2} = 239^0\ 34'\ 10{,}2989''$ $\qquad \alpha'_{2.1} - \varepsilon'_{2.1} = 65^0\ 16'\ 52{,}1778''$

$$\left\{\begin{array}{ll} \log\sin\alpha'_{1.2} & = 9{,}9352963.933_n - 10 \\ \log\cos\varepsilon'_{1.2} & = 9{,}9999996.289 \quad -10 \\ \log\cos(\alpha'_{1.2} - \varepsilon'_{1.2}) & = 9{,}7045729.476_n - 10 \end{array}\right.$$

$$\log\tan\alpha_{1.2} = 0{,}2307230.746$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \log\sin\alpha'_{2.1} & = 9{,}9580273.552 - 10 \\ \log\cos\varepsilon'_{2.1} & = 9{,}9999996.989 - 10 \\ \log\cos(\alpha'_{2.1} - \varepsilon'_{2.1}) & = 9{,}6213484.891 - 10 \end{array}\right.$$

$$\log\tan\alpha_{2.1} = 0{,}3366785.660.$$

Hiermit gelangt man zu nachstehendem

$$\text{Resultat:}\quad \begin{cases} \log k = 5{,}7241345.725 \\ \dot{a}_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}9324'' \\ a_{2.1} = \ \ 65^0\ 16'\ 9{,}5806''. \end{cases}$$

Bremiker giebt in seinen *Studien u. s. w.* S. 37 bezw. 0,9325″ und 9,5809″, S. 28 aber 0,9326″ und 9,5800″ als Sekunden der Azimute. Für log k ist nach ihm, S. 28, der Wert der 3 letzten Stellen .730. Diese Übereinstimmung dürfte genügen.

§ 13. **Fortsetzung des Zahlenbeispiels I.** Zu *Formel* (3) S. 158 ist:

$$\log\cos B_1 \cos B_2 = 9{,}5460716-10 \qquad \log\sin 2\,a' = 9{,}9149042-10$$

$$\log\cos u = 9{,}72062_n-10 \qquad \log\sec^2\frac{\sigma'}{2} = 0{,}0007475$$

$$u = 58^0\ 17',7 \qquad 2\log W_u = 9{,}9978969-10$$

$$\log\left\{\frac{1}{2}\,\varrho'' e^2 \frac{\cos B_1 \cos B_2 \sin 2a' \sec^2\frac{\sigma'}{2}}{W_u^{\,2}}\right\} = 2{,}3016320.$$

Es geben daher Formel (2) und (3) S. 157 u. 158:

$$\frac{a_{2.1}-a_{1.2}}{2} = \ \ 92^0\ 51'\ 34{,}3241''$$

$$\frac{a_{2.1}+a_{1.2}}{2} = 332^0\ 21'\ 14{,}9790'' + 3'\ 20{,}2774''$$

$$= 332^0\ 24'\ 35{,}2564''.$$

Hieraus folgt als

$$\text{Resultat:}\quad \begin{cases} a_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}9323'' \\ a_{2.1} = \ \ 65^0\ 16'\ 9{,}5805''. \end{cases}$$

Diese Werte weichen von den strengeren Ergebnissen des vorigen Paragraphen nur um 0,0001″ ab, da die vernachlässigten Glieder, die in der Summe $a_{2.1}+a_{1.2}$ in den Zehntausendstelsekunden merkbar werden könnten, sich zufällig kompensieren.

Zu *Formel* (5) S. 158 erhalten wir:

$$\begin{cases} \log\sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9\ -10 \\ \log\cos B = 9{,}7732652.5\ -10 \\ \log\cos a' = 9{,}6665225.6_n-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log a_0 = 6{,}8046434.637 \\ \log\ W = 9{,}9990587.885-10 \\ 2\log\cos h = 9{,}9997789.106-10 \end{cases}$$

$$\log\tan h = 8{,}3534472.0_n-10 \qquad \log\varrho = 6{,}8053635.858.$$

Bremikers Tafel in seinen 6stelligen Logarithmen giebt 6,8053635.9, welcher Wert vollkommen ausreichen würde, wenn wir nur einzig und allein Formel (4) S. 158 benutzen wollten und demgemäfs 7 bis 8stellig rechnen würden. Indessen sollen schliefslich noch die höhern Glieder, die dort vernachlässigt sind, angebracht werden.

Zu *Formel* (4) S. 158 hat man, da $\log\cos 2B = 9{,}47132_n - 10$ ist:

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(2\varrho\sin\frac{\sigma'}{2}\right) &= 5{,}7241349.655 \\ +\frac{M}{8}\cdot 3e^4\cos^4 B\sin^2 2a' &= \quad +6.074 \\ +\frac{M}{8}\cdot e^2\,\varDelta B^2\cos 2B &= \quad -1.594 \\ -\frac{M}{8}\cdot 2e^2\,\varDelta B^2\sin^2 a' &= \quad -8.456 \end{aligned}\right.$$

$$\log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.679\,.$$

Formel (2) S. 155 giebt für die drei Glieder des Restes R

$$+146,\ +3,\ -47$$

Einheiten der 10. Decimalstelle. Für $\log \mathfrak{k}$ ist noch mit M zu multiplizieren, womit sich als Verbesserung vorstehenden Wertes von $\log \mathfrak{k}$ $+44$ Einh. der 10. Stelle ergeben. Es wird hiernach das

Resultat: $\log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.723\,,$

welcher Wert mit dem S. 162 gefundenen so gut übereinstimmt, als es die Rechnungsunsicherheit der letzten Stelle zuläfst.

Zu *Formel* (6) S. 157 erhält man:

$$a = 242^0\,24'\,35{,}2564'' \qquad \log\varrho = 6{,}8053644.048$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(2\varrho\sin\frac{\sigma'}{2}\right) &= 5{,}7241357.845 \\ -\frac{M}{8}\cdot e^4\cos^4 B\sin^2 2a &= \quad -2.019 \\ +\frac{M}{8}\cdot e^2\,\varDelta B^2\cos 2B &= \quad -1.594 \\ -\frac{M}{8}\cdot 2e^2\,\varDelta B^2\sin^2 a &= \quad -8.464 \end{aligned}\right.$$

$$\log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.768.$$

Die vernachlässigten Glieder 6. Ordnung (7) S. 157 geben in Einheiten der 10. Stelle $M(-56+3-41)$ d. i. . . . -41; es wird daher das Resultat: $\log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.727\,,$

was ebenfalls in guter Übereinstimmung mit der strengen Rechnung ist.

Die *Formel* (5) S. 141 zur direkten Berechnung eines einzelnen Azimuts giebt für $a_{1.2}$:

$B' = 53^0\,3'\,25{,}175''$ $\log\cos 2B' = 9{,}4433_n - 10$ $\log\sin^2 B' = 9{,}80 - 10$

$$\begin{cases} \log\frac{\Delta B}{L} = 9{,}4930192.770_n - 10 \\ \log(1-e^2) = 9{,}9970916.405 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log\cos B_2 = 9{,}7616703.379 - 10 \\ 2\log W' = 9{,}9981444.626 - 10 \end{cases}$$

$$\text{Summa} = 9{,}4901109.175_n - 10 \qquad \text{Summa} = 9{,}7598148.005 - 10$$

$$\begin{cases}
\log\left(-\frac{(1-e^2)\Delta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) = 9{,}7302961.17 - 10; & \text{num.} = 0{,}537398088 \\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\Delta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(-\frac{\Delta B^2}{6}\right) = 6{,}124455_n - 10; & \text{num.} = -\ 133185 \\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\Delta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(\frac{L^2}{6}\right) = 7{,}1384163 - 10; & \text{num.} = +\ 1375360 \\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\Delta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(\frac{\Delta B^2 - L^2}{6}\,\frac{3\Delta B^2 - 7L^2}{60}\right) = 4{,}32900 - 10; & \\
& \text{num.} = +\ 2133 \\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\Delta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(-\frac{1}{16}e^2\Delta B^2\cos 2B'\right) = 2{,}966 - 10; & \\
& \text{num.} = +\ 93 \\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\Delta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\left(\frac{1}{16}e^4\Delta B^2\sin^2 B'(2+\cos 2B')\right) = 1{,}39 - 10; & \\
& \text{num.} = +\ 2 \\
\log\left(-\frac{(1-e^2)\Delta B}{W'^2 L\cos B_2}\right) + \log\frac{31L^6}{15120} = 1{,}60 - 10; & \text{num.} = +\ 4
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\log\left(-\frac{L}{2}\sin B_1\right) = 8{,}6915993.5 - 10; & \text{num.} = +\ 49158582 \\
\log\left(-\frac{L}{2}\sin B_1\right) + \log\frac{L^2}{12} = 5{,}79869 - 10; & \text{num.} = +\ 62906 \\
\log\left(-\frac{L}{2}\sin B_1\right) + \log\frac{L^4}{120} = 2{,}986 - 10; & \text{num.} = +\ 97
\end{cases}$$

$$\log\cot a_{1.2} = 9{,}7692769.24 - 10 \qquad \cot a_{1.2} = 0{,}587864080.$$

Man hat daher als

Resultat: $a_{1.2} = 239^0\,33'\,0{,}9326''$.

Bei dieser Rechnung sind die beiden gröfsten Glieder 6. Ordnung mit zugezogen, da sie $a_{1.2}$ um $0{,}0009''$ ändern. In den Fällen, für welche die Formel aufgestellt ist, und wo sie allein Vorteil gewährt, ist selbstverständlich dieses Herbeiziehen überflüssig.

§ 14. **Zahlenbeispiel II.** Gegeben:

$$B_1 = 57^0 \quad B_2 = 56^0\,13'\,49{,}02186''$$

$$L_{1.2} = 1^0\,22'\,6{,}03270'' \text{ östlich.}$$

Auf diese Zahlen wenden wir die Formeln des § 11 S. 157 an und rechnen mit 8ziffrigen Logarithmen. Es wird zunächst unter teilweiser Anwendung der Hilfslogarithmen S aus den Tafeln 7ziffriger Logarithmen:

$\frac{\Delta B}{2} = -1385{,}48907''$ log sin $= 7{,}8271747.0_n - 10$ log cos $= 9{,}9999902.0 - 10$

$\frac{L_{1.2}}{2} = 180^0 - 2463{,}01635''$ log sin $= 8{,}0770318.4 - 10$ log cos $= 9{,}9999690.4_n - 10$

$B = 56^0\ 36'\ 54{,}51093''$ log sin $= 9{,}9216830.0 - 10$ log cos $= 9{,}7405680.1 - 10$.

Die *Formeln* (1) S. 157 geben nun:

$$\cos a' \sin\frac{\sigma'}{2} = [7{,}8271437.4_n - 10]$$

$$\sin a' \sin\frac{\sigma'}{2} = [7{,}8175998.5 - 10]$$

$$\cos\frac{\Delta a'}{2}\cos\frac{\sigma'}{2} = [9{,}9999592.4_n - 10]$$

$$\sin\frac{\Delta a'}{2}\cos\frac{\sigma'}{2} = [7{,}9987148.4_n - 10]$$

$a' = 135^0\ 37'\ 46{,}216''$ log sin $= 9{,}8446606.3 - 10$ log cos $= 9{,}8542045.2_n - 10$

$$\log\sin\frac{\sigma'}{2} = 7{,}9729392.2$$

$\frac{\Delta a'}{2} = 180^0\ 34'\ 16{,}678''$ log sin $= 7{,}9987340.1_n - 10$ log cos $= 9{,}9999784.1_n - 10$

$$\log\cos\frac{\sigma'}{2} = 9{,}9999808.3\,.$$

Für die *Formeln* (2) und (3) S. 157 u. 158 hat man:

$\log\left(\frac{1}{2}\varrho'' e^2\right) = 2{,}837806$

$\log\cos B_1 = 9{,}736109 - 10$

$\log\cos B_2 = 9{,}744963 - 10$

$\log\sin 2a' = 9{,}999895_n - 10$

$\log\sec^2\frac{\sigma'}{2} = 0{,}000038$

$-2\log W_u = 0{,}002476$

Summa $= 2{,}321287_n$ . . . num. $= -209{,}550''$

$\log\cos B = 9{,}74057 - 10$

$\log\sin a' = 9{,}84466 - 10$

$\log\cos u = 9{,}58523 - 10$

$u = 67^0\ 22',2$

$\log W_u = 9{,}998762 - 10$

$$\frac{a_{2.1} - a_{1.2}}{2} = 270^0\ 34'\ 16{,}678''$$

$$\frac{a_{2.1} + a_{1.2}}{2} = 225^0\ 34'\ 16{,}666''$$

$$a_{2.1} = 136^0\ \ 8'\ 33{,}344''$$

$$a_{1.2} = 314\ \ 59\ \ 59{,}988\,.$$

Zu den *Formeln* (5) und (4) S. 158 findet sich:

$$\left\{\begin{array}{l} \log\sqrt{\delta} = 8{,}913659 \quad -10 \\ \log\cos B = 9{,}740568 \quad -10 \\ \log\cos a' = 9{,}854205_n - 10 \\ \hline \log\tan h = 8{,}508432_n - 10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \log a_0 = 6{,}8046434.6 \\ -\log W = 0{,}0010128.5 \\ 2\log\cos h = 9{,}9995487.4 - 10 \\ \hline \log\varrho = 6{,}8052050.5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \log\left(\frac{1}{8}M.3e^4\right) = 1{,}861 \\ \log\cos^4 B = 8{,}962 - 10 \\ \log\sin^2 2a' = 0{,}000 \\ \hline \text{Summa} = 0{,}823 \\ \text{num.} = +\ 6.65 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \log\left(\frac{1}{8}Me^2\right) = 3{,}56 \\ \log\Delta B^2 = 6{,}26 \\ \log\cos 2B = 9{,}60_n - 10 \\ \hline \text{Summa} = 9{,}42_n \\ \text{num.} = -\ 0.26 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \log\left(\frac{1}{8}Me^2.2\right) = 3{,}86 \\ \quad .\ .\ .\ .\ .\ \ 6{,}26 \\ \log\sin^2 a' = 9{,}69 - 10 \\ \hline \text{Summa} = 9{,}81 - 10 \\ \text{num.} = +\ 0.64 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \log \mathfrak{k} &= 5{,}0791742.7 + 6.65 - 0.26 - 0.64. \\ &= 5{,}0791748.5\,. \end{aligned}$$

Es treten hiernach die folgenden Zahlen auf als

$$\text{Resultat:} \left\{\begin{array}{l} \log\mathfrak{k} = 5{,}0791748.5 \\ a_{1.2} = 314^0\ 59'\ 59{,}988'' \\ a_{2.1} = 136 \quad 8 \quad 33{,}344\,. \end{array}\right.$$

§ 15. Übertragung der geographischen Lage mittelst Sehne und astronomischen Azimuts.

Gegeben sei für P_1 die geographische Breite B_1, ferner die Sehne $\mathfrak{k}$ nach dem Punkte P_2 und das Azimut $a_{1.2}$ des Vertikalschnitts von P_1 nach P_2. Gesucht werden B_2, $L_{1.2}$ und $a_{2.1}$. Wir bezeichnen den Neigungswinkel von $\mathfrak{k}$ gegen die Horizontalebene von P_1 (Ebene $\xi\eta$ S. 136), den sogenannten *Depressionswinkel*, mit $\mu_{1.2}$. Die Projicierung von $\mathfrak{k}$ giebt nun mit Rücksicht auf § 2 S. 136 sofort:

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}\cos\mu_{1.2}\cos a_{1.2} &= \xi_2 = \quad (x_2 - x_1)\sin B_1 - (z_2 - z_1)\cos B_1 \\ \mathfrak{k}\cos\mu_{1.2}\sin a_{1.2} &= \eta_2 = \quad y_2 \\ \mathfrak{k}\sin\mu_{1.2} \quad &= \zeta_2 = -(x_2 - x_1)\cos B_1 - (z_2 - z_1)\sin B_1\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Anwendung einfacher Reduktionen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos B_2\cos L_{1.2}\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} - (1-e^2)\frac{\sin B_2\cos B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= \frac{\mathfrak{k}}{a_0}\cos\mu_{1.2}\cos a_{1.2} + \frac{e^2\sin B_1\cos B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \\ \frac{\cos B_2\sin L_{1.2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= \frac{\mathfrak{k}}{a_0}\cos\mu_{1.2}\sin a_{1.2} \\ \frac{\cos B_2\cos L_{1.2}\cos B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} + (1-e^2)\frac{\sin B_2\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= -\frac{\mathfrak{k}}{a_0}\sin\mu_{1.2} \qquad + \sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}. \end{aligned}\right\} (1)$$

Diese 3 Gleichungen dienen zur Bestimmung der Unbekannten B_2, $L_{1.2}$ und $\mu_{1.2}$. Der Versuch, die beiden ersten Unbekannten mit Übergehung von $\mu_{1.2}$ herzuleiten, führt zu komplizierten Formeln. Wir eliminieren daher umgekehrt zuerst B_2 und $L_{1.2}$ und leiten $\mu_{1.2}$ ab.

Aus der 1. und 3. der Gleichungen (1) folgt durch Elimination von $\cos B_2 \cos L_{1.2}$ bezw. von $\sin B_2$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin B_2}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= \frac{\sin B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \\
&\quad - \frac{k}{a_0(1-e^2)}(\cos\mu_{1.2}\cos B_1\cos a_{1.2} + \sin\mu_{1.2}\sin B_1) \\
\text{und}\qquad & \\
\frac{\cos B_2 \cos L_{1.2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} &= \frac{\cos B_1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} \\
&\quad + \frac{k}{a_0}(\cos\mu_{1.2}\sin B_1\cos a_{1.2} - \sin\mu_{1.2}\cos B_1).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Quadriert man die 2. Gleichung (2) und fügt sie zum Quadrat der 2. Gleichung (1), multipliziert die Summe mit $(1 - e^2)$ und addiert dazu das mit $(1 - e^2)^2$ multiplizierte Quadrat der 1. Gleichung (2), immer Seite für Seite, so folgt:

$$0 = -\frac{2k(1-e^2)\sin\mu_{1.2}}{a_0\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}} + \frac{k^2}{a_0^2}(1 - e^2 + e^2\cos^2\chi),$$

wobei gesetzt ist:

$$\cos\chi = \cos\mu_{1.2}\cos B_1\cos a_{1.2} + \sin\mu_{1.2}\sin B_1. \qquad (3)$$

$180^0 - \chi$ ist der Winkel zwischen Erdaxe und Sehne $P_1 P_2$, wie leicht zu erkennen ist, wenn man sich durch P_1 eine Parallele zur Erdaxe gelegt denkt und die Ecke zwischen dieser Parallelen, der Sehne und der Lotlinie betrachtet.

Sieht man $\cos\chi$ als bekannt an, so hat man zur Bestimmung von $\mu_{1.2}$ die Formel

$$\begin{aligned}
\sin\mu_{1.2} &= \frac{k\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}{2a_0}\left(1 + \frac{e^2\cos^2\chi}{1-e^2}\right) \\
&= \frac{k\,W_1}{2a_0}(1 + \delta\cos^2\chi) = \frac{k\,W_1}{2a_0}\sec^2 u,
\end{aligned} \qquad (4)$$

wenn $\sqrt{\delta}\cos\chi = \tan u$ gesetzt wird.

Da nun χ nicht bekannt ist, sondern $\mu_{1.2}$ zu seiner Berechnung erfordert, so mufs man sich successiver Annäherungen bedienen, um $\mu_{1.2}$ kennen zu lernen. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}\cot h &= \cot B_1 \cos a_{1.2} \\ \cos \chi &= \cos(\mu_{1.2} - h)\frac{\sin B_1}{\sin h}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und nehmen, falls eine Tafel der ϱ mit B und a als Argumenten vorliegt, in erster Annäherung:

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}; \quad \varrho \text{ für } B_1 \text{ und } a_{1.2}, \tag{6}$$

andernfalls mit Rücksicht auf den Ausdruck (1) S. 58 für ϱ:

$$\log \sin \mu_{1.2} = \log \frac{\mathfrak{k} W_1}{2a_0} + M\delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2} + \cdots. \tag{6*}$$

Um nun B_2 zu finden, geht man von der 1. Gleichung (2) aus und benutzt am besten die reduzierte Breite als Zwischenglied (vergl. S. 40), indem man setzt:

$$\left.\begin{aligned}\sin \beta_1 &= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B_1}{W_1} \\ \sin \beta_2 &= \sin \beta_1 - \frac{\mathfrak{k}\cos \chi}{a_0\sqrt{1-e^2}}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hieraus kann man noch ableiten:

$$\left.\begin{aligned}\sin \frac{\Delta\beta}{2} &= -\frac{\mathfrak{k}\cos\chi}{2a_0\sqrt{1-e^2}}\sec\beta \\ \Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 &\qquad \beta = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und endlich:

$$\sin \Delta B = \frac{2W_1}{w_2}\sin\frac{\Delta\beta}{2}\cos\frac{\Delta\beta}{2}, \tag{9}$$

welche letztere Formel erhalten wird, wenn man in der Identität

$$\sin \Delta B = \sin B_2 \cos B_1 - \cos B_2 \sin B_1$$

rechter Hand mittelst der Formeln (5) bis (7) S. 40 u. 41 die reduzierten Breiten einführt.

Die Rechnung nach diesen Formeln beginnt mit einer näherungsweisen Bestimmung von β_2 aus (7), soweit es mit Bequemlichkeit unter Anwendung *Gauß*ischer Logarithmen möglich ist. (8) giebt durch successive Annäherungen $\sin\frac{\Delta\beta}{2}$, (9) alsdann $\sin \Delta B$.

Man hat nun weiter zur Berechnung von $L_{1.2}$ aus der 2. Formel (1):

$$\sin L_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{a_0}\cos\mu_{1.2}\sec\beta_2\sin a_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}\sqrt{1-e^2}}{a_0\, w_2}\cos\mu_{1.2}\sec B_2 \sin a_{1.2}. \tag{10}$$

Um endlich noch $a_{2.1}$ zu finden, ist im allgemeinen Formel (4) S. 138 anzuwenden; in der Regel genügt es jedoch nach § 6 (2) S. 145 und § 8 (4) S. 151

$$\left.\begin{array}{l} \tan \frac{\Delta a'}{2} = - \tan \frac{L_{1.2}}{2} \sin B \sec \frac{\Delta B}{2} \\ \text{und} \\ a_{2.1} = a_{1.2} + 180^0 + \Delta a' + \frac{1}{4} \varrho'' e^4 \sin L_{1.2} \sin^2 \Delta B \sin B \cos^4 B + \cdots \end{array}\right\} \quad (11)$$

zu berechnen, wodurch $a_{2.1}$ noch für Werte von $k = 0{,}2\, a_0$ um nicht mehr als 0,0001″ unsicher erhalten wird.

Die vorstehenden Formeln gestatten nicht in allen Fällen eine befriedigende Lösung, insbesondere weil $\mu_{1.2}$, B_2 oder ΔB und $L_{1.2}$ aus dem Sinus hergeleitet werden. Indessen wird das Bedürfnis, in praktischen Fällen wenigstens, sich immer nur auf mäfsig grofse Werte von $\mu_{1.2}$ und ΔB erstrecken, die durch den Sinus bestimmbar sind. Dagegen kann $L_{1.2}$ auch bei kleinen Distanzen grofs werden, wenn die Punkte den Polen nahe liegen. Alsdann ist aber auch die Bestimmung von B_2 aus (7) bis (9) ungünstig, und man wird B_2 und $L_{1.2}$ besser aus der 2. Formel (1) und aus der 2. Formel (2) ermitteln.

Reihenentwicklungen werden zu Vorstehendem zunächst in Frage kommen können bei der indirekten Ermittlung von $\mu_{1.2}$ und ΔB. Für $\mu_{1.2}$ geben wir die Reihe weiterhin; ziemlicher Komplikation wegen ist sie zur Rechnung wenig geeignet und da für ΔB dies in noch gröfserem Mafse gilt, übergehen wir hierfür diese Entwicklung ganz.

Sind ΔB und $L_{1.2}$ klein, so kann eventuell die Anwendung der 1. Reihe (4) S. 30 auf $\sin \Delta B$ und $\sin L_{1.2}$ nützlich sein, für die 1. Formel (11) aber die Entwicklung (2) S. 133.

Vertauscht man in Formel (10) die Indices 1 und 2 und setzt dann beide Ausdrücke für $\sin L_{1.2}$ einander gleich, so folgt die interessante und für später wichtige Gleichung:

$$\sin a_{1.2} \cos \beta_1 \cos \mu_{1.2} = \sin (a_{2.1} - 180^0) \cos \beta_2 \cos \mu_{2.1}, \quad (12)$$

welche überdies auch zur Berechnung von $a_{2.1}$ dienen kann, sobald $\mu_{2.1}$ aus Formel (4) (worin nur B_1 mit B_2 zu vertauschen ist, indem χ unverändert bleibt) hergeleitet wird. Indessen gehen wir weder hierauf noch auf die notwendigen Umformungen, damit $a_{2.1}$ stets hinlänglich scharf erhalten werde, ein. (Vergl. *Bremiker*, *Studien u. s. w.*, S. 34.)

§ 16. **Zahlenbeispiel I.** (Umkehrung des Zahlenbeispiels S. 158 u. ff.) Gegeben: $B_1 = 52^0\,30'\,16{,}7''$

$$\log \mathfrak{k} = 5{,}7241345.725 \qquad \alpha_{1.2} = 239^0\,33'\,0{,}9324''.$$

Zu den *Formeln* (4), (5) und (6*) des vorigen Paragraphen hat man:

$$\log 2a_0 = 7{,}1056734.594$$

$$\log \frac{\mathfrak{k}}{2a_0} = 8{,}6184611.131 - 10$$

$$\log W_1 = 9{,}9990857.480 - 10$$

$$\log \frac{\mathfrak{k}\,W_1}{2a_0} = 8{,}6175468.611 - 10$$

$$[6{,}45 - 10] = 0{,}00028 \;\ldots\ldots\ldots$$

$$\log M\delta = 7{,}47 - 10$$
$$\log \cos^2 \alpha_{1.2} = 9{,}41 - 10$$
$$\log \cos^2 B_1 = 9{,}57 - 10$$
$$\text{Summa} = 6{,}45 - 10$$

1. Annäherung: $\log \sin \mu_{1.2} = 8{,}61783 - 10$; $\mu_{1.2} = 2^0\,22'\,38''$.

$$\log \cos \alpha_{1.2} = 9{,}7048214.896_n - 10$$
$$\log \cot B_1 = 9{,}8849076.665 - 10$$
$$\log \cot h = 9{,}5897291.561_n - 10$$

$$h = -68^0\,45'\,13{,}6416''$$

$$\mu_{1.2} - h = 71^0\;7'\,52''$$

$$\log \sin \alpha_{1.2} = 9{,}9355445.641_n - 10$$
$$\log \sin B_1 = 9{,}8994936.333 - 10$$
$$\log \sin h = 9{,}9694307.477_n - 10$$

$$\log \frac{\sin B_1}{\sin h} = 9{,}9300628.856_n - 10$$
$$\log \cos(\mu_{1.2} - h) = 9{,}509745 - 10$$

Änderung für 1″ gleich — 6,1 Einh. der 6. Dec.

1. Annäherung

$$\log \cos \chi = 9{,}439808_n - 10$$
$$\log \sqrt{\delta} = 8{,}913659 - 10$$
$$\log \tan u = 8{,}353467_n - 10.$$

Hierzu gehört $\log \sec u = 0{,}0001105.55$ mit 0,51 Einheiten der 9. Stelle Zuwachs für jede Einheit der 6. Stelle in $\log \tan u$.

Nunmehr wird in 2. Annäherung:

$$\log \sin \mu_{1.2} = \log \frac{\mathfrak{k}\,W_1}{2a_0} + 2 \times 0{,}0001105.55 = 8{,}6177679.71 - 10,$$

$$\mu_{1.2} = 2^0\,22'\,36{,}9242''$$

mit 0,000020″ Zuwachs für jede Einheit der 9. Decimalstelle in $\log \sin \mu_{1.2}$.

Es ist jetzt schärfer als oben $(\mu_{1.2} - h) = 71^0\,7'\,50{,}5658''$. Der Abnahme dieses Winkels im Betrage von 1,43″ entsprechen 9 Einheiten der 6. Stelle Zuwachs in $\cos(\mu_{1.2} - h)$, ferner $2 \times 9 \times 0{,}51 = 9$ Einheiten der 9. Stelle Zuwachs in $\sin \mu_{1.2}$, endlich 0,0002″ Zuwachs in $\mu_{1.2}$. Man hat daher definitiv:

$$\mu_{1.2} = 2^0\,22'\,36{,}9244'' \qquad \mu_{1.2} - h = 71^0\,7'\,50{,}5660''$$

$$\log \cos(\mu_{1.2} - h) = 9{,}5097537.572 - 10 \quad \log \cos \chi = 9{,}4398166.428_n - 10.$$

Man hat nun weiter zu den *Formeln* (7) und (8):

$$\left\{\begin{array}{ll} \log\sin\beta_1 = 9{,}8989537.055 - 10 & \log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.202 \;-10 \\ \log\dfrac{k\cos\chi}{a_0\sqrt{1-e^2}} = 8{,}360762_n \quad -10 & \log\dfrac{k\cos\chi}{2a_0\sqrt{1-e^2}} = 8{,}0597319.357\bar{_n} - 10. \end{array}\right.$$

Die beiden linker Hand durch eine Klammer verbundenen Logarithmen geben mittelst 6ziffriger *Gaufs*ischer Logarithmen (da 7ziffrige dem Verf. nicht zur Hand)

$$\log\sin\beta_2 = 9{,}911353 - 10 \text{ und } \beta_2 = 54^0\,37'\,25''.$$

Andrerseits ist aus log sin β_1 der Wert von $\beta_1 = 52^0\,24'\,43{,}0115''$, genügend übereinstimmend mit dem S. 43 abgeleiteten strengern Werte:

$$\beta_1 = 52^0\,24'\,43{,}01137'',$$

falls man Formel (9) benutzt. Wir können aber diese Formel nicht bequem anwenden, da eine Tafel der log w auf 10 Ziffern fehlt, und wir gehen daher von dem mittelst (8) gefundenen β_2 zu B_2 über. Dann aber mufs für β_1 der strenge Wert zur Anwendung gelangen.

In erster Annäherung wird nun $\beta = 53^0\,31'\,4''$, log sec β $= 0{,}2257945.702$ mit 28.472 Zuwachs für 1″ in β; ferner:

$$\log\sin\frac{\varDelta\beta}{2} = 8{,}2855265 - 10; \quad \frac{\varDelta\beta}{2} = 1^0\,6'\,20{,}875''.$$

Hiermit folgt in 2. Annäherung $\beta = 53^0\,31'\,3{,}886''$, log sec β $= 0{,}2257942.456$ und

$$\log\sin\frac{\varDelta\beta}{2} = 8{,}2855261.813 - 10; \quad \frac{\varDelta\beta}{2} = 1^0\,6'\,20{,}87257''.$$

Eine Änderung von 0,00001″ in $\frac{\varDelta\beta}{2}$ ändert den log sin um 11 Einheiten der 10. Decimalstelle; da nun bei der vorigen Rechnung β um 0,00206″ zu grofs genommen worden ist, also log sec β und log sin $\frac{\varDelta\beta}{2}$ um 59 Einheiten zu vermindern sind, ist auch $\frac{\varDelta\beta}{2}$ noch um 0,00005″ zu vermindern. Man hat daher definitiv:

$$\log\sin\frac{\varDelta\beta}{2} = 8{,}2855261.754 - 10; \quad \frac{\varDelta\beta}{2} = 1^0\,6'\,20{,}87252'';$$

$$\beta_2 = 54^0\,37'\,24{,}75641''.$$

Der Übergang von β_2 zu B_2 nach den Formeln des § 3, S. 41 u. ff. liefert: $B_2 - \beta_2 = \quad 5'\,25{,}84361''$; hiermit ist

$$B_2 = 54^0\,42'\,50{,}60002''.$$

Zu *Formel* (10) hat man endlich $\log\cos\beta_2 = 9{,}7626381.919 - 10$

$\log\cos\mu_{1.2} = 9{,}9996261.786 - 10 \qquad \log\sin L_{1.2} = 9{,}0920236.596_n - 10$

$$L_{1.2} = 7^0\ 6'\ 0{,}00000''\ \text{östlich.}$$

Es bleibt nun noch $a_{2.1}$ zu berechnen, was wir indes unterlassen, da die Formeln (11) schon S. 159 u. 162 behandelt sind.

§ 17. **Zahlenbeispiel II.** (Umkehrung des Zahlenbeispiels S. 164.)

Gegeben: $B_1 = 57^0$

$$\log k = 5{,}0791748.5 \qquad a_{1.2} = 314^0\ 59'\ 59{,}988''.$$

Zu den *Formeln* (4), (5) und (6*) S. 167 und 168 hat man:

$\log 2a_0 = 7{,}1056734.6 - 10$

$\log \frac{k}{2a_0} = 7{,}9735013.9 - 10$

$\log W_1 = 9{,}9989781.9 - 10$

$\log \frac{k\,W_1}{2a_0} = 7{,}9724795.8 - 10$

$[6{,}6363 - 10] = 0{,}0004328$ . . . . . Summa $= 6{,}6363 - 10$

$\log M\delta = 7{,}4651 - 10$

$\log\cos^2 B_1 = 9{,}4722 - 10$

$\log\cos^2 a_{1.2} = 9{,}6990 - 10$

Summa $= 6{,}6363 - 10$

1. Annäherung: $\log\sin\mu_{1.2} = 7{,}9729124 - 10$; $\mu_{1.2} = 0^0\ 32'\ 17{,}96''$.

$\log\cos a_{1.2} = 9{,}8494849.8 - 10$

$\log\cot B_1 = 9{,}8125173.6 - 10$

$\log\cot h = 9{,}6620023.4 - 10$

$h = 65^0\ 20'\ \ 7{,}403''$

$h - \mu_{1.2} = 64\ \ 47\ \ 49{,}443$ . . .

$\log\sin a_{1.2} = 9{,}8494850.3_n - 10$

$\log\sin B_1 = 9{,}9235914.0 - 10$

$\log\sin h = 9{,}9584521.3 - 10$

$\log\frac{\sin B_1}{\sin h} = 9{,}9651392.7 - 10$

$\log\cos(\mu_{1.2} - h) = 9{,}629232 - 10$

1. Annäherung

$\log\cos\chi = 9{,}594371 - 10$

$\log\sqrt{\delta} = 8{,}913659 - 10$

$\log\frac{k\,W_1}{2a_0} = 7{,}9724795.8 - 10$

$\log\tan u = 8{,}508030 - 10$

$2\log\sec u = 0{,}0004504.2$ . . . . $\log\cos u = 9{,}9997747.9 - 10$

$\log\sin\mu_{1.2} = 7{,}9729300.0 - 10$

$S = 4{,}6855684.7 - 10$

$\log\mu_{1.2}$ (in Sek.) $= 3{,}2873615.3$ . . . . $\mu_{1.2} = 0^0\ 32'\ 18{,}035''$

2. Annäherung:
(Sie giebt definitive Werte.)

$h - \mu_{1.2} = 64^0\ 47'\ 49{,}368''$ . . $\log\cos(\mu_{1.2} - h) = 9{,}6292321.0 - 10$

$\log\cos\chi = 9{,}5943713.7 - 10.$

Man hat nun weiter zu den *Formeln* (7) und (8) S. 168:

$$\left\{\begin{aligned} \log\sin\beta_1 &= 9{,}9231590.3 - 10 \\ \log\frac{k\cos\chi}{a_0\sqrt{1-e^2}} &= 7{,}870357 \quad -10 \end{aligned}\right.$$

Durch Gaußsche Logarithmen $\Big\}\ \log\sin\beta_2 = 9{,}919296 \quad -10$

$$\beta_1 = 56^0\ 54'\ 44{,}315''$$

$$\beta_2 = 56^0\ \ 8'\ 29{,}6''$$

1. Annäherung $\beta = 56^0\ 31'\ 37{,}0''$

2. Annäherung $\beta = 56^0\ 31'\ 37{,}002''$ . . . . .

$$\log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.2 \quad -10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\frac{k\cos\chi}{2a_0\sqrt{1-e^2}} &= 7{,}5693269.4_n - 10 \\ \underset{\text{1. Annäherung}}{\log\sec\beta} &= 0{,}2584192.3 + 31.8 \text{ für } 1'' \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\sin\frac{\Delta\beta}{2} &= 7{,}8277461.7_n - 10 \\ S &= 4{,}6855715.9 \quad -10 \end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log\frac{\Delta\beta}{2}} = 3{,}1421745.8_n$$

$$\frac{\Delta\beta}{2} = -23'\ 7{,}313''.$$

Da β um 0,002″ gewachsen ist, so ändern sich $\log\sec\beta$ und $\log\frac{\Delta\beta}{2}$ um + 0.1. Es geben nun die *Formeln* (9), (10) und (11) S. 168 u. 169:

$$\left\{\begin{aligned} \log\sin\frac{\Delta\beta}{2} &= 7{,}8277461.8_n - 10 \\ \log\cos\frac{\Delta\beta}{2} &= 9{,}9999901.8 \quad -10 \\ \log 2\,W_1 &= 0{,}3000081.9 \\ -\log w_2 &= 0{,}0004503.4 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\sin\Delta B &= 8{,}1281948.9_n - 10 \\ S &= 4{,}6855618.0 \quad -10 \end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log\Delta B} = 3{,}4426330.9_n$$

$$\Delta B = -\ 0^0\ 46'\ 10{,}9781''$$

$$B_2 = 56^0\ 13'\ 49{,}0219''$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\frac{k\sqrt{1-e^2}}{a_0} &= 8{,}2730772.1 \quad -10 \\ -\log w_2 &= 0{,}0004503.4 \\ \log\cos\mu_{1.2} &= 9{,}9999808.3 \quad -10 \\ \log\sec B_2 &= 0{,}2550374.5 \\ \log\sin\alpha_{1.2} &= 9{,}8494850.3_n - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\sin L_{1.2} &= 8{,}3780308.6_n - 10 \\ S &= 4{,}6855335.8 \quad -10 \end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log L_{1.2}} = 3{,}6924972.8_n$$

$$L_{1.2} = -\ 1^0\ 22'\ 6{,}0326''.$$

$-\frac{1}{2}L_{1.2} = +2463{,}0163''$ . . .

$B = 56^0\ 36'\ 54{,}511''$ . . .

$\frac{\Delta B}{2} = -\ \ 23'\ \ 5{,}49''$ . . .

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(-\frac{L_{1.2}}{2}\right) &= 3{,}3914672.9 \\ T &= 4{,}6855955.1 \quad -10 \\ \log\sin B &= 9{,}9216830.0 \quad -10 \\ \log\sec\frac{\Delta B}{2} &= 0{,}0000098.0 \end{aligned}\right.$$

$\Delta\alpha$ kann gleich $\Delta\alpha'$ gesetzt werden, daher ist:

$$\left\{\begin{aligned} \log\tan\frac{\Delta\alpha'}{2} &= 7{,}9987556.0 \quad -10 \\ T &= 4{,}6855892.6 \quad -10 \end{aligned}\right.$$

$\frac{\Delta\alpha}{2} = +0^0\ 34'\ 16{,}6782''$ . . . . $\underset{\text{in Sek.}}{\log\frac{\Delta\alpha'}{2}} = 3{,}3131663.4$

$\Delta\alpha = \ 1^0\ \ 8'\ 33{,}356''$ . . . . . . $\alpha_{2.1} = 136^0\ 8'\ 33{,}344''.$

Resultate: $\begin{cases} B_2 = & 56^0\ 13'\ 49{,}0219'' \\ L_{1.2} = & 1\ \ 22\ \ \ 6{,}0326 \text{ östlich} \\ a_{2.1} = & 136\ \ \ 8\ \ 33{,}344. \end{cases}$

§. 18. **Reihenentwicklung für den Depressionswinkel μ.** Nach S. 167 ist

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k} W_1}{2 a_0}(1 + \delta \cos^2 \chi), \tag{1}$$

wobei

$$\cos \chi = \cos \mu_{1.2} \cos B_1 \cos a_{1.2} + \sin \mu_{1.2} \sin B_1. \tag{2}$$

Aufserdem hat man nach S. 58 (1):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{W_1}{a_0}(1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}), \tag{3}$$

wenn ϱ den Krümmungsradius des Vertikalschnitts im Azimut $a_{1.2}$ für den Punkt P_1 mit der geographischen Breite B_1 bedeutet. Augenscheinlich ist es vorteilhaft, $\mu_{1.2}$ mit Benutzung von ϱ zu entwickeln, weil bei unendlich kleinem $\mathfrak{k}$ jedenfalls $\sin \mu_{1.2} = \mu_{1.2} = \mathfrak{k} : 2\varrho$ werden mufs. Es ist nun nach (1) und (3):

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \frac{1 + \delta \cos^2 \chi}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}}$$

oder

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \left\{1 + (\cos^2 \chi - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) \frac{\delta}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}}\right\}. \tag{4}$$

Durch Umwandlung von (2) findet man aber leicht:

$$\begin{aligned} \cos^2 \chi - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2} = \sin^2 \mu_{1.2} (\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) \\ + 2 \sin \mu_{1.2} \cos \mu_{1.2} \cos B_1 \sin B_1 \cos a_{1.2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Entwickeln wir hierin $\cos \mu_{1.2}$ nach Potenzen von $\sin \mu_{1.2}$ und setzen vorübergehend zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} (\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) &= c_1 \\ \frac{\delta \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}}{1 + \delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} \sin 2 B_1 \cos a_{1.2} &= c_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so folgt nach einfacher Reduktion durch Einführung von (5) in (4):

$$(1 - c_2) \sin \mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} + c_1 \sin^2 \mu_{1.2} - \frac{1}{2} c_2 \sin^3 \mu_{1.2} + \cdots \tag{7}$$

Der vernachlässigte Rest ist, wenn wir $\mathfrak{k}$ und also auch $\sin \mu_{1.2}$ als

kleine Gröfse voraussetzen, im Maximum nahezu $\frac{1}{8} c_2 \sin^5 \mu_{1.2}$ d. h. eine Gröfse von der 8. Ordnung. Multipliziert mit ϱ'' giebt dies für $k = 0{,}1\, a_0$ als maximalen Einflufs auf $\mu_{1.2}$ nur 0,000003″.

Dividiert man die Gleichung (7) mit $(1 - c_2)$, so folgt:

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{k}{2\varrho\,(1 - c_2)} + c_1 \sin^2 \mu_{1.2} - \frac{1}{2} c_2 \sin^3 \mu_{1.2} + Gl_8,$$

welche Formel im Vergleich zu (7) hauptsächlich noch ein Glied $c_1 c_2 \sin^3 \mu_{1.2}$ vernachlässigt, welches auch von der 8. Ordnung ist und höchstens in den Hunderttausendstelsekunden merkbar wird. Wenn man nun noch rechter Hand für $\sin \mu_{1.2}$ das Hauptglied linker Hand setzt und schreibt:

$$\sin \mu_{1.2} = \frac{k}{2\varrho\,(1 - c_2)} \left\{1 + c_1 \frac{k}{2\varrho} - \frac{1}{2} c_2 \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2 + Gl_7 \right\}$$

oder

$$\log \sin \mu_{1.2} = \log \frac{k}{2\varrho\,(1 - c_2)} + M \frac{k}{2\varrho} \left\{c_1 - \frac{1}{2} c_2 \frac{k}{2\varrho}\right\} + Gl_7, \tag{8}$$

so bleibt die Genauigkeit unverändert, da die hierbei neuerdings begangenen Fehler noch eine Ordnung höher sind, als die bis dahin zugelassenen. Die zur Berechnung nach (8) erforderlichen Ausdrücke (6) für c_1 und c_2 gehen mittelst der Formel (3) über in:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \delta \frac{k\, W_1}{2 a_0} (\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) \\ c_2 &= \delta \frac{k\, W_1}{2 a_0} \sin 2 B_1 \cos a_{1.2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Indem wir nun auf den oben gefundenen Ausdruck für $\sin \mu_{1.2}$ die 1. Reihe (4) S. 30 mit $u = \mu_{1.2}$ anwenden, findet sich direkt für $\mu_{1.2}$ selbst:

$$\left.\begin{aligned} \log \mu_{1.2} = \log \frac{k}{2\varrho\,(1 - c_2)} &+ M \frac{k}{2\varrho} \left(c_1 - \frac{1}{6} c_2 \frac{k}{2\varrho} + \frac{1}{3} c_1 \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2\right) \\ &+ \frac{M}{6} \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2 \left(1 + \frac{11}{30} \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^2 + \frac{191}{945} \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^4\right) + Gl_7. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die hierbei vernachlässigten Glieder 7. Ordnung haben in $\mu_{1.2}$ wie bisher nur auf die Hunderttausendstelsekunden Einflufs. Vernachlässigt man auch noch die Glieder 6. Ordnung:

$$M \left(\frac{1}{3} c_1 \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^3 + \frac{191}{5670} \left(\frac{k}{2\varrho}\right)^6\right),$$

deren Einflufs auf $\mu_{1.2}$ in Sekunden gleich ist dem vorstehenden Ausdruck mal $\frac{\varrho''}{M} \frac{k}{2\varrho}$, so wird der Fehler für $k = 0{,}1\, a_0$ im Maximum gleich 0,00014″, was indessen in der Regel ohne Belang bleibt.

Wir erhalten nun, indem wir auch noch den Nenner $(1 - c_2)$ des 1. Gliedes rechter Hand der Formel (10) in eine Reihe entwickeln:

$$\log_{\text{in Sek.}} \mu_{1.2} = \log \frac{\varrho'' \mathfrak{k}}{2\varrho} + M\left\{\frac{1-c_2}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + c_2 + c_1\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) + \frac{11}{180}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \frac{1}{2}c_2^2\right\} + Gl_6, \quad (11)$$

ϱ zu den Argumenten B_1 und $a_{1.2}$.

Diese Formel giebt erst für $\mathfrak{k} = 0{,}1\,a_0$ die Zehntausendstelsekunden von $\mu_{1.2}$ nicht mehr ganz scharf.

Setzen wir endlich in weiterer Vereinfachung:

$$\left.\begin{array}{l}\log_{\text{in Sek.}} \mu_{1.2} = \log \frac{\varrho'' \mathfrak{k}}{2\varrho} + M\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + c_2 + c_1 \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right\} + Gl_4, \\ \varrho \text{ zu den Argumenten } B_1 \text{ und } a_{1.2},\end{array}\right\} \quad (12)$$

so ist der Fehler in dem hiermit berechneten $\mu_{1.2}$ für $\mathfrak{k} = 0{,}1\,a_0$ zwar einige Tausendstelsekunden, er sinkt aber für $\mathfrak{k} = 0{,}02\,a_0$ auf weniger als 0,00001″ herab, wie die Betrachtung der im Vergleich zu (11) vernachlässigten Glieder zeigt.

§ 19. **Zahlenbeispiel I,** vergl. S. 170, giebt zu *Formel* (3), (9) und (11):

$$\begin{array}{ll} \log\cos a_{1.2} = 9{,}7048215_n - 10 & \log\frac{\mathfrak{k} W_1}{2a_0} = 8{,}6175468.611 - 10 \\ \log\cos B_1 = 9{,}7844013 - 10 & \log\sec^2 h' = 0{,}0002775.938 \\ \log\sqrt{\delta} = 8{,}9136594 - 10 & \log\varrho'' = 5{,}3144251.332 \\ \hline \log\tan h' = 8{,}4028822_n - 10\,{}^{*)} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log\sin^2 B_1 = 9{,}798987 - 10 & \log\frac{\varrho''\mathfrak{k}}{2\varrho} = 3{,}9322495.88 - 10 \\ \log\cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2} = 8{,}978446 - 10 & \log\delta = 7{,}827319 - 10 \end{array}$$

Mittelst *Gaussischer* Logarithmen:

$$\begin{array}{rl} \log\delta\frac{\mathfrak{k} W_1}{2a_0} &= 6{,}444865 - 10 \\ \log(\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}) &= 9{,}727809 - 10 \\ \hline \log c_1 &= 6{,}172674 - 10. \end{array}$$

Andrerseits ist hiermit

$$\begin{array}{rl} \log\sin 2B_1 \cos a_{1.2} &= 9{,}689747_n - 10 \\ \hline \log c_2 &= 6{,}134612_n - 10. \end{array}$$

Mittelst des auf Einheiten der 7. Decimalstelle reduzierten $\log M = 6{,}637784$ erhält man nun weiter:

$$\log\frac{\varrho''\mathfrak{k}}{2\varrho} = 3{,}9322495.88 - 10$$

$$+\frac{M}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 = \quad + 1245.32 \qquad \log = 3{,}095282$$

*) h' bezeichnet hier den S. 59 (2) zur Berechnung von ϱ angewandten Hilfswinkel h.

$$-\frac{M}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 c_2 = + \quad .17 \qquad 0{,}230-1$$

$$+Mc_2 = - \quad 592.09 \qquad 2{,}77239_n$$

$$+M\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) c_1 = + \quad 26.81 \qquad 1{,}4283$$

$$+\frac{11\,M}{180}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 = + \quad .79 \qquad 0{,}895-1$$

$$+M\frac{c_2^{\,2}}{2} = + \quad 4 \qquad 0{,}60-2$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\mu_{1.2}} = 3{,}9323176.92 \qquad \mu_{1.2} = 8556{,}9243'',$$

was mit der Berechnung auf S. 170 hinreichend übereinstimmt.

Zahlenbeispiel II giebt im Anschlufs an S. 172 nach *Formel* (12) S. 176:

$$\begin{cases}\log\frac{1}{6}\,M = 5{,}8596 \ \text{für Einh. der 7. Dec.}\\ \log\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 = 5{,}9458-10\end{cases}$$

$$\log\left(\frac{1}{6}M\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2\right) = 1{,}8054$$

$$\log\left(M\delta\,\frac{\mathfrak{k}W_1}{2a_0}\right) = 2{,}4376$$

$$\begin{cases}\log\sin^2 B_1 = 9{,}8472-10\\ \log(\cos^2 B_1\cos^2 a_{1.2}) = 9{,}1712-10\end{cases}$$

Durch Gaufs'sche Log. $\Big\}\ \log(\sin^2 B_1-\cos^2 B_1\cos^2 a_{1.2}) = 9{,}7444-10$

$$\log\sin 2B_1\cos a_{1.2} = 9{,}8102-10$$

$$\log Mc_1 = 2{,}1820$$

$$\log Mc_2 = 2{,}2478$$

$$\log\left(Mc_1\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) = 0{,}1549$$

$$\begin{cases}\log\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} = 7{,}9729124-10\\ \log\varrho'' = 5{,}3144251\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log\frac{\varrho''\mathfrak{k}}{2\varrho} = 3{,}2873375\\ [1{,}8054] = + \quad 63.9\\ [2{,}2478] = + \quad 176.9\\ [0{,}1549] = + \quad 1.4\end{cases}$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\mu_{1.2}} = 3{,}2873617$$

$$\mu_{1.2} = 32'\ 18{,}035''.$$

§ 20. **Rektifikation des Vertikalschnitts.** Für einzelne Anwendungen ist es erforderlich, die Beziehung zwischen den Längen der Sehne und des Vertikalschnitts bei kleinen Beträgen der Entfernung kennen zu lernen. Diese Beziehung läfst sich aber mit Benutzung der S. 175 für $\sin\mu_{1.2}$ gefundenen Formel aufstellen, welche lautet:

$$\sin\mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho(1-c_2)}\left\{1+c_1\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}-\frac{1}{2}c_2\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2+Gl_7\right\}. \qquad (1)$$

Hierbei erscheint $\mu_{1.2}$ als Funktion von $\mathfrak{k}$, B_1 und $a_{1.2}$. Für den

Zweck der Rektifikation betrachten wir nun $\mathfrak{k}$ als Radiusvektor und $\mu_{1.2}$ als Anomalie, mithin beide als variabel, alle andern Gröfsen als konstant. Zu diesen letztern zählt auch ϱ (Argumente: B_1 und $a_{1.2}$), während c_1 und c_2 die Variable $\mathfrak{k}$ als Faktor enthalten. Wir trennen daher von c_1 und c_2 (vergl. die (6) S. 174) die konstanten Teile

$$\left.\begin{aligned} c_1' &= \frac{\delta\,(\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2})}{1+\delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} \\ c_2' &= \frac{\delta \sin 2B_1 \cos a_{1.2}}{1+\delta \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ab und erhalten nun aus (1), indem wir noch den Nenner $(1-c_2)$ auf der rechten Seite in eine Reihe entwickeln, sowie ein Glied 7. Ordnung, welches von $\delta^2\,\mathfrak{k}^3$ abhängt, vernachlässigen:

$$\sin\mu_{1.2} = \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\left\{1 + c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) + c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 - \frac{1}{2}\,c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + Gl_6\right\}.$$

Hieraus folgt mittelst der 1. Formel (2) S. 29:

$$\mu_{1.2} = \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{40}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^5 + c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + Gl_7. \tag{3}$$

Bezeichnet man aber das Bogendifferential des Vertikalschnitts mit ds, so ist nach bekannter Formel für Polarkoordinaten:

$$ds^2 = d\mathfrak{k}^2 + \mathfrak{k}^2 d\mu_{1.2}^2.$$

Man hat nun durch Differentiation des Ausdrucks (3) für $\mu_{1.2}$ und durch Multiplikation mit $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{k}\,d\mu_{1.2} = \left\{\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^5 + 2c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + 3c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + Gl_7\right\} d\mathfrak{k}.$$

Damit erhält man leicht:

$$ds^2 = d\mathfrak{k}^2\left\{1 + \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 + 4c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + 6c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_7\right\}$$

und

$$ds = d\mathfrak{k}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 + 2c_2'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + 3c_1'\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_7\right\}.$$

Hieraus folgt durch Integration von $\mathfrak{k} = 0$ bis $\mathfrak{k}$ der über der Sehne $\mathfrak{k}$ liegende Bogen $s_{1.2}$ des Vertikalschnitts von P_1 nach P_2:

$$\left.\begin{aligned} s_{1.2} = \mathfrak{k}\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \frac{5}{112}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 + \frac{c_2'}{2}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3c_1'}{5}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_7\right\}; \\ \varrho \text{ zu den Argumenten } B_1 \text{ und } a_{1.2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Um $s_{1.2}$ aus $\mathfrak{k}$ und ϱ als Kreisbogen berechnen zu können, mufs man die in c_2' und c_1' multiplizierten Glieder vernachlässigen dürfen. Das Maximum des ersteren, gröfsern, hat auf $\log s_{1.2}$ den Einflufs

$$\frac{1}{2} M\delta\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3,$$

was für $\mathfrak{k} = 0{,}04\, a_0$ in $\log s_{1.2}$ eine Einheit der 8. Decimalstelle ergiebt.

Bei gleicher Genauigkeit vereinfacht sich diese Formel etwas, indem man anstatt ϱ das geometrische Mittel der beiden ϱ mit den Argumenten B_1 und $a_{1.2}$ bezw. B_2 und $a_{2.1}$ einführt.

Nennen wir diese beiden ϱ für den Augenblick ϱ_1 und ϱ_2, so hat man nach S. 58 (1):

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\varrho_1} &= \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}{a_0}\,(1+\delta\cos^2 B_1\cos^2 a_{1.2})\\ \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{a_0}\,(1+\delta\cos^2 B_2\cos^2 a_{2.1})\,.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Relation $\delta = e^2 : (1-e^2)$ und unter Vernachlässigung von Gliedern mit δ^2 zunächst:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{a_0}\left(1+\delta\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 B_1 - \cos^2 B_1 \sin^2 a_{1.2}\right)+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{a_0}\left(1+\delta\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 B_2 - \cos^2 B_2 \sin^2 a_{2.1}\right)+\cdots\right),$$

und weiter:

$$\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{\delta}{a_0^2}\left(\frac{3}{2}(\sin^2 B_2-\sin^2 B_1)+(\cos^2 B_2\sin^2 a_{2.1}-\cos^2 B_1\sin^2 a_{1.2})\right)+\cdots.$$

Nach (6) S. 148 unterscheiden sich aber die Azimute $a_{1.2}$ und $a_{2.1}$ von den daselbst eingeführten Azimuten $a_{1.2}'$ und $a_{2.1}'$ nur um Gröfsen der Ordnung e^2 oder δ. Nun ist nach dem Sinussatz im sphärischen Dreieck (1) S. 144:

$$\sin^2 a_{2.1}' \cos^2 B_2 = \sin^2 a_{1.2}' \cos^2 B_1\,,$$

folglich ist $\sin^2 a_{2.1}\cos^2 B_2 - \sin^2 a_{1.2}\cos^2 B_1$ nur eine Gröfse der Ordnung δ. Mit Vernachlässigung von δ^2 wie bisher, ist daher:

$$a_0^2\left(\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right) = \frac{3}{2}\,\delta\,(\sin^2 B_2-\sin^2 B_1)+Gl_5\,. \tag{6}$$

Der Rest der Entwicklung rechter Hand ist als Glied 5. Ordnung angesetzt, da er aufser δ^2 noch den Faktor $\mathfrak{k}$ enthalten mufs, um mit $\mathfrak{k}$ = null zu verschwinden.

Auch $\sin^2 B_2 - \sin^2 B_1$ enthält den Faktor $\mathfrak{k}$; es ist nämlich nach S. 167 (2) und (4) ohne Schwierigkeit zu finden, dafs man setzen kann:

$$\sin^2 B_2 - \sin^2 B_1 = -\frac{2\mathfrak{k}}{a_0} \sin B \cos \chi + Gl_3$$

und hiernach aus (6):

$$\frac{\mathfrak{k}^2}{\varrho_1^2} - \frac{\mathfrak{k}^2}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{3\delta \mathfrak{k}^3}{a_0^3} \sin B \cos \chi + Gl_7. \tag{7}$$

Bezeichnen wir jetzt $\varrho_1 \varrho_2$ kurz mit ϱ^2, so ergiebt die Einführung von (7) in Formel (4) mit einigen weiteren leicht zu ersehenden Vernachlässigungen

$$s_{1.2} = \mathfrak{k} \left\{ 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + \frac{5}{112}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^6 - \delta \sin B \cos \chi \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 \right.$$
$$\left. + \frac{c_2'}{2}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3c_1'}{5}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_7 \right\}. \tag{8}$$

Die in der Parenthese vernachlässigten Glieder 7. Ordnung hängen von $\delta \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^5$ und $\delta^2 \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3$ ab und dürften kaum für $\mathfrak{k} = 0{,}1\, a_0$ in der 9. Stelle des $\log s_{1.2}$ merkbar werden.

Man kann nun mit Beibehaltung dieser Genauigkeit jedenfalls auch in c_2' und c_1' die Glieder mit δ^2 vernachlässigen. Die 3 letzten Glieder rechter Hand in (8) gehen dann, abgesehen vom Faktor $\mathfrak{k}$, wenn man noch für $\cos \chi$ substituiert

$$\cos \chi = \cos B_1 \cos a_{1.2} + \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \sin B_1 + Gl_2, \tag{9}$$

in den Ausdruck über:

$$\delta \left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^3 \left\{ -\sin B \cos B_1 \cos a_{1.2} + \sin B_1 \cos B_1 \cos a_{1.2} \right.$$
$$\left. - \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \left(\sin B \sin B_1 - \frac{3}{5} \sin^2 B_1 + \frac{3}{5} \cos^2 B_1 \cos^2 a_{1.2} \right) \right\} + Gl_7.$$

Es ist aber nach (2) S. 167:

$$\sin B_2 = \sin B_1 - \frac{\mathfrak{k}}{\varrho} \cos \chi + Gl_2;$$

da ferner $\sin B_2 + \sin B_1 = 2 \sin B \cos \frac{\Delta B}{2}$ ist, so erhält man mit Rücksicht auf (9):

$$\sin B = \sin B_1 - \frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} \cos B_1 \cos a_{1.2} + Gl_2,$$

wodurch sich der obige Ausdruck für die 3 letzten Glieder von (8) unter Verschwinden der Glieder 5. Ordnung reduziert auf

$$\frac{2}{5}\,\delta\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4(\cos^2 B\cos^2 a - \sin^2 B) + \cdots. \tag{10}$$

Hierbei ist a in der Bedeutung (4) S. 156 genommen.

Der Einflufs von (10) auf $\log s_{1.2}$ ist Mmal so grofs und für $\mathfrak{k} = 0{,}1\, a_0$ und $0{,}05\, a_0$ noch keine Einheit der 8. bezw. der 9. Decimalstelle. Wir haben demnach mit Benutzung einiger weiteren leicht zu ersehenden Reduktionen und geringfügigen Vernachlässigungen, wenn zugleich der Index 1.2 von s wegbleibt:

$$\left.\begin{aligned}
s &= \begin{cases} = \mathfrak{k}\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{3}{40}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 + Gl_6\right\} \\ = 2\varrho\left\{\arcsin\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} + Gl_7\right\}; \end{cases}\\
\log s &= \log\mathfrak{k} + \frac{1}{6}M\left\{\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 + \frac{11}{30}\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4\right\} + Gl_6\\
\log\frac{M}{6} &= 5{,}8596331 \text{ u. } \log\frac{11\,M}{180} = 5{,}4239 \;\text{für Einh. der 7. Dec.}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Diese Formeln geben erst bei $\mathfrak{k} = 0{,}05\, a_0$ nicht mehr die 10. Decimalstelle des Logarithmus richtig, bei $\mathfrak{k} = 0{,}1\, a_0$ aber wenigstens noch 8 Decimalen sicher.

Zur Berechnung des in (11) auftretenden ϱ erhält man aus (5):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho} &= \frac{W}{a_0}(1 + \delta\cos^2 B\cos^2 a + Gl_4)\\
\log\varrho &= \log a_0 - \log W - M\delta\cos^2 B\cos^2 a + Gl_4\\
W &\text{ zum Argument } B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)\\
a &= \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} - 180^0).
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Von der Richtigkeit der 1. Formel (12) überzeugt die Entwicklung (9) S. 26, wonach offenbar

$$W_1 W_2 = W^2 + Gl_4$$

$$(1 + \delta\cos^2 B_1\cos^2 a_{1.2})(1 + \delta\cos^2 B_2\cos^2 a_{2.1}) = 1 + \delta\cos^2 B\cos^2 a + Gl_4.$$

Die Gl_4 sind abhängig von $e^2\dfrac{\mathfrak{k}^2}{a_0^{\,2}}$ und zwar *kleine* Glieder auch noch für die Nähe der Pole, wie a priori zu erwarten ist und durch eingehendere Betrachtung bestätigt wird.

Die Formel (11) ist nicht nur dadurch interessant, dafs sie die Möglichkeit zeigt, mit grofser Annäherung *die Länge des Vertikalschnittes aus der Sehne bei geeigneter Wahl von ϱ wie die eines Kreisbogens* berechnen zu können; sie zeigt aufserdem, dafs die Längen



der Vertikalschnitte von P_1 nach P_2 und von P_2 nach P_1 nur um Glieder sehr hoher Ordnung von einander abweichen. In welcher Ordnung die Differenz hervortritt, läfst sich aus (11) noch nicht erkennen; man müfste zu dem Zwecke die Entwicklungen weiter treiben. Dazu ist aber jetzt keine Veranlassung, umsomehr als jene Differenz später bei andrer Gelegenheit sich nebenher ergiebt.

Schreibt man (11) in der Form $\log \mathfrak{k} = \log 2\varrho + \log \sin \frac{s}{2\varrho}$ und beachtet die Formel (6) S. 157, so folgt

$$\log\sin\frac{s}{2\varrho} = \log\sin\frac{\sigma'}{2} - \frac{1}{8}Me^4\cos^4 B\sin^2 2a + \frac{1}{8}Me^2\Delta B^2(\cos 2B - 2\sin^2 a) + Gl_6$$

und hieraus

$$\log s = \log(\sigma'\varrho) - \frac{1}{8}Me^4\cos^4 B\sin^2 2a + \frac{1}{8}Me^2\Delta B^2(\cos 2B - 2\sin^2 a) + Gl_6, \quad (13)$$

wobei ϱ nach (12) zu berechnen ist und σ' sich auf das sphärische Dreieck (1) S. 144 bezieht. Berechnet man ϱ (anstatt mit a) mit a', so sind die kleinen Glieder in (13) mit denen von (3) S. 156 zu vertauschen.

Diese Formel (13) ist wie (6) S. 157 in der 8. Decimalstelle, unabhängig von der Entfernung, nicht ganz scharf.

§. 21. **Zahlenbeispiel I,** vergl. S. 170 und 176, giebt zu *Formel* (11) S. 181 bei strenger Berechnung der Krümmungsradien:

$\log\varrho = 6{,}8053644$ für $B = 53^0\,36'\,34''$ und $a = 242^0\,24'\,35''$ nach S. 163

$\begin{cases} 6{,}8052801 \text{ für } B_1 = 52\;30\;17 \text{ und } a_{1.2} = 239\;33\;\;1 \text{ nach S. 176} \\ 6{,}8054409 \text{ für } B_2 = 54\;42\;51 \text{ und } a_{2.1} = 65\;16\;10; \text{hieraus folgt} \end{cases}$

$\log\varrho = 6{,}8053605$, genau $\sqrt{\varrho_1\varrho_2}$ S. 180 entsprechend.

Die Anwendung der Formel (12) S. 181 bezw. (3) S. 59 zur Berechnung der drei $\log\varrho$ führt zu Werten, die kaum um 1 Einheit der 7. Decimalstelle abweichen.

Man erhält nun zu der *3. Formel* (11) S. 181:

	mit $\log\varrho = 6{,}8053644$	mit 6,8053605
$\log\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho} =$	8,6177402 — 10	8,6177441 — 10
$\log\mathfrak{k} =$	5,7241345.725	5,7241345.725
$\frac{1}{6}M\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^2 =$	+ 1244.840	+ 1244.862
$\frac{11}{180}M\left(\frac{\mathfrak{k}}{2\varrho}\right)^4 =$	+ 0.785	+ 0.785
$\log s =$	5,7242591.350	5,7242591.372.

Berücksichtigt man für den 2. dieser Werte die Glieder 6. Ordnung nach (8) S. 180 bezw. (10) S. 181, so ergiebt sich ... 5,7242591.353.

Es wird sich später zeigen, dafs dieser Wert bis zur 10. Stelle incl. richtig ist. Dies vorausgesetzt, findet man aus der Vergleichung mit dem 1. Wert von $\log s$ (welchen $\log \varrho$ mit den Argumenten B und a giebt), dafs derselbe auch *ohne* Berücksichtigung der Glieder 6. Ordnung sehr genau ist.

Zahlenbeispiel II, vergl. S. 172, giebt $\log \varrho = 6{,}805$ und

$$\log s = 5{,}0791748.5 + 64.0 + 0.0 = 5{,}0791812.5,$$

welcher Wert sich später ebenfalls bestätigen wird.

§. 22. **Azimutalunterschied der Vertikalschnitte.** Im Anschlufs an die Entwicklungen der Paragraphen 1 und 2 dieses Kapitels S. 134 u. ff. stellen wir die Gleichung der Vertikalebene von P_2 nach P_1 auf. Da diese letztere durch den Koordinatenanfang geht, ist ihre Gleichung von der Form:

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0. \tag{1}$$

Denkt man sich die Koefficienten A, B und C bereits ermittelt, so dient alsdann zur Bestimmung des Azimuts $\alpha'_{1.2}$ des Vertikalschnitts von P_2 nach P_1 in P_1 die Beziehung:

$$\cot \alpha'_{1.2} = -\frac{B}{A}. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) wird dadurch bekannt, dafs man sie auf P_2 und K'_2 (Fig. 8 S. 134) anwendet. Nach (4) S. 136 ist für P_2:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \quad (x_2 - x_1)\sin B_1 - (z_2 - z_1)\cos B_1 \\ \eta_2 &= \quad y_2 \\ \zeta_2 &= -(x_2 - x_1)\cos B_1 - (z_2 - z_1)\sin B_1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Es ist ferner mit Beachtung des Umstands, dafs für K'_2 die Koordinaten x'_2 und y'_2 gleich null sind:

$$\left.\begin{aligned} \xi'_2 &= -x_1 \sin B_1 - (z'_2 - z_1)\cos B_1 \\ \eta'_2 &= \quad 0 \\ \zeta'_2 &= +x_1 \cos B_1 - (z'_2 - z_1)\sin B_1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Werte x_2, y_2 und z_2 sind in (3) S. 136 angegeben; ferner ist nach (9) S. 41:

$$z'_2 = -\frac{a_0 e^2 \sin B_2}{W_2}. \tag{5}$$

Man hat nun durch Anwendung von Gleichung (1) auf die Punkte P_2 und K'_2:

$$A\xi_2 + B\eta_2 + C\zeta_2 = 0$$
$$A\xi'_2 + B\eta'_2 + C\zeta'_2 = 0$$

und kann hieraus die Verhältnisse $(B:A)$ und $(C:A)$ bestimmen. Es wird insbesondere:

$$\cot a'_{1.2} = -\frac{B}{A} = \frac{\xi_2 \zeta'_2 - \xi'_2 \zeta_2}{\eta_2 \zeta_2 - \eta'_2 \zeta_2}$$

und hieraus mittelst (3) und (4):

$$\cot a'_{1.2} = \frac{(z'_2 - z_2)\, x_1 - (z'_2 - z_1)\, x_2}{y_2\, (x_1 \cos B_1 - (z'_2 - z_1) \sin B_1)}. \tag{6}$$

Wenn man hierin den Wert von z'_2 nach (5) substituiert und ferner x_1, z_1, x_2, y_2 und z_2 mittelst nachstehender Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_0 \cos B_1 : W_1 \\ z_1 &= a_0 (1 - e^2) \sin B_1 : W_1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= a_0 \cos B_2 \cos L_{1.2} : W_2 \\ y_2 &= a_0 \cos B_2 \sin L_{1.2} : W_2 \\ z_2 &= a_0 (1 - e^2) \sin B_2 : W_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

eliminiert, so ergiebt sich durch einfache Reduktionen der Ausdruck:

$$\cot a'_{1.2} = \frac{\dfrac{\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1}{\cos B_2 \sin L_{1.2}} + e^2 \cot L_{1.2} \left(\dfrac{W_1}{W_2} \sin B_2 - \sin B_1\right)}{1 + e^2 \sin B_1 \left(\dfrac{W_1}{W_2} \sin B_2 - \sin B_1\right)}. \tag{9}$$

Aus dieser Formel kann man $a'_{1.2}$ bei gegebener geographischer Lage der Punkte bestimmen. Ebenso läſst sich aus derselben im Verein mit der Formel (6) S. 139 für $\cot a_{1.2}$ *das gegenseitige Verhalten der Vertikalschnitte* im allgemeinen erkennen, noch einfacher indes geometrisch aus der Betrachtung der relativen Lage der Punkte K'_1 und K'_2 zur Sehne $P_1 P_2$ in Fig. 8 S. 134. Man bemerkt auf die eine oder andere Art leicht, daſs für nahezu diametrale Punkte die Differenz von $a'_{1.2}$ und $a_{1.2}$ auf $\pm 180^0$ steigen kann. Klein ist die Differenz im allgemeinen nur bei kleinen Entfernungen und für solche mag dieselbe jetzt noch dargestellt werden.

Bezeichnen wir entsprechend dem sphärischen Dreieck (1) S. 144

$$\frac{\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1}{\cos B_2 \sin L_{1.2}} \text{ mit } \cot \alpha'_{1.2}$$

und ferner vorübergehend

$$\left.\begin{aligned} \sin B_2 - \frac{W_2}{W_1} \sin B_1 &\text{ mit } p_1 \\ \frac{W_1}{W_2} &\text{ mit } q_1 , \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

so ist nach (9) bezw. nach (3) S. 145:

$$\cot \alpha'_{1.2} = \frac{\cot \alpha'_{1.2} + e^2 \cot L_{1.2} \cdot p_1 q_1}{1 + e^2 \sin B_1 \cdot p_1 q_1}, \tag{11}$$

$$\cot \alpha_{1.2} = \cot \alpha'_{1.2} + \frac{e^2 \cos B_1}{\cos B_2 \sin L_{1.2}} p_1. \tag{12}$$

Indem wir beide Gleichungen von einander subtrahieren, sowie unter Anwendung der Relationen:

$$\cot L_{1.2} \sin \alpha'_{1.2} - \cot \sigma' \cos B_1 = \sin B_1 \cos \alpha'_{1.2} \tag{13}$$

und

$$\cos B_2 \sin L_{1.2} = \sin \sigma' \sin \alpha'_{1.2}, \tag{14}$$

welche sich auf das schon oben erwähnte sphärische Hilfsdreieck beziehen, einige Vereinfachungen vornehmen, erhalten wir:

$$\cot \alpha'_{1.2} - \cot \alpha_{1.2} = \frac{e^2 p_1 \cos B_1}{\sin \sigma' \sin \alpha'_{1.2}} \left(-1 + \frac{q_1 \cos \sigma'}{1 + e^2 p_1 q_1 \sin B_1}\right). \tag{15}$$

Zur weitern Vereinfachung der rechten Seite dieser Gleichung erinnern wir an die Formeln (1) S. 140 und (9) S. 146, wonach

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin 2B \sin \varDelta B + Gl_5 \\ &\text{und} \\ p_1 &= 2 \sin \frac{\varDelta B}{2} \cos B \,(1 + e^2 \sin B_1 \cos B + Gl_4), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wenn $\varDelta B$ als Gröfse 1. Ordnung betrachtet wird. Hieraus folgt

$$\frac{p_1}{\sin \sigma'} = \frac{\sin B_2 - \sin B_1}{\sin \sigma'} (1 + e^2 \sin B_1 \cos B + Gl_4);$$

man hat aber $\sin B_2 = \sin B_1 \cos \sigma' - \cos B_1 \sin \sigma' \cos \alpha'_{1.2}$, womit der vorstehende Ausdruck für $p_1 : \sin \sigma'$ übergeht in

$$\frac{p_1}{\sin \sigma'} = -\left(\cos B_1 \cos \alpha'_{1.2} + \sin B_1 \tan \frac{\sigma'}{2}\right)(1 + e^2 \sin B_1 \cos B + Gl_4). \tag{17}$$

Es ergiebt sich weiter mittelst der (16), wenn auch σ' als Gröfse 1. Ordnung betrachtet wird:

$$1 - \frac{q_1 \cos \sigma'}{1 + e^2 p_1 q_1 \sin B_1} = 2 \sin^2 \frac{\sigma'}{2} - 2e^2 \cos^2 B \sin^2 \frac{\varDelta B}{2} + Gl_5. \tag{18}$$

Die Gleichung (15) nimmt daher für kleine Werte von σ' die Form an:

$$\cot \alpha'_{1.2} - \cot \alpha_{1.2} = \frac{e^2 \sigma'^2 \cos B_1}{2 \sin \alpha'_{1.2}} \left(\cos B_1 \cos \alpha'_{1.2} + \frac{\sigma'}{2} \sin B_1\right) + Gl_6. \tag{19}$$

Für $\sin a'_{1.2}$ im Nenner darf man nun noch $\sin a_{1.2}$ setzen, denn es ist mit Rücksicht auf (12) und (14)

$$\csc a_{1.2} = \sqrt{1 + \cot^2 a_{1.2}}$$

$$= \csc a'_{1.2} \sqrt{1 + 2e^2 \cos B_1 \cos a'_{1.2} \frac{p_1}{\sin \sigma'} + e^4 \cos^2 B_1 \frac{p_1^2}{\sin^2 \sigma'}}$$

und daher jedenfalls $\csc a'_{1.2} = \csc a_{1.2}(1 + Gl_2)$, so lange σ' klein ist. Ebenso können wir mit Beibehaltung der Genauigkeit von (19) darin für $\cos a'_{1.2}$ und σ' bezw. $\cos a_{1.2}$ und $\frac{s}{a_0}$ setzen. Damit wird

$$\cot a'_{1.2} - \cot a_{1.2} = \frac{e^2 s^2 \cos B_1}{2 a_0^2 \sin a_{1.2}} \left(\cos B_1 \cos a_{1.2} + \frac{s}{2 a_0} \sin B_1\right) + Gl_6 . \quad (20)$$

Hieraus aber folgt nach (2) S. 31 unmittelbar:

$$\underset{\text{in Sek.}}{a'_{1.2} - a_{1.2}} = -\frac{1}{4} \varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin a_{1.2}\right) + Gl_6 . \quad (21)$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 folgt hieraus weiter:

$$\underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} - a_{2.1}} = -\frac{1}{4} \varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_2 \sin 2a_{2.1} + \frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \sin 2B_2 \sin a_{2.1}\right) + Gl_6 . \quad (22)$$

Diese Formeln kann man noch anders und zwar einfacher schreiben, indem man ein mittleres Azimut und eine mittlere Breite einführt. Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} \cos B_1 \sin a'_{1.2} &= -\cos B_2 \sin a'_{2.1} , \\ -\cos B_1 \cos a'_{1.2} &= \sin B_2 \sin \sigma' + \cos B_2 \cos a'_{2.1} \cos \sigma' \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

und identisch wegen $a' = \frac{1}{2}(a'_{1.2} + a'_{2.1}) - 90^0$:

$$-\cos B_1 \cos B_2 \sin 2a'$$

$$= \cos B_1 \sin a'_{1.2} \cdot \cos B_2 \cos a'_{2.1} + \cos B_1 \cos a'_{1.2} \cdot \cos B_2 \sin a'_{2.1} .$$

Eliminiert man hieraus rechter Hand $a'_{2.1}$ und $\cos B_2$ und beachtet, dafs $\cos B_1 \cos B_2 = \cos^2 B + Gl_2$ ist, so wird

$$\cos^2 B \sin 2a' = \cos^2 B_1 \sin 2a'_{1.2} + \frac{1}{2} \sigma' \sin 2B_1 \sin a'_{1.2} + Gl_2 . \quad (24)$$

Nun erkennt man leicht, dafs (21) und (22) in die folgende Gestalt gebracht werden können*):

---

*) Die Entwicklung (8) S. 26 zeigt dies ebenfalls ohne weiteres.

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{a'_{1.2} - a_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{a'_{2.1} - a_{2.1}} &= -\frac{1}{4}\varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \cos^2 B \sin 2a + Gl_6 \\ B &= \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \\ a &= \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} - 180^0). \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Hiernach ist für

$$s = 0{,}1\,a_0 \;= 640^{km} \qquad a'_{1.2} - a_{1.2} = 3{,}4'' \text{ im Max.}$$
$$s = 0{,}01\,a_0 = \;\;64^{km} \qquad a'_{1.2} - a_{1.2} = 0{,}034 \text{ im Max.}$$

§ 23. **Flächenwinkel der beiden Vertikalebenen und Abstand der Vertikalschnitte.**

Denkt man sich K'_2 (Fig. 8 S. 134) einerseits auf die Vertikalebene von P_1 nach P_2 d. i. auf die Ebene $P_1 P_2 K'_1$ projiciert, sowie andrerseits auf die Sehne, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Flächenwinkel ν als Winkel gegenüber der Projektionslinie von K'_2 auf $P_1\,P_2\,K'_1$ auftritt. Die Länge dieser Linie ist $K'_1\,K'_2 \cos U$, da $90^0 - U$ der Neigungswinkel der Erdaxe zur Vertikalebene $P_1\,P_2\,K'_1$ ist (Fig. 10 S. 137); dagegen ist der Abstand des Punktes K'_2 von der Sehne gleich $\varrho_n \cos \mu_{2.1}$, wenn $\varrho_n = P_2\,K'_2$ den Querkrümmungshalbmesser in P_2 und $\mu_{2.1}$ den Depressionswinkel der Sehne in P_2 bezeichnen. Man hat also, da nach (9) S. 137 $\cos U = \cos B_1 \sin a_{1.2}$ ist, in Strenge:

$$\sin \nu = \frac{K'_1\,K'_2 \,.\, \cos B_1 \sin a_{1.2}}{\varrho_n \cos \mu_{2.1}}. \tag{1}$$

S. 41 (9) und S. 168 (7), sowie S. 167 (4) geben aber:

$$\left.\begin{aligned} K'_1\,K'_2 &= \frac{a_0 e^2}{\sqrt{1-e^2}}(\sin \beta_1 - \sin \beta_2) = \delta\,\mathfrak{k} \cos \chi \\ \cos \chi &= \cos \mu_{1.2} \cos B_1 \cos a_{1.2} + \sin \mu_{1.2} \sin B_1\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Indem wir dies einsetzen, lassen wir zugleich eine Vernachlässigung in Voraussetzung kleiner Distanzen eintreten: Wir setzen im Nenner von (1) für $\cos \mu_{2.1}$ den nahezu gleichen Wert $\cos \mu_{1.2}$. Nach S. 167 (4) unterscheiden sich aber $\sin \mu_{1.2}$ und $\sin \mu_{2.1}$ nur im Faktor W, also um ein Glied der 4. Ordnung. Mit Rücksicht auf die Reihenentwicklung $\cos = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 + \cdots$ ist daher

$$\cos \mu_{2.1} = \cos \mu_{1.2}\,(1 + Gl_5).$$

Es wird nun aus (1) erhalten:

$$\sin \nu = \frac{\delta\,\mathfrak{k}}{2\varrho_n}(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \tan \mu_{1.2} \sin 2B_1 \sin a_{1.2} + Gl_5)\,. \tag{3}$$

Setzen wir noch $k = s\,(1 + Gl_2)$ und $\tan \mu_{1.2} = \frac{s}{2\varrho_a}(1 + Gl_2)$ und beachten, dafs nach S. 56 (2) ϱ_n für P_2 gleich ϱ_n für P_1 mal $(1 + Gl_3)$ ist, so folgt weiter:

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{in Sek.}}{v} = \frac{1}{2}\varrho''\frac{\delta s}{\varrho_n}\left(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \frac{s}{2\varrho_a}\sin 2B_1 \sin a_{1.2} + Gl_2\right) \\ \varrho_n \text{ Querkrümmungshalbmesser, } \varrho_a \text{ Krümmungshalbmesser im Azimut } a_{1.2}, \\ \text{beide für Punkt } P_1. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Wünscht man eine zu P_1 und P_2 symmetrische Formel, so kann man diese für kurze Distanzen leicht mit Rücksicht auf die Entwicklung am Schlusse des vorigen Paragraphen gewinnen. Danach ist:

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{in Sek.}}{v} = \frac{1}{2}\varrho''\frac{\delta s}{\varrho_n}(\cos^2 B \sin 2a + Gl_2) \\ B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2);\ a = \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} - 180^0) \\ \varrho_n \text{ Querkrümmungshalbmesser fürs Argument } B. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Hiernach ist für

$$s = 0{,}1\,a_0 \ = 640^{km} \quad v = 69''$$
$$s = 0{,}01\,a_0 = \ 64^{km}. \quad v = \ 7''.$$

Um von v zu $a'_{1.2} - a_{1.2}$ zu gelangen, genügt es, sich P_1 als Zentrum einer Kugel vom Radius 1 zu denken und das sphärische Dreieck, welches auf deren Oberfläche von den Schnitten der beiden Vertikalebenen und der in P_1 horizontalen Ebene gebildet wird, zu betrachten. Dieses Dreieck ist rechtwinklig; die beiden Katheten sind $(a_{1.2} - a'_{1.2})$ in der Horizontalebene und $\mu_{1.2}$, der Depressionswinkel in der Vertikalebene von P_1 nach P_2. Der Seite $(a_{1.2} - a'_{1.2})$ liegt Winkel v gegenüber. Der Cotangentensatz für 4 aufeinanderfolgende Stücke giebt nun sofort die strenge Formel:

$$\tan\,(a_{1.2} - a'_{1.2}) = \tan v \sin \mu_{1.2}\,. \quad (6)$$

Diese Formel giebt in Verbindung mit (1) und (2) auch das Vorzeichen der Differenz $a_{1.2} - a'_{1.2}$ (vergl. Fig. 8 S. 134), so lange man annehmen darf, dafs val. abs. $v < 90^0$ ist.

Ohne nunmehr auf die Herleitung des bereits bekannten Ausdrucks für $a_{1.2} - a'_{1.2}$ bei kurzen Distanzen weiter einzugehen, benutzen wir die Formel noch zu einer Schätzung des *Maximalabstandes der beiden Vertikalschnitte* von einander.

Legt man eine Ebene rechtwinklig zur Sehne, so schneidet dieselbe die Oberfläche des Ellipsoids in einer Ellipse, von der ein Ab-

schnitt zwischen die Vertikalschnitte fällt. Da nun dieser Bogenabschnitt, so lange wir eben nur kleine Entfernungen $P_1 P_2$ ins Auge fassen, nahezu normal zu den Vertikalschnitten liegt, kann man ihn als Abstand der Vertikalschnitte auffassen und als einen Kreisbogen berechnen, dessen Zentriwinkel ν und dessen Radius der Abstand der Vertikalschnitte von der Sehne an der betreffenden Stelle ist. Der Abstand ist somit ein Maximum, da wo dieser Radius ein Maximum ist, nämlich offenbar sehr nahe in der Mitte zwischen P_1 und P_2. Daselbst ist der Radius näherungsweise gleich $\frac{s^2}{8\varrho_a}$ und also der

$$\text{Max.-Abstand} = \frac{\delta s^3}{16\,\varrho_n \varrho_a} \cos^2 B \sin 2a + \cdots. \tag{7}$$

Hiernach ist für

$$s = 0{,}1\,a_0 \;= 640^{km} \text{ der Max.-Abst.} = 2{,}7^m$$

$$s = 0{,}01\,a_0 = \;\; 64^{km} \;\;\text{,, Max.-Abst.} = 0{,}003^m.$$

§ 24. **Änderung des astronomischen Azimuts und der Horizontalwinkel mit der Höhe der Objekte.** Schon am Schlusse von § 1 S. 135 wurde angedeutet, dafs die Vertikalebene von einem Punkte P_1, dem *Standpunkte*, nach einem Punkte P_2, dem *Objekte*, sich etwas dreht, falls man das Objekt P_2 aus der zu grunde liegenden Niveaufläche, dem Rotationsellipsoid, in der Lotlinie verschiebt. Die Verschiebung sei $+H_2$ nach aufsen. Alsdann treten in § 2 (3) S. 136 zu dem Ausdrucke

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x_2: & \text{der Zuwachs} & + H_2 \cos B_2 \cos L_{1.2} \\ \text{für } y_2: & \text{der Zuwachs} & + H_2 \cos B_2 \sin L_{1.2} \\ \text{für } z_2: & \text{der Zuwachs} & + H_2 \sin B_2, \end{array}\right\} \tag{1}$$

denn die Projektion von H_2 auf die Äquatorebene ist $H_2 \cos B_2$ und auf die Erdaxe $H_2 \sin B_2$. In § 3 (1) S. 138 ist nun zuzufügen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \xi_2: & + H_2 (\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1) \\ \text{für } \eta_2: & + H_2 \cos B_2 \sin L_{1.2}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

und es geht hiermit der Ausdruck (5) S. 139 in nachstehenden über, welcher daher nicht mehr die Cotangente des Azimuts $a_{1.2}$ nach einem in der Niveaufläche liegenden Objekt giebt, sondern diejenige des Azimuts $a^{(h)}_{1.2}$ für das um H_2 in der Lotlinie nach aufsen verschobene Objekt:

$$\cot a^{(h)}_{1.2} = \frac{(\cos B_2 \sin B_1 \cos L_{1.2} - \sin B_2 \cos B_1)(a_0 + H_2 W_2) + a_0 e^2 \cos B_1 \left(\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1} \sin B_1\right)}{\cos B_2 \sin L_{1.2} (a_0 + H_2 W_2)}. \tag{3}$$

Vergleicht man dies mit $\cot a_{1.2}$ nach (5) S. 139, so findet sich, dafs:

$$\cot a_{1.2}^{(h)} = \cot a_{1.2} - e^2 \frac{H_2 W_2 \cos B_1}{a_0 + H_2 W_2} \frac{\sin B_2 - \frac{W_2}{W_1} \sin B_1}{\cos B_2 \sin L_{1.2}}. \tag{4}$$

Nach S. 184 (10), S. 185 (14) und S. 185 (17), sowie mit einigen leicht ersichtlichen Vernachlässigungen folgt hieraus:

$$\cot a_{1.2}^{(h)} = \cot a_{1.2} + e^2 \frac{H_2 \cos B_1}{a_0 \sin a_{1.2}} \left(\cos B_1 \cos a_{1.2} + \frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \sin B_1 + Gl_2 \right), \tag{5}$$

und hiermit giebt S. 31 (2):

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{in Sek.}}{a_{1.2}^{(h)} - a_{1.2}} = -\frac{1}{2} \varrho'' e^2 \frac{H_2}{a_0} \left(\cos^2 B_1 \sin 2 a_{1.2}^{(h)} + \frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin a_{1.2}^{(h)} + Gl_2 \right), \\ H_2 \text{ die Höhe des Objekts über dem Rotationsellipsoid.} \end{array}\right\} \tag{6}$$

Es ist demnach für

$$H_2 = 640^m \qquad a_{1.2}^{(h)} - a_{1.2} = 0{,}069'' \text{ im Max.}$$
$$H_2 = 1280 \qquad a_{1.2}^{(h)} - a_{1.2} = 0{,}14 \text{ im Max.}$$
$$H_2 = 1920 \qquad a_{1.2}^{(h)} - a_{1.2} = 0{,}21 \text{ im Max.}$$

Während nun (vergl. S. 135) die Höhe des Standpunkts über dem Ellipsoid das Azimut und damit die Horizontalwinkel nicht beeinflufst, zeigt Vorstehendes, dafs die Höhe der Objekte von nicht unbeträchtlichem Einflusse sein kann. Der Betrag von s ist dabei, insofern es sich in der Praxis um gegenseitig sichtbare Punkte allein handelt, ziemlich einflufslos.

§ 25. **Der Sinussatz für Sehnen und Horizontalwinkel.** Um ein Dreiecksnetz von einer direkt gemessenen Grundlinie aus in seinen einzelnen Sehnen berechnen zu können, bedarf es wie bei der Kugel einer Reduktion der gemessenen Horizontalwinkel auf Sehnenwinkel nicht; man kann vielmehr direkt mit den Horizontalwinkeln rechnen.

Wir nennen im Sehnendreieck die Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und die in den Ecken A, B, C oder 1, 2, 3 gegenüberliegenden Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, welchen letzteren die Horizontalwinkel A, B, C entsprechen. Unsere Aufgabe ist es nun, aus der Gleichung

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \sin \mathfrak{A} : \sin \mathfrak{B} \tag{1}$$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit Hilfe der Horizontalwinkel zu eliminieren. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dafs die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ im Innern

des Sehnendreiecks gezählt werden und entsprechend die A, B, C, diese Winkel somit $< 180^0$ sind.

Die Dreiecksseiten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nehmen wir klein und im Verhältnis zu a_0 als Gröfsen 1. Ordnung, entsprechend der beabsichtigten Anwendung auf ein beobachtetes Dreiecksnetz.

Betrachten wir jetzt das sphärische Dreieck, welches die Vertikalebenen von A nach B und C und die Dreiecksebene auf einer Kugel, welche A zum Zentrum hat, bilden (Fig. 11), so ist

$$\frac{\sin \mathfrak{A}}{\sin A} = \frac{\cos \mu_{1.3}}{\sin \chi_{1.2}} = \frac{\cos \mu_{1.2}}{\sin \chi_{1.3}}. \qquad (2)$$

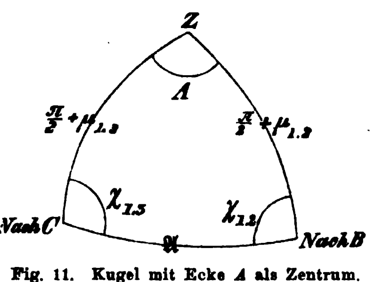


Fig. 11. Kugel mit Ecke A als Zentrum.

Hierin sind die χ die Neigungswinkel der Vertikalebenen zur Dreiecksebene in dem in der Figur angegebenen Sinne. Durch cyklische Vertauschung der Indices findet sich aus (2):

$$\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B} = \frac{\cos \mu_{2.1}}{\sin \chi_{2.3}} = \frac{\cos \mu_{2.3}}{\sin \chi_{2.1}} \qquad (3)$$

$$\frac{\sin \mathfrak{C}}{\sin C} = \frac{\cos \mu_{3.2}}{\sin \chi_{3.1}} = \frac{\cos \mu_{3.1}}{\sin \chi_{3.2}}. \qquad (4)$$

Hiermit giebt die Gleichung (1):

$$\mathfrak{a} \cos \mu_{2.1} \frac{\sin B}{\sin \chi_{2.3}} = \mathfrak{b} \cos \mu_{1.2} \frac{\sin A}{\sin \chi_{1.3}}.$$

Wird dies mit der aus Gleichung (4) folgenden Relation

$$\cos \mu_{3.2} \sin \chi_{3.2} = \cos \mu_{3.1} \sin \chi_{3.1} \qquad (5)$$

Seite für Seite multipliziert, so folgt:

$$\mathfrak{a} \cos \mu_{2.1} \cos \mu_{3.2} \sin B \frac{\sin \chi_{3.2}}{\sin \chi_{2.3}} = \mathfrak{b} \cos \mu_{1.2} \cos \mu_{3.1} \sin A \frac{\sin \chi_{3.1}}{\sin \chi_{1.3}}. \qquad (6)$$

Bei der weitern Umformung dieser Gleichung genügt es, zunächst die rechte Seite allein zu betrachten, indem beide Seiten durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, Index 1 und 2, u. s. f. in einander übergeführt werden können.

Wir setzen nun

$$\chi_{3.1} = \chi_{1.3} - \nu_b, \qquad (7)$$

wobei ν_b den Flächenwinkel der beiden an der Sehne $\mathfrak{b}$ liegenden Vertikalschnitte bedeutet; dann ist:

$$\mathfrak{b} \sin A \frac{\sin \chi_{3.1}}{\sin \chi_{1.3}} = \mathfrak{b} \sin A \cos \nu_b - \mathfrak{b} \sin A \sin \nu_b \cot \chi_{1.3}. \qquad (8)$$

Um nun für $\chi_{1.3}$ einen Wert zu erhalten, legen wir vom Mittelpunkt M_1 des dem Sehnendreieck (Fig. 12) umschriebenen Kreises eine Ebene normal zur Sehne $\mathfrak{b}$ und konstruieren in derselben ein bei M_1 rechtwinkliges Dreieck. Die Seiten desselben sind $M_1 Q$, ferner eine Normale $M_1 M_2$ zu der Sehnendreiecksebene und eine Normale $Q M_2$ zur Sehne $\mathfrak{b}$, welche Normale zugleich in der Vertikalebene von A nach C liegt. Dann ist der Winkel bei Q gleich $180^0 - \chi_{1.3}$ und

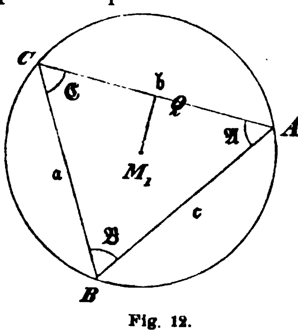


Fig. 12.

$$\cos \chi_{1.3} = - \frac{M_1 Q}{Q M_2}.$$

Für $M_1 Q$ ist $\frac{1}{2}\, \mathfrak{b} \cot \mathfrak{B}$ zu setzen, für $Q M_2$ aber, wenn wir statt des Ellipsoids uns eine Kugel vom Radius $a_0 (1 + Gl_2)$ durch ABC gelegt denken, einfach a_0. Hiermit wird allerdings $\cos \chi_{1.3}$ nicht in aller Strenge erhalten, jedenfalls aber bis auf ein Glied von der Ordnung $e^2 \frac{\mathfrak{k}}{a_0}$ genau, worin $\mathfrak{k}$ eine mittlere Sehnenlänge bezeichnet. Denn die Normalen des Ellipsoids und der passend gewählten Kugel werden nur höchstens um Glieder dieser Ordnung von einander abweichen (wie die Betrachtung des Ausdrucks für den Krümmungsradius zeigt), nur um ebensoviel aber auch die Winkel χ und ihre Cosinus für Ellipsoid und Kugel. Es ist also

$$\cos \chi_{1.3} = - \frac{\mathfrak{b} \cot \mathfrak{B}}{2 a_0} (1 + Gl_2). \qquad (9)$$

Führen wir für $\cos \chi_{1.3}$ in der Gleichung (8) den erhaltenen Wert (9) ein, setzen zugleich nach (2) $\sin A = \sin \mathfrak{A} \sin \chi_{1.3} \sec \mu_{1.2}$, sowie für $\mathfrak{b} \sin \mathfrak{A}$ den gleichwertigen Ausdruck $\mathfrak{a} \sin \mathfrak{B}$, so folgt:

$$\mathfrak{b} \sin A \frac{\sin \chi_{3.1}}{\sin \chi_{1.3}} = \mathfrak{b} \left\{ \sin A \cos \nu_b + \frac{\mathfrak{a}}{2 a_0} \sin \nu_b \cos \mathfrak{B} \sec \mu_{1.2} + Gl_6 \right\}. \qquad (10)$$

Die Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, der Indices 1 und 2, u. s. w. giebt hieraus für die linke Seite der Gleichung (6):

$$\mathfrak{a} \sin B \frac{\sin \chi_{3.2}}{\sin \chi_{2.3}} = \mathfrak{a} \left\{ \sin B \cos \nu_a + \frac{\mathfrak{b}}{2 a_0} \sin \nu_a \cos \mathfrak{A} \sec \mu_{2.1} + Gl_6 \right\}, \qquad (11)$$

$$\chi_{3.2} = \chi_{2.3} - \nu_a.$$

Die Gleichung (6) läfst sich mit Benutzung vorstehender Umformungen nunmehr in die Form bringen:

$$\mathfrak{a}\left\{\cos\mu_{2.1}\cos\mu_{3.2}\cos\nu_a\sin B-\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\cos\mu_{3.1}\sin\nu_b\cos\mathfrak{B}+Gl_6\right\}$$

$$=\mathfrak{b}\left\{\cos\mu_{1.2}\cos\mu_{3.1}\cos\nu_b\sin A-\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\cos\mu_{3.2}\sin\nu_a\cos\mathfrak{A}+Gl_6\right\}\cdot\quad(12)$$

Hierin ist zu setzen nach (4) S. 188 und mit Bestimmung der Vorzeichen nach Mafsgabe von (7) und (11), wobei man beachten kann, dafs das Innere des Sehnendreiecks (Fig. 12) rechter Hand liegt, wenn man die Peripherie $\mathfrak{abc}$ durchläuft:

$$\left.\begin{aligned}\underset{\text{in Sek.}}{\nu_a}&=-\varrho''\delta\left(\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\cos^2 B_3\sin 2a_{3.2}+\frac{\mathfrak{a}^2}{4a_0^2}\sin 2B_3\sin a_{3.2}\right)+Gl_5\\ \underset{\text{in Sek.}}{\nu_b}&=+\varrho''\delta\left(\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\cos^2 B_3\sin 2a_{3.1}+\frac{\mathfrak{b}^2}{4a_0^2}\sin 2B_3\sin a_{3.1}\right)+Gl_5.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Schreiben wir nun die Gleichung (12) wie folgt:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}=\frac{\sin A-\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\sin\nu_a\cos\mu_{3.2}\sec\mu_{1.2}\sec\mu_{3.1}\sec\nu_b\cos\mathfrak{A}+Gl_6}{\sin B-\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\sin\nu_b\cos\mu_{3.1}\sec\mu_{2.1}\sec\mu_{3.2}\sec\nu_a\cos\mathfrak{B}+Gl_6}\cdot\frac{\cos\mu_{3.1}\cos\mu_{1.2}\cos\nu_b}{\cos\mu_{3.2}\cos\mu_{2.1}\cos\nu_a},\quad(14)$$

so können wir hierin mit Rücksicht darauf, dafs im Zähler und Nenner bereits Glieder 6. Ordnung vernachlässigt und auch ν_a und ν_b nur bis auf Glieder 5. Ordnung entwickelt sind, für $\cos\mathfrak{A}$, welches gleich

$$\sin\mu_{1.2}\sin\mu_{1.3}+\cos\mu_{1.2}\cos\mu_{1.3}\cos A$$

ist, einfach $\cos A$ setzen und entsprechend für $\cos\mathfrak{B}$ einfach $\cos B$, da dies nur Fehler 6. Ordnung im Zähler und Nenner erzeugt. Ferner können wir mit gleichem Recht die Cosinus- und Secantenfaktoren von $\cos\mathfrak{A}$ und $\cos\mathfrak{B}$ gleich 1 und ebenso im letzten Teil von (14) $\cos\nu_b=1=\cos\nu_a$ nehmen. Hiermit erhält man aus dem Ausdruck (14):

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}=\frac{\sin A-\cos A\cdot\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\nu_a+Gl_6}{\sin B-\cos B\cdot\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\nu_b+Gl_6}\,\frac{\cos\mu_{3.1}}{\cos\mu_{3.2}}\,\frac{\cos\mu_{1.2}}{\cos\mu_{2.1}}.\quad(15)$$

§ 26. **Fortsetzung. Sinussatz zur Dreiecksberechnung.** Nach S. 174 (1) und (2) hat man:

$$\sin\mu_{3.1}=\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}W_3\left(1+e^2\cos^2 B_3\cos^2 a_{3.1}+\frac{e^2\mathfrak{b}}{2a_0}\sin 2B_3\cos a_{3.1}\right)+Gl_5$$

oder unter Einführung des Krümmungsmafses für Punkt C mit der geographischen Breite B_3 nach S. 59 § 15:

$$\sin\mu_{3.1} = \frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\sqrt{K_3}\left(1+\frac{1}{2}e^2\cos^2 B_3\cos 2\alpha_{3.1}+\frac{e^2\mathfrak{b}}{2a_0}\sin 2B_3\cos\alpha_{3.1}\right)+Gl_5.$$

Setzt man nun vorstehenden Ausdruck für $\sin\mu_{3.1}$ in die Reihe $\cos = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 - \frac{1}{8}\sin^4\cdots$, so erhält man für $\cos\mu_{3.1}$ nach einiger Reduktion:

$$\cos\mu_{3.1} = \left(1-\frac{\mathfrak{b}^2}{8a_0^2}K_3-\frac{\mathfrak{b}^4}{128a_0^4}K_3^2\right)$$
$$\times\left(1-\frac{e^2\mathfrak{b}^2}{8a_0^2}\cos^2 B_3\cos 2\alpha_{3.1}-\frac{e^2\mathfrak{b}^3}{8a_0^3}\sin 2B_3\cos\alpha_{3.1}\right)+Gl_6. \quad (1)$$

Die Vertauschung der Indices 1 und 2, u. s. w., giebt hieraus:

$$\cos\mu_{3.2} = \left(1-\frac{\mathfrak{a}^2}{8a_0^2}K_3-\frac{\mathfrak{a}^4}{128a_0^4}K_3^2\right)$$
$$\times\left(1-\frac{e^2\mathfrak{a}^2}{8a_0^2}\cos^2 B_3\cos 2\alpha_{3.2}-\frac{e^2\mathfrak{a}^3}{8a_0^3}\sin 2B_3\cos\alpha_{3.2}\right)+Gl_6. \quad (2)$$

Bestimmt man in gleicher Weise $\cos\mu_{2.1}$ und $\cos\mu_{1.2}$, so sieht man leicht, dafs

$$\frac{\cos\mu_{1.2}}{\cos\mu_{2.1}} = 1-\frac{e^2\mathfrak{c}^2}{8a_0^2}\left[\cos^2 B_1\cos 2\alpha_{1.2}-\cos^2 B_2\cos 2\alpha_{2.1}\right]+Gl_6. \quad (3)$$

Um diese Formel zu vereinfachen, benutzen wir die Relationen (23) S. 186:

$$\cos B_1\sin\alpha'_{1.2} = -\cos B_2\sin\alpha'_{2.1}$$
$$-\cos B_1\cos\alpha'_{1.2} = \sin B_2\sin\sigma'+\cos B_2\cos\alpha'_{2.1}\cos\sigma'.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf S. 148 (6):

$$\left.\begin{aligned}\cos B_1\sin\alpha_{1.2} &= -\cos B_2\sin\alpha_{2.1}+Gl_2,\\ \cos B_1\cos\alpha_{1.2} &= -\cos B_2\cos\alpha_{2.1}-\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin B_2+Gl_2\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und

$$\cos^2 B_1\cos 2\alpha_{1.2} = \cos^2 B_2\cos 2\alpha_{2.1}+\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin 2B_2\cos\alpha_{2.1}+Gl_2, \quad (5)$$

womit (3) übergeht in:

$$\frac{\cos\mu_{1.2}}{\cos\mu_{2.1}} = 1-\frac{e^2\mathfrak{c}^3}{8a_0^3}\sin 2B_2\cos\alpha_{2.1}+Gl_6. \quad (6)$$

Zur Umformung des aus (1) und (2) zu bildenden Quotienten betrachten wir zunächst den Quotienten:

$$\frac{1-\frac{1}{8}\mathfrak{b}_1^2-\frac{1}{128}\mathfrak{b}_1^4-\cdots}{1-\frac{1}{8}\mathfrak{a}_1^2-\frac{1}{128}\mathfrak{a}_1^4-\cdots}, \quad (7)$$

worin $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1$ bezw. $\mathfrak{b}\sqrt{K_3}:a_0$ und $\mathfrak{a}\sqrt{K_3}:a_0$ bezeichnen.

Die Multiplikation mit $\left(1 + \frac{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2}{16}\right)$ im Zähler und Nenner giebt hieraus mit gleicher Genauigkeit, nämlich bis auf Glieder 6. Ordnung:

$$\frac{1 + \frac{\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2}{16} - \frac{\mathfrak{a}_1^2 + 2\mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2}{128}\,\mathfrak{b}_1^2 + \cdots}{1 + \frac{-\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2}{16} - \frac{2\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2}{128}\,\mathfrak{a}_1^2 + \cdots}. \tag{8}$$

Es ist nun $\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2 = -2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \cos \mathfrak{A}$ oder, wenn man sich der Beziehung von $\cos \mathfrak{A}$ zu $\cos A$ erinnert (vergl. S. 193):

$$\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2 = -2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\left(\cos A\left[1 - \frac{\mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2}{8}\right] + \frac{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1}{4}\right) + Gl_6.$$

Hierin setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \sin A\left(1 + \frac{1}{8}\mathfrak{a}_1^2\right) = \varepsilon_a. \tag{9}$$

Es wird damit (ohne dafs in den Gliedern 6. Ordnung bedenkliche Faktoren auftreten):

$$\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2 = -4\varepsilon_a \cot A\left(1 - \frac{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2}{8}\right) - \frac{1}{2}\,\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{c}_1^2 + Gl_6$$

oder

$$\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2 = -4\varepsilon_a \cot A - \frac{1}{2}\,\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{c}_1^2 - \frac{(\mathfrak{a}_1^2 - \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2)(\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2)}{8} + Gl_6.$$

Hiermit ergiebt sich für den Zähler von (8):

$$1 - \frac{1}{4}\,\varepsilon_a \cot A + \frac{1}{128}\left(-\mathfrak{a}_1^4 - \mathfrak{b}_1^4 + \mathfrak{c}_1^4 - \mathfrak{a}_1^2\mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2\mathfrak{b}_1^2\right) + Gl_6. \tag{10}$$

Durch Vertauschung von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ folgt aus diesem Ausdruck der Nenner gleich:

$$1 - \frac{1}{4}\,\varepsilon_b \cot B + \frac{1}{128}\left(-\mathfrak{a}_1^4 - \mathfrak{b}_1^4 + \mathfrak{c}_1^4 - \mathfrak{a}_1^2\mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2\mathfrak{a}_1^2\right) + Gl_6, \tag{11}$$

wobei gesetzt ist:

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 \sin B\left(1 + \frac{1}{8}\,\mathfrak{b}_1^2\right) = \varepsilon_b. \tag{12}$$

Man bemerkt leicht, dafs die identischen Glieder 4. Ordnung im Zähler und Nenner weggelassen werden können und dafs dafür $\mathfrak{c}_1^2(\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2):256$ zugesetzt werden darf, weil dies nur einen kleinen Fehler 6. Ordnung giebt. Der Ausdruck (7) bezw. (8) geht alsdann über in:

$$\frac{1 - \frac{1}{4}\,\varepsilon_a \cot A\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right)}{1 - \frac{1}{4}\,\varepsilon_b \cot B\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right)} + Gl_6. \tag{13}$$

Es läfst sich aber auch noch zeigen, dafs ε_a und ε_b bis auf Glieder 6. Ordnung übereinstimmen. Nach (2) S. 191 ist nämlich zunächst:

$$\sin A = \sin \mathfrak{A} \sin \chi_{1.2} \sec \mu_{1.3} = \sin \mathfrak{A} \sin \chi_{1.2} \left(1 + \frac{1}{8} \mathfrak{b}_1^2\right) + Gl_4.$$

Hiermit wird erhalten für ε_a und sodann durch gehörige Vertauschung für ε_b:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2} \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \sin \mathfrak{A} \left(1 + \frac{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2}{8}\right) \sin \chi_{1.2} + Gl_4$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_1 \sin \mathfrak{B} \left(1 + \frac{\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2}{8}\right) \sin \chi_{2.1} + Gl_4.$$

Da $\mathfrak{b}_1 \sin \mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 \sin \mathfrak{B}$ ist, stimmen beide Ausdrücke bis auf $\sin \chi$ überein. Nun ist, wenn $\chi_{2.1} = \chi_{1.2} - \nu_c$ gesetzt wird:

$$\sin \chi_{1.2} = \sin \chi_{2.1} \cos \nu_c + \cos \chi_{2.1} \sin \nu_c;$$

der Unterschied der χ erzeugt daher hauptsächlich das anscheinend die 5. Ordnung habende Glied:

$$\frac{1}{2} \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \nu_c \sin \mathfrak{A} \cos \chi_{2.1}.$$

Setzt man aber hierin für $\mathfrak{c}_1 \sin \mathfrak{A}$ den gleichen Wert $\mathfrak{a}_1 \sin \mathfrak{C}$, so ist aus (9) S. 192 leicht zu entnehmen, dafs $\sin \mathfrak{C} \cos \chi_{2.1}$ nahe gleich $\left(-\frac{1}{2} \mathfrak{c}_1 \cos \mathfrak{C}\right)$ wird und da ν_c die 3. Ordnung hat, ist demnach auch jener Unterschied von der 6. Ordnung.

Somit ist zu (13), indem wir ε_a und ε_b nunmehr mit ε_3 bezeichnen:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon_3} = \left\{\begin{array}{l} = \frac{1}{2} \varrho'' \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{a_0^2} K_3 \sin A \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\mathfrak{a}^2}{a_0^2}\right) + Gl_6 \\ = \frac{1}{2} \varrho'' \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{a_0^2} K_3 \sin B \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\mathfrak{b}^2}{a_0^2}\right) + Gl_6. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Setzt man endlich alles in die Gleichung (15) des vorigen Paragraphen ein, so resultiert:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin A - \cos A \left\{\frac{\varepsilon_3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16 a_0^2}\right) + \frac{\mathfrak{a}}{2 a_0} \nu_a\right\} + Gl_6}{\sin B - \cos B \left\{\frac{\varepsilon_3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16 a_0^2}\right) + \frac{\mathfrak{b}}{2 a_0} \nu_b\right\} + Gl_6} \cdot F \qquad (15)$$

$$\log F = M \left\{\begin{array}{l} \frac{\mathfrak{a}^2}{8 a_0^2} e^2 \cos^2 B_3 \cos 2 a_{3.2} - \frac{\mathfrak{b}^2}{8 a_0^2} e^2 \cos^2 B_3 \cos 2 a_{3.1} \\ + \frac{\mathfrak{a}^3}{8 a_0^3} e^2 \sin 2 B_3 \cos a_{3.2} - \frac{\mathfrak{b}^3}{8 a_0^3} e^2 \sin 2 B_3 \cos a_{3.1} + \frac{\mathfrak{c}^3}{8 a_0^3} e^2 \sin 2 B_c \cos a_c + Gl_6 \end{array}\right\} \qquad (16)$$

$B_c = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \quad a_c = \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} \pm 180^0)$ Vorzeichen von $\cos a_c$ wie dasjenige von $\cos a_{1.2}$.

Multipliziert man die rechte Seite von (15) im Zähler und Nenner noch mit $\left(1 - \frac{1}{32}\varepsilon_3^2\right)$, so erhält man endlich:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin\left\{A - \frac{\varepsilon_3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right) - \frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\nu_a\right\} + Gl_6}{\sin\left\{B - \frac{\varepsilon_3}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right) - \frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\nu_b\right\} + Gl_6} \cdot F. \tag{17}$$

§ 27. **Der Sinussatz** lautet nach den Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen, wenn man noch Glieder 5. Ordnung vernachlässigt:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \dfrac{\sin\left\{A - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right) + \varrho' \frac{e^2\mathfrak{a}^2}{4a_0^2}\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{3.2}\right\} + Gl_5}{\sin\left\{B - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{16a_0^2}\right) - \varrho'' \frac{e^2\mathfrak{b}^2}{4a_0^2}\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{3.1}\right\} + Gl_5} \cdot F \\ \log F = M\left(\dfrac{e^2\mathfrak{a}^2}{8a_0^2}\cos^2 B_0 \cos 2\alpha_{3.2} - \dfrac{e^2\mathfrak{b}^2}{8a_0^2}\cos^2 B_0 \cos 2\alpha_{3.1} + Gl_5\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \begin{cases} = \frac{1}{2}\varrho'' \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{a_0^2} K_0 \sin A\left(1 + \frac{1}{8}\frac{\mathfrak{a}^2}{a_0^2}\right) + Gl_6 \\ = \frac{1}{2}\varrho'' \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{a_0^2} K_0 \sin B\left(1 + \frac{1}{8}\frac{\mathfrak{b}^2}{a_0^2}\right) + Gl_6. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{1}$$

Hierin ist B_0 eine mittlere Breite des Dreiecks und $K_0 : a_0^2$ das zugehörige Krümmungsmafs. Für $\alpha_{3.2}$ und $\alpha_{3.1}$ kann ein mittleres Azimut der betreffenden Seiten eingeführt werden.

Man hat aufserdem zu beachten, dafs in der 1. Formel (1) die in e^2 multiplizierten Glieder das Vorzeichen + für die von links nach rechts im Dreieckscontour nachfolgende Seite $\mathfrak{a}$, dagegen — für die vorangehende Seite $\mathfrak{b}$ haben. Dagegen ist es nicht nötig, wie bisher angenommen, sich auf Winkel $< 180^0$ zu beschränken; es genügt vielmehr, die Winkel allgemein nach (1) S. 71 zu bestimmen. Dies ergiebt sich daraus, dafs die (1) oben noch denselben Wert für das Verhältnis $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ergeben, wenn man $\mathfrak{a}$ als die $\mathfrak{b}$ vorangehende Seite auffafst und demgemäfs A und B mit ihren Supplementen zu 360^0 vertauscht. In $\log F$ korrespondieren die Vorzeichen mit $\log \mathfrak{a} - \log \mathfrak{b}$.

Die Formeln für $\mathfrak{b} : \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} : \mathfrak{a}$ gehen aus den (1) durch *cyklische* Vertauschung der Stücke des Dreiecks hervor, dabei behalten B_0, K_0 und (wie man leicht sieht) auch ε ihre Werte.

Setzt man $e^2 =$ null, so geht die (auf $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bezogene) 1. Formel (1) in die Formel (6) S. 108 über. Zugleich bedeutet alsdann ε den sphärischen Excefs (eventuell — 720^0). Die Frage, ob auch jetzt $\varepsilon = A + B + C - 180^0$ (eventuell $- 720^0$) bis auf Glieder 5. Ordnung ist, bleibt vorläufig noch eine offene.

Wir gehen jetzt dazu über, den Einflufs von e^2 auf den Ausdruck für $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ zu erörtern.

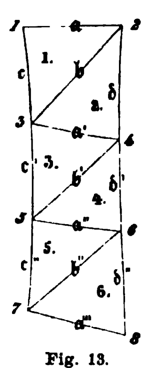
Zunächst zeigt sich, dafs die von e^2 unabhängigen Glieder 4. Ordnung selbst für Dreiecksseiten gleich $0{,}1 a_0$ gegen die von e^2 abhängigen Glieder erheblich zurücktreten.

Von den in e^2 multiplizierten Gliedern nun sind die mit A und B kombinierten am einflufsreichsten, sobald cot A und bezw. cot B gröfser als $\frac{1}{2}$ sind, denn alsdann beträgt der Einflufs eines dieser Glieder auf den $\log \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{k}$ die Sehnen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet, mehr als $M \cdot \frac{\mathfrak{k}^2}{8 a_0^2} e^2$ und dies ist augenscheinlich das Maximum des Einflusses eines der Glieder mit e^2 in $\log F$.

Für wohlgeformte Dreiecke, also solche, die von der gleichseitigen oder rechtwinkligen Form nicht erheblich abweichen, kann man die Cotangente der betreffenden Winkel rund gleich 1 setzen. Alsdann ist der Einflufs eines der Glieder 4. Ordnung, welche e^2 enthalten, im Maximum bei $\mathfrak{k} = 0{,}02 a_0$ gleich 3 Einheiten der 7. Decimalstelle des Logarithmus und bei $\mathfrak{k} = 0{,}01 a_0$ gleich 7 Einheiten der 8. Decimalstelle. Er vermindert sich aber sehr für den Fall, dafs das Dreieck entfernt vom Äquator liegt.

Der Einflufs dieser Glieder ist somit nur erheblich, wenn man die Seiten einer Dreieckskette von durchschnittlich 64^{km} Sehnenlänge einfach nach dem *Grunert*schen Satze mittelst 8ziffriger Logarithmen ermittelt. Die Vernachlässigung bewirkt, dafs die von einem Anfangspunkte aus berechneten geographischen Positionen auf verschiedenen Wegen durch das Sehnenpolygon hindurch in der 4. Decimale der Sekunden um einige Einheiten verschieden erhalten werden.

Hierbei ist der Umstand günstig, dafs *keine Anhäufung* der Glieder entsteht bei der successiven Berechnung von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'''$ u. s. w. in einer Kette von der Form der Fig. 13, die also näherungsweise sich aus Parallelogrammen bildet, — weil in dem Ausdruck $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}'}\right)\left(\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}'} \cdot \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}''}\right) \cdots$ der Einflufs für jede Parenthese nahezu null wird. Man wird dies leicht erkennen, wenn man die 1. Parenthese, die zum Viereck 1. 2. 3. 4 gehört, betrachtet und die Formeln (1) darauf anwendet, dabei aber erwägt, dafs nicht nur $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sondern auch $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}$ von links nach rechts auf einander folgende Seiten sind, und schliefslich annimmt, dafs $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, bezw. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ nahezu parallel seien.


Fig. 13.

(Die in den v und F enthaltenen Glieder 5. Ordnung kompensieren sich dagegen bei Berechnung einer Dreieckskette im allgemeinen *nicht* wesentlich; sie sind aber für mefsbare Dreiecke

überaus klein, wie leicht zu ersehen, sodaſs eine Anhäufung nicht sobald merkbar wird.)

Die Länge der ganzen Kette wird nach dem Vorigen in ihrem Logarithmus nur gerade so viel wie die $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{d}$ beeinfluſst.

Untersucht man nun noch, wie sich für sehr spitze oder stumpfe Dreiecke der Einfluſs der in Rede stehenden Glieder auf $\log \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ gestaltet, so ist sofort ersichtlich, daſs er weit mehr als für wohlgeformte Dreiecke ausmachen kann. Immerhin ist in Sekunden genommen und wenn man von ungewöhnlich groſsen meſsbaren Dreiecken absieht, also $\mathfrak{k} \leqq 0{,}01\, a_0$ setzt, der Betrag der zu A und B tretenden, von e^2 abhängigen Glieder 4. Ordnung nur einige Hundertstelsekunden, also weit geringer als derjenige der Beobachtungsfehler. Da man aber dergleichen Dreiecke nur anwendet bei der Aufstellung der Seitengleichungen*) in Verbindung mit wohlgeformten Dreiecken behufs Ausgleichung der Winkelmessungen, so wird voraussichtlich auch hier der schlieſsliche Einfluſs der Glieder auf den oben berechneten Betrag herabgedrückt.

Die weitläufige strenge Untersuchnng darüber, wie sich nach erfolgter Ausgleichung der Einfluſs der Glieder gestaltet, müssen wir uns hier versagen. Es sei nur bemerkt, daſs in Vierecken von nahezu parallelogrammförmiger Gestalt wie 1. 2. 3. 4 Fig. 13 die Seitengleichungen von den Gliedern mit e^2 nicht wesentlich beeinfluſst werden. Denn die Seitengleichung läuft in jeder Form auf die Gleichsetzung der beiden Werte für das Verhältnis $\mathfrak{a} : \mathfrak{a}'$ hinaus, welche mit Hilfe der beiden Diagonalen sich berechnen. Für jeden dieser Werte ist aber, wie oben bemerkt, der Einfluſs nahezu null, falls $\mathfrak{a}$ gleich und parallel $\mathfrak{a}'$ ist.

Nicht unerwähnt wollen wir lassen, daſs die Form des Ausdrucks für $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ die Unmöglichkeit andeutet, ein Sehnendreieck eines Rotationsellipsoids allgemein als Kugelsehnendreieck bei gehöriger Reduktion der Horizontalwinkel zu berechnen. Dies bestätigt auch der Versuch, wenn man mittelst der Formel $\cos A = -\tan \mu_{1.2} \tan \mu_{1.3} + \sec \mu_{1.2} \sec \mu_{1.3} \cos \mathfrak{A}$ zunächst $\cos A$ nach Potenzen von e^2 darstellt und als Ausgangswerte für $\mu_{1.2}$ und $\mu_{1.3}$ Werte, die einer Kugel mit dem Radius $(a_0 : \sqrt{K_0})$ entsprechen, einführt. Gehört zu diesen Ausgangswerten der Horizontalwinkel A', so ist es eben nicht möglich, aus $\cos A - \cos A'$ eine allgemein für jedes A gültige Formel abzuleiten, welche $A - A'$ giebt. Ursache ist, daſs für sehr stumpfe Dreiecke der Radius des umschriebenen Kreises gröſser als $(a_0 : \sqrt{K_0})$ werden kann. Es läſst sich dann das Dreieck auf der gewählten Kugel gar nicht unterbringen.

*) Die Seitengleichungen heiſsen jetzt besser *Sehnengleichungen*. Sie bilden sich auf dieselbe Art wie in sphärischen Figuren. Vergl. dazu Verfassers *Ausgleichungsrechnung* S. 323 u. ff.



§ 28. **Zahlenbeispiel III.** *Bremiker* leitet in seinen *Studien* ... S. 17 und 28 aus den geographischen Positionen dreier Orte die nachstehenden Horizontalwinkel und Sehnen eines Dreiecks ab:

		Azimut a.	Horizontalwinkel.	log $\mathfrak{k}$ in Metern.
Berlin	K	239° 33′ 0,9324″	95° 19′ 4,6513″	log KW = 5,8905264.742
	W	334 52 5,5837		
Königsberg	W	23 11 41,9353	42 4 27,6453	log WB = 5,7180944.366
	B	65 16 9,5806		
Wien	B	157 10 6,9817	42 48 6,9048	log BK = 5,7241345.725
	K	199 58 13,8865		
			Summa = 180° 11′ 39,2014″	

	Geographische Breite.	Länge.
Berlin	52° 30′ 16,7″	0° 0′ 0″
Königsberg	54 42 50,6	7 6 0 östlich
Wien	48 12 35,5	2 59 6 östlich

Diese Zahlen entsprechen den *Bremiker*schen Angaben *nicht* für die Linie BK, wofür die Angaben des Zahlenbeispiels I S. 158 eingeführt wurden. Aufserdem ist log WB gegen *Bremikers* Angabe um 28 Einheiten der 10. Stelle vermindert. Nachgerechnet und übereinstimmend gefunden sind log KW und die Differenzen der Endazimute für jede der beiden Linien WB und KW.

Indem wir die Bezeichnungen unsrer Formeln einführen, setzen wir:

$\log \mathfrak{a} = 5{,}7180944.4$	$A = 42^0\, 4'\, 27{,}645''$	$B_1 = 54^0\, 43'$	Königsb. = A
$\log \mathfrak{b} = 5{,}7241345.7$	$B = 42\; 48\;\; 6{,}905$	$B_2 = 48\;\; 13$	Wien = B
$\log \mathfrak{c} = 5{,}8905264.7$	$C = 95\; 19\;\; 4{,}651$	$B_3 = 52\;\; 30$	Berlin = C

$a_{3.2} = 334^0\; 52'$		$\log \frac{M}{8a_0^2} = 2{,}125-10$
$a_{3.1} = 239\;\; 33$	$\log \frac{\varrho'' e^2}{4a_0^2} = 8{,}927-20$	$\log \frac{Me^2}{8a_0^2} = 9{,}950-20$
$a_{2.1} = 199\;\; 58$	$\log \frac{\varrho'' e^2}{8a_0^3} = 1{,}821-30$	$\log \frac{Me^2}{8a_0^3} = 3{,}145-20$

(Für Einh. der 7. Dec.)

Bei der Berechnung von $\log \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ berücksichtigen wir auch die hier wegen der ungewöhnlichen Gröfse des Dreiecks sehr merklichen Glieder 5. Ordnung.

Zunächst ist ε nach *Formel* (14) S. 196 zu berechnen. Dazu hat man mittelst $\log W$ fürs Argument B_3 nach (3) S. 59 § 14:

$$\log K_3 = 9{,}999252-10$$

und hieraus mittelst der 1. Formel (14):

$$\left\{\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{2}\,\varrho''\,\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{a_0^2}\,K_3\sin A\right) &= 2{,}844159\\ +\,M.\frac{1}{8}\,\frac{\mathfrak{a}^2}{a_0^2} &= +\quad 365\end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log \varepsilon_3} = 2{,}844524 \qquad \varepsilon_3 = 699{,}076''.$$

Dasselbe giebt die Rechnung mit $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ nach der 2. Formel (14). Mit diesem Wert von ε_3 wird nun

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varepsilon_3}{4} &= 174{,}769''\\ +\frac{\varepsilon_3\,\mathfrak{c}^2}{64\,a_0^2} &= +\,0{,}163\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{4}\left(1+\frac{\mathfrak{c}^2}{16\,a_0^2}\right) = 174{,}932''.$$

Man hat weiter zur Berechnung der von ν_a und ν_b abhängigen Glieder nach den *Formeln* (13) S. 193:

$\log \sin 2\alpha_{3.2} = 9{,}886_n-10$	$\log \sin \alpha_{3.2} = 9.628_n-10$	$\log \cos^2 B_3 = 9{,}569-10$
$\log \sin 2\alpha_{3.1} = 9{,}941\;-10$	$\log \sin \alpha_{3.1} = 9.936_n-10$	$\log \sin 2B_3 = 9{,}985-10$

und hieraus zu *Formel* (17) S. 197:

$$\begin{aligned}-\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\,\nu_a &= +\left(\frac{\varrho'' e^2}{4a_0^2}\cos^2 B_3\right)\mathfrak{a}^2\sin 2\alpha_{3.2}\\ &\quad+\left(\frac{\varrho'' e^2}{8a_0^3}\sin 2B_3\right)\mathfrak{a}^3\sin\alpha_{3.2} = -\,0{,}658''-0{,}039''\\ -\frac{\mathfrak{b}}{2a_0}\,\nu_b &= -\left(\frac{\varrho'' e^2}{4a_0^2}\cos^2 B_3\right)\mathfrak{b}^2\sin 2\alpha_{3.1}\\ &\quad-\left(\frac{\varrho'' e^2}{8a_0^3}\sin 2B_3\right)\mathfrak{b}^3\sin\alpha_{3.1} = -\,0{,}768''+0{,}083''.\end{aligned}$$

Es ist daher

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{\sin(42^\circ\,4'\,27{,}645''-2'\,54{,}932''-0{,}697'')}{\sin(42^\circ\,48'\,6{,}905''-2'\,54{,}932''-0{,}685'')}\cdot F$$

und also

$$\log\mathfrak{a}-\log\mathfrak{b} = 9{,}8257259.7-9{,}8317680.2+\log F.$$

Für $\log F$ hat man nach *Formel* (16) S. 196:

$\log\cos 2a_{3.2} = 9{,}806 - 10$	$\log\cos a_{3.2} = 9{,}957 - 10$	$\log\cos a_c = 9{,}969 - 10$
$\log\cos 2a_{3.1} = 9{,}687_n - 10$	$\log\cos a_{3.1} = 9{,}705_n - 10$	$\log\sin 2B_c = 9{,}989 - 10$

$$\left\{\begin{array}{lll} + \left(\frac{Me^2}{8a_0^2}\cos^2 B_3\right)\mathfrak{a}^2\cos 2a_{3.2} & = + & 5.77 \text{ Einh. d. 7. Dec.} \\ - \left(\frac{Me^2}{8a_0^2}\cos^2 B_3\right)\mathfrak{b}^2\cos 2a_{3.1} & = + & 4.51 \quad " \quad " \\ + \left(\frac{Me^2}{8a_0^3}\sin 2B_3\right)\mathfrak{a}^3\cos a_{3.2} & = + & 1.74 \quad " \quad " \\ - \left(\frac{Me^2}{8a_0^3}\sin 2B_3\right)\mathfrak{b}^3\cos a_{3.1} & = + & 1.02 \quad " \quad " \\ + \left(\frac{Me^2}{8a_0^3}\sin 2B_c\right)\mathfrak{c}^3\cos a_c & = + & 5.95 \quad " \quad " \end{array}\right.$$

$$\log F = +\,19.0;$$

hiermit ist:

$$\log\mathfrak{a} - \log\mathfrak{b} = 9{,}9939598.5 - 10,$$

bis auf 1 Einheit mit den Angaben *Bremikers* übereinstimmend.

Vertauscht man in den Formeln $\mathfrak{abc}$ mit $\mathfrak{bca}$, 1.2.3 mit 2.3.1, u. s. f., so erhält man die Formeln zur Berechnung von $\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$. Die Rechnung giebt hier:

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \frac{\sin(42^0\,48'\,6{,}905'' - [2'\,54{,}683'' + 0{,}073''] + [0{,}604'' + 0{,}085''])}{\sin(95^0\,19'\,4{,}651'' - [2'\,54{,}683'' + 0{,}073''] - [1{,}239'' + 0{,}115''])}\,F$$

$$\log\mathfrak{b} - \log\mathfrak{c} = 9{,}8317715.5 - 9{,}9981609.9 + \log F$$

$$\log F = (-5.43 - 12.42) + (0.78 - 5.69 - 1.79) = -24.5 \text{ Einh. d. 7. Dec.},$$

somit:

$$\log\mathfrak{b} - \log\mathfrak{c} = 9{,}8336081.1 - 10,$$

das ist nur um 1 Einheit der 8. Decimalstelle zu grofs gegen *Bremikers* Angabe; eine in der That genügende Übereinstimmung, weil die vernachlässigten Glieder 6. Ordnung recht wohl die 8. Decimale ein wenig beeinflussen können.

§ 29. Die Summe der Horizontalwinkel über einem Sehnendreieck.

Wir denken uns um den Mittelpunkt des Rotationsellipsoids eine konzentrische Kugel gelegt und alle Vertikalen des Ellipsoids parallel in den Mittelpunkt verschoben.

Dann entsprechen den 3 Punkten *A*, *B*, *C* des Ellipsoids 3 Punkte *A'*, *B'*, *C'* der Kugel mit denselben geographischen Breiten und Längen.

Bezeichnet man die Azimute der Vertikalschnitte auf der Kugel mit einem ′, so ist nun nach S. 151 (4) für ein Sehnendreieck, dessen Seiten im Verhältnis zu a_0 Gröſsen 1. Ordnung sind:

$$\left.\begin{aligned} a_{2.1} - a_{1.2} &= a'_{2.1} - a'_{1.2} + Gl_7 \\ a_{1.3} - a_{3.1} &= a'_{1.3} - a'_{3.1} + Gl_7 \\ a_{3.2} - a_{2.3} &= a'_{3.2} - a'_{2.3} + Gl_7 . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Glieder 7. Ordnung hängen ab von der 4. Potenz der Excentricität e und der 3. Potenz der Entfernung und geben für Seitenlängen $= 0{,}2\,a_0$ erst wenige Tausendstelsekunden, für Seitenlängen $= 0{,}1\,a_0$ aber nur wenige Zehntausendstelsekunden.

Addiert man die (1) Seite für Seite und bedenkt, daſs die Horizontalwinkel auf dem Ellipsoid und der Kugel bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= a_{1.3} - a_{1.2} \qquad & A' &= a'_{1.3} - a'_{1.2} \\ B &= a_{2.1} - a_{2.3} \qquad & B' &= a'_{2.1} - a'_{2.3} \\ C &= a_{3.2} - a_{3.1} \qquad & C' &= a'_{3.2} - a'_{3.1} , \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

so ergiebt sich sofort die bemerkenswerte Gleichung:

$$A + B + C = A' + B' + C' + Gl_7 . \tag{3}$$

Nennen wir $(A + B + C - 180^0)$ den Exceſs der Horizontalwinkelsumme des Sehnendreiecks, so ist mithin innerhalb der angegebenen Grenzen und der angegebenen Genauigkeit:

der Exceſs der Horizontalwinkelsumme des Sehnendreiecks gleich dem Exceſs des Kugeldreiecks.

Der Radius der Kugel ist hierbei gleichgültig; man wird aber aus andern Gründen am besten dafür $a_0 : \sqrt{K_0}$ nehmen, wobei K_0 zu

$$B_0 = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + B_3) \tag{4}$$

gehört und nach S. 59 aus der Formel folgt:

$$K_0 = \frac{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^2}{1 - e^2} = \frac{W_0^{\,4}}{1 - e^2} . \tag{5}$$

Mit Hilfe dieses Radius und der in den §§ 7 bis 11 dieses Kapitels angegebenen Formeln kann man aus den Stücken des Sehnendreiecks auf dem Ellipsoid diejenigen des Dreiecks auf der Kugel ermitteln, d. h. $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, A', B', C'. Es genügt dabei vollkommen, nur die Glieder bis zur 5. Ordnung zu berücksichtigen, um schlieſslich den Exceſs bis auf Glieder 6. Ordnung zu erhalten.

Nach § 10 S. 155 ist insbesondere für die Sehne zwischen B und C:

$$\mathfrak{a} = 2\sin\frac{\sigma'_{2.3}}{2}\left\{\frac{a_0\,(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_a}} : (1 - e^2 + e^2\cos^2 B_a\cos^2 a_a + Gl_4)\right\}, \quad (6)$$

$$B_a = \frac{1}{2}(B_2 + B_3),\ a_a = \frac{1}{2}(a_{2.3} + a_{3.2} \pm 180^0), \quad (7)$$

wobei es gleichgültig ist, ob man rechter Hand mit den Azimuten auf der Kugel oder dem Ellipsoid rechnet, weil diese nur um kleine Glieder 2. Ordnung von einander abweichen.

Andrerseits hat man für die Sehne zwischen B' und C':

$$\mathfrak{a}' = 2\sin\frac{\sigma'_{2.3}}{2}\frac{a_0}{\sqrt{K_0}} = 2\sin\frac{\sigma'_{2.3}}{2}\frac{a_0\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B_0},$$

und es ist daher:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_a}}{1-e^2\sin^2 B_0}\left(1 - \frac{1}{2}e^2 + e^2\cos^2 B_a\cos^2 a_a + Gl_4\right)$$

oder in weiterer Entwicklung:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = 1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 B_a\cos 2a_a + e^2(\sin^2 B_0 - \sin^2 B_a) + Gl_4. \quad (8)$$

Es ergiebt sich ferner für die Horizontalwinkel, insbesondere den Winkel B aus den Relationen (2):

$$B' - B = (a'_{2.1} - a_{2.1}) - (a'_{2.3} - a_{2.3}), \quad (9)$$

und hierfür hat man nach (2) und (3) S. 157 u. 158:

$$B' - B = \frac{1}{2}e^2\cos B_2\left\{\cos B_3\sin 2a_a - \cos B_1\sin 2a_c\right\} + Gl_4, \quad (10)$$

wenn man setzt:

$$a_c = \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} \pm 180^0). \quad (11)$$

Hiernach lassen sich die Seiten und die Horizontalwinkel des Kugeldreiecks finden (wobei für $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ in (8) und für A und C in (10) selbstverständlich die gehörigen Vertauschungen stattzufinden haben). In Bezug auf die Bestimmung des Excesses betrachten wir nun den wichtigsten Fall der Bestimmung aus 2 Sehnen und dem Zwischenwinkel.

§ 30. **Excefs aus 2 Sehnen und dem zwischenliegenden Horizontalwinkel.** Als Sehnen nehmen wir $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{c}'$, dazu als Winkel B' und erhalten nach (6) S. 109 für den Excefs, wobei derselbe negativ gerechnet ist, falls die Horizontalwinkel $> 180^0$ sind:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'}{2a_0^2} K_0 \sin B' \left(1 + \frac{\mathfrak{b}'^2}{8a_0^2} K_0 + Gl_4\right). \tag{1}$$

Hierzu ist nach (8) des vorigen Paragraphen, wenn zugleich $e^2 \cos^2 B_a$ mit $e^2 \cos B_2 \cos B_3$ vertauscht wird, was nur einen Fehler 4. Ordnung giebt:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos B_2 \cos B_3 \cos 2a_a + e^2 (\cos^2 B_a - \cos^2 B_0) + Gl_4. \tag{2}$$

Um dies weiter zu entwickeln, betrachten wir zunächst das 1. Glied mit e^2 rechter Hand. Es ist identisch:

$$\cos 2a_a = -\cos (a_{2.3} + a_{3.2}) = (-\cos a_{2.3} \cos a_{3.2} + \sin a_{2.3} \sin a_{3.2}).$$

Nach (4) S. 194 hat man aber bei gehöriger Vertauschung der Indices u. s. f:

$$\left.\begin{aligned} \cos B_3 \sin a_{3.2} &= -\cos B_2 \sin a_{2.3} + Gl_2 \\ \cos B_3 \cos a_{3.2} &= -\cos B_2 \cos a_{2.3} - \frac{\mathfrak{a}}{a_0} \sin B_2 + Gl_2; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

substituiert man dies in der vorigen, mit $\cos B_2 \cos B_3$ multiplizierten Identität, so folgt:

$$\cos B_2 \cos B_3 \cos 2a_a = \cos^2 B_2 \cos 2a_{2.3} + \frac{\mathfrak{a}}{2a_0} \sin 2B_2 \cos a_{2.3} + Gl_2.$$

Dies setzen wir im 2. Gliede rechter Hand von (2) ein; zugleich aber im 3. Gliede:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 B_2 &= \cos^2 B_0 - \sin 2B_0 (B_2 - B_0) + Gl_2 \\ \sin 2B_2 &= \sin 2B_0 + Gl_1 \\ \cos^2 B_a = \cos^2 \frac{B_2 + B_3}{2} &= \cos^2 B_0 - \sin 2B_0 \left(\frac{B_2 + B_3}{2} - B_0\right) + Gl_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

womit sich ergiebt:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_0 \cos 2a_{2.3}$$

$$+ \frac{1}{2} e^2 \sin 2B_0 \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{a}}{2a_0} \cos a_{2.3} - \frac{B_2 - B_1}{3} (2 + \cos 2a_{2.3}) \\ + \frac{B_2 - B_3}{3} (1 - \cos 2a_{2.3}) \end{aligned}\right\} + Gl_4. \tag{5}$$

Aus Formel (2) S. 167 entnimmt man nun leicht, dafs es zulässig ist, zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} (B_2 - B_1) \cos B_0 &= \frac{\mathfrak{c}}{a_0} \cos B_0 \cos a_{2.1} + Gl_2 \\ (B_2 - B_3) \cos B_0 &= \frac{\mathfrak{a}}{a_0} \cos B_0 \cos a_{2.3} + Gl_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wobei die Glieder 2. Ordnung für jede geographische Lage der Punkte kleine Werte haben. Damit wird endlich:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_0 \cos 2\alpha_{2.3}$$

$$+\frac{1}{2} e^2 \sin 2B_0 \left\{\frac{\mathfrak{a}}{a_0} \cos\alpha_{2.3}\left[\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\cos 2\alpha_{2.3}\right] - \frac{\mathfrak{c}}{a_0}\cos\alpha_{2.1}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos 2\alpha_{2.3}\right]\right\} + Gl_4 \quad (7)$$

und durch Vertauschung von Index 3 und 1, u. s. f., hieraus:

$$\frac{\mathfrak{c}'}{\mathfrak{c}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_0 \cos 2\alpha_{2.1}$$

$$+\frac{1}{2} e^2 \sin 2B_0 \left\{\frac{\mathfrak{c}}{a_0} \cos\alpha_{2.1}\left[\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\cos 2\alpha_{2.1}\right] - \frac{\mathfrak{a}}{a_0}\cos\alpha_{2.3}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos 2\alpha_{2.1}\right]\right\} + Gl_4. \quad (8)$$

Es ist nun weiter durch Einführung von (10) S. 204 in die Identität $\sin B' = \sin B \cos (B' - B) + \cos B \sin (B' - B)$:

$$\left.\begin{array}{c}\sin B' = \sin B + \cos B\,(B' - B) + Gl_4 \\ B = \alpha_{2.1} - \alpha_{2.3},\end{array}\right\} \quad (9)$$

$$B' - B = \frac{1}{2} e^2 \cos B_2 \left\{\cos B_3 \sin 2\alpha_a - \cos B_1 \sin 2\alpha_c\right\} + Gl_4.$$

Die Formeln (3) zeigen aber, dafs man setzen kann:

$$\cos B_2 \cos B_3 \sin 2\alpha_a = \cos^2 B_2 \sin 2\alpha_{2.3} + \frac{\mathfrak{a}}{2a_0} \sin 2B_0 \sin \alpha_{2.3} + Gl_2,$$

wofür man mit Rücksicht auf die 1. Gleichung (4) und die (6) schreiben darf:

$$\cos B_2 \cos B_3 \sin 2\alpha_a$$

$$= \cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{2.3} - \sin 2B_0 \left\{\sin 2\alpha_{2.3}\left[\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\cos\alpha_{2.3} + \frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\cos\alpha_{2.1}\right] - \frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\sin\alpha_{2.3}\right\} + Gl_2.$$

Die Vertauschung der Indices 1 und 3, u. s. f., giebt hieraus zunächst:

$$\cos B_2 \cos B_1 \sin 2\alpha_c$$

$$= \cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{2.1} - \sin 2B_0 \left\{\sin 2\alpha_{2.1}\left[\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\cos\alpha_{2.3} + \frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\cos\alpha_{2.1}\right] - \frac{\mathfrak{c}}{2a_0}\sin\alpha_{2.1}\right\} + Gl_2.$$

Unter Benutzung der letzten beiden Formeln erhält man endlich nach einiger Reduktion:

$$B' - B = \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_0 (\sin 2\alpha_{2.3} - \sin 2\alpha_{2.1})$$

$$+\frac{1}{2} e^2 \sin 2B_0 \left\{\begin{array}{c}\left[\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\cos\alpha_{2.3} + \frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\cos\alpha_{2.1}\right](\sin 2\alpha_{2.1} - \sin 2\alpha_{2.3}) \\ + \left[\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\sin\alpha_{2.3} - \frac{\mathfrak{c}}{2a_0}\sin\alpha_{2.1}\right]\end{array}\right\} + Gl_4. \quad (10)$$

Die Formeln (7) bis (10) geben nun:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\sin B' = \sin B + \frac{1}{2}e^2\cos^2 B_0 &\left\{\begin{aligned} &\sin(a_{2.1}-a_{2.3})(\cos 2a_{2.3}+\cos 2a_{2.1}) \\ &+\cos(a_{2.1}-a_{2.3})(\sin 2a_{2.3}-\sin 2a_{2.1})\end{aligned}\right\} \\
-\frac{1}{2}e^2\sin 2B_0 \left\{\begin{matrix}\text{wie}\\ \text{vorher}\end{matrix}\right\}&\left(\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\cos a_{2.3}+\frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\cos a_{2.1}\right) \\
+\frac{1}{2}e^2\sin 2B_0 &\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\mathfrak{a}}{6a_0}\cos a_{2.3}+\frac{\mathfrak{c}}{6a_0}\cos a_{2.1}\right]\sin(a_{2.1}-a_{2.3}) \\ &+\left[\frac{\mathfrak{a}}{2a_0}\sin a_{2.3}-\frac{\mathfrak{c}}{2a_0}\sin a_{2.1}\right]\cos(a_{2.1}-a_{2.3})\end{aligned}\right\} + Gl_4 .
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Da aber identisch

$$(\cos 2a_{2.3}+\cos 2a_{2.1}) = 2\cos(a_{2.3}+a_{2.1})\cos(a_{2.3}-a_{2.1})$$

und ferner

$$(\sin 2a_{2.3}-\sin 2a_{2.1}) = 2\cos(a_{2.3}+a_{2.1})\sin(a_{2.3}-a_{2.1}),$$

so verschwindet die hierin zweimal auftretende geschlungene Parenthese. Im letzten allein übrig bleibenden Teil setzen wir für die grofse Parenthese:

$$\frac{\mathfrak{a}}{6a_0}\Big(\cos a_{2.3}\sin(a_{2.1}-a_{2.3})+\sin a_{2.3}\cos(a_{2.1}-a_{2.3})\Big)+\frac{\mathfrak{a}}{3a_0}\sin a_{2.3}\cos B$$

$$+\frac{\mathfrak{c}}{6a_0}\Big(\cos a_{2.1}\sin(a_{2.1}-a_{2.3})-\sin a_{2.1}\cos(a_{2.1}-a_{2.3})\Big)-\frac{\mathfrak{c}}{3a_0}\sin a_{2.1}\cos B,$$

welcher Ausdruck sich in nachstehenden zusammenziehen läfst:

$$\frac{\mathfrak{a}}{6a_0}\sin a_{2.1}-\frac{\mathfrak{c}}{6a_0}\sin a_{2.3}+\frac{1}{3}\cos B\left(\frac{\mathfrak{a}}{a_0}\sin a_{2.3}-\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin a_{2.1}\right).$$

Hiermit geht (1) über in die Formel:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho''\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2a_0^2}K_0\left\{\sin B\left(1+\frac{\mathfrak{b}^2}{8a_0^2}K_0\right)+E\right\} \\
E &= +\frac{1}{12}e^2\sin 2B_0\left(\frac{\mathfrak{a}}{a_0}\sin a_{2.1}-\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin a_{2.3}+2\cos B\left[\frac{\mathfrak{a}}{a_0}\sin a_{2.3}-\frac{\mathfrak{c}}{a_0}\sin a_{2.1}\right]\right)+Gl_6 .
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Man hat für diese Formel zu beachten, dafs B den Horizontalwinkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, B_0 aber die mittlere geographische Breite bezeichnet.

Diese Formel läfst sich aber auch noch in andere Gestalt bringen; da nämlich $\cos\mathfrak{B} = \sin\mu_{2.1}\sin\mu_{2.3}+\cos\mu_{2.1}\cos\mu_{2.3}\cos B$, so ist:

$$\cos B = \cos\mathfrak{B} + Gl_2 = \frac{\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2}{2\mathfrak{a}\mathfrak{c}} + Gl_2 . \quad (13)$$

Mit Einführung dieses Wertes ergiebt sich für die runde, in $\mathfrak{a}\mathfrak{c} : a_0^2$ multiplizierte Parenthese von E in (12) die Relation:

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{a_0^2}\left(\cdot\cdot\right) = \frac{1}{6a_0^3}\left(\mathfrak{a}^3 \sin a_{2.3} - \mathfrak{c}^3 \sin a_{2.1} + [\mathfrak{c} \sin a_{2.1} - \mathfrak{a} \sin a_{2.3}]\,\mathfrak{b}^2\right) + Gl_5. \quad (14)$$

Wenn wir nun ferner die 2. Gleichung (1) S. 166 anwenden, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \cos B_1 \sin L_{2.1} &= \frac{\mathfrak{c}}{a_0} \sin a_{2.1} + Gl_3; & \cos B_3 \sin L_{2.3} &= \frac{\mathfrak{a}}{a_0} \sin a_{2.3} + Gl_3; \\ \cos B_3 \sin L_{1.3} &= \frac{\mathfrak{b}}{a_0} \sin a_{1.3} + Gl_3; & \cos B_1 \sin L_{3.1} &= \frac{\mathfrak{b}}{a_0} \sin a_{3.1} + Gl_3. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Hiermit giebt die Identität

$$\sin L_{1.3} = \sin (L_{2.3} - L_{2.1}) = \sin L_{2.3} \cos L_{2.1} - \sin L_{2.1} \cos L_{2.3}$$

nach vorhergegangener Multiplikation mit $\cos B_1 \cos B_3$:

$$\frac{\mathfrak{a}}{a_0} \sin a_{2.3} \cos B_1 \cos L_{2.1} - \frac{\mathfrak{c}}{a_0} \sin a_{2.1} \cos B_3 \cos L_{2.3}$$

$$= \frac{\mathfrak{b}}{a_0} \sin a_{1.3} \cos B_1 + Gl_3 = -\frac{\mathfrak{b}}{a_0} \sin a_{3.1} \cos B_3 + Gl_3.$$

Mit Rücksicht auf die 2. Gleichung (2) S. 167 kann man hierfür schreiben:

$$\left(\frac{\mathfrak{a}}{a_0} \sin a_{2.3} - \frac{\mathfrak{c}}{a_0} \sin a_{2.1}\right) \cos B_0 = \frac{\mathfrak{b}}{a_0} \cos B_0 \sin \frac{a_{1.3} + a_{3.1} \pm 180^0}{2} + Gl_2, \quad (16)$$

wobei das Vorzeichen des Sinus rechter Hand wie dasjenige von $\sin a_{1.3}$ zu nehmen ist. Dies führen wir in (14) ein und reduzieren damit (12). Es ergiebt sich dann schliefslich:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho'' \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{2a_0^2} K_0 \sin B \left(1 + \frac{\mathfrak{b}^2}{8a_0^2} K_0\right) \\ &+ \frac{1}{24} \varrho'' e^2 \sin 2B_0 \left\{\frac{\mathfrak{a}^3}{a_0^3} \sin a_{2.3} - \frac{\mathfrak{c}^3}{a_0^3} \sin a_{2.1} + \frac{\mathfrak{b}^3}{a_0^3} \sin a_b\right\} + Gl_6, \\ a_b &= \frac{1}{2}(a_{3.1} + a_{1.3} \pm 180^0); \quad \left\{\begin{array}{c}\sin a_b \text{ hat mit} \\ \sin a_{3.1} \text{ gleiches} \\ \text{Vorzeichen.}\end{array}\right. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Durch cyklische Vertauschung folgt noch hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho'' \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{2a_0^2} K_0 \sin C \left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{8a_0^2} K_0\right) \\ &+ \frac{1}{24} \varrho'' e^2 \sin 2B_0 \left\{\frac{\mathfrak{b}^3}{a_0^3} \sin a_{3.1} - \frac{\mathfrak{a}^3}{a_0^3} \sin a_{3.2} + \frac{\mathfrak{c}^3}{a_0^3} \sin a_c\right\} + Gl_6, \\ a_c &= \frac{1}{2}(a_{1.2} + a_{2.1} \pm 180)^0; \quad \left\{\begin{array}{c}\sin a_c \text{ hat mit} \\ \sin a_{1.2} \text{ gleiches} \\ \text{Vorzeichen.}\end{array}\right. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho'' \frac{\mathfrak{bc}}{2a_0^2} K_0 \sin A \left(1 + \frac{\mathfrak{a}}{8a_0^2} K_0\right) \\
&+ \frac{1}{24} \varrho'' e^2 \sin 2B_0 \left\{ \frac{\mathfrak{c}^3}{a_0^3} \sin \alpha_{1.2} - \frac{\mathfrak{b}^3}{a_0^3} \sin \alpha_{1.3} + \frac{\mathfrak{a}^3}{a_0^3} \sin \alpha_a \right\} + Gl_6 \\
\alpha_a &= \frac{1}{2} (\alpha_{2.3} + \alpha_{3.2} \pm 180^0); \left\{ \begin{array}{c} \sin \alpha_a \text{ hat mit} \\ \sin \alpha_{2.3} \text{ gleiches} \\ \text{Vorzeichen.} \end{array} \right.
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

§ 31. **Zahlenbeispiel III,** vergl. S. 200.

$$\log \frac{\varrho''}{2a_0^2} = 1{,}4041082-10 \qquad \log K_0 = 9{,}9993197-10$$

$$B_0 = 51^0\,48',6 \qquad \log \sin 2B_0 = 9{,}988-10$$

$$\log \frac{M}{8a_0^2} = \underset{\text{f. Einh. der 7. Dec.}}{2{,}1255-10} \qquad \log \frac{e^2 \sin 2B_0}{12 a_0} = 9{,}929-20$$

$\alpha_{1.2} =$ 23° 12′	log sin = 9,595 —10		$\alpha_a =$ 156° 1′	log sin = 9,609 —10
$\alpha_{1.3} =$ 65 16	9,958 —10		$\alpha_b =$ 242 25	$9{,}947_n$—10
$\alpha_{2.1} =$ 199 58	$9{,}533_n$—10		$\alpha_c =$ 21 35	9,566 —10
$\alpha_{2.3} =$ 157 10	9,589 —10		$A =$ 42 4	log cos = 9,871 —10
$\alpha_{3.1} =$ 239 33	$9{,}936_n$—10		$B =$ 42 48	9,866 —10
$\alpha_{3.2} =$ 334 52	$9{,}628_n$—10		$C =$ 95 19	$8{,}967_n$—10

Die *Formel* (12) S. 207 giebt bezw. für die Berechnung mit $\mathfrak{ca}, \mathfrak{ab}, \mathfrak{bc}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 699{,}1825'' &- 0{,}0156'' - 0{,}0264'' + 0{,}0260'' + 0{,}0341'' = 699{,}2006'' \\
699{,}1798 &- 0{,}0134 + 0{,}0269 + 0{,}0051 - 0{,}0025 = 699{,}1959 \\
699{,}1797 &+ 0{,}0625 - 0{,}0184 + 0{,}0403 - 0{,}0633 = 699{,}2008 \\
&\text{Mittel} = 699{,}1991''.
\end{aligned}$$

Dagegen geben die *Formeln* (17) bis (19) S. 208 u. 209 bezw.:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 699{,}1825'' &+ 0{,}0119'' + 0{,}0344'' - 0{,}0283'' = 699{,}2005'' \\
699{,}1798 &- 0{,}0275 + 0{,}0130 + 0{,}0371 = 699{,}2022 \\
699{,}1797 &+ 0{,}0397 - 0{,}0290 + 0{,}0124 = 699{,}2028 \\
&\text{Mittel} = 699{,}2019''.
\end{aligned}$$

Der genaue Wert ist nach S. 200 gleich 699,2014″. Mit demselben stimmen die Mittel aus den Berechnungen beider Art, nämlich die Werte 699,2006 . . ., 1992 . . ., 2018 im allgemeinen besser überein, als die Ergebnisse der einzelnen Berechnungen.

§ 32. **Schlufsbemerkungen.** Der im Vorstehenden entwickelte Sinussatz und die Formel für ε bilden die Grundlagen für die Ausgleichung und Berechnung eines Dreiecksnetzes. Zur Vollständigkeit

der Formelsammlung würde aber insbesondere im Hinblick auf die Berechnung von Polarkoordinaten noch die Aufstellung von solchen Formeln wie S. 109, § 24 für die sphärische Rechnung gehören.

(Der Tangentensatz würde sich wie früher aus dem Sinussatz ableiten lassen, während die Ableitung einer Formel, die $\mathfrak{r}^2$ direkt aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und C giebt, von den Formeln:

$$\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos\mathfrak{C},$$
$$\cos\mathfrak{C} = \sin\mu_{3.1}\sin\mu_{3.2} + \cos\mu_{3.1}\cos\mu_{3.2}\cos C$$

auszugehen hätte.)

Die Ausführung hierzu mag indes unterbleiben, weil eine Anwendung der Formeln nicht in Aussicht steht. Denn die schon für rein sphärische Rechnung mühsame Berechnung von Sehnenpolarkoordinaten (vergl. S. 111) kompliziert sich fürs Ellipsoid offenbar noch weit mehr.

Bei *Bearbeitung eines Dreiecksnetzes mittelst Sehnen und Horizontalwinkeln* wird man daher am zweckmäfsigsten direkt mittelst der Sehnen, die im *beobachteten* Netze vorkommen, Breiten- und Längendifferenzen berechnen. Da hierbei der *Grunert*sche Satz (unter Anwendung eines besonderen mittleren K_0 für jedes Dreieck) gerade noch ausreicht und da ferner die Berechnung geographischer Breiten- und Längendifferenzen mittelst der Sehnen, falls eine Tafel für log W vorliegt, nicht unbequem ist, wird der Rechnungsgang für diese Methode recht einfach. Sie verdient daher einige Beachtung in allen Fällen, wo die geographischen Koordinaten *aller* Netzpunkte ein geeignetes Ziel der Berechnungen bilden, wie bei gröfsern Landesvermessungen.

Bremiker hat in seinen *Studien* ebenfalls die Berechnung mit Sehnen durchgeführt, jedoch in der Weise (vergl. § 9), dafs jeder Horizontalwinkel auf seinen Sehnenwinkel nach einer der Formeln reduziert wird:

$$\sin\frac{A-\mathfrak{A}}{2} = \frac{n^2\cos 2N}{\sin\frac{A+\mathfrak{A}}{2}} \text{ mit } \begin{cases} n\cos N = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{\mu_{1.2}+\mu_{1.3}}{2} \\ n\sin N = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{\mu_{1.2}-\mu_{1.3}}{2}, \end{cases}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{A-\mathfrak{A}} = \varrho''\tan\frac{A}{2}\left(\frac{\mu_{1.2}+\mu_{1.3}}{2}\right)^2 - \varrho''\cot\frac{A}{2}\left(\frac{\mu_{1.2}-\mu_{1.3}}{2}\right)^2 + \cdots,$$

deren zweite eine Näherungsformel ist, welche, obgleich sie auf Werte von A nahe an 0^0 oder 180^0 nicht angewandt werden darf, für wohlgeformte, mefsbare Dreiecke in der Regel ausreichen wird. Es sind dies Formeln, die leicht aus der Gleichung

$$\cos\mathfrak{A} = \sin\mu_{1.2}\sin\mu_{1.3} + \cos\mu_{1.2}\cos\mu_{1.3}\cos A$$

abgeleitet werden können.

Diese Methode ist zur Berechnung von Polarkoordinaten wohl noch weniger wie die oben angegebene geeignet, da sie eine fortwährende Hin- und Her-Reduktion zwischen Sehnen- und Horizontalwinkeln erfordert. Denn Sehnenwinkel entbehren des Vorteils der Horizontalwinkel, wenn sie denselben Scheitel haben, auch in *einer* Ebene zu liegen und deshalb unmittelbar addiert und subtrahiert werden zu können.

Überdies ist die Ausgleichung und Berechnung eines beobachteten Dreiecksnetzes mittelst Sehnen und Horizontalwinkeln, wie leicht zu erkennen, ungleich einfacher als diejenige mit Sehnen und Sehnenwinkeln. Wenn es je in Frage kommen kann, ob mit Sehnen zu rechnen ist, so dürfte sodann die weitere Entscheidung, ob Horizontalwinkel oder Sehnenwinkel, nur zu Gunsten der ersteren ausfallen.

Was die Formeln zur Übertragung geographischer Koordinaten und zur Berechnung von Sehne und Azimut aus geographischen Positionen anlangt, so sind unsere Entwicklungen nicht wesentlich von denen *Bremikers* verschieden. In dessen *Studien* fehlen aber die wichtigen Näherungsformeln für kleine Distanzen in Bezug auf die letztgenannte Aufgabe.

Diese Näherungsformeln haben auch, abgesehen von der Anwendung der Sehne, einen Wert, da sie ganz geeignet sind, wie sich später zeigen wird, *die geodätische Linie zwischen 2 Punkten aus deren geographischen Positionen zu ermitteln.* Ein Übergang hierzu ist schon gewonnen, insofern die Sehne mit der Länge der vertikalen Schnitte in Verbindung gebracht ist.

Sie lehren überdies die S. 203 angegebenen einfachen Beziehungen kennen, welche zwischen den Horizontalwinkeln auf dem Ellipsoid und den entsprechenden auf der Kugel bei gleichen geographischen Positionen der Punkte stattfinden. Der allgemeinen Verwendung der *Abbildung des Ellipsoids auf einer Kugel* ohne Veränderung der geographischen Positionen steht aber die Gröfse der Azimut-Reduktionen nach S. 157 § 11 (2) und (3) entgegen.

Dies letztere hängt zusammen mit derjenigen Eigentümlichkeit unserer Lösung der Aufgabe, die Azimute der Vertikalschnitte aus den geographischen Positionen zu finden, nach welcher die aus der Ellipticität entspringende Korrektion der sphärischen Rechnung nahezu unabhängig von der Distanz ist. Nichtsdestoweniger vereinfacht sich doch die Rechnung für kurze Distanzen sehr, und da die Formeln überhaupt einfach sind, so ist jener Umstand, insoweit nur diese Aufgabe in betracht kommt, kein Mangel.

Wollte man indes Formeln haben, die jene Korrektion von der Entfernung abhängig machen, so könnten solche leicht aus Betrachtungen, welche *Hansen* in seinen *Geodätischen Untersuchungen* zu anderen Zwecken anstellt, (speziell aus denen des 2. Abschnitts) entnommen werden. Handelt es sich insbesondere um 2 Punkte P_1 und P_2, so reduziert Hansen die geographische Breite eines der Punkte, also etwa diejenige von P_2, auf die Linie $P_2K'_1$ (Fig. 8 S. 134), so dafs es möglich ist, K'_1 als Zentrum einer Hilfskugel zu nehmen.

Wir müssen hier noch erwähnen, dafs *Delambre* 1799 in seinen *Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien* ebenfalls (wie später *Bremiker*) die Rechnung mit Sehnendreiecken empfahl und Formeln zur Übertragung geographischer Koordinaten durch Sehnen aufstellte. Zunächst giebt er sphärische Formeln und zwar Reihenentwicklungen, die

noch $\mathfrak{k}^3$ berücksichtigen. Er wendet dann diese auf die Kugel mit dem Zentrum K'_1 an (wie später *Hansen* und schon früher *Legendre*, 1787) und ermittelt die Korrektionen wegen der ellipsoidischen Gestalt. In den Endformeln berücksichtigt er nur e^2 und $\mathfrak{k}^2$ (S. 83 a. a. O.; in der Formel für δ ist das Vorzeichen von e^2 umzukehren). Diese Endformeln geben daher nur für sehr geringe Sehnenlängen eine ausreichende Genauigkeit.

In dem Hauptwerke der englischen Vermessung *Ordnance Trigonometrical Survey, Principal Triangulation* p. 228 — 253 finden sich Formeln für eine *Geodäsie mit Horizontalwinkeln und Vertikalschnitten.* Wir sind indes der Meinung, daſs die Anwendung der letzteren anstatt der Sehne nicht zu empfehlen ist, in welcher Meinung uns auch die Formeln a. a. O. nicht beirrt haben.

Einen in mehreren Beziehungen interessanten, selbständigen Beitrag zur Geodäsie *ohne* Anwendung der geodätischen Linie gab *Sonderhof* in der *Zeitschr. f. Math. u. Physik.* Bd. 17. 1872. S. 89 u. 177 u. ff.

---

5. Kapitel.

Fundamentalformeln für die geodätische Linie.

§ 1. Horizontale Entfernung und geodätische Linie auf dem Rotationsellipsoid. Im vorigen Kapitel ist gezeigt worden, daſs die gegenseitigen Vertikalschnitte zweier Punkte im allgemeinen von einander abweichen. Aber der Betrag ist nach S. 189 für Entfernungen bis zu 64^{km} so gering, daſs er in der Regel praktisch ohne alle Bedeutung bleibt; wenn also bei gegenseitiger Sichtbarkeit der Punkte die Vertikalschnitte abgesteckt werden, so werden sie nicht merkbar von einander abweichen und es wird darum auch der Geodät nicht zweifelhaft sein, was er im Sinne der geodätischen Praxis als gerade Linie und als horizontale Entfernung anzusehen hat.

Immerhin existiert eine Unklarheit für kleine Entfernungen im Sinne der Mathematik, für gröſsere Entfernungen aber auch im Sinne der Praxis. Zunächst in Bezug auf letztere läſst sich dieselbe aber dadurch beseitigen, daſs man dem in der Anmerkung zu § 1, S. 70 geschilderten Vorgange folgt. Dabei ist der Einfachheit halber von der Verbindung *zweier* Punkte zunächst abgesehen und nur die Rede von der Absteckung einer Linie von *einem* Punkt P_0 aus in gegebener Richtung:

Man geht (Fig. 14) von P_0 aus in einer dem gegebenen Azimut entsprechenden Vertikalebene bis P_1, wobei P_1 so nahe an P_0 zu denken ist, daſs die Vertikalebene von P_0 nach P_1 von der anderen, die von P_1 nach P_0 gelegt werden kann, zwischen P_1 und P_0 nicht merklich abweicht. In dieser letzteren Ebene geht man nun weiter

bis P_2 und von hier aus in der rückwärts verlängerten Vertikalebene von P_2 nach P_1 weiter bis P_3, u. s. f. Sind die Entfernungen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$ gehörig klein, so wird die in der beschriebenen Weise abgesteckte Linie praktisch als kontinuierliche Linie auftreten und der Geodät wird sie als gerade Linie im Sinne der Praxis zwischen irgend zweien der Punkte P auffassen.

Um nun aber die kleinen Brechungen der Linie ganz zu beseitigen, denkt man sich die Elemente P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 u. s. f. unendlich klein. Nach (25) S. 187 sind in diesem Falle die Brechungswinkel unendlich klein von der 2. Ordnung; und es ergiebt sich daher eine kontinuierliche Linie, die wir nach S. 70 als *geodätische Linie* auch im Sinne der strengen Anforderungen der Mathematik bezeichnen dürfen. Für diese Linie ist es gleichgültig, in welcher Richtung man die Absteckung beginnt, denn augenscheinlich bekommt man keine andere Linie, wenn man (Fig. 14) von P_n aus rückwärts sich die Absteckung wiederholt denkt. Als eindeutige Verbindung zweier Punkte und als eine dem Vorgange der geodätischen Praxis bei Absteckung und Verlängerung gerader Linien entsprechende Verbindung ist die geodätische Linie vorzüglich geeignet, die *horizontale Entfernung* zweier Punkte zu bezeichnen.

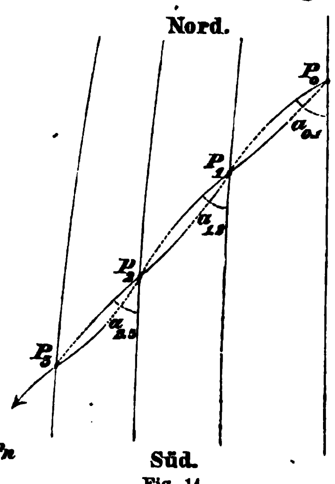


Fig. 14.

Weiterhin werden wir sehen, dafs sie zugleich in der Regel die kürzeste Entfernung angiebt und dafs sie zu einem verhältnismäfsig einfachen Kalkül führt.

Hier ist nun die nächste Aufgabe, aus der geometrischen Herleitung der geodätischen Linie eine sie definierende Gleichung herzustellen.

§ 2. Grundgleichung der geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid. S. 169 des vorigen Kapitels fanden wir in Formel (12) für zwei durch ihre gegenseitigen Vertikalschnitte verbundene Punkte P_1 und P_2 die Beziehung:

$$\sin a_{1.2} \cos \beta_1 \cos \mu_{1.2} = \sin (a_{2.1} - 180^0) \cos \beta_2 \cos \mu_{2.1}. \qquad (1)$$

Hierin sind $a_{1.2}$ und $a_{2.1}$ die Azimute der Vertikalschnitte von P_1 nach P_2 und von P_2 nach P_1, $\mu_{1.2}$ und $\mu_{2.1}$ die Depressionswinkel der Sehne $P_1 P_2$ in P_1 und P_2, und β_1 und β_2 die reduzierten Breiten der Punkte P_1 und P_2.

Diese Formel wenden wir an auf die Punkte P_0 und P_1, P_1 und P_2, P_2 und P_3 u. s. f. und haben:

$$\left.\begin{aligned}
\sin a_{0.1} \cos \beta_0 &= \sin (a_{1.0} - 180^0) \cos \beta_1 \frac{\cos \mu_{1.0}}{\cos \mu_{0.1}} \\
\sin a_{1.2} \cos \beta_1 &= \sin (a_{2.1} - 180^0) \cos \beta_2 \frac{\cos \mu_{2.1}}{\cos \mu_{1.2}} \\
\sin a_{2.3} \cos \beta_2 &= \sin (a_{3.2} - 180^0) \cos \beta_3 \frac{\cos \mu_{3.2}}{\cos \mu_{2.3}} \\
&\text{u. s. f.}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Da nun zugleich $a_{1.2} = a_{1.0} - 180^0$, $a_{2.3} = a_{2.1} - 180^0$, u. s. f., so ist $\sin a_{1.2} = \sin (a_{1.0} - 180^0)$, $\sin a_{2.3} = \sin (a_{2.1} - 180^0)$, u. s. f. Multipliziert man daher die Gleichungen (2) Seite für Seite und geht bis P_n, so wird erhalten:

$$\sin a_{0.1} \cos \beta_0 = \sin (a_{n.\overline{n-1}} - 180^0) \cos \beta_n \left(\frac{\cos \mu_{1.0}}{\cos \mu_{0.1}} \frac{\cos \mu_{2.1}}{\cos \mu_{1.2}} \cdots \frac{\cos \mu_{n.\overline{n-1}}}{\cos \mu_{\overline{n-1}.n}} \right). \quad (3)$$

Dies ist bereits die Grundgleichung der geodätischen Linie und es ist nur noch zu beweisen, dafs die Klammer bei unendlich kleinen Abständen der benachbarten Punkte $P_0, P_1, P_2 \ldots P_n$ d. h. für $n = \infty$ genau gleich 1 wird.

Nun kann man aber nach den Formeln (3) S. 29 für den natürlichen Logarithmus von $\cos \mu$ setzen $-\frac{1}{2} \varkappa \mu^2$, wobei $\varkappa$ für kleine μ nahezu gleich 1 ist. Bezeichnet man die Klammer in (3) mit P und nimmt darin alle Cosinus in den Zähler oder Nenner, so wird hiermit:

$$-\frac{1}{2} \sum \varkappa \mu^2 < \log P < +\frac{1}{2} \sum \varkappa \mu^2. \quad (4)$$

Hierin deutet Σ die Summierung aller Werte $\varkappa \mu^2$ mit verschiedenen Indices an. Setzt man nun links und rechts für jedes $\varkappa$ das gröfste derselben, ferner für je einen Faktor μ das gröfste aller μ, so folgt weiter:

$$-\frac{1}{2} \varkappa_m \mu_m \sum \mu < \log P < +\frac{1}{2} \varkappa_m \mu_m \sum \mu. \quad (5)$$

Läfst man jetzt die Elemente unendlich klein werden, so ist doch $\Sigma \mu$ ein endlicher Winkel, nämlich derjenige, den die Normale beschreibt, wenn sie von P_0 bis P_n entlang der geodätischen Linie gleitet. Dagegen ist μ_m alsdann unendlich klein, d. h. es wird $\log P =$ null, $P = 1$. Wir haben daher

$$\sin \alpha_0 \cos \beta_0 = \sin \alpha_n \cos \beta_n, \quad (6)$$

wobei das Azimut $a_{0.1}$ der wachsenden Linie in P_0 mit α_0 und das

Azimut $(\alpha_{n.\overline{n-1}} - 180^0)$ in P_n für die noch weiter wachsenden Linie mit α_n bezeichnet ist, Fig. 15.

Indem nun P_n jeden beliebigen Punkt der geodätischen Linie, welche von P_0 im Azimut α_0 ausgeht, bezeichnen kann, bedeutet (6) nichts anderes als:

Es ist $\sin\alpha\cos\beta$ *für alle Punkte einer geodätischen Linie konstant.*

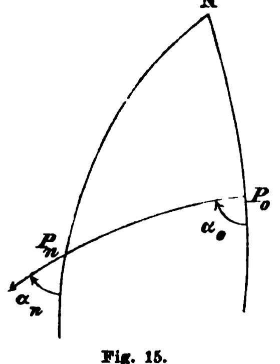


Fig. 15.

Wenn wir den genauen Ausdruck für P und μ berücksichtigen, so läfst sich angeben, um wieviel P von 1 bei endlichem n abweicht. Diese Rechnung wollen wir noch durchführen.

Nach Formel (1) S. 174 ist:

$$\left.\begin{aligned}\sin\mu_{1.2} &= \frac{\mathfrak{k}_{1.2}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}{2a_0}\left(1+\delta\cos^2\chi_{1.2}\right)\\ \sin\mu_{2.1} &= \frac{\mathfrak{k}_{1.2}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{2a_0}\left(1+\delta\cos^2\chi_{1.2}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

worin $\mathfrak{k}_{1.2}$ die Sehne P_1P_2 und $\chi_{1.2}$ deren Neigungswinkel zur Rotationsaxe bezeichnet. Auf die Differenz der Quadrate dieser Werte:

$$\sin^2\mu_{2.1} - \sin^2\mu_{1.2} = \frac{e^2\mathfrak{k}_{1.2}^2}{4a_0^2}\left(1+\delta\cos^2\chi_{1.2}\right)\left(\sin^2 B_1 - \sin^2 B_2\right)\qquad(8)$$

läfst sich nun der Quotient $(\cos\mu_{2.1}:\cos\mu_{1.2})$ leicht zurückführen. Es ist, unter log den natürlichen Logarithmus verstanden:

$$\log\frac{\cos\mu_{2.1}}{\cos\mu_{1.2}} = \frac{1}{2}\log\left(1-\sin^2\mu_{2.1}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1-\sin^2\mu_{1.2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{(\sin^2\mu_{2.1}-\sin^2\mu_{1.2})+\frac{1}{2}(\sin^4\mu_{2.1}-\sin^4\mu_{1.2})+\frac{1}{3}(\sin^6\mu_{2.1}-\sin^6\mu_{1.2})+\cdots\right\}.$$

Hier kann man $(\sin^2\mu_{2.1} - \sin^2\mu_{1.2})$ als Faktor ziehen, und es geben dann innerhalb der geschlungenen Parenthese

das 2. Glied: $\frac{1}{2}(\sin^2\mu_{2.1} + \sin^2\mu_{1.2})$,

das 3. Glied: $\frac{1}{3}(\sin^4\mu_{2.1} + \sin^2\mu_{2.1}\sin^2\mu_{1.2} + \sin^4\mu_{1.2})$,

u. s. f.

Das n. Glied giebt $\frac{1}{n}$mal einem Aggregat von n Sinuspotenzen n. Grades. Bezeichnet nun μ einen Wert, der gröfser ist als $\mu_{2.1}$ und $\mu_{1.2}$, der aber für $\mathfrak{k}_{1.2} = 0$ ebenfalls null wird, so ergiebt sich, indem man für $\mu_{2.1}$ und $\mu_{1.2}$ innerhalb der geschlungenen Parenthese einfach μ setzt:

$$\log \frac{\cos \mu_{2.1}}{\cos \mu_{1.2}} = -\frac{1}{2} (\sin^2 \mu_{2.1} - \sin^2 \mu_{1.2}) (1 + \sin^2 \mu + \sin^4 \mu + \cdots) \varkappa$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \mu_{2.1} - \sin^2 \mu_{1.2}}{1 - \sin^2 \mu} \varkappa,$$

$\varkappa$ ein positiver echter Bruch. Durch Einführung von Formel (8) erhalten wir hieraus:

$$\log \frac{\cos \mu_{2.1}}{\cos \mu_{1.2}} = \frac{\mathfrak{k}_{1.2}^2 (\sin^2 B_2 - \sin^2 B_1)}{8 a_0^2} (1 + \delta \cos^2 \chi_{1.2}) \frac{e^2 \varkappa}{1 - \sin^2 \mu}. \quad (9)$$

Diese Formel können wir auf $(\cos \mu_{1.0} : \cos \mu_{0.1})$, $(\cos \mu_{2.1} : \cos \mu_{1.2})$, $(\cos \mu_{3.2} : \cos \mu_{2.3})$ u. s. f. anwenden und die Logarithmen addieren. Nehmen wir dabei die rechte Seite immer positiv, setzen ferner für

$$(\sin^2 B_i - \sin^2 B_{i-1}), \; i = 1 \text{ bis } n,$$

den absolut gröfsten Wert unter diesen Differenzen, den wir mit $\Delta \sin^2 B$ bezeichnen, setzen endlich noch für $\cos^2 \chi_{1.2}$ und $\varkappa$ einfach 1 und für μ in $(1 - \sin^2 \mu)$ das gröfste der vorkommenden μ, so folgt:

$$\log P < \frac{\delta \, . \, \Delta \sin^2 B}{8 a_0^2 (1 - \sin^2 \mu)} \Sigma \mathfrak{k}^2. \quad (10)$$

Die Summierung der $\mathfrak{k}^2$ hat sich über alle Strecken auszudehnen:

$$\Sigma \mathfrak{k}^2 = \mathfrak{k}_{0.1}^2 + \mathfrak{k}_{1.2}^2 + \cdots \mathfrak{k}_{n.\overline{n-1}}^2.$$

Substituiert man aber in jedem Teile für eines der $\mathfrak{k}$ einen unter allen $\mathfrak{k}$ vorkommenden Maximalwert $\mathfrak{k}_m$, so ergiebt sich:

$$\Sigma \mathfrak{k}^2 < \mathfrak{k}_m \Sigma \mathfrak{k}. \quad (11)$$

Nimmt man nun die Anzahl der Strecken unendlich grofs, jede einzelne aber unendlich klein, so ist $\Sigma \mathfrak{k}$ selbstredend ein endlicher Wert, nämlich die Länge der geodätischen Linie, dagegen ist $\mathfrak{k}_m$ unendlich klein und ebenso $\Delta \sin^2 B$. Man hat daher für $n = \infty$ wie oben $\log P =$ null.

Besteht dagegen die Linie $P_0 P_n$ aus einer endlichen Anzahl nahezu gleich langer Strecken und beschränkt man sich auf Ausdehnungen, innerhalb welcher das Azimut α nicht sehr erheblichen Variationen ausgesetzt ist, so kann man für $\Sigma (\sin^2 B_i - \sin^2 B_{i-1})$ setzen $n$mal einen mittleren Wert von $\sin^2 B_i - \sin^2 B_{i-1}$, d. i. angenähert

$$n \left(- \frac{s}{a_0 n} \cos \alpha \sin 2B\right) \quad \text{oder einfacher} \quad - \frac{s}{a_0} \cos \alpha \sin 2B,$$

worin α ein mittleres Azimut, B eine mittlere geographische Breite und s die Länge der ganzen Linie $P_0 P_n$ vorstellt. Man erhält hiermit, sowie mittelst einiger anderer, leicht ersichtlicher Vernachlässigungen:

$$\log (\sin \alpha_0 \cos \beta_0) = \log (\sin \alpha_n \cos \beta_n) - \frac{\delta s^3}{8 a_0^3 n^2} \cos \alpha \sin 2B + \cdots (12)$$

als näherungsweise Beziehung für den Anfangspunkt und Endpunkt einer in n gleich langen, kleinen aber endlichen Strecken abgesteckten Linie von der Länge s, dem mittleren Azimut α und der mittleren geographischen Breite B.

§ 3. Lauf der geodätischen Linie. Betrachtet man das Produkt $\sin\alpha\cos\beta$, welches für eine bestimmte geodätische Linie gleichen Wert in allen ihren Punkten hat, nach der relativen Gröfse seiner Faktoren, so ist ersichtlich, dafs für $\alpha = 90^0$ β seinen Maximalwert erreicht. Geht nun eine geodätische Linie von einem Punkte P_1 mit nördlicher Breite in einem Azimut α_1 zwischen 90^0 und 180^0 aus, so nimmt zunächst β zu und also $\cos\beta$ ab. Mit abnehmenden $\cos\beta$ wächst aber $\sin\alpha$, so dafs also anfangs gleichzeitig β zunimmt, α abnimmt, bis endlich α gleich 90^0 geworden ist.

Ist dieser Wert von α und damit die höchste Breite erreicht, so nimmt bei weiterem Verlaufe β wieder ab, da es wegen der Konstanz des Produkts $\sin\alpha\cos\beta$ nicht mehr wachsen kann, da es ferner aber auch nicht konstant bleiben kann, weil ja sonst die geodätische Linie mit dem Parallelkreis zusammenfiele. (Dieser ist sicher keine geodätische Linie, da seine Schmiegungsebene schief zur Oberfläche steht). Weil nun $\sin\alpha$ bei wachsendem $\cos\beta$ abnimmt, hierbei aber $\alpha < 90^0$ ist, so mufs jetzt α kleiner und kleiner werden. Für $\cos\beta = 1$, d. h. im Äquator tritt ein Minimum ein. Dieses Minimum von α ergänzt das Maximum von β zu 90^0, da sein Sinus gleich dessen Cosinus sein mufs:

$$\alpha_{\text{Min.}} + \beta_{\text{Max.}} = 90^0. \tag{1}$$

Nach Überschreitung des Äquators nimmt $\cos\beta$ ab, $\sin\alpha$ zu, und dies geht so fort, bis wieder $\alpha = 90^0$ ist und β sein negatives Maximum erreicht hat. Indem α alsdann in den 2. Quadranten übergeht, nimmt $\sin\alpha$ wieder ab und $\cos\beta$ zu, bis bei erneuter Durchkreuzung des Äquators α ein Maximum im 2. Quadranten erreicht und von hier aus die geodätische Linie wieder in die nördliche Ellipsoidhälfte eintritt. Zwischen $\alpha_{\text{Min.}}$ und $\alpha_{\text{Max.}}$ findet die Beziehung statt:

$$\alpha_{\text{Min.}} + \alpha_{\text{Max.}} = 180^0. \tag{2}$$

Hiernach bewegt sich die geodätische Linie, welche an irgend einer Stelle ein Azimut zwischen 0^0 und 180^0 hat, stets in Azimuten vorwärts, die zwischen zwei Grenzwerten $\alpha_{\text{Min.}}$ und $\alpha_{\text{Max.}}$ liegen. Diese Grenzwerte sind die Azimute bei Durchkreuzung des Äquators.

Ist dagegen auch nur in einem Punkte das Azimut zwischen 180^0 und 360^0 befindlich, so sind alle Azimute $> 180^0$ und schwanken zwischen zwei im 3. und 4. Quadraten gelegenen Grenzwerten, für welche aber auch (bis auf einen Fehler von 360^0) die Relation (2) gilt.

Bei der von uns angenommenen Zählweise der Azimute hat im 1. Falle die geodätische Linie einen westlichen Lauf, im 2. Falle aber einen östlichen Lanf. Ein wesentlicher Unterschied ist jedoch nicht zwischen beiden Arten Linien, denn beschreibt man zunächst eine geodätische Linie in westlicher Richtung und nimmt sodann eine Rückwärtsbewegung vor, so wächst das Azimut der Bewegungsrichtung um 180^0, und man beschreibt in östlicher Richtung die frühere Bahn.

Eine jede geodätische Linie ist in ihrem Laufe auf ein Gebiet beschränkt, welches zwischen zwei in gleichem Abstande nördlich und südlich vom Äquator befindlichen Parallelkreisen gelegen ist. Die Amplitude in Breite hängt von der Konstanten $\sin\alpha\cos\beta$ ab.

Ist diese null, so ist entweder α jederzeit null oder β jederzeit 90^0. Der 1. Fall entspricht den Meridianen, der 2. Fall giebt keine Linie.

Ist die Konstante gleich ± 1, so ist $\alpha = 90^0$ oder 270^0 und $\beta = 0$. Dies entspricht dem Äquator.

§ 4. **Länge einer geodätischen Linie, die von einem gegebenen Punkte in bestimmter Richtung ausgeht.** Ist β_1 die reduzierte Breite des gegebenen Punktes P_1 und α_1 das Azimut der geodätischen Linie, so besteht für einen beliebigen Punkt P derselben, dessen reduzierte Breite β ist, die Relation:

$$\sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha_1\cos\beta_1, \tag{1}$$

wenn α das Azimut der wachsenden geodätischen Linie bezeichnet.

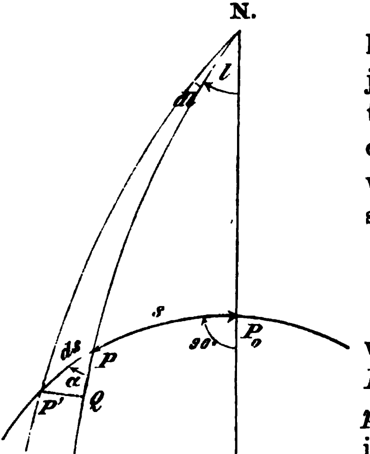


Fig. 16.

Unter den verschiedenen Punkten heben wir nun besonders einen derjenigen Punkte hervor, wo β sein positives Maximum erreicht. In Fig. 16 ist derselbe mit P_0 bezeichnet. Nennen wir die maximale reduzierte Breite β_0, so ist

$$\sin\alpha\cos\beta = \cos\beta_0. \tag{2}$$

Die Länge der geodätischen Linie von P_0 bis zu dem beliebigen Punkte P nennen wir s und setzen sie vorläufig *positiv* in *westlicher* Richtung, *negativ* in *östlicher* Richtung.

Wächst s durch Verschiebung von P nach P' um ds, wobei die reduzierte Breite β in $\beta + d\beta$ übergeht, und denkt man sich aufserdem P ein andermal im Meridian nach Q mit der reduzierten Breite $\beta + d\beta$ verschoben, so sind P' und Q

Punkte eines und desselben Parallelkreises. Man kann $P'Q$ als rechtwinklig zum Meridian betrachten und setzen (Fig. 16):

$$ds = PQ \sec \alpha .$$

Nach S. 55 (1) ist aber das zu $d\beta$ gehörige Element dM des Meridianbogens gleich

$$a_0\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}\, d\beta ;$$

setzt man dies für PQ ein und berücksichtigt, dafs bei $\alpha < 90^0$ $d\beta$ negativ ist, ds aber positiv genommen werden mufs, so folgt:

$$ds = - a_0\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} \sec \alpha \, d\beta . \tag{3}$$

Diese Formel pafst im Vorzeichen auch auf diejenigen Teile der Linie, für welche α zwischen 90 und 180^0 liegt; denn alsdann ist $d\beta$ positiv, aber $\sec \alpha$ negativ, ds mithin positiv.

Um nun s durch Integration ermitteln zu können, setzen wir versuchsweise nach (2) für $\sec \alpha$ den Wert $\pm 1 : \sqrt{1 - \cos^2 \beta_0 \sec^2 \beta}$ und erhalten

$$ds = \pm a_0 \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \beta}{\cos^2\beta - \cos^2\beta_0}} \cos \beta \, d\beta , \tag{4}$$

wobei das obere Vorzeichen für wachsende, das untere für abnehmende β gilt.

Ehe wir integrieren, erinnern wir uns des bekannten Resultats, welches für e^2 = null, also den Fall der Kugel, herauskommt. Fig. 17 zeigt die entsprechende sphärische Figur, und zwar auf einer Kugel vom Radius 1.

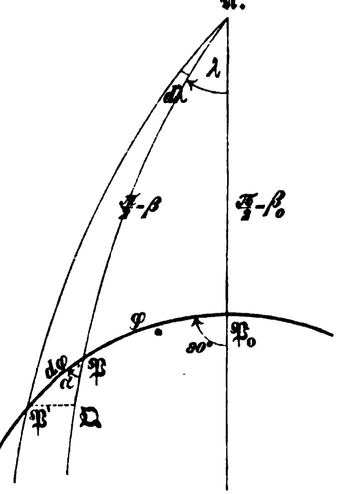


Fig. 17.

Hier tritt an Stelle von s der Bogen φ, und es ist auf der Kugel vom Radius a_0 $s = a_0 \varphi$ und $ds = a_0 \, d\varphi$. Formel (4) giebt aber für e^2 = null:

$$ds = \pm a_0 \frac{\cos\beta d\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\beta_0}} ;$$

man sieht, dafs die Einführung der Variablen φ die Rechnung wesentlich vereinfacht, denn φ läfst sich aus der sphärischen Figur ohne Integration nach bekannten Formeln berechnen.

Es ist nun ein günstiger Umstand, dafs wir die Variable φ und die zu grunde liegende sphärische Hilfsfigur (Fig. 17) auch fürs Ellipsoid beibehalten können. Wählt man nämlich auf einer Hilfskugel

vom Radius 1 einen Punkt $\mathfrak{N}$ als Nordpol und nimmt einen Punkt $\mathfrak{P}_0$ in der Breite β_0 an, legt darauf rechtwinklig zum Meridian den gröfsten Kreis $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$, so erhält man wieder Fig. 17, und es ist in dem sphärischen Dreieck, welches die Meridiane von $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}$ mit dem gröfsten Kreis $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}$ bilden, nach dem Sinussatz

$$\sin\alpha\cos\beta = \cos\beta_0 .$$

Dies ist aber Gleichung (2), d. h. hat ein Punkt $\mathfrak{P}$ als Breite die reduzierte Breite β des Punktes P der geodätischen Linie Fig. 16, so hat der gröfste Kreis $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{P}$ Fig. 17 gleiches Azimut mit der geodätischen Linie in P.

Hiermit ist natürlich noch nicht festgestellt, welche Beziehung im übrigen zwischen den Figuren 16 und 17 besteht. Einstweilen bezeichnen wir die Winkel der Meridiane in beiden Figuren verschieden und in der That werden wir finden, dafs die geographischen Längenunterschiede l und λ in Fig. 16 und 17 verschieden sind.*)

Man hat nun mittelst des bei wachsenden φ sich bildenden differentialen rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}$ (Fig. 17)

$$d\varphi = -\sec\alpha\, d\beta \tag{5}$$

und hiermit giebt die Formel (3) unter Elimination von $\sec\alpha$ sofort:

$$ds = a_0\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\, d\varphi . \tag{6}$$

Diese Formel hat vor (4) nächst der Einfachheit noch den Vorzug, dafs keine Vorzeichenzweideutigkeit besteht, weil ds und $d\varphi$ gleichzeitig wachsen. Behufs Integration kann man aus dem sphärischen Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_0$ mittelst des Cosinussatzes für β die Beziehung zu φ entnehmen:

$$\sin\beta = \sin\beta_0\cos\varphi .$$

Führt man dies in (6) ein und hebt aus der Wurzel zugleich den Faktor $\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}$ aus, so folgt:

$$ds = a_0\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}\sqrt{1 - \frac{e^2\sin^2\beta_0}{1 - e^2\cos^2\beta_0}\sin^2\varphi}\, d\varphi . \tag{7}$$

Etwas eleganter wird diese Formel, wenn man die zu β_0 gehörige geographische Breite B_0 einführt. Man hat nach S. 40 (3) und (5)

*) Die hier eingeführte Hilfskugel ist ganz andrer Art als die im vorigen Kapitel S. 114 u. ff. benutzte, insofern sie nicht wie jene eine *Abbildung* des *ganzen* Ellipsoids vorstellt. Vielmehr haben jetzt nur die Punkte der geodätischen Linie und des gröfsten Kreises eine Beziehung zu einander.

$$\sin^2 B_0 = \frac{\sin^2 \beta_0}{1 - e^2 \cos^2 \beta_0}, \qquad \cos^2 \beta_0 = \frac{\cos^2 B_0}{1 - e^2 \sin^2 B_0},$$

und hiermit geht Formel (7), wenn man zur Abkürzung setzt

$$k = e \sin B_0, \tag{8}$$

über in:

$$ds = a_0 \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - k^2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi. \tag{9}$$

§ 5. **Fortsetzung. Länge der geodätischen Linie.** Vergleichen wir die oben gewonnene Formel (9) für das Bogendifferential der geodätischen Linie mit der Formel für das Bogendifferential dM des Meridianbogens, S. 55 (1), so zeigt sich eine grofse Ähnlichkeit. Unwesentlich ist, dafs dort der Sinus, hier der Cosinus unter dem Wurzelzeichen vorkommt, weil der Sinus in Cosinus übergeht, wenn man anstatt der Variablen ihr Komplement zu 90° einführt. Nun hing das Integral für den Meridianbogen (S. 55) ab von Koefficienten A_0, A_2, A_4 u. s. f., welche in 3 Formen dargestellt wurden (S. 47):

1. als Potenzreihen von e^2,
2. „ „ „ n, wobei $n = \dfrac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$,
3. „ „ „ m, „ $m = \dfrac{e^2}{2 - e^2}$.

Es fand sich, dafs die Anwendung von n am günstigsten ist. Demgemäfs nehmen wir jetzt sogleich die entsprechende Umwandlung wie damals vor, wobei dann an Stelle von k^2 eine neue Hilfsgröfse k_1 tritt, die mit k^2 durch nachstehende Relationen zusammenhängt:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{8} + \frac{5k^6}{64} + \frac{7k^8}{128} + \cdots, \\ k^2 &= \frac{4k_1}{(1 + k_1)^2} = 4k_1 - 8k_1^2 + 12k_1^3 - 16k_1^4 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die hier angegebenen Reihen sind von S. 37 entnommen mittelst Vertauschung von e und k, n und k_1. Ihre Konvergenz ist aufser Frage, da $k \leq e$ ist und bereits für e kein Zweifel in dieser Hinsicht bestand. Wir setzen nun in Formel (9) des vorigen Paragraphen für $\sin^2 \varphi$ den Cosinus des doppelten Winkels und erhalten bei gleichzeitiger Einführung von k_1:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\varphi}}{1 + k_1},$$

$$\sqrt{1 - k^2} = \frac{1 - k_1}{1 + k_1},$$

hiermit aber anstatt (9):

$$ds = a_0 \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-k_1} \sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\varphi}\, d\varphi. \tag{2}$$

Die weitere Entwicklung ist wie S. 55. Setzen wir

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(\varepsilon^{2i\varphi} + \varepsilon^{-2i\varphi}),$$

wobei ε die Basis der natürlichen Logarithmen, i die $\sqrt{-1}$ bedeuten (S. 42), so ergiebt sich für die Wurzel in (2) die Formel:

$$\sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\varphi} = (1 + k_1 \varepsilon^{2i\varphi})^{\frac{1}{2}} (1 + k_1 \varepsilon^{-2i\varphi})^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

$$(1 + k_1 \varepsilon^{\pm 2i\varphi})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k_1}{2}\varepsilon^{\pm 2i\varphi} - \frac{k_1^2}{8}\varepsilon^{\pm 4i\varphi} + \frac{k_1^3}{16}\varepsilon^{\pm 6i\varphi} - \frac{5k_1^4}{128}\varepsilon^{\pm 8i\varphi} + \cdots. \tag{4}$$

Die beiden Faktoren der Wurzelgröfse werden multipliziert und das Imaginäre alsdann mittelst der Relation $\cos u = \frac{1}{2}(\varepsilon^{iu} + \varepsilon^{-iu})$ entfernt. Nach S. 56 ist es hierbei überflüssig, k_1^4 zu berücksichtigen, wenigstens kann man sogleich das Glied mit sin 8φ weglassen. Dagegen soll in den andern Gliedern, um die starke Konvergenz der Koefficientenreihen besser übersehen zu können, bis k_1^4 gegangen werden. Es wird

$$\sqrt{1 + k_1^2 + 2k_1 \cos 2\varphi} = \left(1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{64}k_1^4 + \cdots\right) + \left(k_1 - \frac{1}{8}k_1^3 + \cdots\right)\cos 2\varphi$$
$$- \left(\frac{1}{4}k_1^2 - \frac{1}{16}k_1^4 + \cdots\right)\cos 4\varphi + \left(\frac{1}{8}k_1^3 - \cdots\right)\cos 6\varphi + \cdots. \tag{5}$$

Dies in (2) eingeführt und integriert, wobei zu beachten, dafs für $\varphi = 0$ auch $s = 0$ ist, giebt:

$$s = a_0 \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-k_1}\left\{\left(1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{64}k_1^4 + \cdots\right)\varphi + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{16}k_1^3 + \cdots\right)\sin 2\varphi\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{16}k_1^2 - \frac{1}{64}k_1^4 + \cdots\right)\sin 4\varphi + \left(\frac{1}{48}k_1^3 - \cdots\right)\sin 6\varphi \cdots\right\}. \tag{6}$$

Hierin setzen wir für $a_0\sqrt{1-e^2}$ die kleine Halbaxe b_0 der Meridianellipse. Den Faktor von φ nehmen wir zugleich vor die grofse Parenthese und erhalten dann ebenso genau wie vorher:

$$s = b_0 \frac{1 + \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{64}k_1^4 + \cdots}{1-k_1}\left\{\varphi + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{16}k_1^3 + \cdots\right)\sin 2\varphi\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{16}k_1^2 - \frac{1}{32}k_1^4 + \cdots\right)\sin 4\varphi + \left(\frac{1}{48}k_1^3 - \cdots\right)\sin 6\varphi + \cdots\right\}. \tag{7}$$

Der gröfste Wert von k_1 ist n d. i. nahezu $\frac{1}{600}$; es ist daher

$$\frac{k_1^4}{64} \leqq 1 : 8\,000\,000\,000\,000 \text{ rund,}$$

und man darf dieses Glied im Faktor vor der Parenthese weglassen, weil es selbst für eine die ganze Erde umkreisende geodätische Linie, wobei φ nahezu 2π wird, erst $\frac{1}{200}$ Millimeter giebt. Erst recht darf man ferner das Glied mit k_1^4 im Faktor von $\sin 4\varphi$ vernachlässigen und erhält somit für die Länge der Linie P_0P die Formel:

$$s = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\varphi + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{16}k_1^3\right)\sin 2\varphi - \frac{1}{16}k_1^2 \sin 4\varphi + \frac{1}{48}k_1^3 \sin 6\varphi\right\} + \cdots, \quad (8)$$

welche Formel noch für eine die ganze Erde umkreisende Linie in den Hundertstelmillimetern scharf ist.

Kommt es aber auf 5^{mm} nicht an, so kann man auch noch k_1^3 in der Parenthese vernachlässigen.

Denken wir uns nun Formel (8) auf zwei Punkte P_1 und P_2 angewandt, für welche φ die Werte φ_1 und φ_2 hat, wobei $\varphi_2 > \varphi_1$ sei, so folgt aus (8) durch Subtraktion:

$$s_2 - s_1 = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\begin{array}{l}(\varphi_2-\varphi_1) + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{16}k_1^3\right)(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \\ \quad - \frac{1}{16}k_1^2(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) + \frac{1}{48}k_1^3(\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1)\end{array}\right\} + \cdots$$

oder in einfacherer Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{l} s = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\begin{array}{l}\Delta\varphi + \left(k_1 - \frac{3}{8}k_1^3\right)\cos 2\varphi \sin \Delta\varphi \\ \quad - \frac{1}{8}k_1^2 \cos 4\varphi \sin 2\Delta\varphi + \frac{1}{24}k_1^3 \cos 6\varphi \sin 3\Delta\varphi\end{array}\right\} + \cdots \\ \qquad s = \text{der horizontalen Entfernung } P_1P_2, \\ \qquad \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \end{array}\right\} \quad (9)$$

§ 6. **Gegeben die Länge s einer geodätischen Linie, die Lage eines der Endpunkte und das Azimut daselbst, gesucht die reduzierte Breite und das Azimut im andern Endpunkt.** Der gegebene Punkt werde P_1 genannt; seine reduzierte Breite sei gleich β_1 und das Azimut der Linie daselbst gleich α_1. In Bezug auf dieses fügen wir vorläufig die Bedingung hinzu, dafs $\alpha_1 \leqq 180^0$ sei, damit im Anschlufs an das Vorige, insbesondere an Fig. 16, die Entfernung des gesuchten Punktes P_2 vom gegebenen Punkte P_1 eine positive Gröfse werde. Vergl. Fig. 18 und 19 auf S. 225.

Das rechtwinklige Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1$ giebt zunächst β_0, woraus

k und k_1 folgen; dann giebt es ferner φ_1, und hiermit giebt Formel (8) des vorigen Paragraphen sofort s_1.

Addiert man zu s_1 die gegebene Länge s, so folgt s_2, und nunmehr ist die auf φ_2 und s_2 angewandte Formel (8) nach φ_2 aufzulösen.

Hierbei verfahren wir ganz ebenso wie S. 53 § 10. Wir bezeichnen zunächst zur Abkürzung

$$\frac{s_1 (1 - k_1)}{b_0 \left(1 + \frac{1}{4} k_1^2\right)} \text{ mit } \sigma_1 \text{ und } \frac{s_2 (1 - k_1)}{b_0 \left(1 + \frac{1}{4} k_1^2\right)} \text{ mit } \sigma_2 \tag{1}$$

und setzen demgemäfs:

$$\frac{s (1 - k_1)}{b_0 \left(1 + \frac{1}{4} k_1^2\right)} = \sigma_2 - \sigma_1 = \varDelta\sigma. \tag{2}$$

Formel (8) giebt nun, wenn der Faktor von φ_2 nach links dividiert wird:

$$\sigma_2 = \varphi_2 + \left(\frac{1}{2} k_1 - \frac{3}{16} k_1^3\right) \sin 2\varphi_2 - \frac{1}{16} k_1^2 \sin 4\varphi_2$$

$$+ \frac{1}{48} k_1^3 \sin 6\varphi_2 - \cdots. \tag{3}$$

Der aus dieser Formel ersichtliche Unterschied von σ_2 und φ_2 ist aber stets eine kleine Gröfse, im Maximum nur etwa gleich $\frac{1}{1200}$ oder in Sekunden gleich 206265 : 1200 d. i. noch nicht 200″. Es stöfst daher die folgende Entwicklung auf keine Bedenken.

Mit Vernachlässigung kleiner Glieder mit der 3. und mit höheren Potenzen von k_1 folgt aus (3):

$$\sin 2\sigma_2 = \sin 2\varphi_2 \cos \left\{k_1 \sin 2\varphi_2 - \frac{1}{8} k_1^2 \sin 4\varphi_2 + \cdots\right\}$$

$$+ \cos 2\varphi_2 \sin \left\{k_1 \sin 2\varphi_2 - \frac{1}{8} k_1^2 \sin 4\varphi_2 + \cdots\right\}.$$

Indem wir die Reihen für Cosinus und Sinus beachten, und konsequent die kleinen Glieder, welche in k_1^3 u. s. f. multipliziert sind, vernachlässigen, erhalten wir hieraus:

$$\sin 2\sigma_2 = \sin 2\varphi_2 + k_1 \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 - \frac{1}{2} k_1^2 \sin^3 2\varphi_2$$

$$- \frac{1}{8} k_1^2 \cos 2\varphi_2 \sin 4\varphi_2 + \cdots.$$

Wir setzen nun im Vorstehenden:

$$\sin^3 2\varphi_2 = \frac{3}{4}\sin 2\varphi_2 - \frac{1}{4}\sin 6\varphi_2\,,$$

$$\sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 = \frac{1}{2}\sin 4\varphi_2\,,$$

$$\cos 2\varphi_2 \sin 4\varphi_2 = \frac{1}{2}\sin 6\varphi_2 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_2$$

und erhalten damit:

$$\sin 2\sigma_2 = \left(1 - \frac{7}{16}k_1^2\right)\sin 2\varphi_2 + \frac{1}{2}k_1 \sin 4\varphi_2 + \frac{1}{16}k_1^2 \sin 6\varphi_2 + \cdots. \quad (4)$$

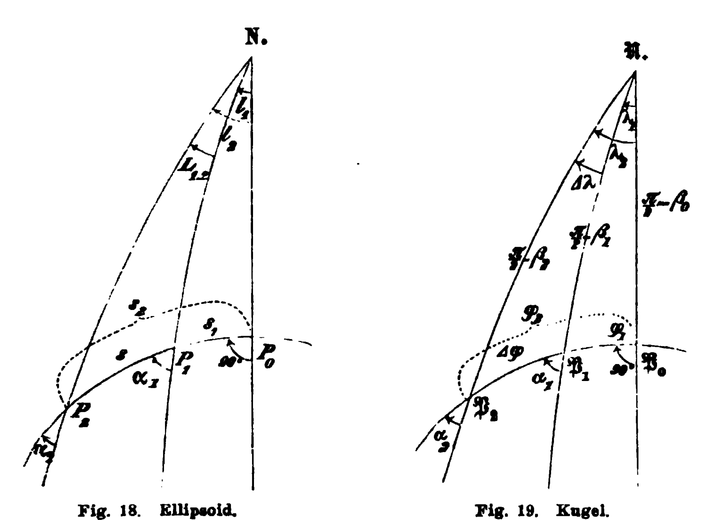


Fig. 18. Ellipsoid. Fig. 19. Kugel.

Mit Hilfe dieser Gleichung eliminieren wir $\sin 2\varphi_2$ aus (3), indem wir sie mit $\left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{16}k_1^3\right) : \left(1 - \frac{7}{16}k_1^2\right)$ multiplizieren und alsdann von (3) subtrahieren; wir erhalten:

$$\sigma_2 - \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{32}k_1^3\right)\sin 2\sigma_2$$

$$= \varphi_2 - \frac{5}{16}k_1^2 \sin 4\varphi_2 - \frac{1}{96}k_1^3 \sin 6\varphi_2 + \cdots. \quad (5)$$

Diese Formel vernachlässigt ebenso wie (3) alle Glieder mit höheren Potenzen als k_1^3, und es bleibt bei einiger Beachtung der höheren Glieder kein Zweifel, dafs sie auch numerisch noch ungefähr ebenso genau ist, als jene.

Wir setzen weiter mittelst (3):

$$\sin 4\sigma_2 = \sin 4\varphi_2 \cos(2k_1 \sin 2\varphi_2 + \cdots) + \cos 4\varphi_2 \sin(2k_1 \sin 2\varphi_2 + \cdots)$$

oder unter Vernachlässigung kleiner in k_1^2 u. s. f. multiplizierter Glieder:

$$\sin 4\sigma_2 = \sin 4\varphi_2 + 2k_1 \sin 2\varphi_2 \cos 4\varphi_2 + \cdots,$$

oder

$$\sin 4\sigma_2 = \sin 4\varphi_2 + k_1(\sin 6\varphi_2 - \sin 2\varphi_2) + \cdots . \qquad (6)$$

Indem wir (6) mit $\frac{5}{16} k_1^2$ multiplizieren und zu (5) addieren, findet sich:

$$\sigma_2 - \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{32} k_1^3\right) \sin 2\sigma_2 + \frac{5}{16} k_1^2 \sin 4\sigma_2$$

$$= \varphi_2 + \frac{29}{96} k_1^3 \sin 6\varphi_2 - \frac{5}{16} k_1^3 \sin 2\varphi_2 + \cdots . \qquad (7)$$

Jetzt aber kann man die in k_1^3 multiplizierten Glieder nach links nehmen und dabei für φ_2 einfach σ_2 setzen, was wieder nur kleine Fehler der Ordnung k_1^4 erzeugt. Somit ergiebt sich endlich:

$$\varphi_2 = \sigma_2 - \left(\frac{1}{2} k_1 - \frac{9}{32} k_1^3\right) \sin 2\sigma_2 + \frac{5}{16} k_1^2 \sin 4\sigma_2$$

$$- \frac{29}{96} k_1^3 \sin 6\sigma_2 + \cdots . \qquad (8)$$

Vergleicht man diese Formel mit (3), so hat es den Anschein, als ob (8) weniger stark convergiere als (3). Obgleich nun in der That Formel (8) etwas weniger genau als (3) ist, so genügt sie doch noch für alle Fälle; dies erkennt man, wenn man bedenkt, dafs k_1^4 im Maximum rund $1 : 130\,000\,000\,000$ ist und die vernachlässigten Glieder diesen Betrag keinesfalls erreichen, dafs indes auch jener Wert nur einen Einflufs von $a_0 : 130\,000\,000\,000$ oder $0{,}05^{mm}$ auf s_2 haben würde. Kommt es auf 10^{mm} nicht an, so kann man auch noch k_1^3 in Formel (8) vernachlässigen.

Nachdem aus (8) φ_2 ermittelt ist, giebt das sphärische Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_2$ unzweideutig aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen rechten Winkel sofort β_2 und α_2. Die dabei anzuwendenden Formeln, welche nichts Neues bieten, übergehen wir einstweilen; später stellen wir alles Zusammengehörige in ein Berechnungsschema zusammen. Dagegen mufs gleich hier noch darauf hingewiesen werden, dafs es in der Regel wegen des verhältnismäfsig kleinen Betrages der Entfernung $P_1P_2 = s$ vorteilhaft ist, nicht direkt φ_2, sondern $\Delta\varphi$ zu berechnen. Vertauscht man demgemäfs in (8) φ_2 mit φ_1 und σ_2 mit σ_1 und subtrahiert die neue Formel Seite für Seite von (8), so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varphi = \Delta\sigma - \left(k_1 - \frac{9}{16} k_1^3\right) \cos 2\sigma \sin \Delta\sigma + \frac{5}{8} k_1^2 \cos 4\sigma \sin 2\Delta\sigma \\
- \frac{29}{48} k_1^3 \cos 6\sigma \sin 3\Delta\sigma + \cdots; \\
2\sigma = \sigma_2 + \sigma_1 = 2\sigma_1 + \Delta\sigma, \\
\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Hierzu liefert Formel (2) $\Delta\sigma$ direkt aus s, Formel (3) aber giebt nach Vertauschung von σ_2 mit σ_1 und φ_2 mit φ_1:

$$2\sigma_1 = 2\varphi_1 + k_1 \sin 2\varphi_1 - \frac{1}{8} k_1^2 \sin 4\varphi_1 + \cdots, \tag{10}$$

wobei es ausreicht, wie angenommen, nur k_1 und k_1^2 zu berücksichtigen, weil die trigonometrischen Funktionen von σ, zu dessen Berechnung einzig und allein σ_1 gebraucht wird, in (9) nur mit k_1, k_1^2 und k_1^3 multipliziert vorkommen und somit die vernachlässigten Glieder der Formel (10) in Formel (9) nur kleine Fehler der Ordnung k_1^4 erzeugen.

§ 7. Berechnung von k_1 und der von k_1 abhängenden Koefficienten. Nach S. 221 (8) ist $k = e \sin B_0 = e \sin \beta_0 : \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_0}$ und hiermit

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_0} - \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_0} + \sqrt{1 - e^2}},$$

also auch, da $\delta = \frac{e^2}{1 - e^2}$:

$$k_1 = \left(\sqrt{1 + \delta \sin^2 \beta_0} - 1\right) : \left(\sqrt{1 + \delta \sin^2 \beta_0} + 1\right).$$

Setzen wir nun

$$\tan E = \sqrt{\delta} \sin \beta_0, \tag{1}$$

so folgt:

$$k_1 = \tan^2 \frac{E}{2}. \tag{2}$$

Hiermit ist die Berechnung von k_1 sehr vereinfacht. Nächstdem bedürfen wir des Ausdrucks:

$$\frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2}{1 - k_1} \text{ oder genauer } \frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \frac{1}{64} k_1^4 + \cdots}{1 - k_1},$$

wobei für den Zähler bereits die Zulässigkeit der Vernachlässigung von k_1^4 nachgewiesen ist. Man hat aber

$$\log\left(1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \frac{1}{64} k_1^4 + \cdots\right) = M\left(\frac{1}{4} k_1^2 - \frac{1}{64} k_1^4 + \cdots\right)$$

und ersieht hieraus, dafs es durchaus zulässig ist, dafür einfach $\frac{1}{4} M k_1^2$ zu setzen. Ferner ist

$$1 - k_1 = 1 - \tan^2 \frac{E}{2} = \cos E \sec^2 \frac{E}{2};$$

man hat daher endlich mit einer stets ausreichenden Genauigkeit:

$$\log \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2+\cdots}{1-k_1} = 2\log\cos\frac{E}{2} - \log\cos E + \frac{1}{4}Mk_1^2 + \cdots \quad (3)$$

Indessen ist diese Form noch nicht die beste; es läſst sich die rechte Seite vielmehr auf 2 Glieder reduzieren. Man hat nämlich nach S. 29 (3):

$$\log\cos E = -M\left(\frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{12}E^4 + \frac{1}{45}E^6 + \frac{17}{2520}E^8 + \cdots\right)$$

und also, indem man für E einfach $\frac{1}{2}E$ setzt:

$$4\log\cos\frac{E}{2} = -M\left(\frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{48}E^4 + \frac{1}{16 \cdot 45}E^6 + \frac{17}{64 \cdot 2520}E^8 + \cdots\right)$$

Hieraus folgt durch Subtraktion:

$$\log\cos E = 4\log\cos\frac{E}{2} - M\left(\frac{1}{16}E^4 + \frac{1}{48}E^6 + \frac{17}{64 \cdot 40}E^8 + \cdots\right).$$

Nun ist aber nach (2):

$$k_1 = \frac{1}{4}E^2\left(1 + \frac{1}{12}E^2 + \frac{1}{120}E^4 + \cdots\right)^2$$

$$k_1^2 = \frac{1}{16}E^4\left(1 + \frac{1}{3}E^2 + \frac{3}{40}E^4 + \cdots\right).$$

Daher wird, wie leicht zu finden:

$$\log\cos E = 4\log\cos\frac{E}{2} - Mk_1^2 - \frac{1}{2}Mk_1^4 - \cdots. \quad (4)$$

Hiermit geht (3) über in:

$$\log \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2+\frac{1}{64}k_1^4+\cdots}{1-k_1} = -2\log\cos\frac{E}{2} + \frac{5}{4}Mk_1^2 + \frac{31}{64}Mk_1^4 + \cdots. \quad (5)$$

Das in k_1^4 multiplizierte Glied ist nun bei Rechnung mit zehnziffrigen Logarithmen ganz unmerkbar; auch ist sein Einfluſs in Formel (9) S. 223 selbst für eine die ganze Erde umkreisende Linie nur $0{,}2^{mm}$. Man kann daher für alle Fälle setzen:

$$\log \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2+\cdots}{1-k_1} = -2\log\cos\frac{E}{2} + \frac{5}{4}Mk_1^2 + \cdots. \quad (5^*)$$

Zu (9) des vorigen Paragraphen hat man noch:

$$\log\left(k_1 - \frac{9}{16}k_1^3\right) = \log k_1 - \frac{9}{16}Mk_1^2 + \cdots, \quad (6)$$

ebenfalls mit einer jederzeit völlig ausreichenden Genauigkeit, weil

die vernachlässigten Glieder der logarithmischen Entwicklung in der genannten Formel selbst nur Glieder mit k_1^5 als Fehler geben.

§ 8. Bestimmung des geographischen Längenunterschieds. Bezeichnet x den normalen Abstand eines Punktes P von der Rotationsaxe, so giebt das an P angrenzende differentiale Dreieck in Fig. 16 S. 218:

$$xdl = ds \,.\, \sin\alpha\,.$$

Nach S. 39 (1) ist $x = a_0 \cos\beta$, daher wird xdl gleich

$$a_0 \cos\beta\, dl = \sin\alpha\, ds\,. \tag{1}$$

Substituiert man hier für ds seinen Wert $a_0\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\; d\varphi$ und für $\sin\alpha$ nach S. 218 (2) den Wert $\cos\beta_0 : \cos\beta$, so folgt weiter:

$$dl = \frac{\cos\beta_0}{\cos^2\beta}\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\; d\varphi\,. \tag{2}$$

Bei der Integration dieser Gleichung erinnern wir uns, dafs bisher die Einführung der Elemente der sphärischen Figur 17, welche der Fig. 16 auf dem Ellipsoid zugeordnet ist, von Nutzen war. Fig. 17 zeigt nun, dafs die zu $d\varphi$ gehörige Änderung des geographischen Längenunterschieds auf der Kugel gleich ist

$$d\lambda = \frac{d\varphi\,.\,\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta_0}{\cos^2\beta}\, d\varphi\,. \tag{3}$$

Man hat daher durch Subtraktion dieser Gleichung von (2) Seite für Seite:

$$dl = d\lambda - \cos\beta_0\left(\frac{1 - \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}}{\cos^2\beta}\right) d\varphi\,. \tag{4}$$

Es ist jetzt der in Parenthese gestellte Faktor von $d\varphi$ durch φ auszudrücken. S. 220 wurde aber beim Übergang von (6) zu (9) gefunden, dafs

$$\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta} = \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,, \tag{5}$$

$$k^2 = \frac{e^2\sin^2\beta_0}{1 - e^2\cos^2\beta_0}\,.$$

Hiermit wird:

$$(1 - \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}) = \sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}} - \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\right\}. \tag{6}$$

Aus der soeben mit aufgeführten Gleichung für k^2 folgt nun weiter durch Auflösung nach e^2, dafs $e^2 = k^2 : (\sin^2\beta_0 + k^2\cos^2\beta_0)$ ist und hiermit findet sich leicht:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_0}} = \sqrt{1 + k^2\cot^2\beta_0}\,. \tag{7}$$

Dies setzen wir in die Gleichung (6) innerhalb der Parenthese ein, womit alsdann (4) auf nachstehende Form gebracht werden kann:

$$dl = d\lambda - \cos\beta_0\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}\,\frac{\sqrt{1+k^2\cot^2\beta_0}-\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi}\,d\varphi\,. \quad (8)$$

Entwickelt man die Wurzelgröfsen rechter Hand, so ist sofort ersichtlich, dafs die einzelnen zu k^2, k^4 u. s. f. gehörigen Glieder ihrer Differenz allesamt durch $(\cot^2\beta_0+\sin^2\varphi)$ teilbar sind. Der Nenner $(1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi)$ aber läfst sich schreiben $(\cot^2\beta_0+\sin^2\varphi)\sin^2\beta_0$, womit der Quotient übergeht in

$$\frac{k^2}{2\sin^2\beta_0}\Big(1+\frac{k^2}{4}(\sin^2\varphi-\cot^2\beta_0)$$
$$+\frac{k^4}{8}(\sin^4\varphi-\sin^2\varphi\cot^2\beta_0+\cot^4\beta_0)+\cdots\Big).$$

Die hierbei vernachlässigten Glieder geben, da $k\cot\beta$ ebenso wie k ein kleines Glied gleicher Ordnung mit e ist, im Resultat nur kleine Glieder der Ordnung k^8. Setzen wir nun im Vorstehenden

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi \text{ und } \sin^4\varphi=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{8}\cos 4\varphi\,,$$

so wird schliefslich für Gleichung (8) erhalten:

$$dl=d\lambda-\frac{k^2\cos\beta_0}{2\sin^2\beta_0}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}\Big\{\Big(1-\frac{k^2}{4}\cot^2\beta_0+\frac{k^2}{8}+\frac{k^4}{8}\cot^4\beta_0-\frac{k^4}{16}\cot^2\beta_0+\frac{3k^4}{64}+\cdots\Big)$$
$$-\Big(\frac{k^2}{8}-\frac{k^4}{16}\cot^2\beta_0+\frac{k^4}{16}\Big)\cos 2\varphi+\frac{k^4}{64}\cos 4\varphi+\cdots\Big\}d\varphi.\ (9)$$

Diese Gleichung kann nunmehr integriert werden. Zuvor jedoch vereinfachen wir die Koefficienten durch Einführung von k_1 und n. Zunächst folgt aus $k^2=e^2\sin^2\beta_0:(1-e^2\cos^2\beta_0)$ leicht, indem man im Nenner für 1 setzt $(\sin^2\beta_0+\cos^2\beta_0)$:

$$k^2\cot^2\beta_0=(e^2-k^2):(1-e^2)\,. \quad (10)$$

Da aber nach S. 221 (1) für k^2 gesetzt werden kann $4k_1:(1+k_1)^2$ und da ferner $e^2=4n:(1+n)^2$, so ist auch

$$\left.\begin{aligned} k^2\cot^2\beta_0 &= 4\,\frac{(n-k_1)\,(1-nk_1)}{(1+k_1)^2\,(1-n)^2}=4(n-k_1)+8(n-k_1)^2+\cdots,\\ k^2 &= 4k_1-8k_1^2+\cdots. \end{aligned}\right\}(11)$$

Man hat ferner aus der oben benutzten Relation für k^2 sofort weiter die Beziehung $k^2(1-e^2\cos^2\beta_0)=e^2\sin^2\beta_0$ und hiermit:

$$\frac{k^2\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}}{\sin^2\beta_0}=\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}}=e^2\sqrt{1+k^2\cot^2\beta_0}\,,$$

also endlich:

$$\frac{k^2\sqrt{1-e^2\cos^2\beta_0}}{\sin^2\beta_0} = e^2\left(1 + 2(n-k_1) + 2(n-k_1)^2 + \cdots\right). \quad (12)$$

Dieses letztere setzen wir in Gleichung (9) im Faktor vor der Parenthese ein, die (11) aber innerhalb der Parenthese. Dann ergiebt sich ohne Mühe:

$$dl = d\lambda - \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left\{\left(1 + n - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \cdot\cdot\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}k_1\cos 2\varphi + \frac{1}{4}k_1^2\cos 4\varphi + \cdot\cdot\right\}d\varphi. \quad (13)$$

Die Formel (13) berücksichtigt innerhalb der Parenthese alle Glieder bis zur Ordnung n^3 excl., was mit Rücksicht darauf, dafs im Faktor von $\cos 2\varphi$ k_1^2 nicht auftritt, besonders hervorgehoben werden mufs. Die gröfsten vernachlässigten Glieder, welche die Ordnung n^4 bezw. k_1^4 haben, sind jedenfalls ganz unerheblich. Durch die Integration aber wird die Konvergenz der Reihe noch verstärkt.

Integriert man von l_1 bis l_2 und nennt den Längenunterschied von P_1 bis P_2 $L_{1.2}$, so folgt unter Zusammenziehung der in $\sin 2\varphi_1$ und $\sin 2\varphi_2$, sowie der in $\sin 4\varphi_1$ und $\sin 4\varphi_2$ multiplizierten Glieder (vergl. auch Fig. 18 und 19 S. 225):

$$\left.\begin{array}{l} L_{1.2} = \Delta\lambda - \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left\{\begin{array}{c}\left(1 + n - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \cdot\cdot\right)\Delta\varphi \\ - \frac{1}{2}k_1\cos 2\varphi\sin\Delta\varphi + \frac{1}{8}k_1^2\cos 4\varphi\sin 2\Delta\varphi + \cdot\cdot\end{array}\right\} \\ L_{1.2} = l_2 - l_1 \qquad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \\ \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 . \end{array}\right\} \quad (14)$$

Wenn wir die Abplattung $\mathfrak{a}$ einführen, so läfst sich der Koefficient von $\Delta\varphi$ noch in eine für kleine Entfernungen vorteilhafte Gestalt bringen. Nach S. 37 ist

$$e^2 = 4n : (1+n)^2 = 2\mathfrak{a} : (1+n)$$

und hiermit hat man für den Koefficienten von $\Delta\varphi$ in (14), ebenso genau wie bisher, die Formel:

$$\frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left(1 + n - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \cdot\cdot\right)$$
$$= \mathfrak{a}\cos\beta_0\left(1 - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{4}\mathfrak{a}k_1 + \cdot\cdot\right). \quad (15)$$

Sobald man aber Glieder der Ordnung k_1^2 in der Parenthese rechter

Hand vernachlässigen kann, geht der Koefficient in die einfache Form $\mathfrak{a} \cos \beta_0 (1 - \frac{1}{2} k_1)$ über.

Die Formel (14) giebt selbst für eine die ganze Erde umkreisende Linie kaum eine geringe Unsicherheit in den Hunderttausendstelsekunden von $L_{1.2}$, wie man leicht unter der jedenfalls annähernd zutreffenden Annahme findet, dafs der Koefficient von $\varDelta\varphi$ noch nicht um n^4 fehlerhaft sei.

§ 9. **Zusammenstellung der Formeln zur Übertragung der geographischen Breite und Länge mittelst einer geodätischen Linie von bekannter Länge und mit bekanntem Anfangsazimut.**

Die horizontale Entfernung $P_1 P_2 = s$ kann beliebig grofs sein.

Zunächst ist, falls nicht die Dimensionen des Erdellipsoids nach *Bessel* zur Anwendung gelangen, zu berechnen:

$$e^2 = 2\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^2 \qquad \sqrt{1 - e^2} = 1 - \mathfrak{a}$$

$$\sqrt{\delta} = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \qquad b_0 = a_0 \sqrt{1 - e^2}\,.$$

Fig. 20. Ellipsoid. Fig. 21. Kugel.

Die geographische Breite von P_1 sei B_1, so ist nun die reduzierte Breite β_1 mittelst der Formel aufzusuchen:

$$\tan \beta_1 = \sqrt{1 - e^2} \tan B_1\,; \quad \log \sqrt{1 - e^2} = 9{,}9985458.202 - 10\,. \quad (1)$$

Die Anwendung dieser Formel von S. 40 erscheint hier am geeignetsten, da $\tan \beta_1$ sofort gebraucht wird. Es ist nämlich demnächst das sphärische Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1$ (Fig. 21) aufzulösen, wozu die Formeln (1) S. 76 (für $A = 90^0$ u. s. f.) dienen:

$$\left.\begin{aligned} \sin \beta_0 \cos \varphi_1 &= \sin \beta_1 \\ \sin \beta_0 \sin \varphi_1 &= \cos \beta_1 \cos \alpha_{1.2} \\ \cos \beta_0 \qquad &= \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta_1 \cos\lambda_1 &= \cos\varphi_1 \cos\beta_0 \\ \cos\beta_1 \sin\lambda_1 &= \sin\varphi_1 . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Die Auflösung der Formeln (2) und (3) ist eine möglichst scharfe und auch ganz bestimmte, insofern wir wie bisher β_0 positiv nehmen.

Es ist nunmehr zu berechnen nach S. 227 (1) und (2), sowie nach S. 224 (2) und S. 228 (5):

$$\left.\begin{aligned} &\tan E = \sqrt{\delta}\,\sin\beta_0 \qquad \log\sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9-10 \\ &\log k_1 = 2\,\log\tan\tfrac{1}{2}E\,; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\sigma} = s\,\frac{\varrho''}{b_0}\,\frac{1-k_1}{1+\frac{1}{4}k_1^2} \\ &\log\frac{1-k_1}{1+\frac{1}{4}k_1^2} = 2\log\cos\frac{E}{2} - \frac{5}{4}Mk_1^2 + \cdots \\ &\log\left(\frac{5}{4}M\right) = \underset{\text{für Einh. der 7. Dec.}}{6{,}73469} \\ &\log\varrho'' = 5{,}3144251.332 \\ &\log\frac{\varrho''}{b_0} = 8{,}5112358.493-10. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Hierauf ist nach den Formeln (9) u. (10) S. 226 u. 227 weiter zu berechnen:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\text{in Sek.}}{2\sigma_1} = \underset{\text{in Sek.}}{2\varphi_1} + \varrho'' k_1 \sin 2\varphi_1 - \tfrac{1}{8}\varrho'' k_1^2 \sin 4\varphi_1 \\ &\log\varrho'' = 5{,}31443 \\ &\log\left(-\tfrac{1}{8}\varrho''\right) = 4{,}411n\,, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wobei es ausreicht, $2\sigma_1$ auf Hundertstelsekunden anzugeben, wenn man weiterhin nur noch Hunderttausendstelsekunden in Rechnung ziehen will; ferner, mit Rücksicht auf (6) S. 228:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\varphi} = \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\sigma} + \mathfrak{A}\cos 2\sigma \sin\Delta\sigma + \mathfrak{B}\cos 4\sigma \sin 2\Delta\sigma + \mathfrak{C}\cos 6\sigma \sin 3\Delta\sigma + \cdots \\ &2\sigma = 2\sigma_1 + \Delta\sigma \\ &\log\mathfrak{A} = \log(-\varrho'') + \log k_1 - \tfrac{9}{16}Mk_1^2 + \cdots \\ &\qquad = 5{,}3144251.3n + \log k_1 - \underset{\text{f. Einh. d. 7. Dec.}}{[6{,}388]\,k_1^2} + \cdots \\ &\log\mathfrak{B} = \log\left(\tfrac{5}{8}\varrho'' k_1^2 + \cdots\right) = 5{,}11031 + 2\log k_1 + \cdots \\ &\log\mathfrak{C} = \log\left(-\tfrac{29}{48}\varrho'' k_1^3 + \cdots\right) = 5{,}096n + 3\log k_1 + \cdots . \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Hiermit erhält man $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$ und nunmehr durch Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_2$ nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_2 &= +\sin\beta_0\cos\varphi_2 \\ \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} &= -\sin\beta_0\sin\varphi_2 \\ \cos\beta_2\sin\alpha_{2.1} &= -\cos\beta_0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta_2\cos\lambda_2 &= \cos\varphi_2\cos\beta_0 \\ \cos\beta_2\sin\lambda_2 &= \sin\varphi_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

β_2, $\alpha_{2.1}$ und λ_2. Diese Formeln gehen aus (2) und (3) durch Vertauschung von β_1, $\alpha_{1.2}$ und λ_1 mit β_2 bezw. $\alpha_{2.1} - 180^0$ und λ_2 hervor. ($\alpha_{2.1}$ ist das Azimut der Linie P_2P_1 in P_2, vergl. Fig. 20 und 21.) Da $\cos\beta_2$ positiv sein mufs, so ist die Auflösung von (8) und (9) ganz bestimmt.

Aus β_2 folgt nunmehr die geographische Breite für Punkt P_2 mittelst der Formel

$$\tan B_2 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\tan\beta_2\,, \qquad \log\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = 0{,}0014541.798, \qquad (10)$$

wozu $\tan\beta_2$ bereits aus (8) bekannt ist.

Zur Berechnung des geographischen Längenunterschieds $L_{1.2}$ haben die Formeln (3) und (9) bereits λ_1 und λ_2 gegeben. Man hat nun weiter nach (14) und (15) S. 231:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} &= \underset{\text{in Sek.}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \cos\beta_0\,\{\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{A}'\Delta\varphi} + \mathfrak{B}'\cos 2\varphi\sin\Delta\varphi + \mathfrak{C}'\cos 4\varphi\sin 2\Delta\varphi + \cdots\} \\ 2\varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \log\mathfrak{A}' &= \log\mathfrak{a} - \frac{1}{2}M\left(1 - \frac{1}{2}\mathfrak{a}\right)k_1 - \frac{3}{8}Mk_1^2 + \cdots \\ &= 7{,}5241069.0 - 10 - \underset{\text{für Einh. d. 7. Dec.}}{[6{,}33603]k_1 - [6{,}212]k_1^2} + \cdots \\ \log\mathfrak{B}' &= \log\left(-\frac{1}{4}\varrho'' e^2 k_1 + \cdots\right) = 2{,}53678_n + \log k_1 + \cdots \\ \log\mathfrak{C}' &= \left(\frac{1}{16}\varrho'' e^2 k_1^2 + \cdots\right) = 1{,}935 + 2\log k_1 + \cdots.\text{*)} \end{aligned}\right\} (11)$$

Wenn man nicht mit *Bessels* $\mathfrak{a}$ rechnet, so ändern sich in den (11) auch die für $\log\mathfrak{B}'$ und $\log\mathfrak{C}'$ angegebenen Zahlen etwas, streng genommen aufserdem der Koefficient $\frac{1}{2}M\left(1 - \frac{1}{2}\mathfrak{a}\right)$ von k_1 in $\log\mathfrak{A}'$. Jedoch wird man diesen meist beibehalten können. Die Änderung für $\log\mathfrak{B}'$ und $\log\mathfrak{C}'$ ermittelt sich mit Rücksicht darauf, dafs jetzt darin $\log e^2 = 7{,}82441 - 10$ gesetzt ist.

---

*) Behufs teilweiser Benutzung der Rechnung von (7) setze man in der 1. Formel (11):

$$\left\{\div\right\} = \mathfrak{A}'\Delta\varphi + \mathfrak{B}'\cos 2\sigma\sin\Delta\sigma + 3\mathfrak{C}'\cos 4\sigma\sin 2\Delta\sigma + \cdots$$

Bei der Entwicklung vorstehender Formeln ist $\alpha_{1.2} < 180^0$ vorausgesetzt, damit die horizontale Entfernung s positiv werde. Man darf sich der Formeln aber ohne weiteres für jeden Wert von $\alpha_{1.2}$ bedienen und doch s immer positiv setzen. Da nun aber für $\alpha_{1.2} > 180^0$ $\cos\beta_0$ negativ wird, was nach der ursprünglichen geometrischen Bedeutung von β_0 als geographische Breite ausgeschlossen ist, so mufs man von dieser Bedeutung ganz absehen, und es ist nachzuweisen, dafs die Formeln als solche auch für $\alpha_{1.2} > 180^0$ gelten.

Sie gelten aber jedenfalls, wenn gleichzeitig ein östliches λ positiv, ein südöstliches $\alpha_{1.2}$ positiv und φ nach Osten hin positiv gerechnet werden. Denn dies entspricht Figuren, die zu den bisher angewandten Figuren 16 bis 21 symmetrisch auf der andern Seite des Meridians von P_0 liegen. Bezeichnen wir nun jene Gröfsen und die zugehörigen β mit Strichen, so ist u. a. aus (2) und (3):

$$\begin{aligned}
\sin\beta_0'\cos\varphi_1' &= \sin\beta_1' \\
\sin\beta_0'\sin\varphi_1' &= \cos\beta_1'\cos\alpha_{1.2}' \\
\cos\beta_0' &= \cos\beta_1'\sin\alpha_{1.2}' \\
\cos\beta_1'\cos\lambda_1' &= \cos\varphi_1'\cos\beta_0' \\
\cos\beta_1'\sin\lambda_1' &= \sin\varphi_1'.
\end{aligned}$$

Da aber $\beta_1' = \beta_1$ und $\alpha_{1.2}' = 360^0 - \alpha_{1.2}$ ist, so wird hieraus:

$$\begin{aligned}
\sin\beta_0'\cos\varphi_1' &= \sin\beta_1 \\
\sin\beta_0'\sin\varphi_1' &= \cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} \\
\cos\beta_0' &= -\cos\beta_1\sin\alpha_{1.2} \\
\cos\beta_1\cos\lambda_1' &= \cos\varphi_1'\cos\beta_0' \\
\cos\beta_1\sin\lambda_1' &= \sin\varphi_1'.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun anstatt β_0' die neue Hilfsgröfse $\pi - \beta_0$ und anstatt λ_1' die Gröfse $180^0 - \lambda_1$, schreiben ferner für φ_1' einfach φ_1, so folgt:

$$\begin{aligned}
\sin\beta_0\cos\varphi_1 &= \sin\beta_1 \\
\sin\beta_0\sin\varphi_1 &= \cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} \\
\cos\beta_0 &= \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2} \\
\cos\beta_1\cos\lambda_1 &= \cos\varphi_1\cos\beta_0 \\
\cos\beta_1\sin\lambda_1 &= \sin\varphi_1.
\end{aligned}$$

Diese Formeln stimmen mit den (2) und (3) überein. Ebenso gelten auch die (8) und (9) wieder. Auch die Formeln (4) bis (7) behalten ihre Geltung, da $\sin\beta_0$ sich nicht ändert und $\varphi' = \varphi$ ist.

Was endlich den Ausdruck für $L_{1.2}$ nach (11) anbetrifft, so nimmt die mit oberen Indices an λ, β_0 und φ geschriebene rechte Seite,

da $\lambda' = 180^0 - \lambda$ und $\cos\beta_0' = -\cos\beta_0$ ist, den entgegengesetzten Wert an. Die Formel giebt aber den östlichen Längenunterschied $L'_{1.2}$, welcher gleich dem negativen westlichen Längenunterschied $L_{1.2}$ ist. Somit bleibt auch diese Formel für den westlichen Längenunterschied bestehen.

§ 10. **Abkürzung der Formeln.** In den meisten Fällen wird es ausreichen, in vorstehenden Formeln die klein gedruckten Glieder wegzulassen. Es erzeugt dies in der Position von P_2 höchstens Fehler, die einer Verschiebung von 0,001 bis 0,002 Äquatorsekunden, oder 0,03 bis $0{,}06^m$ entsprechen. Für kleine Distanzen ist der Fehler aber erheblich geringer.

Betrachten wir in dieser Hinsicht zunächst die Formeln (7) für $\varDelta\varphi$ und berücksichtigen auch das in Formel (6) für $2\sigma_1$ weggelassene Glied, so findet sich als Einflufs der kleingedruckten Glieder der Betrag:

$$\varrho''\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{8}k_1^3\sin 2\sigma\sin\varDelta\sigma\sin 4\varphi_1 + \frac{9}{16}k_1^3\cos 2\sigma\sin\varDelta\sigma \\ -\frac{29}{48}k_1^3\cos 6\sigma\sin 3\varDelta\sigma\,. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Die ungünstigste Voraussetzung ist, dafs die 3 Teile hiervon sich absolut genommen summieren. Im Maximum giebt dies, $k_1 = n$ gesetzt:

$$\varrho''\frac{62}{48}n^3 \quad \text{d. i.} \quad 0{,}0012''.$$

Der wirkliche Maximalwert beträgt etwas weniger. Ist $\varDelta\sigma$ klein, so können wir φ_1 mit σ sowie $\sin\varDelta\sigma$ und $\sin 3\varDelta\sigma$ mit $\varDelta\sigma$ bezw. $3\varDelta\sigma$ vertauschen und erhalten anstatt (1)

$$-\varrho''k_1^3\varDelta\sigma\cos 2\sigma\left(7\cos^2 2\sigma - \frac{23}{4}\right), \tag{2}$$

dessen Maximalwert nahezu gleich ist

$$\pm 2\varrho''n^3\varDelta\sigma \qquad \text{d. i.} \qquad \pm 0{,}002''\varDelta\sigma.$$

Für $\varDelta\sigma = 0{,}2$ giebt dies nur 0,0004″, welcher Betrag einem Fehler in s von etwa $0{,}013^m$ entspricht.

Noch besser erkennt man die Geringfügigkeit von (2), wenn man den Einflufs auf $\log\varDelta\varphi$ ermittelt. Dieser beträgt für den Maximalwert $0{,}002''\varDelta\sigma$ nur 4 Einheiten der 9. Decimalstelle, da $0{,}002\,M : \varrho'' = 0{,}0000000.04$ ist.

Was nun die kleingedruckten Glieder in (11) anlangt, so ist deren Betrag gleich

$$\frac{1}{8}\varrho''\mathfrak{n}k_1^2\cos\beta_0\,(3\varDelta\varphi - \cos 4\varphi\sin 2\varDelta\varphi). \tag{3}$$

Setzt man für k_1 den Näherungswert $n \sin^2\beta_0$ und beachtet, dafs das Maximum von $\sin^4\beta_0 \cos\beta_0$ nahezu 0,3 beträgt, so folgt als gröfster Betrag von (3) für eine die Erde umkreisende Linie 0,0013″. Nimmt man aber $\varDelta\varphi$ klein an, so geht (3) über in

$$\frac{1}{4}\varrho'' n^3 \sin^4\beta_0 \cos\beta_0 \varDelta\varphi (3 - 2\cos 4\varphi). \tag{4}$$

Der Maximalwert hiervon ist nahezu gleich

$$0{,}4\varrho'' n^3 \varDelta\varphi \qquad \text{d. i.} \qquad 0{,}0004'' \varDelta\varphi$$

und dies giebt für $\varDelta\varphi = 0{,}2$ nur 0,0001″. Der Einflufs der kleingedruckten Glieder in (11) ist also geringer als wie in (7).

Nächstdem wird $L_{1.2}$ noch von den Vernachlässigungen in φ und $\varDelta\varphi$ beeinflufst, jedoch nur in dem Gliede λ_2 in merklicher Weise und zwar in dem Mafse, wie sich bei sphärischer Beziehung ein kleiner Fehler in der Distanz auf geographische Länge überträgt

Die sphärische Rechnung kann für mäfsige Werte der Distanz s in der Weise modificiert werden, dafs man nicht φ_2 und λ_2 mittelst der Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_2$ sucht und daraus $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\lambda$ ableitet, sondern diese direkt durch Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ bestimmt. Man erspart dann eine Decimale der Logarithmen. Die hierzu erforderlichen Formeln gehen aus den (9) S. 126 hervor, wenn anstatt B und σ gesetzt wird β bezw. φ. Sie hierher zu stellen, scheint überflüssig, da wir weiterhin für den Fall kleiner s besondere Formeln entwickeln werden, die oben gegebenen Formeln aber geographische Breite und Länge bei Anwendung 8ziffriger Logarithmen auch schon bis auf 0,002″ genau und bei Anwendung 7ziffriger Logarithmen mit Ansetzen der 8. Stelle aus den Proportionalteilen meistens in den Hundertstelsekunden richtig ergeben.

Es mag hier aber noch eine Formel für $\varDelta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ Platz finden, die bei kleinen s in der Regel zur Kontrolle dienen kann.

Das schiefwinklige Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ giebt nämlich nach dem Sinussatz sofort:

$$\sin\varDelta\lambda = \sin\varDelta\varphi \frac{\sin\alpha_{1.2}}{\cos\beta_2} = -\sin\varDelta\varphi \frac{\sin\alpha_{2.1}}{\cos\beta_1}, \tag{5}$$

welche Formel nur für Lagen von s nahe dem Pole unbrauchbar wird.

Zur Erleichterung der Rechnung können die als Funktionen von k_1 auftretenden Koefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ u. s. f. in Tafeln gebracht werden. Als Argument würde dabei $\log\tan E$ zu nehmen sein. Diese Tafeln würden nicht nur für *Bessels* Dimensionen des Erdellipsoids,

sondern für jede Werte derselben brauchbar sein, wenn bei den Logarithmen von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ bezw. log $\mathfrak{a}$ und log e^2 abgetrennt werden. Für das aufserdem in log $\mathfrak{A}'$ vorkommende kleine Glied $\mathfrak{a}k_1$ reicht ein konstanter Wert von $\mathfrak{a}$ jedenfalls aus, da sein Maximalbetrag nur $0{,}0004'' \Delta\varphi$ ist ($\Delta\varphi$ als Arcus genommen).

Indes ist auch ohne Tafeln die Rechnung verhältnismäfsig bequem.

Sehr bequeme Tafeln finden sich bei *Albrecht* S. 207 u. ff. Dieselben geben die Koefficienten der von *Bessel* 1825 aufgestellten Formeln (vergl. *Engelmann*, *Abhdlgn. von Bessel*, Bd. 3 S. 6 u. ff.) und zwar zum Teil in engerem Intervall des Arguments als die ursprünglichen *Bessel*schen Tafeln. Diese Tafeln gelten für jede beliebige Abplattung.

Bessels Formeln unterscheiden sich von den oben mitgeteilten hauptsächlich in zwei Beziehungen. Einesteils darin, dafs $\Delta\varphi$ durch successive Annäherung aus Formel (9) S. 223 abgeleitet wird, andernteils in der Bildung der Koefficienten der Reihe für $L_{1.2}$. Für diese haben wir eine weniger künstliche Ableitung gegeben.

Wenn es sich um grofse Distanzen oder um grofse Rechnungsschärfe handelt, dürfte die Rechnung nach unsern Formeln derjenigen nach *Bessel* vorzuziehen sein, weil dann seine Tafeln nicht ausreichen. Für mäfsige Distanzen jedoch und 0,001″ Schärfe ist unter Anwendung seiner Tafeln die Rechnung sehr bequem. Die indirekte Ermittlung von $\Delta\varphi$ ist hier nicht nur nicht unbequemer als die direkte mittelst $\Delta\sigma$ (denn die 2. Annäherung führt schon zum Ziele), sondern bietet auch den Vorteil, dafs dabei für die Berechnung von $L_{1.2}$ bereits einige Logarithmen (nämlich für sin $\Delta\varphi$ u. s. f.) bekannt werden.

Hansen gab 1865 in seinen *Geodätischen Untersuchungen* (Abh. der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Bd. 8) eine sehr eingehende Bearbeitung des Problems, die jedoch wenigstens für beliebige grofse Distanzen immer noch eine indirekte Rechnung von $\Delta\varphi$ erfordert und in der Entwicklung von $L_{1.2}$ vielleicht nicht ganz glücklich gewählt ist.

In ersterer Beziehung ist es wesentlich, nicht von einer Formel für $P_1P_2 = s$, sondern von einer solchen für P_0P, also von der vom Scheitel der geodätischen Linie abgerechneten Distanz auszugehen. Durch Beachtung dieses Umstandes ist es gelungen, eine direkte Formel für $\Delta\varphi$ zu erhalten.

Unsere Formeln schliefsen sich insofern und in Betreff der Einführung von $\mathfrak{a}$ im Ausdruck für $L_{1.2}$ an diejenigen von *Winterberg* an, die in Bd. 89 der *Astronom. Nachr.* Nr. 2119 u. 2120 gegeben sind. Nur läfst *Winterberg* alle Glieder weg, welche den hier klein gedruckten entsprechen. Der genannte Autor fufst seinerseits auf den von *Jacobi* mit Hilfe der elliptischen Funktionen gegebenen Reihenentwicklungen (*Crelles Journal* Bd. 53; *Astronom. Nachr.* Bd. 41, Nr. 974 u. 1006).

Abgesehen von der interessanten Lösung der Aufgabe, welche *Jacobi* mittelst Thetafunktionen in *geschlossener Form* gab, ist es aber nicht notwendig (wie unsere Entwicklungen zeigen) über die Elemente der Analysis hinauszugehen, um zu den Resultaten in Reihenform zu gelangen. Denn die Endresultate enthalten nur Reihen, die nach Vielfachen von φ und σ, zwei ganz elementar zu erlangenden Funktionen, fortschreiten. Die ein-

zige Reminiscenz an die elliptischen Funktionen ist bei *Winterberg* ein in den Koefficienten auftretender Modul q, für welchen, abgesehen von Gliedern der Ordnung q^5 und höher, die Relation besteht:

$$q = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{8} + \frac{21 k^6}{256} + \cdots \right).$$

Die Vergleichung mit S. 221 (1) zeigt, daſs $4q$ und k_1 nur um $\frac{1}{256} k^6$ von einander abweichen, mithin um eine Gröſse, die nicht mehr von Bedeutung ist. Setzt man in unseren Formeln

$$k_1 = 4q - 16q^3 + \cdots,$$

so wird man einerseits keine Verstärkung der Konvergenz der Koefficientenreihen bemerken, während andrerseits die Formeln mit denen von *Winterberg* gegebenen bei Vernachlässigung von q^3 identisch werden (abgesehen von hierbei unwesentlichen Modifikationen, die uns in anderer Beziehung wünschenswert schienen). Man vergleiche unsere ausführlichere Darlegung in den *Astronom. Nachr.* Bd. 94, Nr. 2252, S. 314; 1879.

Hansen führte in seinen Reihenentwicklungen ebenfalls q ein, während *Bessel* k_1 benutzte (von ihm ε genannt).

Wir erwähnen noch die Bearbeitung des Problems durch *Baeyer* (vergl. *Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche,* Berlin 1862 S. 52 u. ff. und besonders das 3. Heft der als Manuskript gedruckten *Wissenschaftlichen Begründung der Rechnungsmethoden des Zentralbureaus der Europäischen Gradmessung,* mit Tafeln). Die Ausdrücke *Baeyers* für s und $L_{1.2}$ setzen sich aus der Differenz je zweier Reihen zusammen, die für s nach Potenzen von $\sin^2\beta_1$ bezw. $\sin^2\beta_2$, für $L_{1.2}$ nach denen von $\cos^2\beta_1$ bezw. $\cos^2\beta_2$ fortschreiten. Die Tafeln geben die Koefficienten nicht in logarithmischer Form und sind nur brauchbar für *Bessels* Excentricität des Erdellipsoids. Eine direkte Berechnung der Koefficienten (oder ihrer Logarithmen) dürfte weniger bequem sein, wie bei den andern erwähnten Lösungen. Es gilt die Lösung aber auch wie bei den andern Autoren ohne Rücksicht auf die Gröſse von s.

In mehrerer Beziehung interessant ist die Schrift: *Die Kürzeste auf dem Erdsphäroid* von *Bachoven von Echt,* 1865. Hier wird direkt mit der geographischen Breite gerechnet, anstatt mit der reduzierten, worin wir aber keinen Vorteil erblicken können, da die Reihenkonvergenz abnimmt, wie für die lineare Länge im speziellen Falle des Meridianbogens schon gezeigt worden ist, und da im übrigen die Rechnung nicht einfacher wird. Verfasser untersucht namentlich auch den Lauf der geodätischen Linie, auf welchen wir in einem der nächsten Kapitel eingehen.

Zuerst wohl hat *Legendre* die geodätische Linie zur Übertragung geographischer Koordinaten benutzt, und zwar gab er 1806 in einer Abhandlung in den Memoiren der franz. Akademie sowohl allgemein gültige Formeln wie Reihen für kurze Distanzen (nach *Trepied,* vergl. weiterhin das 6. Kap.). Dagegen benutzt er noch 1799 S. 14 u. ff. des Werkes: *Delambre, Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien* für letzteren Zweck sphärische Distanzen. Die Einführung der Hilfsgröſse φ wird allgemein *Legendre* zugeschrieben unter Hinweis auf seine *Théorie des fonctions elliptiques,* 1825.



Nach *Soldner* (*Die bayerische Landesvermessung.* 1873; S. 533) haben schon *Euler* (*Mém. de l'Ac. de Berlin* 1753) und *du Séjour* vorgeschlagen, die terrestrischen Distanzen als kürzeste Linien zu betrachten, und demgemäfs die Übertragung geographischer Koordinaten durchgeführt.

Nach *Todhunter, History of Attraction etc.* Bd. 1; S. 83 u. 118, hat auch schon *Clairaut* in den Memoiren der Pariser Akademie für 1733 (publiziert 1735) die geodätische Linie auf Rotationsflächen behandelt und zwar ausgehend von ihrer (weiterhin zu betrachtenden) Eigenschaft als kürzeste Linie. Er fand, dafs für jeden Punkt der Abstand von der Rotationsaxe mal sin α (d. i. beim Ellipsoid $\cos\beta\sin\alpha$, S. 215) eine Konstante ist und bemerkt, dafs die Linie nur auf der Kugel eine ebene Kurve wird. Zu dieser Untersuchung wurde er durch *Cassinis* Vorgehen (vergl. jene Memoiren f. 1734), Dreieckspunkte durch Perpendikel auf einen Hauptmeridian zu beziehen, veranlafst, und wies nach, dafs diese Perpendikel streng genommen kürzeste Linien seien.

§ 11. **Zahlenbeispiel IV.** Wir wählen ein Beispiel, das von *Baeyer* (Rechnungsmethoden, 3. Heft S. 22) scharf berechnet ist und auch von *Winterberg*, *Hansen* und *Albrecht* behandelt wurde. Gegeben:

$$B_1 = 55^0\,45' \qquad \log s = 7{,}1495432.083 \qquad \alpha_{1.2} = 83^0\,23'\,51{,}200''.$$

Die *Formeln des* § 9 S. 232 u. ff. geben nun der Reihe nach*):

$$\log\tan B_1 = 0{,}1669321.238$$
$$9{,}9985458.202 - 10$$
$$\overline{\log\tan\beta_1 = 0{,}1654779.440}$$

$$\log\sin\beta_1 = 9{,}9168283.498 - 10 \qquad \log\sin\alpha_{1.2} = 9{,}9971101.048 - 10$$
$$\log\cos\beta_1 = 9{,}7513504.058 - 10 \qquad \log\cos\alpha_{1.2} = 9{,}0606205.339 - 10$$

$$\left.\begin{array}{ll}\sin\beta_0\cos\varphi_1 & = [9{,}9168283.498 - 10]\\ \sin\beta_0\sin\varphi_1 & = [8{,}8119709.397 - 10]\\ \cos\beta_0 & = [9{,}7484605.106 - 10]\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\cos\beta_1\cos\lambda_1 & = [9{,}7471248.284 - 10]\\ \cos\beta_1\sin\lambda_1 & = [8{,}8938069.077 - 10]\end{array}\right\}$$

Hiernach ist

$$\log\tan\varphi_1 = 8{,}8951425.899 - 10 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = 4^0\,29'\,28{,}76702''$$

$$\left.\begin{array}{l}\log\sin\varphi_1 = 8{,}8938069.077 - 10\\ \log\cos\varphi_1 = 9{,}9986643.178 - 10\end{array}\right\} \log\sin\beta_0 = 9{,}9181640.320 - 10,$$

$$\left.\begin{array}{l}\log\cos\lambda_1 = 9{,}9957744.226 - 10\\ \log\sin\lambda_1 = 9{,}1424565.019 - 10\end{array}\right\} \lambda_1 = 7^0\,58'\,46{,}75083''.$$

*) Zur Vergleichung mit der Rechnung nach anderen Formeln sind alle Zahlen angesetzt, die im Verlaufe der Rechnung entstehen, abgesehen von denen für die Interpolation der Logarithmen und solchen, die im Kopfe behalten werden können.

$\log \sin \beta_0$ und $\log \cos \beta_0$, ebenso wie $\log \cos \lambda_1$ und $\log \sin \lambda_1$ gehören innerhalb der Genauigkeit der Tafeln zu demselben Winkel.

Zur Berechnung von k_1 und $\Delta\sigma$ ist weiter:

$$\log \sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9 - 10$$
$$\log \sin \beta_0 = 9{,}9181640.3 - 10$$
$$\log \tan E = 8{,}8318234.2 - 10 \qquad E = 3^0\,53'\;2{,}429''$$
$$\log \tan \frac{E}{2} = 8{,}5302938.5 - 10 \qquad \frac{E}{2} = 1\;\;56\;\;31{,}2145$$
$$\log k_1 = 7{,}0605877.0 - 10;$$

$$\begin{cases} \log s = 7{,}1495432.083 \\ \log \frac{\varrho''}{b_0} = 8{,}5112358.493 - 10 \\ 2\log \cos \frac{E}{2} = 9{,}9995009.748 - 10 \end{cases}$$
$$\text{Summa} = 5{,}6602800.324$$

$$\begin{cases} \log\left(\frac{5}{4}M\right) = 6{,}73469 \\ 2\log k_1 = 4{,}12118 - 10 \end{cases}$$
$$\text{Summa} = 0{,}85587$$
$$\text{num.} = 7.176$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\sigma} = 5{,}6602793.148$$

$$\Delta\sigma = 457382{,}25862'' = 127^0\;3'\;2{,}25862''.$$

Die Berechnung von $2\sigma_1$ ergiebt:

$$\begin{cases} \log \varrho'' = 5{,}31443 \\ \log k_1 = 7{,}06059 - 10 \\ \log \sin 2\varphi_1 = 9{,}19350 - 10 \end{cases}$$
$$\text{Summa} = 1{,}56852$$

$$\begin{cases} \log\left(-\frac{1}{8}\varrho''\right) = 4{,}411_n \\ 2\log k_1 = 4{,}121 - 10 \\ \log \sin 4\varphi_1 = 9{,}489 - 10 \end{cases}$$
$$\text{Summa} = 8{,}021_n - 10$$

$$\left.\begin{array}{rl} 2\varphi_1 = & 8^0\;58'\;57{,}534'' \\ [1{,}56852] = & +\;37{,}027 \\ [8{,}021_n - 10] = & -\;\;0{,}010 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\sigma_1 = \;\;8^0\;59'\;34{,}551'' \\ 2\sigma = 136\;\;\;2\;\;36{,}810. \end{array}$$

Hieraus hat man folgende Rechnung für $\Delta\varphi$ und φ_2:

$$\begin{cases} \log\left(\frac{9}{16}M\right) = 6{,}388 \\ 2\log k_1 = 4{,}121 - 10 \end{cases}$$
$$\text{Summa} = 0{,}509$$

$$\begin{cases} \log(-\varrho'') = 5{,}3144251.3_n \\ \log k_1 = 7{,}0605877.0 - 10 \\ -[0.509] = -3.2 \end{cases}$$
$$\log \mathfrak{A} = 2{,}3750125.1_n$$

$$\begin{cases} \log\left(\frac{5}{8}\varrho''\right) = 5{,}110 \\ 2\log k_1 = 4{,}121 - 10 \end{cases}$$
$$\log \mathfrak{B} = 9{,}231 - 10$$

$$\begin{cases} \log\left(-\frac{29}{48}\varrho''\right) = 5{,}096_n \\ 3\log k_1 = 1{,}182 - 10 \end{cases}$$
$$\log \mathfrak{C} = 6{,}278_n - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log \mathfrak{A} &= 2{,}3750125.1_n \\ \log\cos 2\sigma &= 9{,}8572526.9_n - 10 \\ \log\sin \varDelta\sigma &= 9{,}9020591.7 - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 2{,}1343243.7$$

$$\left\{\begin{aligned} \log \mathfrak{B} &= 9{,}231 - 10 \\ \log\cos 4\sigma &= 8{,}561 - 10 \\ \log\sin 2\varDelta\sigma &= 9{,}983_n - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 7{,}775_n - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log \mathfrak{C} &= 6{,}278_n - 10 \\ \log\cos 6\sigma &= 9{,}825 - 10 \\ \log\sin 3\varDelta\sigma &= 9{,}557 - 10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 5{,}660_n - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \varDelta\sigma &= 127^0\,3'\;2{,}25862'' \\ [2{,}1343243.7] &= +\;\;2\;16{,}24620 \\ [7{,}775_n - 10] &= -\;\;596 \\ [5{,}660_n - 10] &= -\;\;5 \end{aligned}\right.$$
$$\begin{aligned} \varDelta\varphi &= 127^0\,5'\;18{,}49881'' \\ &= 457518{,}49881''. \end{aligned}$$

Zur numerischen Prüfung der Formeln wurde $(\varDelta\varphi - \varDelta\sigma)$ auch nach Formel (9) S. 223 berechnet. Es fand sich hierbei derselbe Wert wie vorher, nämlich:

$$2'\;16{,}24140'' - 0{,}00122'' + 0{,}00000'' = 2'\;16{,}24018''.$$

Man hat nun weiter

$$\varphi_2 = 131^0\;34'\;47{,}26583''$$

und

$$\log\sin\varphi_2 = 9{,}8739202.704 - 10, \quad \log\cos\varphi_2 = 9{,}8219472.649_n - 10.$$

Ferner:

$$\begin{aligned} \sin\beta_2 &= [9{,}7401112.969_n - 10] \\ \cos\beta_2 \cos\alpha_{2.1} &= [9{,}7920843.024_n - 10] \\ \cos\beta_2 \sin\alpha_{2.1} &= [9{,}7484605.106_n - 10] \\ \cos\beta_2 \cos\lambda_2 &= [9{,}5704077.755_n - 10] \\ \cos\beta_2 \sin\lambda_2 &= [9{,}8739202.704 - 10] \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\log\tan\alpha_{2.1} = 9{,}9563762.082 - 10 \qquad \alpha_{2.1} = 222^0\;7'\;37{,}98543''$$
$$\log\tan\lambda_2 = 0{,}3035124.949_n \qquad \lambda_2 = 116^0 26'\;3{,}37617''$$
$$\log\sin\alpha_{2.1} = 9{,}8265794.683_n - 10 \qquad \log\sin\lambda_2 = 9{,}9520392.280 - 10$$
$$\log\cos\alpha_{2.1} = 9{,}8702032.601_n - 10 \qquad \log\cos\lambda_2 = 9{,}6485267.332_n - 10,$$

und hieraus folgt mittelst obiger Gleichungen

$$\log\cos\beta_2 = 9{,}9218810.423 - 10\,,$$

dreimal übereinstimmend und einmal mit 4 anstatt 3 in der 10. Decimalstelle. Dieser Wert für $\log\cos\beta_2$ gehört innerhalb der Genauigkeit der Tafeln demselben β_2 an, wie der oben angegebene $\log\sin\beta_2$.

Es ist weiter:

$$\left\{\begin{aligned} \log\tan\beta_2 &= 9{,}8182302.546_n - 10 \\ -\log\sqrt{1-e^2} &= 0{,}0014541.798 \end{aligned}\right.$$

$$\log\tan B_2 = 9{,}8196844.344_n - 10;\quad B_2 = -\,33^0\,26'\,0{,}00002''.$$

Man hat endlich noch zur Berechnung von $L_{1.2}$:

$$\varDelta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 108^0\,27'\,16{,}62534''.$$

Ferner:

$$\left\{\begin{aligned} \log\left\{\tfrac{1}{2}M\left(1-\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\right)\right\} &= 6{,}33603 \\ \log k_1 &= 7{,}06059 - 10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{3}{8}M\right) &= 6{,}212 \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 3{,}39662 \qquad\qquad \text{Summa} = 0{,}333$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\mathfrak{a} &= 7{,}5241069.0 - 10 \\ -[3{,}39662] &= \quad -2492.4 \\ -[0{,}333] &= \quad -\quad 2.2 \end{aligned}\right.$$

$$\log\mathfrak{A}' = 7{,}5238574.4 - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(-\tfrac{1}{4}\varrho''e^2\right) &= 2{,}53678_n \\ \log k_1 &= 7{,}06059 - 10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log\left(\tfrac{1}{16}\varrho''e^2\right) &= 1{,}935 \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\log\mathfrak{B}' = 9{,}59737_n - 10 \qquad\qquad \log\mathfrak{C}' = 6{,}056 - 10$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\cos\beta_0 &= 9{,}7484605.1 - 10 \\ \log\mathfrak{A}' &= 7{,}5238574.4 - 10 \\ \log\varDelta\varphi &= 5{,}6604086.6 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 2{,}9327266.1$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\cos\beta_0 &= 9{,}74846 - 10 \\ \log\mathfrak{B}' &= 9{,}59737_n - 10 \\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}85745_n - 10 \\ \log\sin\varDelta\varphi &= 9{,}90184 - 10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log\cos\beta_0 &= 9{,}748 - 10 \\ \log\mathfrak{C}' &= 6{,}056 - 10 \\ \log\cos 4\varphi &= 8{,}572 - 10 \\ \log\sin 2\varDelta\varphi &= 9{,}983_n - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 9{,}10512 - 10 \qquad\qquad \text{Summa} = 4{,}36_n - 10$$

Es ist daher für $L_{1.2}$:

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda_2 - \lambda_1 = & 108^0\ 27'\ 16{,}62534'' \\ -\ [2{,}9327266.1] = - & 14\ 16{,}49848 \\ -\ [9{,}10512 - 10] = - & 0{,}12739 \\ +\ [4{,}36 - 10] = & 0 \end{array}\right.$$

$$L_{1.2} = 108^0\ 12'\ 59{,}99947''.$$

Die Berechnung von $\Delta\lambda$ aus der 1. Gleichung (5) S. 237 giebt

$$\log \sin \Delta\lambda = \left\{\begin{array}{l} 9{,}9018424.667 - 10 \\ 9{,}9971101.048 - 10 \\ 0{,}0781189.577 \end{array}\right\} = 9{,}9770715.292 - 10$$

mit $\Delta\lambda = 108^0\ 27'\ 16{,}6254''$. Die Bestimmung ist aus leicht ersichtlichem Grunde nicht sehr scharf und auf 0,0001″ unsicher. Übrigens paſst der Wert gut mit dem oben gefundenen. Die

$$\text{Resultate:} \left\{\begin{array}{rl|l} \alpha_{2.1} = & 222^0\ 7'\ 37{,}98543'' & 37{,}986'' \\ B_2 = & -33^0 26'\ 0{,}00002'' & 0{,}000'' \\ L_{1.2} = & 108^0 12'\ 59{,}99947'' & 60{,}000'' \end{array}\right.$$

stimmen mit den neben angeschriebenen Ergebnissen von *Baeyers* Rechnung, bei welcher zwar zehnziffrige Logarithmen benutzt, aber die Ergebnisse der logarithmischen Rechnung nur bis zu den Tausendstelsekunden incl. angeschrieben sind, völlig überein, soweit dies erwartet werden kann. *Baeyers* wie auch *Bessels* Tafeln genügen im vorliegenden Falle wegen der Gröſse von s nicht zu einer Genauigkeit auf Hunderttausendstelsekunden; nun gestatten allerdings die Formeln beider jede wünschenswerte Genauigkeit zu erreichen, aber die direkte Berechnung der Koefficienten ist, wie bemerkt, mühsamer als oben.

§ 12. **Zahlenbeispiel I.** Gegeben:

$$B_1 = 52^0\ 30'\ 16{,}7'' \qquad s = 529979{,}5784^m \qquad \alpha_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}68921''.$$

S. 43 ist bereits β_1 berechnet, sodaſs wir es hier nicht nochmals aus der Tangente zu berechnen brauchen:

$$\beta_1 = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''.$$

$$\log \sin \beta_1 = 9{,}8989537.053 - 10 \qquad \log \sin \alpha_{1.2} = 9{,}9355442.631_n - 10$$
$$\log \cos \beta_1 = 9{,}7853155.518 - 10 \qquad \log \cos \alpha_{1.2} = 9{,}7048223.603_n - 10.$$

Die *Formeln* S. 232 u. ff. geben nun:

$$\sin \beta_0 \cos \varphi_1 = [9{,}8989537.053 - 10]$$
$$\sin \beta_0 \sin \varphi_1 = [9{,}4901379.121_n - 10]$$
$$\cos \beta_0 = [9{,}7208598.149_n - 10].$$

Hieraus folgt:

$\log \tan \varphi_1 = 9{,}5911842.068_n - 10 \qquad \varphi_1 = -21^0\,18'\,40{,}05148''$

$\log \sin \varphi_1 = 9{,}5604233.251_n - 10 \qquad \log \cos \varphi_1 = 9{,}9692391.183 - 10$

$$\log \sin \beta_0 = 9{,}9297145.870 - 10.$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta_1 \cos\lambda_1 &= [9{,}6900989.332_n - 10]\\ \cos\beta_1 \sin\lambda_1 &= [9{,}5604233.251_n - 10]\end{aligned}\right\}$$

und hiernach:

$$\left.\begin{aligned}\log\cos\lambda_1 &= 9{,}9047833.814_n - 10\\ \log\sin\lambda_1 &= 9{,}7751077.733_n - 10\end{aligned}\right\}\ \lambda_1 = 216^0\,34'\,13{,}42302''.$$

Es ist nun weiter:

$$\left\{\begin{aligned}\log\sqrt{\delta} &= 8{,}9136593.9 - 10\\ \log\sin\beta_0 &= 9{,}9297145.9 - 10\end{aligned}\right.$$

$\log\tan E = 8{,}8433739.8 - 10 \qquad E = 3^0\,59'\,18{,}097''$

$\log\tan\frac{E}{2} = 8{,}5418171 \quad - 10 \qquad \frac{E}{2} = 1^0\,59'\,39{,}0485''$

$$\log k_1 = 7{,}0836342 - 10$$

$$\left|\begin{aligned}\log s &= 5{,}7242591.353\\ \log\frac{\varrho''}{b_0} &= 8{,}5112358.493 - 10\\ 2\log\cos\frac{E}{2} &= 9{,}9994737.942 - 10\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\log\left(\tfrac{5}{4}M\right) &= 6{,}73469\\ 2\log k_1 &= 4{,}16727 - 10\end{aligned}\right.$$

$\text{Summa} = 4{,}2349687.788 \qquad \text{Summa} = 0{,}90196$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{num.} = 7.979$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\sigma} = 4{,}2349679.809$$

$$\Delta\sigma = 17177{,}81736'' = 4^0\,46'\,17{,}81736''.$$

Die Berechnung von $2\sigma_1$ giebt:

$\log\sin 2\varphi_1 = 9{,}83069_n - 10$

$\log\sin 4\varphi_1 = 9{,}999_n \quad - 10$

$$\left\{\begin{aligned}2\varphi_1 &= -\ 42^0\,37'\,20{,}10''\\ \varrho'' k_1 \sin 2\varphi_1 &= -\qquad 2\ \ 49{,}34\\ -\tfrac{1}{8}\varrho'' k_1^2 \sin 4\varphi_1 &= +\qquad\quad 0{,}04\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}2\sigma_1 &= -\ 42^0\,40'\ \ 9{,}40''\\ 2\sigma &= -\ 37\ \ 53\ \ 51{,}58.\end{aligned}$$

Die Berechnung von $\Delta\varphi$ giebt:

$$
\begin{array}{llll}
\log \sin \Delta\sigma = 8{,}9200407 - 10 & & & \\
\log \cos 2\sigma = 9{,}8971371 - 10 & & \log \mathfrak{A} = 2{,}3980589_n & \\
\log \sin 2\Delta\sigma = 9{,}21959 - 10 & & \log \mathfrak{B} = 9{,}27758 - 10 & \\
\log \cos 4\sigma = 9{,}38985 - 10 & & \log \mathfrak{C} = 6{,}35_n - 10 & \\
\log \sin 3\Delta\sigma = 9{,}393 - 10 & & & \\
\log \cos 6\sigma = 9{,}604_n - 10 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\Delta\sigma = & 4^0\,46'\,17{,}81736'' \\
\mathfrak{A} \cos 2\sigma \sin \Delta\sigma = - & 16{,}41484 \\
\mathfrak{B} \cos 4\sigma \sin 2\Delta\sigma = + & 0{,}00771 \\
\mathfrak{C} \cos 6\sigma \sin 3\Delta\sigma = + & 2 \\
\hline
17161{,}41025'' = \Delta\varphi = & 4^0\,46'\;\;1{,}41025'' \\
\varphi = -\,18^0\,55'\,39''; \quad \varphi_1 = - & 21\;\;18\;\;40{,}05148 \\
\hline
\varphi_2 = - & 16^0\,32'\,38{,}64123''
\end{array}
$$

$$\log \sin \varphi_2 = 9{,}4544678.545_n - 10 \quad \log \cos \varphi_2 = 9{,}9816378.827 - 10.$$

Hiermit erhält man weiter:

$$
\left.\begin{array}{rl}
\sin \beta_2 = & [9{,}9113524.697 - 10] \\
\cos \beta_2 \cos \alpha_{2.1} = & [9{,}3841824.415 - 10] \\
\cos \beta_2 \sin \alpha_{2.1} = & [9{,}7208598.149 - 10]
\end{array}\right\}
$$

$$
\left.\begin{array}{rl}
\cos \beta_2 \cos \lambda_2 = & [9{,}7024976.976_n - 10] \\
\cos \beta_2 \sin \lambda_2 = & [9{,}4544678.545_n - 10].
\end{array}\right\}
$$

Dies giebt:

$$
\begin{array}{ll}
\log \tan \alpha_{2.1} = 0{,}3366773.734 & \alpha_{2.1} = 65^0\,16'\;\;9{,}36534'' \\
\log \tan \lambda_2 = 9{,}7519701.569 - 10 & \lambda_2 = 209^0\,27'\,43{,}28944'' \\
\log \sin \alpha_{2.1} = 9{,}9582216.230 - 10 & \log \sin \lambda_2 = 9{,}6918296.627_n - 10 \\
\log \cos \alpha_{2.1} = 9{,}6215442.496 - 10 & \log \cos \lambda_2 = 9{,}9398595.058_n - 10,
\end{array}
$$

und es wird

$$
\begin{array}{l}
\log \cos \beta_2 = 9{,}7626381.919 - 10 \quad \text{bezw. } .918 \text{ je } 2\text{mal}; \\
\log \tan \beta_2 = 0{,}1487142.779 \\
\log \tan B_2 = 0{,}1501684.577; \quad B_2 = 54^0\,42'\,50{,}60000''.
\end{array}
$$

Ferner ist $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = -\,7^0\,6'\,30{,}13358''$. Zu weiterer Kon-

trolle kann man dieses nochmals mittelst des Sinussatzes aus $\Delta\varphi$ berechnen, vergl. S. 237 (5), und erhält mit log sin $\Delta\varphi = 8{,}9196266.655 - 10$ aus $\alpha_{1.2}$ sowohl wie aus $\alpha_{2.1}$:

$$\log \sin \Delta\lambda = 9{,}0925327.367_n - 10; \quad \Delta\lambda = -7^0\, 6'\, 30{,}13350''.$$

Dieser Wert ist als der genauere beizubehalten. Bei Berechnung von $L_{1.2}$ findet sich nun weiter:

$$\begin{array}{llll}
\log \Delta\varphi & = 4{,}2345530 & \log \mathfrak{A}' = 7{,}5238439 & -10 \\
\log \cos 2\varphi & = 9{,}8974 - 10 & \log \mathfrak{B}' = 9{,}6204_n & -10 \\
\log \sin \Delta\varphi & = 8{,}9196 - 10 & \log \mathfrak{C}' = 6{,}10 & -10
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\Delta\lambda = & -\ 7^0\ 6'\ 30{,}13350'' \\
-\cos\beta_0 \,.\, \mathfrak{A}'\Delta\varphi = & +\qquad\quad 30{,}14788 \\
-\cos\beta_0 \,.\, \mathfrak{B}' \cos 2\varphi \sin \Delta\varphi = & -\qquad\quad\ 0{,}01440 \\
-\cos\beta_0 \,.\, \mathfrak{C}' \cos 4\varphi \sin 2\Delta\varphi = & \qquad\qquad\qquad 0 \\
\hline
L_{1.2} = & -\ 7^0\ 6'\ \ 0{,}00002''.
\end{array}$$

Die Berechnung des 3. und 4. Gliedes mit σ ergiebt dieselben Werte.

Man hat somit als

$$\text{Resultat:} \quad \begin{cases} B_2 = 54^0\ 42'\ 50{,}60000'' \\ L_{1.2} = \ \ 7^0\ \ 6'\ \ 0{,}00002''\text{östlich} \\ \alpha_{2.1} = 65^0\ 16'\ \ 9{,}36534''. \end{cases}$$

§ 13. **Bestimmung der geodätischen Linie aus der geographischen Lage zweier Punkte.** Diese Aufgabe ist, abgesehen vom Falle eines kleinen Abstandes beider Punkte (der in einem spätern Kapitel behandelt werden wird) noch nicht direkt gelöst worden.

Man löst aber dieselbe indirekt dadurch, dafs man aus dem schiefwinkligen sphärischen Dreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ Fig. 21 S. 248 mittelst der Seiten $\frac{\pi}{2} - \beta_1$ und $\frac{\pi}{2} - \beta_2$ sowie mit Hilfe des Zwischenwinkels $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, wofür man in 1. Annäherung $L_{1.2}$ setzt, $\alpha_{1.2}$, $\alpha_{2.1}$ und $\Delta\varphi$ bestimmt. Nun lassen sich vorläufige Werte von φ_1, φ_2, β_0, k_1 ermitteln, worauf die Gleichung zwischen $L_{1.2}$ und $\Delta\lambda$ den Unterschied beider angiebt.

Man erhält dadurch einen bessern Wert für $\Delta\lambda$, womit eine neue Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks erfolgt u. s. f., bis der Unterschied $L_{1.2} - \Delta\lambda$ konstant bleibt.

Zur Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ benutzen wir die *Gaufs*ischen Gleichungen (vergl. S. 131):

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= -\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= -\cos\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= +\cos\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= +\sin\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\sin\frac{\Delta\lambda}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

und beschränken uns bei der Auflösung auf die Annahme $\Delta\varphi < \pi$.

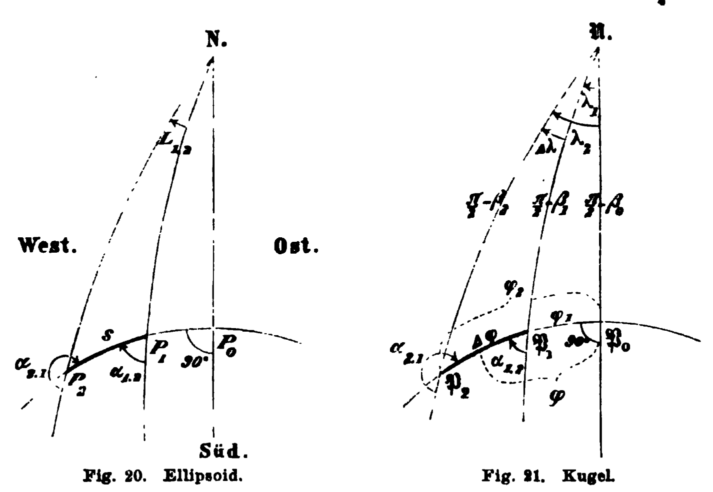


Fig. 20. Ellipsoid. Fig. 21. Kugel.

Zur Berechnung von β_1 und β_2 aus B_1 und B_2 ist die Formel anzuwenden:

$$\tan\beta = \sqrt{1-e^2}\tan B;\ \log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.202 - 10; \qquad (2)$$

zur Bestimmung von $\Delta\lambda$ aus $L_{1.2}$ aber führen die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\lambda} &= \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} + \cos\beta_0\{\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{A}'}\Delta\varphi + \mathfrak{B}'\cos 2\varphi\sin\Delta\varphi + \mathfrak{C}\cos 4\varphi\sin 2\Delta\varphi + \cdots\}\\
\log\mathfrak{A}' &= \log\mathfrak{a} - \frac{1}{2}M\left(1-\frac{1}{2}\mathfrak{a}\right)k_1 - \frac{3}{8}Mk_1^2 + \cdots\\
&= 7{,}5241069.0 - 10 - [6{,}33603]\,k_1 - \underset{\text{für Einh. der 7. Dec.}}{[6{,}212]\,k_1^2} + \cdots\\
\log\mathfrak{B}' &= \log\left(-\frac{1}{4}\varrho'' e^2 k_1 + \cdots\right) = 2{,}53678_n + \log k_1 + \cdots\\
\log\mathfrak{C}' &= \log\left(\frac{1}{16}\varrho'' e^2 k_1^2 + \cdots\right) = 1{,}935 + 2\log k_1 + \cdots;
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta_0\cos\varphi_1 &= \sin\beta_1\\
\sin\beta_0\sin\varphi_1 &= \cos\beta_1\cos\alpha_{1.2}\\
\cos\beta_0 &= \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2}
\end{aligned}\ \right|\ \text{oder auch}\ \left|\ \begin{aligned}
\sin\beta_0\cos\varphi_2 &= +\sin\beta_2\\
\sin\beta_0\sin\varphi_2 &= -\cos\beta_2\cos\alpha_{2.1}\\
\cos\beta_0 &= -\cos\beta_2\sin\alpha_{2.1}
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

$$\left.\begin{array}{c} 2\varphi = 2\varphi_1 + \Delta\varphi = 2\varphi_2 - \Delta\varphi \\ \tan E = \sqrt{\delta}\sin\beta_0; \qquad \log\sqrt{\delta} = 8{,}9136593.9 - 10 \\ \log k_1 = 2\log\tan\frac{E}{2}\,. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Bei einer ersten Berechnung von $\Delta\lambda$ wird man die Glieder mit k_1 weglassen. Wie im übrigen der Gang der Rechnung ist, lassen am besten die folgenden Beispiele erkennen.

Hier ist zunächst noch hervorzuheben, dafs für *kleine* Entfernungen ein vom vorigen etwas abweichendes Verfahren sich empfiehlt, bei welchem man in 1. Annäherung in die (1) nicht für $\Delta\lambda$ einfach $L_{1.2}$ einführt, sondern besser (wie *Albrecht* S. 80 angiebt) einen Wert, den die Anwendung der folgenden beiden Formeln liefert:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\lambda_1} = \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} + \varrho''\mathfrak{a}\cos\beta_1\cos\beta_2\sin L_{1.2} \\ \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\lambda} = \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} + \varrho''\mathfrak{a}\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\Delta\lambda_1 + \cdots \end{array}\right\} \tag{6}$$

Zu diesen Formeln gelangt man sofort, wenn man in der 1. Gleichung (3) alle Glieder mit k_1 vernachlässigt, also $\mathfrak{A}' = \mathfrak{a}$ setzt, aufserdem aber für $\Delta\varphi$ $\sin\Delta\varphi$ schreibt und nun beachtet, dafs in Strenge ist (vergl. die 3. Gleichung (4) oben und S. 237 (5)):

$$\cos\beta_0\sin\Delta\varphi = \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2}\sin\Delta\varphi = \cos\beta_2\cos\beta_1\sin\Delta\lambda.$$

Es wird sich weiterhin zeigen, dafs bei kleinen Distanzen die (6) den Wert von $\Delta\lambda$ auf Tausendstelsekunden genau geben und dann ist die ganze Rechnung, insofern man sich mit dieser Genauigkeit begnügt, als eine *direkte* zu betrachten. [Vergl. noch S. 264 (3).]

Wenn nun bei fortgesetzter Annäherungsrechnung $\Delta\lambda$ sich nicht mehr ändert, so kann dann s aus $\Delta\varphi$ abgeleitet werden nach den Formeln (vergl. S. 223 (9) und S. 233 (4) u. (5)):

$$\left.\begin{array}{l} s = b_0\,\dfrac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\begin{array}{r} \dfrac{1}{\varrho''}\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\varphi} + \left(k_1 - \frac{3}{8}k_1^3\right)\cos 2\varphi\sin\Delta\varphi \\ -\frac{1}{8}k_1^2\cos 4\varphi\sin 2\Delta\varphi \\ +\frac{1}{24}k_1^3\cos 6\varphi\sin 3\Delta\varphi + \cdots \end{array}\right\} \\ \log\dfrac{b_0}{\varrho''} = 1{,}4887641.507 \qquad \log\left(-\dfrac{b_0}{8}\right) = 5{,}90010_n \\ \log b_0 = 6{,}8031892.8 \qquad\qquad \log\dfrac{b_0}{24} = 5{,}423 \\ \log\dfrac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 2\log\sec\dfrac{E}{2} + \dfrac{5}{4}Mk_1^2 + \cdots \\ \log\left(\frac{5}{4}M\right) = 6{,}73469 \text{ und } \log\left(-\frac{3}{8}M\right) = 6{,}212_n \text{ für Einh. der 7. Dec.} \end{array}\right\} \tag{7}$$

Die Formeln des § 9 und des § 13 dieses Kapitels gestatten die Lösung aller Aufgaben, die sich auf die Lage von 2 Punkten beziehen. (Vergl. hierzu die ausführliche Darstellung von *Winterberg, Astronom. Nachr.* Bd. 95. Nr. 2271 u. ff. S. 223 u. ff., auch *Hansen, Geodät. Untersuchungen.*) Mit Hilfe des in den genannten Paragraphen Gegebenen lassen sich u. a. ohne weiteres die wichtigsten Aufgaben über *beliebig große geodätische Dreiecke* lösen, insbesondere diejenige seiner Bestimmung aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel, wenn die geographische Lage und die Azimute im Scheitel des letzteren gegeben sind.

§ 14. Zahlenbeispiel. IV. Gegeben:

$$B_1 = 55^\circ 45', \qquad B_2 = -33^\circ 26', \qquad L_{1.2} = 108^\circ 13'.$$

Wir rechnen mit 7ziffrigen Logarithmen (Tafeln v. *Bruhns*) unter Mitführung der 8. Decimalstelle aus den Proportionalteilen.

Zunächst ist nach *Formel* (2) S. 248:

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned}\log\sqrt{1-e^2} &= 9{,}9985458.2-10\\ \log\tan B_1 &= 0{,}1669321\end{aligned}\right.\\ \log\tan\beta_1 &= 0{,}1654779.2-10\\ \beta_1 &= 55^\circ 39' 38{,}500''\\ \log\sin\beta_1 &= 9{,}9168283.4-10\\ \log\cos\beta_1 &= 9{,}7513504.2-10\end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\left\{\begin{aligned}\log\sqrt{1-e^2} &= 9{,}9985458.2-10\\ \log\tan B_2 &= 9{,}8196844_n\end{aligned}\right.\\ \log\tan\beta_2 &= 9{,}8182302.2_n-10\\ \beta_2 &= -33^\circ 20' 42{,}642''\\ \log\sin\beta_2 &= 9{,}7401112.6_n-10\\ \log\cos\beta_2 &= 9{,}9218810.5-10.\end{aligned}$$

Die *Formeln* (1) S. 248 geben hiermit:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= \cos\frac{\varDelta\lambda}{2}[9{,}8456844.2-10] = [9{,}6138-10]\\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= \sin\frac{\varDelta\lambda}{2}[9{,}9917124.5_n-10] = [9{,}9003_n-10]\\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= \cos\frac{\varDelta\lambda}{2}[9{,}8532202.1-10] = [9{,}6213-10]\\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= \sin\frac{\varDelta\lambda}{2}[9{,}2867058.0-10] = [9{,}1953-10].\end{aligned}\right\}$$

Die äußersten rechten Seiten beziehen sich auf die Annahme

$$\varDelta\lambda = 108^\circ 13'.$$

Es folgt damit:

$$\varDelta\varphi = 126^\circ 57', \qquad \varDelta\varphi = 457020'', \qquad \log\varDelta\varphi = 5{,}6599;$$

$$\alpha_{1.2} = 83^\circ 13', \qquad \alpha_{2.1} = 222^\circ 7'$$

und nach den 3. *Gleichungen* (4) S. 248 übereinstimmend:

$$\log\cos\beta_0 = 9{,}7484 - 10.$$

Hiermit ergiebt sich nunmehr in 2. Annäherung aus *Formel* (3) S. 248:

$$\varDelta\lambda = L_{1.2} + [9{,}7484 - 10 + 7{,}5241 - 10 + 5{,}6599] = 108^0 27' 16''.$$

Mit diesem Werte von $\varDelta\lambda$ erhält man aus dem obigen Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}612522 \;- 10]\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}900916_n - 10]\\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}620058 \;- 10]\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}195910 \;- 10];
\end{aligned}\right\}$$

$$\varDelta\varphi = 127^0 5' 18{,}1'', \quad \alpha_{1.2} = 83^0 23' 51{,}0'', \quad \alpha_{2.1} = 222^0 7' 37{,}8''.$$

Das 1. *System* (4) S. 248 giebt jetzt:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta_0 \cos\varphi_1 &= [9{,}916828 - 10]\\
\sin\beta_0 \sin\varphi_1 &= [8{,}811974 - 10]\\
\cos\beta_0 &= [9{,}748460 - 10],
\end{aligned}\right\}$$

$$\varphi_1 = 4^0 29' 28{,}9'', \qquad \log\sin\beta_0 = 9{,}918164 - 10;$$

die beiden Werte von β_0 aus $\cos\beta_0$ und $\sin\beta_0$ stimmen hinlänglich mit einander überein.

Man hat nun zur Berechnung von $\varDelta\lambda$ aus $L_{1.2}$ in 3. Annäherung nach den *Formeln* (5) S. 249 und (3) S. 248:

$$2\varphi_1 = 8^0 58' 57{,}8'', \quad 2\varphi = 136^0 4' 16'', \quad \varDelta\varphi = 457518{,}1'';$$

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\log\sqrt{\delta} = 8{,}913659 - 10\\ \log\sin\beta_0 = 9{,}918164 - 10\end{cases}\\
&\log\tan E = 8{,}831823 - 10 \qquad E = 3^0 53' \; 2{,}4''\\
&\log\tan\frac{E}{2} = 8{,}530293 - 10 \qquad \frac{E}{2} = 1^0 56' 31{,}2''\\
&\log k_1 = 7{,}060586 - 10 \qquad \log \mathfrak{B}' = 9{,}597_n \quad - 10\\
&\log \mathfrak{A}' = 7{,}5241069 - 10 - \underset{\text{Einh. d. 7. Dec.}}{2492} = 7{,}523858 - 10,
\end{aligned}$$

wobei in $\log \mathfrak{A}'$ die Glieder mit k_1^2 weggelassen sind. Es ist ferner:

$$\begin{array}{ll}
\begin{cases}\log\cos\beta_0 = 9{,}748460 - 10\\ \log\mathfrak{A}' \;\; = 7{,}523858 - 10\\ \log\varDelta\varphi = 5{,}660408\end{cases} &
\begin{cases}\log\cos\beta_0 = 9{,}748 \;\; - 10\\ \log\mathfrak{B}' \;\;\; = 9{,}597_n - 10\\ \log\cos 2\varphi = 9{,}857_n - 10\\ \log\sin\varDelta\varphi = 9{,}902 \;\; - 10\end{cases}\\
\hline
\text{Summa} = 2{,}932726 & \text{Summa} = 9{,}104 \;\; - 10
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} L_{1.2} &= 108^0 13'\ 0'' \\ [2{,}932726] &= +\ \ 14' 16{,}497'' \\ [9{,}104-10] &= +\qquad 0{,}127'' \end{array}\right.$$
$$\Delta\lambda = 108^0 27' 16{,}624''.$$

Hiermit erhält man weiter aus dem oben mehrfach benutzten Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = [9{,}6125217.6 - 10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = [9{,}9009166.8_n - 10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = [9{,}6200575.5 - 10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = [9{,}1959100.3 - 10]; \end{array}\right\}$$

$$\Delta\varphi = 127^0 5' 18{,}47'',\quad \alpha_{1.2} = 83^0 23' 51{,}18'',\quad \alpha_{2.1} = 222^0 7' 38{,}00''.$$

Dies weicht so wenig von den vorher erhaltenen Werten ab, dafs durch eine neue Rechnung $\Delta\lambda$ höchstens ein wenig in den Tausendstelsekunden geändert werden würde. Wir bleiben daher bei den bis jetzt erhaltenen Resultaten stehen und ermitteln s.

Hierzu geben die *Formeln* (7) S. 249 mit

$$\Delta\varphi = 457518{,}47''$$

und

$$2\varphi = 136^0 4' 16{,}3'',$$

der Reihe nach:

$$\left\{\begin{array}{l} \log\Delta\varphi = 5{,}6604086.5 \\ \log\frac{b_0}{\varrho''} = 1{,}4887641.5 \end{array}\right.$$
$$\text{Summa} = 7{,}1491728.0$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log b_0 &= 6{,}803189 \\ \log k_1 &= 7{,}060586 - 10 \\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}857455_n - 10 \\ \log\sin\Delta\varphi &= 9{,}901842 - 10 \end{array}\right.$$
$$\text{Summa} = 3{,}623072_n$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\left(-\frac{b_0}{8}\right) &= 5{,}900_n \\ 2\log k_1 &= 4{,}121 - 10 \\ \log\cos 4\varphi &= 8{,}572 - 10 \\ \log\sin 2\Delta\varphi &= 9{,}983_n - 10 \end{array}\right.$$
$$\text{Summa} = 8{,}576 - 10$$

$$\begin{cases} \log\left(\frac{5}{4} M\right) = 6{,}735 \\ 2\log k_1 = 4{,}121 - 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\log\sec\frac{E}{2} = 0{,}0004990.4 \\ [0{,}856] = +\quad 7.2 \end{cases}$$

$$\log\left(\frac{5}{4} Mk_1^2\right) = 0{,}856 \qquad \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 0{,}0004997.6\,.$$

Dies wird den vorher gefundenen drei Logarithmensummen zugefügt und so erhalten:

$$s = 14114729{,}3 - 4203{,}2 + 0{,}0 = 14110526{,}1\,.$$

Die Resultate: $\begin{cases} \log s = 7{,}1495432.0 \\ \alpha_{1.2} = 83^0 23' 51{,}18'' \\ \alpha_{2.1} = 222\quad 7\ 38{,}00 \end{cases}$ | ...432.1 | 51,20 | 37,99

stimmen mit den Angaben auf S. 240 u. 244, die rechter Hand beigefügt sind, in völlig genügender Weise überein.

§ 15. **Zahlenbeispiel V.** Gegeben:

$$B_1 = 51^0 12', \quad B_2 = 51^0 55', \quad L_{1.2} = 69^0 3'.$$

Wir rechnen wieder mit 7ziffrigen Logarithmen (Tafeln von *Bruhns*) wie im vorigen Beispiel.

Die *Formel* (2) S. 248 giebt zuerst:

$$\begin{cases} \log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.2 - 10 \\ \log\tan B_1 = 0{,}0947328 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log\sqrt{1-e^2} = 9{,}9985458.2 - 10 \\ \log\tan B_2 = 0{,}1058886 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log\tan\beta_1 &= 0{,}0932786.2 & \log\tan\beta_2 &= 0{,}1044344.2 \\ \beta_1 &= 51^0 6' 22{,}603'' & \beta_2 &= 51^0 49' 24{,}545'' \\ \log\sin\beta_1 &= 9{,}8911537.2 - 10 & \log\sin\beta_2 &= 9{,}8954835.0 - 10 \\ \log\cos\beta_1 &= 9{,}7978751.1 - 10 & \log\cos\beta_2 &= 9{,}7910490.7 - 10\,. \end{aligned}$$

Die *Gleichungen* (1) S. 248 führen hierauf zu:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= \cos\frac{\Delta\lambda}{2}\,[7{,}7964889_n - 10] = [7{,}71235_n - 10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= \sin\frac{\Delta\lambda}{2}\,[9{,}7944840_n - 10] = [9{,}54789_n - 10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= \cos\frac{\Delta\lambda}{2}\,[9{,}9999915.0 - 10] = [9{,}91585 - 10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= \sin\frac{\Delta\lambda}{2}\,[9{,}8933325.1 - 10] = [9{,}64674 - 10]\,. \end{aligned}\right\}$$

Die äufsersten rechten Seiten beziehen sich auf $\Delta\lambda = 69^0 3'$. Es folgt leicht:

$$\Delta\varphi = 41^0 21' 30'' = 148890''; \qquad \log = 5{,}17287;$$

$$\alpha_{2.1} = 242^0 33' 4'', \qquad \alpha_{1.2} = 119^0 7' 20''.$$

Die 3. *Gleichungen* (4) S. 248 geben übereinstimmend:

$$\log\cos\beta_0 = 9{,}73918 - 10.$$

Hiermit findet sich in 2. Annäherung aus *Formel* (3) S. 248:

$$\Delta\lambda = L_{1.2} + [9{,}73918 - 10 + 7{,}52411 - 10 + 5{,}17287] = 69^0 7' 33{,}00''.$$

Mit diesem Werte giebt das obige Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= [7{,}7121545_n \;\; -10] \\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} &= [9{,}5483051_n \;\; -10] \\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= [9{,}9156570.7 -10] \\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} &= [9{,}6471536.0 -10];
\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta\varphi = 41^0 23' 57{,}2'', \quad \alpha_{2.1} = 242^0 30' 57{,}26'', \quad \alpha_{1.2} = 119^0 9' 18{,}26''.$$

Hiermit erhält man mittelst des 1. *Systems* (4) S. 248:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\beta_0\cos\varphi_1 &= [9{,}891154 \;\; -10] \\
\sin\beta_0\sin\varphi_1 &= [9{,}485560_n - 10] \\
\cos\beta_0 \qquad &= [9{,}739040 \;\; -10];
\end{aligned}\right\}$$

$$\varphi_1 = -21^0 27' 19{,}5'', \qquad \log\sin\beta_0 = 9{,}922344.$$

die Werte von β_0 aus $\cos\beta_0$ und $\sin\beta_0$ stimmen hinlänglich mit einander überein.

Man hat nun zur Berechnung von $\Delta\lambda$ aus $L_{1.2}$ in 3. Annäherung aus den *Formeln* (5) S. 249 und (3) S. 248:

$$2\varphi_1 = -42^0 54' 39{,}0'', \quad 2\varphi = -1^0 30' 41{,}8'', \quad \Delta\varphi = 149037{,}2'';$$

$$\log\tan E = 8{,}836003 - 10 \qquad E = 3^0 55' 17{,}2''$$

$$\log\tan\frac{E}{2} = 8{,}534464 - 10 \qquad \frac{E}{2} = 1^0 57' 38{,}6''$$

$$\log k_1 = 7{,}068928 - 10 \qquad \log \mathfrak{B}' = 9{,}606_n - 10$$

$$\log \mathfrak{A}' = 7{,}5241069 - 10 - 2541 \text{ Einh. d. 7. Dec.} = 7{,}523853 - 10,$$

wobei in $\log \mathfrak{A}'$ die Glieder mit k_1^2 weggelassen sind. Ferner ist:

$$\left\{\begin{aligned} \log\cos\beta_0 &= 9{,}739040-10 \\ \log \mathfrak{A}' &= 7{,}523853-10 \\ \log \varDelta\varphi &= 5{,}173295 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 2{,}436188$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\cos\beta_0 &= 9{,}739\ \ -10 \\ \log \mathfrak{B}' &= 9{,}606_n-10 \\ \log\cos 2\varphi &= 0{,}000 \\ \log\sin\varDelta\varphi &= 9{,}820\ \ -10 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 9{,}165_n-10$$

$$\left\{\begin{aligned} L_{1.2} &= 69^0\ 3'\ \ 0'' \\ [2{,}436188] &= +\ \ 4'\ 33{,}016'' \\ [9{,}165_n-10] &= -\qquad 0{,}146'' \end{aligned}\right.$$
$$\varDelta\lambda = 69^0\ 7'\ 32{,}870''.$$

Dies weicht von der 2. Annäherung so wenig ab, dafs jetzt in 3. Annäherung $\varDelta\varphi$, $\alpha_{2.1}$ und $\alpha_{1.2}$ kaum in den Zehntelsekunden Änderungen erleiden werden und für 7ziffrige Rechnung jedenfalls die folgenden Werte als definitiv anzusehen sind.

Es wird:

$$\frac{\varDelta\lambda}{2} = 34^0\,33'\,46{,}435''; \left\{\begin{aligned} \log\sin\frac{\varDelta\lambda}{2} &= 9{,}7538208.9-10 \\ \log\cos\frac{\varDelta\lambda}{2} &= 9{,}9156656.7-10; \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [7{,}7121546_n-10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}5483049_n-10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}9156571.7-10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}6471534.0-10]; \end{aligned}\right\}$$

$$\varDelta\varphi = 41^0\,23'\,57{,}34'',\quad \alpha_{2.1} = 242^0\,30'\,57{,}32'',\quad \alpha_{1.2} = 119^0\,9'\,18{,}20''.$$

Zur Berechnung von s geben nun die *Formeln* (7) S. 249 mit

$$\varDelta\varphi = 149037{,}34'' \text{ und } 2\varphi = -\ 1^0\,30'\,41{,}8''$$

der Reihe nach:

$$\left\{\begin{aligned} \log\varDelta\varphi &= 5{,}1732950.6 \\ \log\frac{b_0}{\varrho''} &= 1{,}4887641.5 \end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 6{,}6620592.1$$

$$\left\{\begin{aligned} \log b_0 &= 6{,}80319 \\ \log k_1 &= 7{,}06893-10 \\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}99985-10 \\ \log\sin\varDelta\varphi &= 9{,}82040-10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \log\left(-\frac{b_0}{8}\right) &= 5{,}90_n \\ 2\log k_1 &= 4{,}14\ -10 \\ \log\cos 4\varphi &= 0{,}00 \\ \log\sin 2\varDelta\varphi &= 0{,}00 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 3{,}69237 \qquad\qquad \text{Summa} = 0{,}04_n$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\left(\frac{5}{4}M\right) &= 6{,}735 \\ 2\log k_1 &= 4{,}138-10 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} 2\log\sec\frac{E}{2} &= 0{,}0005087.2 \\ [0{,}873] &= \ +\ \ 7.5 \end{aligned}\right.$$

$$\log\left(\frac{5}{4}Mk_1^2\right) = 0{,}873-10 \qquad \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 0{,}0005094.7$$

Dies wird den vorhergefundenen 3 Logarithmensummen hinzugefügt und so erhalten:

$$s = 4597996{,}6 + 4930{,}4 - 1{,}1 = 4602925{,}9^m.$$

$$\text{Resultat:}\ \left\{\begin{aligned} \log s &= 6{,}6630340 \\ \alpha_{1.2} &= 119^0\ 9'\,18{,}20'' \\ \alpha_{2.1} &= 242\ 30\ 57{,}32 \end{aligned}\right\}.$$

Hansen, der dasselbe Beispiel in seinen *Geodät. Untersuchungen* behandelt, hat a. a. O. S. 47 und S. 88 für $\alpha_{2.1}$ 57,30″ und 57,27″; $\alpha_{1.2}$ und $\log s$ (auf Meter reduziert) stimmen mit den hier erhaltenen Resultaten.

§ 16. **Zahlenbeispiel I.** Gegeben:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Königsberg}\quad B_1 = 54^0\ 42'\ 50{,}6'' \\ &\text{Berlin}\qquad\quad B_2 = 52\ \ 30\ \ 16{,}7 \end{aligned}\right\}\ L_{1.2} = +\ 7^0\ 6'.$$

Es ist zunächst nach früheren Rechnungen:

$$\beta_1 = 54^0\ 37'\ 24{,}75639''\ (\text{S. }171) \quad \beta_2 = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''\ (\text{S. }43).$$

Hiermit hat man bei Anwendung 7ziffriger Logarithmen (Tafeln von *Bruhns*) unter Beibehaltung der 8. Ziffer aus den Proportionalteilen nach den *Gleichungen* (1) S. 248:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [8{,}2855261.9\ -10]\cos\frac{\varDelta\lambda}{2} = [8{,}28470\ -10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}7742057.3_n-10]\sin\frac{\varDelta\lambda}{2} = [8{,}56604_n-10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}9999191.0\ -10]\cos\frac{\varDelta\lambda}{2} = [9.99909\ -10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}9052782.2\ -10]\sin\frac{\varDelta\lambda}{2} = [8{,}69711\ -10] \end{aligned}\right\}.$$

Die äufsersten rechten Seiten beziehen sich auf $\Delta\lambda = 7^0\,6'\,0''$. Es wird:

$$\alpha_{1.2} = 65^0\,14'\,17'' \quad \alpha_{2.1} = 239^0\,31'\,33''$$

$$\Delta\varphi = 4^0\,45'\,46'' = 17146'' \quad \log\Delta\varphi = 4{,}23416\,.$$

Die 3. *Gleichungen* (4) S. 248 geben nun in guter Übereinstimmung:

$$\log\cos\beta_0 = 9{,}72075-10\,.$$

Hiermit aber folgt in 2. Annäherung aus *Formel* (3) S. 248:

$$\Delta\lambda = L_{1.2} + [9{,}72075-10 + 7{,}52411-10 + 4{,}23416]$$

$$\Delta\lambda = 7^0\,6'\,30{,}131'' \quad \frac{\Delta\lambda}{2} = 3^0\,33'\,15{,}066''$$

$$\log\sin\frac{\Delta\lambda}{2} = 8{,}7923388.3-10 \quad \log\cos\frac{\Delta\lambda}{2} = 9{,}9991638.9-10\,.$$

Im vorliegenden Beispiel erlangt man diesen Wert etwas rascher nach den *Formeln* (6) S. 249. Diese geben:

$$\left\{\begin{array}{rl} \log(\varrho''\mathfrak{a}) & = 2{,}83853 \\ \log\cos\beta_1 & = 9{,}78532-10 \\ \log\cos\beta_2 & = 9{,}76264-10 \\ \log\sin 7^0\,6' & = 9{,}09202-10 \end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = 1{,}47851$$

$$\Delta\lambda = 7^0\,6'\,30{,}10''\,.$$

Mit $\log\sin 7^0\,6'\,30{,}10'' = 9{,}09253-10$ anstatt der 4. Zeile folgt als Summe 1,47902 und damit

$$\Delta\lambda = 7^0\,6'\,30{,}131''.$$

Jetzt wird mit dem 2. Näherungswert für $\Delta\lambda$ (man mag denselben auf die eine oder andere Art ermittelt haben):

$$\left.\begin{array}{l} \sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = [8{,}2846900.8\ -10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = [8{,}5665445.6_n-10] \\ \sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = [9{,}9990829.9\ -10] \\ \cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = [8{,}6976170.5\ -10] \end{array}\right\}$$

und hieraus:

$$\Delta\varphi = 4^0\,46'\,1{,}410'' \quad \alpha_{2.1} = 239^0\,33'\,0{,}67'' \quad \alpha_{1.2} = 65^0\,16'\,9{,}34''.$$

Das 1. *System* (4) S. 248 führt nun zu:

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta_0\cos\varphi_1 &= [9{,}9113525-10]\\ \sin\beta_0\sin\varphi_1 &= [9{,}3841825-10]\\ \cos\beta_0 &= [9{,}7208598-10]\end{aligned}\right\}$$

$$\varphi_1 = 16^0\,32'\,38{,}64'' \quad \log\sin\beta_0 = 9{,}9297146-10\,,$$

welcher letztere Wert mit $\cos\beta_0$ zu demselben Winkel gehört, wie es sein mufs.

Man hat jetzt zu den *Formeln* (5) und (3) S. 249 u. 248 in 3. Annäherung, wenn wir zum Zwecke einer anderweiten Benutzung anstatt mit 6ziffrigen (wie hier genügend ist) mit 7ziffrigen Logarithmen rechnen:

$$2\varphi_1 = 33^0\,5'\,17{,}28'' \quad 2\varphi = 37^0\,51'\,18{,}69'' \quad \varDelta\varphi = 17161{,}410''$$

$$\log\tan E = 8{,}8433740-10 \qquad E = 3^0\,59'\,18{,}097''$$

$$\log\tan\frac{E}{2} = 8{,}5418171-10 \qquad \frac{E}{2} = 1\;\;59\;\;39{,}048$$

$$\log k_1 = 7{,}0836342-10 \qquad \log\mathfrak{B}' = 9{,}6204_n-10$$

$$\log\mathfrak{A}' = 7{,}5241069-10 - (2628+2)\text{ Einh. d. 7. Dec.} = 7{,}5238439-10$$

$$\left\{\begin{aligned}\log\cos\beta_0 &= 9{,}7208598-10\\ \log\mathfrak{A}' &= 7{,}5238439-10\\ \log\varDelta\varphi &= 4{,}2345530\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}\log\cos\beta_0 &= 9{,}7209\;-10\\ \log\mathfrak{B}' &= 9{,}6204_n-10\\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}8974\;-10\\ \log\sin\varDelta\varphi &= 8{,}9196\;-10\end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = 1{,}4792567 \qquad \text{Summa} = 8{,}1583_n-10$$

$$\left\{\begin{aligned}L_{1.2} &= 7^0\,6'\;\;0{,}00000''\\ [1{,}4792567] &= +\quad 30{,}14788''\\ [8{,}1583_n-10] &= -\quad\;\, 0{,}01440''\end{aligned}\right.$$

$$\varDelta\lambda = 7^0\,6'\,30{,}13348''\,.$$

Von dem vorstehenden Wert weicht aber der in 2. Annäherung erhaltene nur in der 3. Decimale der Sekunden um 2 Einheiten ab. Man kann daher für die Rechnung mit 7ziffrigen Logarithmen bei den bisherigen Resultaten $\alpha_{1.2}$, $\alpha_{2.1}$ und $\varDelta\varphi$ stehen bleiben. Man hätte sogar die letzte Berechnung von $\varDelta\lambda$ ganz weglassen können, wenn zum voraus bekannt gewesen wäre, dafs $\varDelta\lambda$ in 2. Annäherung bis auf 0,002″ richtig sei. In dieser Beziehung wird der folgende Paragraph Aufschlufs geben.

Zur Berechnung von s erhält man jetzt nach den *Formeln* (7) S. 249 mit

$$\Delta\varphi = 17161{,}410'' \quad \text{und} \quad 2\varphi = 37^0\, 51'\, 18{,}69''$$

der Reihe nach:

$$\left\{\begin{array}{l} \log \Delta\varphi = 4{,}2345529.7 \\ \log \frac{b_0}{\varrho''} = 1{,}4887641.5 \end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = 5{,}7233171.2$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log b_0 &= 6{,}80319 \\ \log k_1 &= 7{,}08363-10 \\ \log\cos 2\varphi &= 9{,}89739-10 \\ \log\sin \Delta\varphi &= 8{,}91963-10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} \log\left(-\frac{b_0}{8}\right) &= 5{,}90_n \\ 2\log k_1 &= 4{,}17\ -10 \\ \log\cos 4\varphi &= 9{,}39\ -10 \\ \log\sin 2\Delta\varphi &= 9{,}22\ -10 \end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = 2{,}70384 \qquad\qquad \text{Summa} = 8{,}68_n-10$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \log\left(\frac{5}{4} M\right) &= 6{,}735 \\ 2\log k_1 &= 4{,}167-10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} 2\log\sec\frac{E}{2} &= 0{,}0005262.0 \\ [0{,}902] &= \quad +\ 8.0 \end{array}\right.$$

$$\log\left(\frac{5}{4} M k_1^2\right) = 0{,}902 \qquad \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 0{,}0005270.0\,.$$

Dies wird den vorhergefundenen 3 Logarithmensummen hinzugefügt und so erhalten:

$$s = 529473{,}32 + 506{,}26 - 0{,}04 = 529979{,}54^m\,.$$

Die

$$\text{Resultate} \left\{\begin{array}{rl} s &= 529979{,}54^m \\ \alpha_{1.2} &= \ \ 65^0\, 16'\, 9{,}34'' \\ \alpha_{2.1} &= 239^0\, 33'\, 0{,}67'' \end{array}\right\}$$

stimmen befriedigend mit der Rechnung S. 244 u. ff. überein.

Um eine noch gröfsere Genauigkeit zu erhalten, wenden wir nun im Folgenden 10ziffrige Logarithmen an.

Es ist mittelst des oben gefundenen Wertes für $\Delta\lambda$:

$$\frac{\Delta\lambda}{2} = 3^0\, 33'\, 15{,}06674'' \quad \left\{\begin{array}{l} \log\sin\frac{\Delta\lambda}{2} = 8{,}7923388.593-10 \\ \log\cos\frac{\Delta\lambda}{2} = 9{,}9991638.814-10 \end{array}\right.$$

und indem wir wie oben setzen:

$$\beta_1 = 54^0\, 37'\, 24{,}75639'' \qquad \beta_2 = 52^0\, 24'\, 43{,}01137'',$$

nach den *Gleichungen* (1) S. 248:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [8{,}2846900.557\ -10]\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}+\alpha_{1.2}}{2}\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [8{,}5665446.196_n-10]\\
\sin\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [9{,}9990829.928\ -10]\\
\cos\frac{\alpha_{2.1}-\alpha_{1.2}}{2}\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= [8{,}6976170.810\ -10]
\end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_{2.1} = 239^0\ 33'\ 0{,}68891'' \qquad \alpha_{1.2} = 65^0\ 16'\ 9{,}36499''$$

$$\left.\begin{aligned}
\log\sin\frac{\varDelta\varphi}{2} &= 8{,}6189725.722-10\\
\log\cos\frac{\varDelta\varphi}{2} &= 9{,}9996240.975-10
\end{aligned}\right\}\ \frac{\varDelta\varphi}{2} = 2^0\ 23'\ 0{,}70512''$$

$$\varDelta\varphi = 4^0\ 46'\ 1{,}41024'' = 17161{,}41024''\,.$$

Für E und k_1, sowie 2φ können die Werte der früheren Rechnung beibehalten werden.

Zur Berechnung von s ist:

$$\frac{3}{8}Mk_1^2 = 2 \text{ Einh. d. 7. Dec.} \qquad \left\{\begin{aligned}
\log\varDelta\varphi &= 4{,}2345529.731\\
\log\frac{b_0}{\varrho''} &= 1{,}4887641.507
\end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 5{,}7233171.238$$

$$\left\{\begin{aligned}
\log b_0 &= 6{,}8031893\\
\log\left(k_1-\frac{3}{8}k_1^3\right) &= 7{,}0836340-10\\
\log\cos 2\varphi &= 9{,}8973875-10\\
\log\sin 2\varDelta\varphi &= 8{,}9196266-10
\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}
\log\left(-\frac{b_0}{8}\right) &= 5{,}9001_n\\
2\log k_1 &= 4{,}1673\ -10\\
\log\cos 4\varphi &= 9{,}3924\ -10\\
\log\sin 2\varDelta\varphi &= 9{,}2191\ -10
\end{aligned}\right.$$
$$\text{Summa} = 2{,}7038374 \qquad\qquad \text{Summa} = 8{,}6789_n-10$$

$$\left\{\begin{aligned}
\log\left(\frac{5}{4}M\right) &= 6{,}73469\\
2\log k_1 &= 4{,}16727-10
\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned}
2\log\sec\frac{E}{2} &= \quad 0{,}0005262.058\\
[0{,}90196] &= + \qquad\quad 7.979
\end{aligned}\right.$$

$$\log\left(\frac{5}{4}Mk_1^2\right) = 0{,}90196 \qquad \log\frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1} = 0{,}0005270.037$$

[5,7238441.275]	=	529473,3769
[2,7043644]	= +	506,2493
[8,6794$_n$—10]	= —	0,0478
Glied mit sin $3\Delta\varphi$	=	0
	s =	529979,5784

Resultat: $\begin{cases} s = 529979{,}5784 \\ \log s = 5{,}7242591.353 \\ \alpha_{1.2} = 65^0\,16'\,9{,}36499'' \\ \alpha_{2.1} = 239^0\,33'\,0{,}68891''. \end{cases}$

Diese Zahlen sind nicht in völliger Übereinstimmung mit der Rechnung S. 244 u. ff., weil dort $\alpha_{1.2}$ um 0,0003" zu grofs angenommen ist. Zunächst ist dort auch $\alpha_{2.1}$ entsprechend gröfser um 0,0003". Dem gröfsern Azimut daselbst gehört ferner eine Verkleinerung von B_2 um 0,00002" und eine Vergröfserung des absoluten Betrags der Längendifferenz um 0,00002" zu, welche letztere wenigstens in der That nach S. 247 vorhanden ist.

§ 17. **Die Konvergenz der Annäherungsrechnungen bei Lösung der Aufgabe des § 13.** Wir betrachten zunächst die Methode der ausschliefslichen Anwendung der *Gaufs*ischen Gleichungen. Dieselbe setzt in 1. Annäherung $L_{1.2}$ für $\Delta\lambda$ und hierauf in 2. Annäherung $\Delta\lambda = L_{1.2} + \mathfrak{a} \cos \beta_0' \,\Delta\varphi'$, wobei $\cos \beta_0' \,\Delta\varphi'$ das Ergebnis der 1. Annäherungsrechnung für $\cos \beta_0 \Delta\varphi$ bezeichnet. Subtrahiert man nun diesen 2. Näherungswert von dem strengen Wert

$$L_{1.2} + \mathfrak{a} \cos \beta_0 \left\{\Delta\varphi \left(1 - \frac{1}{2}\,k_1\right) - \frac{1}{2}\,k_1 \cos 2\varphi \sin \Delta\varphi + \cdots\right\},$$

in welchem Ausdruck wir in der Parenthese $k_1{}^2$ vernachlässigt haben, so folgt als Fehler des 2. Näherungswertes im Sinne einer Verbesserung:

$$\mathfrak{a}\left\{(\cos\beta_0\Delta\varphi - \cos\beta_0'\Delta\varphi') - \frac{1}{2}\,k_1 \cos\beta_0\,(\Delta\varphi + \sin\Delta\varphi\cos 2\varphi) + \cdots\right\}. \quad (1)$$

Indem wir uns jetzt auf kleine Distanzen beschränken, können wir im 1. Teil von (1) für $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi'$ die Sinus dieser Winkel, im 2. Teil aber für $\sin\Delta\varphi$ einfach $\Delta\varphi$ setzen. Da nun (vergl. S. 249 die Entwicklung zu (6)):

$$\cos \beta_0 \sin \Delta\varphi - \cos \beta_0' \sin \Delta\varphi' = \cos \beta_1 \cos \beta_2 (\sin \Delta\lambda - \sin L_{1.2})$$

ist, da ferner wegen $L_{1.2} = \Delta\lambda - \mathfrak{a} \cos \beta_0 \,\Delta\varphi + \cdots$ für kleine Distanzen in hinreichender Annäherung

$$\sin \Delta\lambda - \sin L_{1.2} = \mathfrak{a} \cos \beta_0 \cos \Delta\lambda \,\Delta\varphi + \cdots$$

gesetzt werden kann, überdies aber mit Rücksicht auf die 1. Gleichungen (4) S. 248 und die Relation $1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi$, ebenfalls ausreichend genau

$$\frac{1}{2} k_1 \cos \beta_0 \,\varDelta\varphi\, (1 + \cos 2\varphi) = \frac{1}{2} \mathfrak{k} \cos \beta_0 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \,\varDelta\varphi + \cdots$$

wird, so läſst sich (1) für kleine Distanzen auf die Form bringen:

$$\mathfrak{k}^2 \cos \beta_0 \,\varDelta\varphi \left(\cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \varDelta\lambda - \frac{1}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2\right) + \cdots . \tag{2}$$

Beachtet man endlich noch, daſs $\cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \varDelta\lambda + \sin \beta_1 \sin \beta_2 = \cos \varDelta\varphi$ ist, so folgt einfacher:

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{k}^2 \cos \beta_0 \,\varDelta\varphi \left(\cos \varDelta\varphi - \frac{3}{2} \sin \beta_1 \sin \beta_2\right) + \cdots \\ \log \mathfrak{k}^2 = 5{,}048 - 10 . \end{array}\right\} \tag{3}$$

Bei der Ableitung dieser Formel sind auſser Gliedern mit $\mathfrak{k}^3$ insbesondere solche mit $\mathfrak{k}^2 \varDelta\varphi^3$ vernachlässigt, und es wäre daher konsequent, auch noch für $\cos \varDelta\varphi$ einfach 1 zu setzen. Indessen gewinnt durch Beibehaltung von $\cos \varDelta\varphi$ die Schärfe des Ausdrucks, namentlich in höhern Breiten, weil hier die bisher vernachlässigten Glieder der Ordnung $\mathfrak{k}^2 \varDelta\varphi^3$ sich erheblich verkleinern.*)

Man erkennt aus der Gestalt des Ausdrucks (3), daſs die Konvergenz der Annäherungsrechnung hauptsächlich von dem Betrage der reduzierten Breite bedingt ist. Setzt man, um dies weiter zu verfolgen, $\cos \beta_0 = \cos \beta \sin \alpha + \cdots$, worin β das arithmetische Mittel von β_1 und β_2, und α das arithmetische Mittel von $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1} - 180^0$ bedeutet, setzt man auſserdem $\cos \varDelta\varphi = 1$, so geht (3) über in

$$\mathfrak{k}^2 \,\varDelta\varphi \sin \alpha \,.\, \cos \beta \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta\right) + \cdots . \tag{4}$$

Der Faktor $\cos \beta \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \beta\right)$ ist für $\beta = 0$ gleich 1, für $\sin \beta = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ d. i. für $\beta = \pm 55^0$ und ebenso für $\beta = \pm 90^0$ gleich null und hat für $\beta = 0$, sowie für $\sin \beta = \pm \frac{2}{3}\sqrt{2}$ d. i. für $\beta = \pm 70^0$ Maxima.

Das letztere, kleinere Maximum beträgt $-\frac{1}{9}$. Für $\beta = 48^0$ ist der Faktor $+\frac{1}{9}$.

---

*) Diese Glieder lassen sich in nachstehenden Ausdruck zusammenziehen, $\varDelta\varphi$ als Arcus genommen:

$$\frac{1}{12} \varrho'' \mathfrak{k}^2 \cos \beta_0 \varDelta\varphi^3 \left\{\cos^2 \beta \,(1 - 6 \sin \alpha_{1.2} \sin \alpha_{2.1}) - 1\right\} .$$

Es ist daher nur für die Zonen nördlich von $\beta = 48^0$ und südlich von $\beta = -48^0$ bis zu den Polen die Konvergenz der Annäherungsrechnung eine ungewöhnlich starke, indem hier der Fehler des 2. Näherungswertes von $\Delta\lambda$ kleiner als $\Delta\varphi : 800000$ bleibt.

Im allgemeinen geht aber der Fehler bis $\Delta\varphi : 90000$, sodafs er selbst für sehr kleine Entfernungen nicht zu vernachlässigen sein wird.

Der Ausdruck (3) kann jedoch dann dazu dienen, den 2. Näherungswert für $\Delta\lambda$ sofort in einen in der Regel als definitiv zu betrachtenden Wert überzuführen.

Zahlenbeispiel V S. 253 giebt zu dem Ausdruck (3):

$$\cos\Delta\varphi = 0{,}750 \qquad \frac{3}{2}\sin\beta_1\sin\beta_2 = 0{,}918$$

$$\log\Delta\varphi = 5{,}173 \qquad \log\cos\beta_0 = 9{,}739 - 10$$

Verbesserung von ($\Delta\lambda = 69^0\,7'\,33{,}00''$) gleich $-\,0{,}15''$.

Der genaue Wert ist $-\,0{,}13''$; die Formel (3) pafst hiernach trotz der Gröfse der Distanz noch ganz leidlich.

Zahlenbeispiel I S. 256 giebt zu dem Ausdruck (3):

$$\cos\Delta\varphi = 0{,}997 \qquad \frac{3}{2}\sin\beta_1\sin\beta_2 = 0{,}969$$

$$\log\Delta\varphi = 4{,}234 \qquad \log\cos\beta_0 = 9{,}721 - 10$$

Verbesserung von ($\Delta\lambda = 7^0\,6'\,30{,}131''$) gleich $+\,0{,}0029''$.

Rechnet man aber S. 256 u. 257 in 1. Annäherung 7ziffrig anstatt 5ziffrig, so folgt als 2. Näherungswert für $\Delta\lambda$ $7^0\;6'\;30{,}1307''$; dazu $0{,}0029''$, giebt bis auf $0{,}0001''$ den strengen Wert von S. 258.

§ 18. **Fortsetzung: 2. Methode.** Wenden wir bei Beginn der Annäherungsrechnungen die Formeln (6) S. 249 an, so entspricht der 2. Näherungswert für $\Delta\lambda$ bis auf einen unerheblichen Fehler der Gleichung

$$\Delta\lambda = L_{1.2} + \mathfrak{a}\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\Delta\lambda.$$

Vergleicht man dies mit dem oben angegebenen strengen Wert, so ergiebt sich als Fehler dieses Näherungswertes im Sinne einer Verbesserung:

$$\mathfrak{a}\cos\beta_0\left\{\Delta\varphi - \frac{1}{2}k_1(\Delta\varphi + \sin\Delta\varphi\cos 2\varphi)\right\} - \mathfrak{a}\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\Delta\lambda| + \cdots (1)$$

Setzen wir hierin

$$\cos\beta_0\Delta\varphi = \cos\beta_0\sin\Delta\varphi + \frac{1}{6}\cos\beta_0\sin^3\Delta\varphi + \cdots$$

$$= \cos\beta_1\cos\beta_2\sin\Delta\lambda + \frac{1}{6}\cos\beta_0\,\Delta\varphi\sin^2\Delta\varphi + \cdots$$

und schreiben für $k_1 \Delta\varphi$ im 2. Teile der geschlungenen Parenthese $k_1 \sin \Delta\varphi$, so geht (1) nach weiterer Reduktion über in:

$$\mathfrak{k} \cos \beta_0 \Delta\varphi \left(\frac{1}{6} \sin^2 \Delta\varphi - \frac{1}{2} \mathfrak{k} \sin \beta_1 \sin \beta_2\right) + \cdots. \tag{2}$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (3) auf Seite 262 spricht für $\Delta\varphi < \frac{1}{7} \cos \beta$ zu Gunsten der 2. Methode. Überschreitet aber $\Delta\varphi$ diesen Betrag, so wächst der Ausdruck (2) weit rascher als jener Ausdruck (3).

Für nicht kleine Distanzen ist daher die 1. Methode (Anwendung der *Gaufs*ischen Gleichungen) der 2. Methode vorzuziehen.

In der That ist im Falle des *Beispiels* V S. 253 der nach der letzteren bestimmte 2. Näherungswert für $\Delta\lambda$ um 23″ fehlerhaft, nämlich gleich 69° 7′ 10″, 0 anstatt 32″, 9.

Für Seiten mefsbarer Dreiecke kann nach Formel (2), indem $\frac{1}{6} \sin^2 \Delta\varphi$ gegen $\frac{1}{2} \mathfrak{k} \sin \beta_1 \sin \beta_2$ zurücktritt, eine stärkere Annäherung als durch (6) S. 249 dadurch erzielt werden, dafs man $\Delta\lambda$ aus der Gleichung

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\lambda} = \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} + \varrho'' \mathfrak{k} \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \Delta\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \mathfrak{k} \sin \beta_1 \sin \beta_2\right) \tag{3}$$

bestimmt. Dieser Wert ist sodann in die Formeln (1) S. 248 einzuführen.

Albrecht hat in Nr. 2294 der *Astronom. Nachr.* Bd. 96 S. 211 (1880) seine Methode ausführlich behandelt und den Grad ihrer Annäherung bestimmt.

§ 19. **Die Aufgabe des § 13 im allgemeinen.** Im § 13 S. 248 wurde vorausgesetzt, dafs $\Delta\varphi < \pi$ sei und dafs die Annäherungsrechnung auch unbedingt zur Lösung führen müsse. Allein das erstere ist eine Beschränkung und das letztere tritt nicht immer ein.

Zunächst sieht man sofort, dafs die Gleichungen (1) S. 248 aufser von einem Wert $\Delta\varphi < \pi$, den wir mit $\Delta\varphi'$ bezeichnen wollen, noch von unendlich vielen anderen Werten, die zwischen π und 2π, 2π und 3π, u. s. f. liegen, befriedigt werden. Jedem derselben entspricht je eine besondere geodätische Linie. Die kürzeste Verbindung gehört aber zu $\Delta\varphi'$, was für mäfsig grofse Distanzen unmittelbar klar ist, aber sich auch als allgemein gültig im 7. Kapitel bei der Untersuchung des Laufes der geodätischen Linien erweisen wird.

An dieser Stelle findet auch derjenige Fall seine Erledigung, für welchen die Methoden des § 13 mehr oder weniger versagen. Es tritt dies nämlich ein bei nahezu diametraler Lage der Punkte. Wenn man hier in 1. Annäherung $L_{1.2}$ für $\Delta\lambda$ setzt, so begeht man nahezu den Fehler 180° $\mathfrak{k} \cos \beta_0$ d. i. 0,6° $\cos \beta_0$, indem $\Delta\varphi$ in Gradmafs nahezu 180° beträgt. Es läfst sich aber leicht und zwar am be-

quemsten geometrisch erkennen, dafs bei nahezu diametraler Lage der Hilfspunkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ auf der Kugel (wenn insbesondere $\beta_1 + \beta_2$ von der Ordnung $0{,}6^0 \cos \beta_0$ ist) eine geringe Verschiebung des einen derselben in geographischer Länge die Lage des sie verbindenden gröfsten Kreises d. h. den aus der Annäherungsrechnung hervorgehenden Wert $\cos \beta_0$ stark beeinflufst. In extremen Fällen, wie z. B. für $\beta_1 = \beta_2 =$ null, kann sogar von einer successiven Annäherung fortgesetzter Rechnungen nicht mehr die Rede sein.

Wie man nun hier im allgemeinen einen wirklichen 1. Näherungswert für $\varDelta\lambda$ ableitet, wird a. a. O. gezeigt. Mit Benutzung dieses letztern kann dann nach § 13 weiter gerechnet werden.

Hansen hat im 2. Abschnitt seiner *Geodätischen Untersuchungen* die Aufgabe des § 13 S. 247 (wie zahlreiche andere) mit Hilfe des vertikalen Schnitts gelöst, der von einem der beiden Punkte nach dem andern geführt werden kann. Es erscheint uns diese Methode aber als keine besonders vorteilhafte.

Eine direkte ist sie insofern nicht, als bei grofsen Distanzen die Resultate, welche aus der Reduktion der Angaben für den vertikalen Schnitt auf solche für die geodätische Linie hervorgehen, immer noch durch Differentialformeln korrigiert werden müssen.

Aufserdem werden die Formeln unbrauchbar für nahezu diametrale Punkte, wie die Betrachtung der (52) S. 60 a. a. O. unter Voraussetzung von χ nahezu 180^0 zeigt. (Nur irrtümlich ist daselbst von *Hansen* die Allgemeingültigkeit der aus Reihenentwicklungen abgeleiteten Formeln behauptet.)

Endlich ist der Formelapparat bei *Hansen* weniger einfach, als der hier in § 13 gegebene, der noch den andern auch nicht zu unterschätzenden Vorteil hat, sich wenig von dem für die Aufgabe des § 9 S. 232 zu unterscheiden.

Zur Vergleichung können die Beispiele IV und V S. 250 u. 253 dienen, die *Hansen* S. 87 u. ff. a. a. O. behandelt.

---

6. Kapitel.

Differentialformeln und Reihenentwicklungen für die geodätische Linie.

§ 1. Drehung einer geodätischen Linie $P_1 P_2$ um einen ihrer Endpunkte. Wir denken uns die Linie $P_1 P_2$ von der konstanten Länge s um den Punkt P_1 gedreht. Nach S. 220 (6) hat man

$$s = a_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}\, d\varphi, \tag{1}$$

wobei β als Funktion von φ mit Rücksicht auf die feste Lage von P_1 durch die Formeln gegeben ist:

$$\sin \beta = \sin \beta_0 \cos \varphi \qquad \cos \beta_0 = \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}\,. \tag{2}$$

Ändert sich $\alpha_{1.2}$ um den differentialen Betrag $\delta\alpha_{1.2}$, so ändert sich, wie die (2) zeigen, β_0 und infolge dessen bei konstantem Werte von φ auch β, außerdem aber φ_1, weil β_1 konstant bleibt. Diese Änderungen haben endlich noch nach Maßgabe von (1) eine Änderung von φ_2 zur Folge.

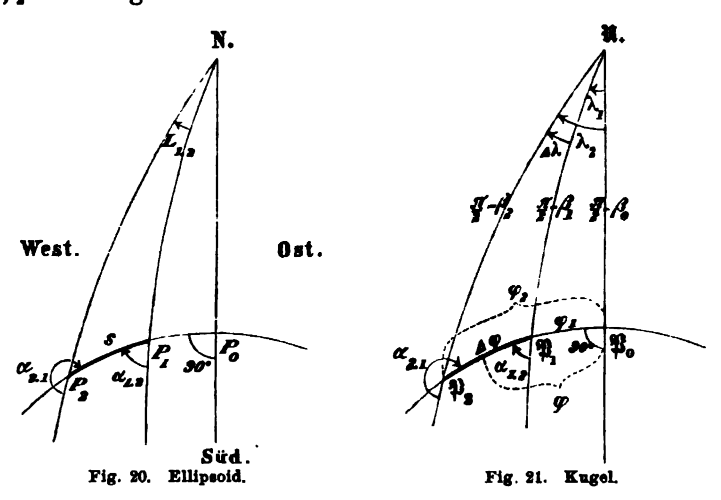


Fig. 20. Ellipsoid. Fig. 21. Kugel.

Bezeichnen wir die Änderungen durch Vorsetzen eines δ an die betreffende Variable und beachten, daß δs = null sein soll, so giebt (1):

$$0 = w_2\delta\varphi_2 - w_1\delta\varphi_1 + e^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\cos\beta\,\sin\beta\,\delta\beta}{w}\,d\varphi, \tag{3}$$

wobei wie früher w im allgemeinen zur Abkürzung für $\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}$ dient. $\delta\beta$ ist in Bezug auf konstanten Wert von φ zu verstehen. Hierzu geben die (2):

$$\delta\beta = \quad \sec\beta\cos\beta_0\cos\varphi\,\delta\beta_0$$
$$\delta\beta_0 = -\csc\beta_0\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2}\,\delta\alpha_{1.2}.$$

Betrachtet man nun die Relationen der sphärischen Fig. 21 [vergl. S. 248 (4)], so findet sich aus Vorstehendem:

$$\left.\begin{aligned}\delta\beta_0 &= -\sin\varphi_1\,\delta\alpha_{1.2}\\ \delta\beta &= -\sec\beta\cos\beta_0\cos\varphi\sin\varphi_1\,\delta\alpha_{1.2}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dies führen wir in (3) ein und erhalten, da auch $\sin\beta = \sin\beta_0\cos\varphi$ ist:

$$\left.\begin{aligned}0 &= w_2\delta\varDelta\varphi + (w_2 - w_1)\delta\varphi_1 - e^2\sin\beta_0\cos\beta_0\sin\varphi_1 J\delta\alpha_{1.2}\\ \text{für}\quad \delta\varDelta\varphi &= \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und

$$J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2 \varphi}{w} \, d\varphi. \tag{6}$$

Drückt man in (5) $\delta \varphi_1$ durch $\delta \alpha_{1.2}$ aus, so giebt diese Gleichung ein Mittel zur Bestimmung von $\delta \varDelta \varphi$, und man kann weiterhin mittelst des sphärischen Dreiecks $\mathfrak{N} \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ Fig. 21 die zu $\delta \varDelta \varphi$ und $\delta \alpha_{1.2}$ gehörigen Änderungen von β_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ finden. Zunächst folgt aus $\sin \beta_1 = \sin \beta_0 \cos \varphi_1$ durch Differentiation und mit Rücksicht auf die 1. Gleichung (4):

$$\sin \beta_0 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 = \quad \cos \beta_0 \cos \varphi_1 \delta \beta_0 ,$$

oder

$$\delta \varphi_1 = - \cot \beta_0 \cos \varphi_1 \delta \alpha_{1.2}.$$

Hiermit giebt die 1. Gleichung (5):

$$\delta \varDelta \varphi = \left\{ (w_2 - w_1) \cot \beta_0 \cos \varphi_1 + e^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 \sin \varphi_1 J \right\} \frac{\delta \alpha_{1.2}}{w_2}. \tag{7}$$

Zur Bestimmung von $\delta \beta_2$ und $\delta \varDelta \lambda$ hat man aus der sphärischen Fig. 22, in welcher $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_2' = \sin \varDelta \varphi \alpha \, \delta \alpha_{1.2}$ und $\mathfrak{P}_2' \mathfrak{P}_3' = \delta \varDelta \varphi$ ist, direkt durch Projektion von $\mathfrak{P}_3'$ auf $\mathfrak{N} \mathfrak{P}_2$:

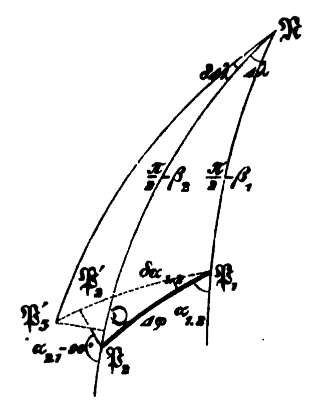


Fig. 22.

$$\delta \beta_2 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{Q} \tag{8}$$

$$= \cos \alpha_{2.1} \delta \varDelta \varphi - \sin \varDelta \varphi \sin \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2}$$

und

$$\cos \beta_2 \delta \varDelta \lambda = \mathfrak{P}_3' \mathfrak{Q} \tag{9}$$

$$= - \sin \alpha_{2.1} \delta \varDelta \varphi - \sin \varDelta \varphi \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2}.$$

Führen wir (7) in (8) und (9) ein, so ergiebt sich:

$$\delta \beta_2 = \left\{ \begin{array}{c} w_2 (\cot \beta_0 \cos \varphi_1 \cos \alpha_{2.1} - \sin \varDelta \varphi \sin \alpha_{2.1}) \\ - w_1 \cot \beta_0 \cos \varphi_1 \cos \alpha_{2.1} + e^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 \sin \varphi_1 \cos \alpha_{2.1} J \end{array} \right\} \frac{\delta \alpha_{1.2}}{w_2}$$

und

$$\delta \varDelta \lambda = \left\{ \begin{array}{c} - w_2 (\cot \beta_0 \cos \varphi_1 \sin \alpha_{2.1} + \sin \varDelta \varphi \cos \alpha_{2.1}) \\ + w_1 \cot \beta_0 \cos \varphi_1 \sin \alpha_{2.1} - e^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 \sin \varphi_1 \sin \alpha_{2.1} J \end{array} \right\} \frac{\delta \alpha_{1.2}}{w_2 \cos \beta_2}. \tag{10}$$

Multipliziert man die Formel für $\delta \beta_2$ mit $\tan \beta_0 \sin \varphi_2 \tan \alpha_{2.1}$, d. i. wegen $\tan \beta_0 \sin \varphi_2 = \cot \alpha_{2.1}$ soviel wie 1, so geht sie über in:

$$\delta\beta_2 = -\frac{\mathfrak{m}\sin\alpha_{2.1}}{a_0 w_2}\,\delta\alpha_{1.2}, \tag{11}$$

wobei gesetzt ist:

$$\mathfrak{m} = a_0\,(w_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - w_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - e^2\sin^2\beta_0\sin\varphi_1\sin\varphi_2 J). \tag{12}$$

Zur Bestimmung von $\delta L_{1.2}$ hat man zunächst die aus (2) und (3) S. 229 folgende Gleichung zu beachten:

$$L_{1.2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta}\,d\lambda. \tag{13}$$

Hierzu ist β als Funktion von λ mit Rücksicht auf die feste Lage von P_1 durch die Relationen gegeben:

$$\tan\beta = \tan\beta_0\cos\lambda \qquad \cos\beta_0 = \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2}. \tag{14}$$

Die Differentiation von (13) führt zu:

$$\delta L_{1.2} = w_2\,\delta\lambda_2 - w_1\,\delta\lambda_1 + e^2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\cos\beta\sin\beta\,\delta\beta}{w}\,d\lambda, \tag{15}$$

wobei $\delta\beta$ in Bezug auf konstanten Wert von λ zu verstehen ist. Es wird hiermit nach (14) und mit Rücksicht auf die 1. Formel (4), welche auch hier gilt:

$$\delta\beta = \cos^2\beta\sec^2\beta_0\cos\lambda\,\delta\beta_0 = -\cos^2\beta\sec^2\beta_0\cos\lambda\sin\varphi_1\,\delta\alpha_{1.2}.$$

Dies setzen wir in (15) ein und transformieren zugleich das Integral mittelst der Relationen:

$$d\lambda = \cos\beta_0\sec^2\beta\,d\varphi \quad \cos\lambda = \tan\beta\cot\beta_0 \quad \sin\beta = \sin\beta_0\cos\varphi,$$

sodafs es wieder auf φ als Variable bezogen wird. Damit ergiebt sich:

$$\delta L_{1.2} = w_2\,\delta\varDelta\lambda + (w_2 - w_1)\,\delta\lambda_1 - e^2\sin\beta_0\sin\varphi_1 J\delta\alpha_{1.2}. \tag{16}$$

Für $\delta\lambda_1$ folgt aus $\tan\beta_1 = \tan\beta_0\cos\lambda_1$ ohne Schwierigkeit nach und nach:

$$\tan\beta_0\sin\lambda_1\,\delta\lambda_1 = \sec^2\beta_0\cos\lambda_1\,\delta\beta_0 = -\sec^2\beta_0\cos\lambda_1\sin\varphi_1\,\delta\alpha_{1.2},$$

$$\delta\lambda_1 = -\cos\varphi_1\csc\beta_0\,\delta\alpha_{1.2}.$$

Wir führen dies, sowie $\delta\varDelta\lambda$ aus (10) in (16) ein und erhalten nach einiger Reduktion, wobei die Formeln:

$$\cot\beta_0 = \tan\alpha_{2.1}\sin\varphi_2 \quad \text{und} \quad \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} = -\sin\beta_0\sin\varphi_2$$

anzuwenden sind, schliefslich:

$$\delta L_{1.2} = -\frac{\mathfrak{m}}{a_0} \sec \beta_2 \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2}. \tag{17}$$

§ 2. **Die reduzierte Länge und der geodätische Kreis.** Nennt man das von P_2 bei der Drehung der Linie P_1P_2 beschriebene Bogendifferential für den Augenblick u und sein Azimut χ, so ist

$$u \cos \chi = -a_0 w_2 \delta \beta_2 \text{ und } u \sin \chi = a_0 \cos \beta_2 \, \delta L_{1.2}, \tag{1}$$

weil das Element des Meridianbogens allgemein nach (1) S. 55 gleich $a_0 w \delta \beta$ ist und der Radius des Parallelkreises für P_2 gleich $a_0 \cos \beta_2$ wird, S. 40.

Führt man (11) und (17) des vorigen Paragraphen ein, so geben die (1):

$$u \cos \chi = +\mathfrak{m} \sin \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2} = \mathfrak{m} \delta \alpha_{1.2} \cdot \cos(\alpha_{2.1} - 90^0)$$

$$u \sin \chi = -\mathfrak{m} \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2} = \mathfrak{m} \delta \alpha_{1.2} \cdot \sin(\alpha_{2.1} - 90^0),$$

woraus man erkennt, dafs

$$\left.\begin{aligned} u &= \mathfrak{m} \delta \alpha_{1.2} \\ \chi &= \alpha_{2.1} - 90^0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hiernach steht das von P_2 beschriebene Bogendifferential $\mathfrak{m} \delta \alpha_{1.2}$ *normal* zur geodätischen Linie P_1P_2.

Man nennt die von P_2 beschriebene Kurve einen *geodätischen Kreis* und $\mathfrak{m}$ die *reduzierte Länge* der geodätischen Linie P_1P_2.

Diese Bezeichnungen führt *Christoffel* S. 130 u. 131 seiner Schrift: *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* ein (Abh. der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1868). Zu dem Satze selbst aber, welcher der Bezeichnung *geodätischer Kreis* zu grunde liegt, und zwar als für jede krumme Fläche gültig, wurde *Gaufs* in seinen *Disquisitiones generales circa superficies curvas* 1828 geführt.

Nach dem Vorstehenden lassen sich mittelst geodätischer Linien und geodätischer Kreise Systeme von *Polarkoordinaten* konstruieren. Ist A Zentrum eines solchen Systems, auf welches eine Kurve bezogen wird, und ist ds ein Bogenelement PP' derselben, so hat man ähnlich wie bei ebenen Polarkoordinaten

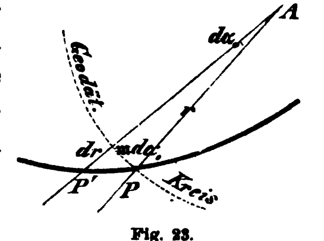


Fig. 23.

$$ds^2 = dr^2 + \mathfrak{m}_r^2 d\alpha_0^2, \tag{3}$$

wenn r den geodätischen Radiusvektor AP, $\mathfrak{m}_r$ dessen reduzierte Länge und $d\alpha_0$ den Winkel zwischen r und $r + dr$ bezeichnen.

§ 3. **Geometrische Veranschaulichung zu dem Satze vom geodätischen Kreis.** In Fig. 24 bedeutet P_1P_2 zunächst eine nach *beliebigem* Gesetz gebildete Kurve und P_1P_2' eine unendlich benachbarte, die aus jener durch Drehung um P_1 hervorgegangen ist. In zwei unendlich benachbarten Punkten P und Q ziehen wir Linienelemente normal zu P_1P_2 bis an die Kurve P_1P_2'. Dadurch entsteht ein unendlich kleines Viereck $PQP'Q'$, welches wir als eben behandeln dürfen, weil seine Projektion auf eine mittlere Tangentialebene der Fläche $PQP'Q'$ sich von dem Viereck selbst in Seiten und Winkeln nur um unendlich kleine Beträge von der 3. bezw. der 2. Ordnung unterscheidet, wie aus der Gröfsenordnung der Neigung der Teile des Vierecks gegen die Tangentialebene hervorgeht.

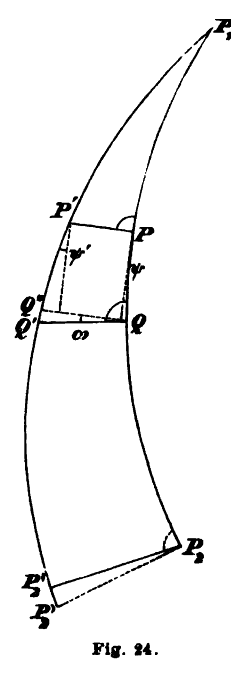


Fig. 24.

Es ist nun wichtig zu beachten, dafs PP' und QQ' im allgemeinen ebensowenig wie PQ und $P'Q'$ parallel sind, sondern wie diese eine unendlich kleine Neigung gegen einander haben. Die unendlich kleine Krümmung des Linienelements PQ hat zwar auf seine Länge keinen merklichen Einflufs, wohl aber äufsert sie sich darin, dafs in P und Q die Richtungen der Kurve P_1P_2 unendlich wenig verschieden sind; mithin werden auch PP' und QQ' im allgemeinen vom Parallelismus abweichen.

Ist nun QQ'' parallel zu PP' und denkt man sich von P und P' Normalen zu QQ'' gelegt, so wird mit Rücksicht auf die Figur:

$$P'Q' = P'Q'' + Q''Q' = PQ \cos\psi \sec\psi' + QQ'.\omega\,.$$

Wendet man diese Formel auf alle Linienelemente von P_1 bis P_2, die wir uns gleich grofs genommen denken, an, so folgt, wenn P_2' den Punkt auf P_1P_2' bedeutet, welcher in der von P_2 aus normal zu P_1P_2 gezogenen Linie liegt:

$$P_1P_2' = P_1P_2 \,.\, \cos\psi_m \sec\psi_m' + \Sigma\,(QQ'.\omega).$$

Hierin ist ψ_m ein Durchschnittswert aller ψ und ψ_m' ein solcher aller ψ'. Da nun die ψ unendlich klein sind, weichen $\cos\psi_m$ und $\sec\psi_m'$ nur um unendlich kleine Gröfsen der 2. Ordnung von der Einheit ab, und es ist $P_1P_2 \,.\, \cos\psi_m \sec\psi_m' = P_1P_2$ bis auf eine im Verhältnis zu P_1P_2 unendlich kleine Gröfse der 2. Ordnung.

Was nun $\Sigma(QQ'\,.\,\omega)$ anlangt, so kann es nicht zweifelhaft sein,

dafs dies im allgemeinen eine Summe unendlich kleiner Gröfsen 2. Ordnung und daher unendlich klein von der 1. Ordnung sein wird. Es steht nämlich die Schmiegungsebene einer Curve P_1P_2 im allgemeinen schief zur Oberfläche; daher geht, wie man leicht erkennen kann, ein endlicher Teil der Krümmung des Linienelements PQ in Divergenz von PP' und QQ' über, sodafs ω unendlich klein von der 1. Ordnung ist und nur dann, wenn die Schmiegungsebene normal zur Oberfläche ist, wird ω null oder doch unendlich klein von höherer als der 1. Ordnung.

Hieraus geht hervor, dafs *nur* bei der geodätischen Linie in allen Fällen jene Summe weniger als eine unendlich kleine Gröfse 1. Ordnung beträgt und dafs daher nur allgemein bei der geodätischen Linie bis auf unendlich kleine Gröfsen von höherer als der 1. Ordnung $P_1P_2 = P_1P_2'$ gesetzt werden kann. Bei anderen Linien wird jene Summe nur in einzelnen Fällen null sein können, indem streckenweise die Produkte $QQ' \, . \, \omega$ sich aufheben.

Man darf nun hieraus weiter in der Regel den Schlufs ziehen, dafs bei der Drehung einer geodätischen Linie P_1P_2 um den einen Endpunkt P_1 der andere Endpunkt P_2 eine zu P_1P_2 normale Bahn beschreibt. Denn wenn bei der unendlich kleinen Drehung P_2 nach P_2' gelangt, so weicht P_2' von P_2' nur um eine unendlich kleine Gröfse höherer Ordnung ab, welche gegen die unendlich kleinen Gröfsen 1. Ordnung P_2P_2' und P_2P_2' nicht in betracht kommt — oder mit anderen Worten: In dem unendlich kleinen geradlinigen Dreieck $P_2P_2'P_2$' ist der Winkel bei P_2 unendlich klein.

Es kann allerdings der Fall eintreten, dafs P_2P_2' selbst nur von höherer als der 1. Ordnung ist, obgleich der Drehungswinkel bei P_1 und die Verschiebungen der Punkte P zwischen P_1 und P_2 im allgemeinen von der 1. Ordnung sind. Alsdann ist $\mathfrak{m} = 0$ und es steht der geodätische Kreis an der betreffenden Stelle nicht mehr notwendig normal zur geodätischen Linie. Jedoch ist die Ausdehnung einer solchen Stelle eben unendlich klein, sodafs sie im Endlichen keine Ausnahme bildet.

§ 4. Die geodätische Linie ist die Kürzeste. Wie früher auf der Kugel Fig. 3 S. 69 gebildet wurde, ebenso können wir jetzt auf dem Rotationsellipsoid eine Figur in der Weise bilden, dafs wir eine geodätische Linie P_0P_n um einen ihrer Endpunkte drehen und dabei von Zwischenpunkten unendlich benachbarte geodätische Kreise beschreiben lassen. Wie früher sieht man sofort, dafs eine beliebige Linie $P_0P_1'P_2' \ldots P_n$ länger als die geodätische Linie $P_0P_1P_2 \ldots P_n$, sein mufs.

Die Beweisführung ist dieselbe wie S. 69 für die Kugel im Anschlufs an Fig. 3. Nur bedeuten die kleinen Kugelkreise hier geodätische Kreise.

Sie gilt aber nur unter der Voraussetzung, dafs der geodätische Kreis des Endpunktes P_n in seinem ganzen Verlaufe keine geodätischen Kreise schneidet, welche mit einem kleineren Abstand vom Zentrum P_0 beschrieben sind. Denn nur alsdann kann man sicher keine Linien ziehen, die kürzer als die betrachtete geodätische sind.

Solche Durchschnitte entstehen auf dem Rotationsellipsoid, sobald die Länge der geodätischen Linie so bedeutend wird, dafs sie um die Oberfläche mehr als halb herumreicht. Die hier stattfindenden Verhältnisse werden im 7. Kapitel untersucht werden.

Dafs die geodätische Linie nicht notwendig auch die kürzeste Verbindung der Endpunkte ist, folgt überdies schon aus den Angaben S. 264, wonach zwischen 2 Punkten unendlich viele geodätische Verbindungen existieren. Nicht alle aber können kürzeste Linien sein: In der Regel existiert nur eine Kürzeste; in manchen Fällen sind mehrere gleichlange Kürzeste vorhanden.

Dagegen ist jede Kürzeste eine geodätische Linie; denn man kann jede Kürzeste auf verschiedene Art in so kleine Teile teilen, dafs für jeden einzelnen derselben das Zusammenfallen mit der kürzesten geodätischen Linie zwischen den Endpunkten des betreffenden Teils zweifellos ist — bei gehöriger Beschränkung der Länge blieb ja in der Beweisführung mit Fig. 3 kein Zweifel, dafs die geodätische Linie zugleich kürzeste Linie ist, was denn auch notwendig umgekehrt gilt. Läfst man nun die Teile über einander greifen, so zeigt sich evident, dafs alle einzelnen geodätischen Teillinien derselben geodätischen Linie angehören müssen und die Kürzeste also eine geodätische Linie ist. (Vergl. auch *Zeitschr. f. Vermessungswesen* 1880 Augustheft.)

Um zu zeigen, dafs die Kürzeste und die kürzeste Geodätische zwischen 2 Punkten zusammenfallen, bedient man sich in der Regel der Rechnung, indem man mittelst des Variationskalküls die Gleichung der Kürzesten herstellt und sie mit der Gleichung der Geodätischen, die man mittelst der Bedingung *Schmiegungsebene normal zur Fläche* ableiten kann, vergleicht.

In Bezug auf die Kürzeste lehrt die Variationsrechnung zugleich die Existenz der geodätischen Kreise (*Christoffel* a. a. O.). Man kann aber auch rein geometrisch zeigen, dafs der Endpunkt einer sich drehenden Kürzesten eine Bahn normal zu ihr beschreibt. Diesen Weg betrat *Gaufs* (a. a. O. Art. 15).

Folgendes dürfte im letztern Falle ebenfalls genügen: Denkt man sich um einen Punkt herum unendlich dicht Linien gleichen kürzesten Abstandes gezogen, welche Linien die ganze geschlossene Oberfläche bedecken, ohne sich zu schneiden, so gelangt man auf kürzestem Wege vom Zentrum nach aufsen nur normal zu jenen Linien.

§ 5. **Die reduzierte Länge.** Nach S. 268 (12) und S. 267 (6) ist die reduzierte Länge $\mathfrak{m}$ gegeben durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m} &= a_0(w_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - w_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - e^2 \sin^2\beta_0 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 J), \\ J &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2\varphi}{w}\, d\varphi, \quad w = \sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Zufolge der Entwicklung gilt $\mathfrak{m}$ für Drehung um P_1; allein man sieht leicht, dafs es auch für Drehung um P_2 gültig ist. Vertauscht man nämlich die Punkte, so ergiebt die entsprechende Vertauschung der Indices in der 1. Gleichung (1) zunächst für $\mathfrak{m}$ einen Vorzeichenwechsel. Allein die Gleichungen (4) S. 248 zeigen, dafs bei der Vertauschung φ_1 und φ_2 bezw. nicht in φ_2 und φ_1, sondern in $-\varphi_2$ und $-\varphi_1$ übergehen. Mit Berücksichtigung dessen behält $\mathfrak{m}$ seinen Wert:

Die reduzierte Länge $\mathfrak{m}$ hat gleichen Betrag für Drehungen um jeden der beiden Endpunkte der geodätischen Linie.

Wir entwickeln nun den Ausdruck (1) für $\mathfrak{m}$ in ähnlicher Weise wie früher s, ohne jedoch k_1 anzuwenden, sondern der Einfachheit wegen unter Beibehaltung von k^2.

Nach § 4 S. 220 und 221 ist:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta} &= \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}}\, \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \\ e^2 \sin^2\beta_0 &= k^2\, \frac{1-e^2}{1-k^2}\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Man hat daher:

$$e^2 \sin^2\beta_0\, J = k^2 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \int \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= k^2 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \int \left(\cos^2\varphi + \frac{1}{2} k^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi + \cdots\right) d\varphi.$$

Setzt man $\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ und $\cos^2\varphi \sin^2\varphi = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\varphi$ und integriert, so folgt:

$$e^2 \sin^2\beta_0\, J = k^2 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \left\{ \frac{1}{2} \varDelta\varphi \left(1 + \frac{1}{8} k^2 + \cdots\right) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{64} k^2 (\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) + \cdots \right\}. \quad (3)$$

Andrerseits ist mit Rücksicht auf die 1. Formel (2) und mittelst Reihenentwicklung von $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$ nach leichter Reduktion:

$$w_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - w_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$$

$$= \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \left\{ \sin\varDelta\varphi + k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \left[\frac{1}{4} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{8} k^2 (\cos\varphi_2 \sin^3\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin^3\varphi_1) + \cdots \right] \right\} \cdot \quad (4)$$

Substituiert man (3) und (4) in (1) so erhält man die für jeden Wert der Länge s gültige Formel:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \frac{b_0}{\sqrt{1-k^2}} \left\{ \sin\varDelta\varphi - \frac{1}{2} k^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 [F] \right\}, \\ [F] &= \left[\varDelta\varphi \left(1 + \frac{1}{8} k^2 + \cdots\right) - \frac{1}{8} k^2 \cos 2\varphi \sin\varDelta\varphi + \cdots \right]; \\ \varDelta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \qquad 2\varphi = \varphi_2 + \varphi_1 . \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Formel zeigt, dafs $\mathfrak{m}$ bei wachsender Länge der Linie anfangs wächst, dann aber wieder abnimmt, bis $\varDelta\varphi$ nahezu gleich π geworden ist, wo ein Verschwinden eintritt, jedoch nicht für $\varDelta\varphi = \pi$, sondern für einen etwas gröfseren Betrag. Hiervon ist die Ursache, dafs $\mathfrak{m}$ ein Glied mit $\varDelta\varphi$ selbst enthält. Ist $\mathfrak{m}$ durch null gegangen, so wird es negativ, erreicht ein negatives Maximum, nimmt dann absolut genommen wieder ab u. s. f.

Für die Geodäsie hat es ein besonderes Interesse, $\mathfrak{m}$ nach Potenzen von s zu entwickeln. Zu dem Zwecke suchen wir die Differentialquotienten von $\mathfrak{m}$ nach s auf, um schliefslich *Taylors* Satz anzuwenden. Dieses Verfahren ist, wenn nicht einfacher, so doch in einiger Hinsicht interessanter als die Entwicklung mittelst Substitution von s als Funktion von φ in (5).

§ 6. **Die Differentialquotienten von $\mathfrak{m}$ nach s.** Wir betrachten im Folgenden stets P_1 als den festen Punkt. Dies hervorzuheben ist wichtig, weil die Differentialquotienten von $\mathfrak{m}$ andere Werte erlangen für P_2 als Drehungszentrum.

Die Differentiation von $\mathfrak{m}$ (vergl. Formel (1) auf voriger Seite) nach φ_2 giebt:

$$\frac{1}{a_0} \frac{d\mathfrak{m}}{d\varphi_2} = w_1 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + w_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 - e^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\beta_2 \sin\beta_2 \frac{d\beta_2}{w_2\, d\varphi_2}$$

$$- e^2 \sin^2\beta_0 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 J - \frac{1}{w_2} e^2 \sin^2\beta_0 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos^2\varphi_2 .$$

Aus einer sphärischen Figur analog Fig. 22 S. 267 entnimmt man nun ohne Mühe, dafs

$$d\beta_2 = \cos\alpha_{2.1}\, d\varphi_2; \quad (1)$$

setzt man dies in Vorstehendes ein und eliminiert J zugleich mittelst der Formel für $\mathfrak{m}$, so folgt mit Beachtung der (4) S. 248:

$$\frac{d\mathfrak{m}}{d\varphi_2} = \mathfrak{m} \cot \varphi_2 + a_0 w_2 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}. \tag{2}$$

Nun ist, wenn man sich s über P_2 hinaus verlängert denkt:

$$\frac{d\mathfrak{m}}{ds} = \frac{d\mathfrak{m}}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{ds},$$

nach (6) S. 220 aber ferner:

$$\frac{d\varphi_2}{ds} = \frac{1}{a_0 w_2}. \tag{3}$$

Man hat daher

$$\frac{d\mathfrak{m}}{ds} = \frac{\mathfrak{m} \cot \varphi_2}{a_0 w_2} + \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}, \tag{4}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) S. 248:

$$\frac{d\mathfrak{m}}{ds} = - \frac{\cos \beta_1 \cos \alpha_{1.2}}{\cos \beta_2 \cos \alpha_{2.1}} - \frac{\mathfrak{m} \tan \beta_2}{a_0 w_2 \cos \alpha_{2.1}}. \tag{5}$$

Aus (4) erhält man weiter durch erneute Differentiation:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = \frac{\cot \varphi_2}{a_0 w_2} \frac{d\mathfrak{m}}{ds} - \frac{\mathfrak{m} \csc^2 \varphi_2}{a_0 w_2} \frac{d\varphi_2}{ds} - \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2}{\sin^2 \varphi_2} \frac{d\varphi_2}{ds}$$
$$- e^2 \frac{\mathfrak{m} \cot \varphi_2}{a_0 w_2^3} \cos \beta_2 \sin \beta_2 \frac{d\beta_2}{d\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{ds}.$$

Reduzieren wir dies mittelst der Formeln (1), (3) und (4) und beachten auch die (4) S. 248, so geht es über in:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = - \frac{\mathfrak{m}}{a_0^2 w_2^2} \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \beta_2}{w_2^2}\right).$$

Hieraus folgt aber:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = - \frac{\mathfrak{m}}{a_0^2} \frac{1 - e^2}{w_2^4} = - \mathfrak{m} \frac{K_2}{a_0^2}, \tag{6}$$

wobei $K_2 : a_0^2$ nach S. 59 (3) das Krümmungsmafs in P_2 (dem beweglichen Punkte) bedeutet.

Die Gleichung $\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} = - \mathfrak{m}.$ (Krümmungsmafs) gilt für geodätische Linien jeder krummen Fläche. Sie wurde zuerst von *Gaufs* 1828 in den *Disquisitiones generales circa superficies curvas* Art. 19 (G. Werke Bd. 4 S. 244), später von *Christoffel* auch auf andere Art aus den Integrabilitätsbedingungen für die Differentialformeln geodätischer Dreiecke (1868, *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* S. 141) abgeleitet.

§ 7. Entwicklung von K_2 als Funktion von s. Es ist mit Benutzung der 1. Formel (2) S. 273:

$$K = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \cos^2 \beta)^2} = \frac{(1 - k^2)^2}{(1 - e^2)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^2}. \tag{1}$$

Man hat daher:

$$K_2 = K_1 \left(\frac{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}{1 - k^2 \sin^2 \varphi_2}\right)^2. \tag{2}$$

Hieraus folgt unter Vernachlässigung von k^4 u. s. f. ohne Schwierigkeit:

$$K_2 = K_1 \left(1 + k^2 [\cos 2\varphi_1 - \cos (2\varphi_1 + 2\Delta\varphi)] + \cdots\right). \tag{3}$$

Nach (9) S. 223 weicht aber $\Delta\varphi$ von $s : a_0$ nur um Glieder der Ordnung $e^2 s : a_0$ ab. Aufserdem ist $k^2 = e^2 \sin^2\beta_0 + Gl_4$. Beachtet man nun noch, dafs nach (4) S. 248

und
$$\left.\begin{aligned} \sin^2\beta_0 \cos 2\varphi_1 &= \sin^2\beta_1 - \cos^2\beta_1 \cos^2\alpha_{1.2} \\ \sin^2\beta_0 \sin 2\varphi_1 &= \sin 2\beta_1 \cos \alpha_{1.2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ist, so findet sich aus (3):

$$K_2 = K_1 \left\{1 + e^2\left[\sin\frac{2s}{a_0} \sin 2\beta_1 \cos\alpha_{1.2} + 2\sin^2\frac{s}{a_0}(\sin^2\beta_1 - \cos^2\beta_1 \cos^2\alpha_{1.2})\right] + \cdots\right\}. \tag{5}$$

Diese Formel giebt K_2 bis auf Glieder der Ordnung e^4 genau, so lange sie nur auf Distanzen Anwendung findet, für welche

$$\sin 2\Delta\varphi - \sin\frac{2s}{a_0} \quad \text{und} \quad \sin\Delta\varphi_1 - \sin\frac{s}{a_0}$$

Gröfsen der Ordnung e^2 sind, was für beliebige Distanzen statthat, insofern man sich auf kürzeste Linien beschränkt.

Nimmt man $s : a_0$ als Gröfse 1. Ordnung wie e, so folgt:

$$K_2 = K_1 \left(1 + 2e^2 \sin 2\beta_1 \cos \alpha_{1.2} \frac{s}{a_0} + Gl_4\right). \tag{6}$$

§ 8. **Die reduzierte Länge als Funktion von s.** Da sich der 2. Differentialquotient von $\mathfrak{m}$ nach s so sehr einfach gestaltet, so liegt der Gedanke nahe, anstatt mittelst *Taylors* Satz nach vorher erfolgter Bestimmung des 3. und höherer Differentialquotienten, direkt durch Integration der Gleichung (6) auf voriger Seite $\mathfrak{m}$ als Funktion von s herzustellen. Setzen wir:

$$K_2 = K_1 \left(1 + c_1 \sin\frac{2s}{a_0} + c_2 \sin^2\frac{s}{a_0} + \cdots\right), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= e^2 \sin 2\beta_1 \cos \alpha_{1.2}, \\ c_2 &= 2e^2 (\sin^2\beta_1 - \cos^2\beta_1 \cos^2\alpha_{1.2}), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei c_1 und c_2 auch mit der geographischen anstatt der reduzierten Breite berechnet werden dürfen, so folgt aus (6):

$$\frac{d^2\mathfrak{m}}{ds^2} + \mathfrak{m}\frac{K_1}{a_0^2}\left(1 + c_1 \sin\frac{2s}{a_0} + c_2 \sin^2\frac{s}{a_0} + \cdots\right) = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung vernachlässigt alle höheren Potenzen von e^2, enthält aber die Glieder mit e^2 vollständig. Sie läfst sich *streng* integrieren, insoweit es sich um Konservierung der Glieder mit e^2 allein handelt.

Setzen wir c_1 und c_2 null, so folgt $\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K_1}} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0}$, wie man daraus erkennt, dafs in diesem Falle $\mathfrak{m}$ die reduzierte Länge auf der Kugel vom Radius $a_0 : \sqrt{K_1}$ wird.

Im allgemeinen setzen wir

$$\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K_1}} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} + a_0 \mu . \tag{4}$$

Zweimalige Differentiation liefert hieraus:

$$\frac{d^2 \mathfrak{m}}{ds^2} = -\frac{\sqrt{K_1}}{a_0} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} + a_0 \frac{d^2 \mu}{ds^2} .$$

Dies substituieren wir in (3) und vernachlässigen dabei die Produkte μc_1 und μc_2, indem wir annehmen, dafs sie den Faktor e^4 haben, weil voraussichtlich μ den Faktor e^2 enthält. Es folgt:

$$\frac{d^2 \mu}{ds^2} + \frac{K_1}{a_0^2} \mu + \frac{\sqrt{K_1}}{a_0^2} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} \left(c_1 \sin \frac{2s}{a_0} + c_2 \sin^2 \frac{s}{a_0} \right) + \cdots = 0,$$

oder mit konsequenter Vernachlässigung von e^4:

$$a_0^2 \frac{d^2 \mu}{ds^2} + \mu + c_1 \sin \frac{s}{a_0} \sin \frac{2s}{a_0} + c_2 \sin^3 \frac{s}{a_0} + \cdots = 0. \tag{5}$$

Man hat für μ noch die Nebenbedingungen:

$$\mu = 0 \text{ und } \frac{d\mu}{ds} = 0 \quad \text{für} \quad s = 0. \tag{6}$$

Diese ergeben sich aus der Bedingung, dafs für s gleich null $\mathfrak{m}$ die reduzierte Länge für die Ebene wird, dafs also, da hier $\mathfrak{m} = s$ ist:

$$\mathfrak{m} = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{m}}{ds} = 1 \quad \text{für} \quad s = 0$$

sein mufs. Führt man den Ausdruck (4) ein, so erhält man die (6).

Zum Zweck der Integration schreiben wir (5) wie folgt:

$$a_0^2 \frac{d\mu^2}{ds^2} + \mu + \frac{1}{2} c_1 \left(\cos \frac{s}{a_0} - \cos \frac{3s}{a_0} \right) + \frac{1}{4} c_2 \left(3 \sin \frac{s}{a_0} - \sin \frac{3s}{a_0} \right) + \cdots = 0 \tag{7}$$

und setzen nun versuchsweise (wobei zum Teil Reihenentwicklungen einen Fingerzeig geben):

$$\mu = a_1 \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{s}{a_0} \cos \frac{s}{a_0} - \sin \frac{s}{a_0} \right) + b_1 \frac{s}{a_0} \sin \frac{s}{a_0} \\ + a_3 \left(\cos \frac{3s}{a_0} - \cos \frac{s}{a_0} \right) + b_3 \left(\sin \frac{3s}{a_0} - 3 \sin \frac{s}{a_0} \right) \cdot \end{array} \right\} \tag{8}$$

Die zweimalige Differentiation von (8) ergiebt:

$$a_0^2 \frac{d^2\mu}{ds^2} = \left\{ \begin{array}{l} -a_1\left(\sin\frac{s}{a_0} + \frac{s}{a_0}\cos\frac{s}{a_0}\right) + b_1\left(2\cos\frac{s}{a_0} - \frac{s}{a_0}\sin\frac{s}{a_0}\right) \\ -a_3\left(9\cos\frac{3s}{a_0} - \cos\frac{s}{a_0}\right) - b_3\left(9\sin\frac{3s}{a_0} - 3\sin\frac{s}{a_0}\right). \end{array} \right\}$$

Substituieren wir dies sowie (8) in (7), so geht diese Gleichung über in:

$$\left. \begin{array}{r} \left(2b_1 + \frac{1}{2}c_1\right)\cos\frac{s}{a_0} - \left(2a_1 - \frac{3}{4}c_2\right)\sin\frac{s}{a_0} \\ -\left(8a_3 + \frac{1}{2}c_1\right)\cos\frac{3s}{a_0} - \left(8b_3 + \frac{1}{4}c_2\right)\sin\frac{3s}{a_0} \end{array} \right\} = 0,$$

welche identisch verschwinden mufs. Es wird also anzunehmen sein:

$$\left. \begin{array}{ll} a_1 = +\frac{3}{8}c_2 & b_1 = -\frac{1}{4}c_1 \\ a_3 = -\frac{1}{16}c_1 & b_3 = -\frac{1}{32}c_2. \end{array} \right\} \qquad (9)$$

Setzt man diese Koefficientenwerte in (8) ein und den für μ erhaltenen Wert in (4), so findet sich für $\mathfrak{m}$ der folgende, die Glieder mit e^2 vollständig enthaltende Ausdruck:

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{array}{r} \frac{a_0}{\sqrt{K_1}}\sin\frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} - \frac{1}{4}c_1 s\sin\frac{s}{a_0} - \frac{1}{16}c_1 a_0\left(\cos\frac{3s}{a_0} - \cos\frac{s}{a_0}\right) \\ +\frac{3}{8}c_2\left(s\cos\frac{s}{a_0} - a_0\sin\frac{s}{a_0}\right) \\ -\frac{1}{32}c_2 a_0\left(\sin\frac{3s}{a_0} - 3\sin\frac{s}{a_0}\right) + \cdots \end{array} \right\}. \qquad (10)$$

Für c_1 und c_2 gelten die unter (2) angegebenen Werte. Der Ausdruck (10) giebt $\mathfrak{m}$ bis auf Gröfsen der Ordnung $a_0 e^4$ für beliebige kürzeste Distanzen s (vergl. Schlufs des § 7 S. 276).

Wendet man Reihenentwicklungen an, indem man $s:a_0$ als Gröfse 1. Ordnung betrachtet, so folgt:

$$\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K_1}}\sin\frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} - \frac{1}{6}c_1 a_0\left(\frac{s^4}{a_0^4} - \frac{11}{30}\frac{s^6}{a_0^6} + Gl_8\right) - \frac{1}{20}c_2 a_0\left(\frac{s^5}{a_0^5} + Gl_7\right) + a_0 Gl_8. \qquad (11)$$

Dafs der Rest ein Bruchteil der 8. Ordnung von a_0 ist, zeigt die Einführung vorstehenden Ausdrucks in die strenge Gleichung (6) S. 275, welche bis auf Glieder $e^4 s^2$ befriedigt wird.

Berücksichtigt man bei der Entwicklung von K_2 auch e^4, so wird für kleine Distanzen erhalten:

$$K_2 = K_1 \left\{ 1 + c'_1 \frac{2s}{a_0} + c'_2 \frac{s^2}{a_0^2} - \frac{4}{3} c'_1 \frac{s^3}{a_0^3} + Gl_4 \right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{array}{l} c'_1 = e^2 \sin 2\beta_1 \cos \alpha_{1.2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \cos^2 \beta_1\right) \\ c'_2 = 2e^2 \left(\sin^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_1 \cos^2 \alpha_{1.2}\right) \\ + e^4 \left(\sin^2 2\beta_1 \left[1 + \frac{9}{2} \cos^2 \alpha_{1.2}\right] - 4 \cos^2 \beta_1 \cos^2 \alpha_{1.2}\right) \end{array}\right\} \qquad (13)$$

$$\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K_1}} \sin \frac{s\sqrt{K_1}}{a_0} - a_0 K_1 \left\{ \frac{1}{6} c'_1 \frac{s^4}{a_0^4} + \frac{1}{20} c'_2 \frac{s^5}{a_0^5} - \frac{11}{180} c'_1 \frac{s^6}{a_0^6} + Gl_9 \right\}. \qquad (14)$$

§ 9. **Differentialformeln für die geodätische Linie bei Verschiebungen eines Endpunktes.** Wir beziehen uns auf die Linie $P_1 P_2$, Fig. 20 S. 266 und betrachten nach einander eine Verschiebung von P_2 im Sinne wachsender Länge s um δs sowie eine Drehung um P_1 im Betrage von $\delta \alpha_{1.2}$.

1. *Verschiebung δs von P_2.* Nach (3) S. 219 und (1) S. 229 hat man zunächst, indem daselbst für α, β und dl bezw. $\alpha_{2.1} - 180^0$, β_2 und $dL_{1.2}$ zu setzen sind:

$$\left.\begin{array}{l} \delta \beta_2 = \frac{\delta s}{a_0 w_2} \cos \alpha_{2.1} \\ \delta L_{1.2} = -\frac{\delta s}{a_0} \sec \beta_2 \sin \alpha_{2.1}. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Um $\delta \alpha_{2.1}$ zu finden, beachten wir die Konstanz des Produkts $\cos \beta_2 \sin \alpha_{2.1}$ bei der Verschiebung von P_2, zufolge welcher

$$\cos \beta_2 \sin \alpha_{2.1} = \cos (\beta_2 + \delta \beta_2) \sin (\alpha_{2.1} + \delta \alpha_{2.1}).$$

Hiernach ist

$$\cos \beta_2 \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha_{2.1} = \sin \beta_2 \sin \alpha_{2.1} \delta \beta_2$$

und mit Rücksicht auf die 1. Formel (1):

$$\delta \alpha_{2.1} = \frac{\delta s}{a_0 w_2} \tan \beta_2 \sin \alpha_{2.1}. \qquad (2)$$

2. *Drehung von $P_1 P_2$ um P_1.* Nach (11) S. 268 und (17) S. 269 ist hierbei:

$$\left.\begin{array}{l} \delta \beta_2 = -\frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2} \sin \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2} \\ \delta L_{1.2} = -\frac{\mathfrak{m}}{a_0} \sec \beta_2 \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha_{1.2}. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Die Fundamentalgleichung, angewandt auf P_1 und P_2 *nach* erfolgter Drehung, liefert nun weiter:

$$\cos \beta_1 \sin (\alpha_{1.2} + \delta \alpha_{1.2}) + \cos (\beta_2 + \delta \beta_2) \sin (\alpha_{2.1} + \delta \alpha_{2.1}) = 0.$$

Wegen

$$\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} + \cos\beta_2 \sin\alpha_{2.1} = 0$$

geht dies über in:

$$\cos\beta_2 \cos\alpha_{2.1}\delta\alpha_{2.1} = \sin\beta_2 \sin\alpha_{2.1}\delta\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\alpha_{1.2}\delta\alpha_{1.2},$$

wobei $\delta\beta_2$ aus der 1. Formel (3) zu entnehmen ist. Damit folgt:

$$\delta\alpha_{2.1} = \left\{-\frac{\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2}}{\cos\beta_2\cos\alpha_{2.1}} - \frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1}\tan\alpha_{2.1}\right\}\delta\alpha_{1.2}.$$

Hieraus eliminieren wir mit Hilfe der Gleichung (5) S. 275 das erste Glied rechter Hand und erhalten:

$$\delta\alpha_{2.1} = \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2}\tan\beta_2\cos\alpha_{2.1}\right)\delta\alpha_{1.2}. \tag{4}$$

Für den Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{m}}{ds}$ ist zu erinnern, dafs er sich auf eine Verschiebung von P_2 im Sinne einer Längenänderung von s bei konstantem Azimut $\alpha_{1.2}$ bezieht.

3. *Verschiebung und Drehung.* Wenn die geodätische Linie P_1P_2 sich um P_1 im Betrage $\delta\alpha_{1.2}$ dreht und dabei zugleich um ds wächst, so sind die totalen Änderungen von β_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ die Summen der bezüglichen Ausdrücke (1) bis (4).

Indem wir die Summation ausführen, substituieren wir zugleich nach S. 40 und 41 (2), (3) und (6):

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{W_2}{\sqrt{1-e^2}} \text{ für } \dfrac{1}{w_2},\quad W_2\sec B_2 \text{ für } \sec\beta_2,\\[2ex] \sqrt{1-e^2}\tan B_2 \text{ für } \tan\beta_2,\quad \delta B_2\,\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{W_2^{\,2}} \text{ für } \delta\beta_2\end{array}\right\} \tag{5}$$

und gelangen damit zu den Formeln für die totalen Änderungen:

$$\left.\begin{array}{l}\delta B_2 = \dfrac{\delta s}{a_0}\dfrac{W_2^{\,3}}{1-e^2}\cos\alpha_{2.1} - \dfrac{\mathfrak{m}}{a_0}\dfrac{W_2^{\,3}}{1-e^2}\sin\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}\\[2ex] \delta L_{1.2} = -\dfrac{\delta s}{a_0}W_2\sec B_2\sin\alpha_{2.1} - \dfrac{\mathfrak{m}}{a_0}W_2\sec B_2\cos\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}\\[2ex] \delta\alpha_{2.1} = \dfrac{\delta s}{a_0}W_2\tan B_2\sin\alpha_{2.1} + \left\{\left(\dfrac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \dfrac{\mathfrak{m}}{a_0}W_2\tan B_2\cos\alpha_{2.1}\right\}\delta\alpha_{1.2}.\end{array}\right\} \tag{6}$$

Hierin ist $W_2 = \sqrt{1-e^2\sin B_2}$ und der Index 1.2 an $\frac{d\mathfrak{m}}{ds}$ deutet die Richtung vom festen nach dem beweglichen Punkt an, im Sinne der obigen Bemerkung zu (4) am Schlusse des 2. Absatz.

4. *Änderung der geographischen Koordinaten von P_2.* Die Werte

δs und $\delta\alpha_{1.2}$, die zu δB_2 und $\delta L_{1.2}$ gehören, ergeben sich aus den ersten beiden Gleichungen (6) durch Elimination von $\delta\alpha_{1.2}$ bezw. δs. Führt man die erhaltenen Resultate in den Ausdruck für $\delta\alpha_{2.1}$ ein und reduziert ihn teilweise mittelst der Formel (5) S. 275, welche bei Einführung der Substitutionen (5) lautet:

$$\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} = -\frac{W_2 \cos B_1 \cos\alpha_{1.2}}{W_1 \cos B_2 \cos\alpha_{2.1}} - \frac{W_2 \mathfrak{m} \tan B_2}{a_0 \cos\alpha_{2.1}}, \tag{7}$$

so ist dann auch dieses $\delta\alpha_{2.1}$ Funktion von δB_2 und $\delta L_{1.2}$. Die Ergebnisse sind:

$$\left.\begin{aligned}
\delta s &= a_0 \frac{1-e^2}{W_2^3}\cos\alpha_{2.1}\,\delta B_2 - \frac{a_0}{W_2}\cos B_2 \sin\alpha_{2.1}\,\delta L_{1.2}\\
\delta\alpha_{1.2} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_2^3}\sin\alpha_{2.1}\,\delta B_2 - \frac{a_0}{\mathfrak{m} W_2}\cos B_2 \cos\alpha_{2.1}\,\delta L_{1.2}\\
\delta\alpha_{2.1} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_2^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\,\delta B_2 + \frac{a_0}{\mathfrak{m} W_1}\cos B_1 \cos\alpha_{1.2}\,\delta L_{1.2}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Es ist noch zu bemerken, dafs im vorstehenden Paragraphen die δB, δL und $\delta\alpha$ als Arcus zu verstehen sind.

§ 10. Verschiebung beider Endpunkte der geodätischen Linie.

In allen Formeln des vorigen Paragraphen dürfen wir die Indices vertauschen, wenn wir zugleich P_2 als fest und P_1 als beweglich annehmen. Die (8) geben damit:

$$\left.\begin{aligned}
\delta s &= a_0 \frac{1-e^2}{W_1^3}\cos\alpha_{1.2}\,\delta B_1 + \frac{a_0}{W_1}\cos B_1 \sin\alpha_{1.2}\,\delta L_{1.2}\\
\delta\alpha_{2.1} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\sin\alpha_{1.2}\,\delta B_1 + \frac{a_0}{\mathfrak{m} W_1}\cos B_1 \cos\alpha_{1.2}\,\delta L_{1.2}\\
\delta\alpha_{1.2} &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\sin\alpha_{1.2}\,\delta B_1 - \frac{a_0}{\mathfrak{m} W_2}\cos B_2 \cos\alpha_{2.1}\,\delta L_{1.2}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese Änderungen in s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ entsprechen also einer Verschiebung von P_1 bei festem P_2. Da man nun setzen kann

$$L_{1.2} = L_2 - L_1, \tag{2}$$

wenn L allgemein die westliche Länge in Bezug auf einen beliebigen ersten Meridian ist, so hat man auch:

$$\left.\begin{aligned}
\delta L_{1.2} &= +\,\delta L_2 \text{ bei festem } P_1, \text{ für (8) des vor. Paragraphen,}\\
\delta L_{1.2} &= -\,\delta L_1 \text{ bei festem } P_2, \text{ für (1) dieses Paragraphen.}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Durch Addition der bezüglichen Werte nach (8) des vorigen Paragraphen und nach (1) dieses Paragraphen erhalten wir die

Änderungen der Länge und der Azimute, welche beliebigen differentialen *Verschiebungen beider Endpunkte* entsprechen:

Gegeben: $\delta B_1, \delta B_2, \delta L_1, \delta L_2$;

$$\left.\begin{aligned}
\varrho''\delta s = \; & a_0 \frac{1-e^2}{W_1^3}\cos\alpha_{1.2}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_1} + a_0\frac{1-e^2}{W_2^3}\cos\alpha_{2.1}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} \\
& + \frac{a_0}{W_2}\cos B_2 \sin\alpha_{2.1}\,(\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_1 - \delta L_2}) \\
\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{1.2}} = & -\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\sin\alpha_{1.2}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_1} - \frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_2^3}\sin\alpha_{2.1}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} \\
& + \frac{a_0}{\mathfrak{m}W_2}\cos B_2\cos\alpha_{2.1}\,(\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_1 - \delta L_2}) \\
\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} = & -\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\sin\alpha_{1.2}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_1} - \frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_2^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} \\
& - \frac{a_0}{\mathfrak{m}W_1}\cos B_1\cos\alpha_{1.2}(\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_1 - \delta L_2}).
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Für die Reduktion der 1. dieser Gleichungen wurde die Beziehung $\cos\beta_2 \sin\alpha_{2.1} + \cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} = 0$, d. i.

$$\frac{1}{W_2}\cos B_2 \sin\alpha_{2.1} + \frac{1}{W_1}\cos B_1 \sin\alpha_{1.2} = 0 \qquad (5)$$

benutzt. Mit Rücksicht auf diese letztere ist auch zu ersehen, dafs die (4) symmetrisch zu beiden Punkten P_1 und P_2 geformt sind.

Nehmen wir jetzt an, dafs nicht die Änderungen der geographischen Koordinaten beider Punkte gegeben sind, sondern nur diejenigen von P_1, aufserdem aber δs und $\delta\alpha_{1.2}$, so ist aus den ersten beiden (4) einmal δL_2, sodann δB_2 zu eliminieren und auf δB_2 bezw. δL_2 zu reduzieren. Setzt man zugleich

$$\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2} - 180^0 = \varDelta\alpha\,, \qquad (6)$$

so findet sich:

Gegeben: $\delta B_1, \delta L_1, \delta s, \delta\alpha_{1.2}$;

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} = \left\{\begin{aligned}
& \frac{W_2^3}{1-e^2}\left\{\varrho''\cos\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} - \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\sin\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}\right\} \\
& + \frac{W_2^3}{W_1^3}\left\{\cos\varDelta\alpha + \left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\right\}\delta B_1
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_2} = \left\{\begin{aligned}
& \delta L_1 - W_2 \sec B_2\left\{\varrho''\sin\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\cos\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}\right\} \\
& - \frac{(1-e^2)W_2}{W_1^3}\sec B_2\left\{\sin\varDelta\alpha - \left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\right\}\delta B_1
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Diese Ausdrücke führen wir endlich noch in die 3. Gleichung (4) ein und erhalten nach gehöriger Reduktion mittelst (7) S. 281:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} = \left\{ \begin{array}{l} \varrho'' W_2 \tan B_2 \sin\alpha_{2.1} \frac{\delta s}{a_0} + \left\{ \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \tan B_2 \cos\alpha_{2.1} \right\} \delta\alpha_{1.2} \\ + \frac{a_0}{\mathfrak{m}} \frac{1-e^2}{W_1^3} \left\{ \begin{array}{l} \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \cos\Delta\alpha \sin\alpha_{2.1} - \frac{\sin^2\Delta\alpha}{\sin\alpha_{1.2}} \\ + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right] \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \sin^2\alpha_{2.1} \sin\alpha_{1.2} \end{array} \right\} \delta B_1 . \end{array} \right\} \quad (9)$$

In den Formeln (7) bis (9) sind die δB, δL und $\delta\alpha$ als Sekundenwerte zu verstehen, wie auch zum Teil angedeutet ist.

§ 11. Berechnung der Koefficienten der Differentialformeln. Bei beliebig grofsen kürzesten Distanzen s wird in vorstehenden Differentialformeln für $\mathfrak{m}$ der Ausdruck (10) S. 278 anzuwenden sein; er vernachlässigt zwar e^4, ist aber wohl meist ausreichend.

Für kleinere Distanzen ist der bequemere Ausdruck (11) S. 278 vorzuziehen; meistens aber dürfte es vollkommen genügen, zu setzen:

$$\mathfrak{m} = \frac{a_0}{\sqrt{K}} \sin \frac{s\sqrt{K}}{a_0} + \cdots = s\left(1 - \frac{s^2}{6a_0^2} K + Gl_4\right), \quad (1)$$

worin K irgend ein mittlerer Wert der Gröfse K, vergl. (3) S. 59, in Bezug auf die Endpunkte der Linie s ist. Man hat noch:

$$\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} = \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1} + \cdots = 1 - \frac{s^2}{2a_0^2} K + Gl_4, \quad (2)$$

und in logarithmischer Form:

$$\left.\begin{array}{l} \log \mathfrak{m} \doteq \log s - \frac{M}{6a_0^2} s^2 K + Gl_4 \\ \log \frac{d\mathfrak{m}}{ds} = -\frac{M}{2a_0^2} s^2 K + Gl_4; \end{array}\right\} \quad (3)$$

dazu ist aufserdem:

$$\left[1 - \frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right] = \frac{s^2}{2a_0^2} K + Gl_4.$$

Die Einführung dieser Werte vereinfacht namentlich die etwas komplizierten Formeln (7) bis (9) des vorigen Paragraphen erheblich, während die (4) überhaupt einfach sind.

Für Seiten direkt mefsbarer Dreiecke wird es in der Regel zulässig sein, die eckigen Parenthesen in (7) und (8), in (9) aber wenigstens das 3. Glied des Koefficienten von δB_1 zu vernachlässigen.

Sphärische Berechnung der Koefficienten. Kommt es auf Bruchteile der Ordnung e^2 in den Koefficienten der Differentialformeln nicht

an, so kann man sie so berechnen, als wäre das Dreieck zwischen Nordpol P_1 und P_2 ein sphärisches.

Man hat zunächst für diese Voraussetzung:

$$\mathfrak{m} = a_0 \sin \frac{s}{a_0}, \quad \frac{d\mathfrak{m}}{ds} = \cos \frac{s}{a_0} \tag{4}$$

und nun durch leicht ersichtliche Reduktionen, insbesondere durch Auflösung von $\sin \varDelta\alpha$ und $\cos \varDelta\alpha$, für einige der kompliziertesten Koefficienten in (7) bis (9) des vorigen Paragraphen:

$$\left.\begin{aligned} &\cos \varDelta\alpha + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \sin \alpha_{1.2} \sin \alpha_{2.1} \\ &= -\cos \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1} - \cos \frac{s}{a_0} \sin \alpha_{1.2} \sin \alpha_{2.1}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin \varDelta\alpha - \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \sin \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1} \\ &= -\cos \alpha_{1.2} \sin \alpha_{2.1} + \cos \frac{s}{a_0} \sin \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \tan B_2 \cos \alpha_{2.1} = \cos \frac{s}{a_0} + \sin \frac{s}{a_0} \tan B_2 \cos \alpha_{2.1}, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} &\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \cos \varDelta\alpha \sin \alpha_{2.1} \\ &\qquad - \frac{\sin^2 \varDelta\alpha}{\sin \alpha_{1.2}} \\ &+ \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right]\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right] \sin^2\alpha_{2.1} \sin \alpha_{1.2} \end{aligned}\right\} \\ &= \left\{\begin{aligned} &2 \cos \frac{s}{a_0} \cos \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1} \sin \alpha_{2.1} \\ &- \sin \alpha_{1.2} \cos^2\alpha_{2.1} - \cos^2 \alpha_{1.2} \frac{\sin^2 \alpha_{2.1}}{\sin \alpha_{1.2}} \\ &- \sin^2 \frac{s}{a_0} \sin^2\alpha_{2.1} \sin \alpha_{1.2}\,. \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie ist aber:

$$-\cos \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1} - \cos \frac{s}{a_0} \sin \alpha_{1.2} \sin \alpha_{2.1} = \cos L_{1.2} \tag{5*}$$

$$\cos \alpha_{1.2} \sin \alpha_{2.1} - \cos \frac{s}{a_0} \sin \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1} = \sin L_{1.2} \sin B_2, \tag{6*}$$

womit sich (5) und (6) unmittelbar vereinfachen. Ferner ist:

$$\cos \frac{s}{a_0} = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos L_{1.2}$$

$$\sin\frac{s}{a_0}\cos\alpha_{2.1} = -\sin B_1\cos B_2 + \cos B_1\sin B_2\cos L_{1.2}$$

und daher für (7):

$$\cos\frac{s}{a_0} + \sin\frac{s}{a_0}\tan B_2\cos\alpha_{2.1} = \cos L_{1.2}\cos B_1\sec B_2. \qquad (7^*)$$

Zur Reduktion von (8) ist nach dem Cotangentensatz (oder nach Formel (5) S. 275):

$$\tan B_1\sin\frac{s}{a_0} = \cot\alpha_{2.1}\sin\alpha_{1.2} - \cos\frac{s}{a_0}\cos\alpha_{1.2}.$$

Quadriert man dies und multipliziert mit $\sin^2\alpha_{2.1} : \sin\alpha_{1.2}$, so gelangt man zu der Relation:

$$2\cos\frac{s}{a_0}\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\sin\alpha_{2.1} - \sin\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{2.1} - \cos^2\alpha_{1.2}\frac{\sin^2\alpha_{2.1}}{\sin\alpha_{1.2}}$$
$$= \sin^2\frac{s}{a_0}(\sin^2\alpha_{1.2} - \sec^2 B_1)\frac{\sin^2\alpha_{2.1}}{\sin\alpha_{1.2}},$$

mit Hilfe welcher sich die rechte Seite von (8) in den Ausdruck vereinfacht:

$$-\sin^2\frac{s}{a_0}\sec^2 B_1\frac{\sin^2\alpha_{2.1}}{\sin\alpha_{1.2}} \text{ d. i. } -\sin\frac{s}{a_0}\sin L_{1.2}\sec B_2. \qquad (8^*)$$

Die Differentialformeln (4) und (7) bis (9) des § 10 lassen sich nunmehr ohne Schwierigkeiten in nachstehende Formeln überführen, in denen δB, δL und $\delta\alpha$ Sekundenwerte bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho''\frac{\delta s}{a_0} &= \cos\alpha_{1.2}\,\delta B_1 + \cos\alpha_{2.1}\,\delta B_2 + \begin{pmatrix}\cos B_2\sin\alpha_{2.1}\\ \text{oder auch}\\ -\cos B_1\sin\alpha_{1.2}\end{pmatrix}(\delta L_1 - \delta L_2)\\
\delta\alpha_{1.2} &= -\frac{\sin\alpha_{1.2}}{\tan\frac{s}{a_0}}\delta B_1 - \frac{\sin\alpha_{2.1}}{\sin\frac{s}{a_0}}\delta B_2 + \frac{\cos B_2\cos\alpha_{2.1}}{\sin\frac{s}{a_0}}(\delta L_1 - \delta L_2)\\
\delta\alpha_{2.1} &= -\frac{\sin\alpha_{1.2}}{\sin\frac{s}{a_0}}\delta B_1 - \frac{\sin\alpha_{2.1}}{\tan\frac{s}{a_0}}\delta B_2 - \frac{\cos B_1\cos\alpha_{1.2}}{\sin\frac{s}{a_0}}(\delta L_1 - \delta L_2)
\end{aligned}\right\}(9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta B_2 &= \varrho''\cos\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} + \sin L_{1.2}\cos B_1\,\delta\alpha_{1.2}\\
&\qquad + \cos L_{1.2}\,\delta B_1\\
\delta L_2 &= \delta L_1 - \varrho''\sec B_2\sin\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} - \sin L_{1.2}\csc\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}\\
&\qquad + \sin L_{1.2}\tan B_2\,\delta B_1\\
\delta\alpha_{2.1} &= \varrho''\tan B_2\sin\alpha_{2.1}\frac{\delta s}{a_0} + \cos L_{1.2}\cos B_1\sec B_2\,\delta\alpha_{1.2}\\
&\qquad - \sin L_{1.2}\sec B_2\,\delta B_1.
\end{aligned}\right\}(10)$$

Es ist selbstverständlich, dafs man diese Formeln auch direkt und weit einfacher als oben durch Differentiation der Formeln der sphärischen Trigonometrie erhält. Der hier eingeschlagene Weg zeigt aber deutlich die Vernachlässigungen, die übrigens nicht, wie eingangs erwähnt, durchaus Bruchteile der Koefficienten von der Ordnung e^2 sind, sondern in der 1. und 3. Formel (10) im Koefficienten von δB_1 bezw. $\delta \alpha_{1.2}$ nur Bruchteile der Ordnung $e^2 s : a_0$. Da diese beiden Koefficienten nahezu gleich 1 sind, verdient der erwähnte Umstand Beachtung.

Der Koefficient von $\delta \alpha_{1.2}$ in der 2. Formel (10) kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$-\sin \frac{s}{a_0} \sec B_2 \cos \alpha_{2.1}, \tag{10*}$$

welcher Ausdruck jedoch weniger bequem als der oben benutzte ist.

Für die Formeln (9) kann man $\sin \frac{s}{a_0}$ event. mittelst einer der Relationen

$$\sin \frac{s}{a_0} = \frac{\sin L_{1.2} \cos B_2}{\sin \alpha_{1.2}} = -\frac{\sin L_{1.2} \cos B_1}{\sin \alpha_{2.1}} \tag{9*}$$

berechnen und zu $\log \sin \frac{s}{a_0}$ unmittelbar $\log \tan \frac{s}{a_0}$ aufschlagen.

§ 12. Differentialformeln für s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ bei gegebenen geographischen Positionen in Bezug auf Änderungen von a_0 und e^2.

Wir betrachten vorerst das sphärische Hilfsdreieck $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$. Auf dieses können wir sofort die (9) des vorigen Paragraphen anwenden, wenn wir für $\frac{s}{a_0}$, B und $L_{1.2}$ schreiben bezw. $\Delta\varphi$, β und $\Delta\lambda$. Damit ergiebt sich, die $\delta\beta$ und $\delta\Delta\lambda$ als Arcus genommen und wegen $\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} = \cos\beta_0$:

$$\delta\Delta\varphi = \cos\alpha_{1.2}\,\delta\beta_1 + \cos\alpha_{2.1}\,\delta\beta_2 + \cos\beta_0\,\delta\Delta\lambda \tag{1}$$

und

$$\sin\Delta\varphi\,\delta\alpha_{1.2} = -\cos\Delta\varphi \sin\alpha_{1.2}\delta\beta_1 - \sin\alpha_{2.1}\delta\beta_2 - \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1}\delta\Delta\lambda. \tag{2}$$

Die Formel für $\delta\alpha_{2.1}$ kann wegbleiben, da sie schliefslich am bequemsten aus derjenigen für $\delta\alpha_{1.2}$ durch Indicesvertauschung erhalten wird.

Für $\delta\beta_1$ und $\delta\beta_2$ hat man aus der Beziehung $\tan\beta = \sqrt{1-e^2}\tan B$ durch Differentiation:

$$\delta\beta = -\tan B \cos^2\beta \frac{\delta e^2}{2\sqrt{1-e^2}} = -\frac{1}{4}\sin 2\beta \frac{\delta e^2}{-e^2} \tag{3}$$

und hiermit gehen (1) und (2) mit Rücksicht auf die (4) S. 248 über in:

$$\delta \varDelta\varphi = \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin^2\beta_0\,(\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_1) + \cos\beta_0\,\delta\varDelta\lambda \quad (4)$$

$$\delta\alpha_{1.2} = \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin\beta_0\cos\beta_0\sin\varphi_1 + \frac{\sin\beta_0\sin\varphi_2}{\sin\varDelta\varphi}\,\delta\varDelta\lambda\,. \quad (5)$$

Zur Bestimmung von $\delta\varDelta\lambda$ knüpfen wir an die Gleichung (13) S. 268 an:

$$L_{1.2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}\;d\lambda\,, \quad (6)$$

wobei

$$\tan\beta = \tan\beta_0\cos\lambda \qquad \cos\beta_0 = \cos\beta_1\sin\alpha_{1.2}\,. \quad (7)$$

Es ist durch Differentiation, da $\delta L_{1.2}$ gleich null ist, vergleiche S. 268 (15):

$$\left.\begin{aligned} 0 = (w_2-w_1)\,\delta\lambda_1 + w_2\delta\varDelta\lambda - \frac{1}{2}\,\delta e^2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\cos^2\beta}{w}\,d\lambda + e^2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\cos\beta\sin\beta\,\delta\beta}{w}\,d\lambda,\\ \delta\beta = \cos^2\beta\sec^2\beta_0\cos\lambda\,\delta\beta_0\,, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\sin\beta_0\,\delta\beta_0 = \sin\beta_1\sin\alpha_{1.2}\,\delta\beta_1 - \cos\beta_1\cos\alpha_{1.2}\,\delta\alpha_{1.2}\,. \quad (9)$$

Setzt man $\delta\beta$ nach der 2. Formel (8) in das vorhergehende Integral und reduziert mittelst der Formeln:

$$d\lambda = \cos\beta_0\sec^2\beta\,d\varphi, \quad \cos\lambda = \tan\beta\cot\beta_0, \quad \sin\beta = \sin\beta_0\cos\varphi,$$

wie S. 268, so geht die 1. Gleichung (8) über in:

$$0 = (w_2-w_1)\,\delta\lambda_1 + w_2\,\delta\varDelta\lambda - \frac{1}{2}\cos\beta_0 H\,\delta e^2 + e^2\sin\beta_0 J\,\delta\beta_0, \quad (10)$$

worin J die durch (6) S. 267 definierte Bedeutung hat und H durch die Gleichung gegeben ist:

$$H = \int_{\varphi}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{w}\,. \quad (11)$$

Es ist nun noch $\delta\lambda_1$ zu ermitteln. Hierzu führt die Differentiation der Gleichung $\cot\lambda_1 = \sin\beta_1\tan\alpha_{1.2}$, wodurch sich findet:

$$\delta\lambda_1 = -\sin^2\lambda_1\cos\beta_1\tan\alpha_{1.2}\,\delta\beta_1 - \sin^2\lambda_1\sin\beta_1\sec^2\alpha_{1.2}\,\delta\alpha_{1.2}\,.$$

Setzen wir hier, sowie in (9) die Werte von $\delta\beta_1$ und $\delta\alpha_{1.2}$ nach (3) und (5) ein, so erhalten wir mit Beachtung der (2) und (3) S. 232 und 233:

$$\left.\begin{aligned}\delta\lambda_1 &= -\frac{\cos\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin\Delta\varphi}\,\delta\Delta\lambda\\ \delta\beta_0 &= -\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin\beta_0\cos\beta_0 - \sin\beta_0\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin\Delta\varphi}\,\delta\Delta\lambda\,.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Dies in (10) eingesetzt und nach $\delta\Delta\lambda$ aufgelöst, giebt unter Einführung von $\mathfrak{m}$, S. 273 (1):

$$\delta\Delta\lambda = \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\left\{(1-e^2)\,H + e^2\sin^2\beta_0\,J\right\}\frac{a_0\cos\beta_0\sin\Delta\varphi}{\mathfrak{m}}. \quad (13)$$

Nun ist aber

$$s = a_0\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}\,d\varphi$$

und identisch

$$\sqrt{1-e^2\cos^2\beta} = \frac{1-e^2+e^2\sin^2\beta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}}.$$

Setzt man hier $\sin\beta = \sin\beta_0\cos\varphi$ und beachtet die Werte H und J nach (11) S. 287 und (6) S. 267, so folgt:

$$s = a_0\left((1-e^2)\,H + e^2\sin^2\beta_0 J\right), \quad (14)$$

womit (13) übergeht in:

$$\delta\Delta\lambda = \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{s}{\mathfrak{m}}\cos\beta_0\sin\Delta\varphi. \quad (15)$$

Ehe wir diese Formel in (4) und (5) substituieren, differenzieren wir vorerst noch die Gleichung für s, wozu (1) und (2) S. 265 zu vergleichen ist. Es wird:

$$\frac{\delta s}{a_0} = \frac{s}{a_0}\frac{\delta a_0}{a_0} + w_2\delta\Delta\varphi + (w_2 - w_1)\,\delta\varphi_1 - \frac{1}{2}\,\delta e^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\cos^2\beta}{w}\,d\varphi$$

$$+\, e^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\cos\beta\,\sin\beta\,\delta\beta}{w}\,d\varphi,$$

$$\delta\beta = \sec\beta\,\cos\beta_0\,\cos\varphi\,\delta\beta_0,$$

mit $\delta\beta_0$ entsprechend der 2. Formel (12). Führt man es hiernach ein und setzt im 1. Integral $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta_0\cos^2\varphi$, so ergiebt sich:

$$\frac{\delta s}{a_0} = \frac{s}{a_0}\frac{\delta a_0}{a_0} + w_2\delta\Delta\varphi + (w_2 - w_1)\,\delta\varphi_1 - \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\left(\frac{s}{a_0} - J\sin^2\beta_0(1-e^2\cos^2\beta_0)\right)$$

$$-\, e^2 J\sin^2\beta_0\,\cos\beta_0\,\frac{\sin\varphi_1\,\sin\varphi_2}{\sin\Delta\varphi}\,\delta\Delta\lambda. \quad (16)$$

Um dies weiter zu vereinfachen, mufs noch $\delta\varphi_1$ bestimmt werden. Zu dem Zwecke giebt die Differentiation der Gleichung $\tan\varphi_1 = \cot\beta_1 \cos\alpha_{1.2}$:

$$\delta\varphi_1 = -\frac{\cos^2\varphi_1}{\sin^2\beta_1}\cos\alpha_{1.2}\,\delta\beta_1 - \cot\beta_1\cos^2\varphi_1\sin\alpha_{1.2}\,\delta\alpha_{1.2}.$$

Hierin ist $\delta\beta_1$ nach (3), $\delta\alpha_{1.2}$ nach (5) einzuführen, womit erhalten wird:

$$\delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin^2\beta_0\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \frac{\cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin\varDelta\varphi}\cos\beta_0\,\delta\varDelta\lambda. \quad (17)$$

Die Einführung von (4) und (17) in (16) giebt ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf (1) S. 273:

$$\frac{\delta s}{a_0} = \frac{s}{a_0}\frac{\delta a_0}{a_0} + \frac{\mathfrak{m}\cos\beta_0}{a_0\sin\varDelta\varphi}\delta\varDelta\lambda$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\left\{-w_1\sin^2\beta_0\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + w_2\sin^2\beta_0\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \frac{s}{a_0} + J\sin^2\beta_0(1-e^2\cos^2\beta_0)\right\}.$$

Die Substitution des Wertes $\delta\varDelta\lambda$ nach (15) und die Restitution des Wertes von s nach (14) führt endlich zu der Formel:

$$\delta s = \frac{\delta a_0}{a_0}s - \frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\mathfrak{S}, \quad (18)$$

$$\mathfrak{S} = a_0\sin^2\beta_0\left(\frac{1}{2}w_1\sin 2\varphi_1 - \frac{1}{2}w_2\sin 2\varphi_2 + (1-e^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin^2\varphi}{w}d\varphi\right). \quad (19)$$

Aufserdem ist nach (5) und (15):

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{1.2}} = \varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin\beta_0\cos\beta_0\left(\sin\varphi_1 + \frac{s}{\mathfrak{m}}\sin\varphi_2\right) \quad (20)$$

und hiernach durch Vertauschung der Indices mit Rücksicht auf die (4) S. 248:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} = \varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\sin\beta_0\cos\beta_0\left(\sin\varphi_2 + \frac{s}{\mathfrak{m}}\sin\varphi_1\right). \quad (21)$$

§ 13. **Berechnung von $\mathfrak{S}$.** Wenn es sich darum handelte, eine in allen Fällen brauchbare Formel abzuleiten, so würde man für obige Formel (19) das Integral entwickeln wie früher dasjenige für s. Wir begnügen uns indessen, eine einfachere Behandlung vorzunehmen, die alle Glieder von der Ordnung e^4 ab vernachlässigt.

Mit Rücksicht auf (2) S. 273 geht zunächst (19) über in:

$$\mathfrak{S} = a_0\sin^2\beta_0\sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) - \frac{1}{4}k^2(\sin^2\varphi_1\sin 2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2\sin 2\varphi_2) \\ \qquad + (1-k^2)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(\sin^2\varphi + \frac{1}{2}k^2\sin^4\varphi)\,d\varphi + \cdots\end{array}\right\}.$$

Da nun $\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$, $\sin^4\varphi = \sin^2\varphi - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$ und

$$\sin^2\varphi \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi,$$

so gelangt man leicht zu der Formel:

$$\mathfrak{S} = a_0 \sin^2\beta_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{8}k^2\right)\varDelta\varphi - \frac{1}{4}(3-k^2)(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \\ -\frac{3}{64}k^2(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) + \cdots \end{array} \right\}$$

und hieraus zu der in der Regel völlig hinreichenden Entwicklung:

$$\mathfrak{S} = b_0 \sin^2\beta_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{8}k^2\right)\varDelta\varphi - \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{6}k^2\right)\cos 2\varphi \sin \varDelta\varphi \\ -\frac{3}{32}k^2 \cos 4\varphi \sin 2\varDelta\varphi + \cdots. \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Für kleine Distanzen ist es zweckmäfsiger, $\mathfrak{S}$ direkt als Funktion von s darzustellen. Wir betrachten hierbei s als Gröfse 1. Ordnung. Nach (9) S. 223 ist nun:

$$s = b_0\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + Gl_4\right)\left(\varDelta\varphi + \frac{1}{4}k^2\cos 2\varphi \sin \varDelta\varphi + Gl_5\right)$$

und hiermit, da man $\sin \varDelta\varphi$ mit $\varDelta\varphi$ im letzten Gliede rechter Hand vertauschen darf:

$$\varDelta\varphi = \frac{s}{b_0}\left(1 - \frac{1}{2}k^2\cos^2\varphi + Gl_4\right). \quad (2)$$

Setzt man dies in (1) ein, zugleich aber $\varDelta\varphi\left(1 - \frac{1}{6}\varDelta\varphi^2\right)$ für $\sin \varDelta\varphi$ und $2\varDelta\varphi$ für $\sin 2\varDelta\varphi$, so ergiebt sich, indem die in k^2 multiplizierten Glieder verschwinden:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}s\sin^2\beta_0\left\{1 - 3\cos 2\varphi\left[1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0^2}\right] + Gl_4\right\}. \quad (3)$$

Beachtet man, dafs $2\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ist und führt mittelst der (4) S. 248 die Breiten der Endpunkte ein, so folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}s \left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2} - 3\sin\beta_1\sin\beta_2\left[1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0^2}\right] \\ -3\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\left[1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0^2}\right] + Gl_4 \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Man kann hierin für $\cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2}$ auch $\cos^2\beta_2 \sin^2\alpha_{2.1}$ schreiben.

§ 14. Formeln für kleine Distanzen. Wir führen hier die geographische Breite ein und erhalten aus den Formeln (19), (20) und (21) des § 12 und aus (4) des § 13:

$$\delta s = \frac{\delta a_0}{a_0} s - \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \mathfrak{S}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} s \left\{ \begin{array}{c} 1 - \left(\frac{1}{W_1^2} \cos^2 B_1 \sin^2 \alpha_{1.2} \text{ oder } \frac{1}{W_2^2} \cos^2 B_2 \sin^2 \alpha_{2.1} \right) \\ - \frac{3}{W_1 W_2} \left\{ \begin{array}{c} \sin B_1 \sin B_2 [1-e^2] \\ + \cos B_1 \cos B_2 \cos \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1} \end{array} \right\} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} \right] + Gl_4 \end{array} \right\}; \tag{2}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{1.2}} = \varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{W_1^2} \cos^2 B_1 \sin \alpha_{1.2} \cos \alpha_{1.2} \\ + \frac{1}{W_2^2} \frac{s}{\mathfrak{m}} \cos^2 B_2 \sin \alpha_{2.1} \cos \alpha_{2.1} \end{array} \right\}; \tag{3}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{2.1}} = \varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{W_1^2} \frac{s}{\mathfrak{m}} \cos^2 B_1 \sin \alpha_{1.2} \cos \alpha_{1.2} \\ + \frac{1}{W_2^2} \cos^2 B_2 \sin \alpha_{2.1} \cos \alpha_{2.1} \end{array} \right\}; \tag{4}$$

$$\log \left[1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} \right] = - \frac{M}{6 a_0^2} s^2 + Gl_4; \quad \log \frac{s}{\mathfrak{m}} = \frac{M}{6 a_0^2} s^2 + Gl_4. \tag{5}$$

Man kann auch noch die mittlere Breite und das mittlere Azimut einführen; wir finden dies aber nicht vorteilhaft, sobald die Glieder mit s^2 berücksichtigt werden müssen. Darf man diese jedoch noch weglassen, was für Seiten meſsbarer Dreiecke in der Regel der Fall sein wird, so kann man einfacher schreiben:

$$\left. \begin{array}{l} \delta s = \frac{\delta a_0}{a_0} s - \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \mathfrak{S}, \\ \mathfrak{S} = \frac{s}{W^2} (2 \cos^2 B \cos^2 \alpha - [1 - e^2] \sin^2 B + \cdots); \\ \underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{1.2}} = \underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{2.1}} = \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \frac{\varrho''}{W^2} (2 \cos^2 B \sin \alpha \cos \alpha + \cdots); \\ B = \frac{B_1 + B_2}{2}, \qquad \alpha = \frac{\alpha_{1.2} + \alpha_{2.1} - 180^0}{2}, \\ W \text{ mit Argument } B. \end{array} \right\} \tag{6}$$

In den Parenthesen sind hier also die Glieder mit $s^2 : a_0^2$ vernachlässigt, e^2 aber ist berücksichtigt.

§ 15. Differentialformeln für den Endpunkt P_2 einer geodätischen Linie in Bezug auf Änderungen von a_0 und e^2. Diese

kann man aus denen des § 12 herleiten, indem man nach erfolgter Änderung von a_0 und e^2 unter Annahme konstanter geographischer Positionen sich s und $\alpha_{1.2}$ um die negativen Werte der vorher erlittenen Änderungen wieder geändert denkt und nach S. 280 (5) und (6) die eintretenden Änderungen von β_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ ermittelt. Kehren wir also in den letztgenannten Formeln (6) die Vorzeichen um und behalten die reduzierte Breite bei, so ergiebt sich zunächst:

$$\delta\beta_2 = -\frac{\delta s}{a_0 w_2}\cos\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2}\sin\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}$$

$$\delta L_{1.2} = +\frac{\delta s}{a_0}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\sec\beta_2\cos\alpha_{2.1}\,\delta\alpha_{1.2}$$

$$\delta\alpha_{2.1} = -\frac{\delta s}{a_0 w_2}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1} - \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0 w_2}\tan\beta_2\cos\alpha_{2.1}\right\}\delta\alpha_{1.2}.$$

Hierin aber setzen wir für δs und $\delta\alpha_{1.2}$ die Werte (18) und (20) S. 289 und fügen zu $\delta\alpha_{2.1}$ noch den Ausdruck nach (21) S. 289 bei.

Dies Verfahren giebt:

$$\left.\begin{aligned}\underset{\text{in Sek.}}{\delta\beta_2} &= -\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0 w_2}\cos\alpha_{2.1}\\ &+\varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{1}{w_2}\left\{\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\cos\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\sin\alpha_{2.1}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_{1.2}} &= +\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1}\\ &+\varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\left\{-\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\sec\beta_2\cos\alpha_{2.1}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} &= -\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0 w_2}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1}\\ &+\varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{1}{w_2}\left\{\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1} - \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\tan\beta_2\cos\alpha_{2.1} + \mathfrak{M}w_2\right\}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{T} &= (\mathfrak{m}\sin\varphi_1 + s\sin\varphi_2)\sin\beta_0\cos\beta_0\\ \mathfrak{M} &= \left\{\begin{aligned}&\left(\sin\varphi_1 + \frac{s}{\mathfrak{m}}\sin\varphi_2\right)\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right]\\ &-(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\left[\frac{s}{\mathfrak{m}} - 1\right]\end{aligned}\right\}\sin\beta_0\cos\beta_0.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Hierzu sind für $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{S}$ die Ausdrücke (5) S. 274 und (1) S. 290 zu beachten, wenn es sich um beliebig grofse Distanzen handelt.

Ist $s : a_0$ eine Gröfse 1. Ordnung, so genügt die Formel (4) S. 290 für $\mathfrak{S}$ und der Ausdruck $s\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0{}^2} + Gl_4\right)$ für $\mathfrak{m}$, vergl. § 11 S. 283.

Vorstehende Formeln lassen sich in eine wesentlich andere Gestalt bringen, indem man die vollständigen Ausdrücke für $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{m}$ und s nach (19) S. 289, (1) S. 273 und (14) S. 288 substituiert.

Zu derselben Modifikation gelangt man auch durch direkte Entwicklung der Differentialformeln, wie sich bei einer zur Kontrolle angestellten Rechnung ergab. Die Formeln lauten:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\delta\beta_2} = -\varrho''\dfrac{\delta a_0}{a_0}\dfrac{s}{a_0 w_2}\cos\alpha_{2.1} \\ +\varrho''\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta e^2}{1-e^2}\dfrac{1}{w_2}\left\{\begin{array}{l}-\mathfrak{A}(\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\alpha_{2.1}+\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\alpha_{1.2}) \\ +(\mathfrak{B}-[1-\delta\cos^2\beta_0\cos^2\varphi_1]\mathfrak{C})\cos\alpha_{2.1}\end{array}\right\}\end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\delta L_{1.2}} = +\varrho''\dfrac{\delta a_0}{a_0}\dfrac{s}{a_0}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1} \\ +\varrho''\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta e^2}{1-e^2}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\sin\beta_1\sin\beta_2-\mathfrak{B}\sin^2\beta_2 \\ +(1+\delta\sin^2\beta_1\sin^2\varphi_2)\,\mathfrak{C}\end{array}\right\}\end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} = -\varrho''\dfrac{\delta a_0}{a_0}\dfrac{s}{a_0 w_2}\tan\beta_2\sin\alpha_{2.1} \\ +\varrho''\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta e^2}{1-e^2}\sec\beta_2\sin\alpha_{2.1}\dfrac{1}{w_2}\left\{\begin{array}{l}-\mathfrak{A}\sin\beta_1+\mathfrak{B}\sin\beta_2 \\ -[1-\delta\cos^2\beta_0\cos^2\varphi_1]\mathfrak{C}\sin\beta_2\end{array}\right\}\end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\mathfrak{A} = w_2 \sin \varDelta\varphi \quad (8)$$

$$\mathfrak{B} = (1-e^2)H + (w_1 - w_2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1 \quad (9)$$

$$\mathfrak{C} = (1-e^2)\,J\sin^2\beta_0\,. \quad (10)$$

δ hat in den Parenthesen rechts die frühere Bedeutung als $e^2:(1-e^2)$, im übrigen aber bezeichnet es die Differentiation. J und H sind die früher eingeführten Integrale:

$$J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\cos^2\varphi}{w}\,d\varphi, \qquad H = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{1}{w}\,d\varphi.$$

Ersteres ist bereits S. 273 (3) entwickelt; letzteres setzt sich aus J und dem für $\mathfrak{S}$ S. 290 entwickelten Integral zusammen. Behandelt man überhaupt $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ wie $\mathfrak{S}$, so wird erhalten:

$$\mathfrak{B} = \sqrt{1-e^2}\left\{\begin{array}{l}\left(1-\frac{1}{4}k^2\right)\varDelta\varphi-\frac{1}{4}k^2\cos 2\varphi\sin\varDelta\varphi \\ +\frac{1}{4}k^2\sin 2\varphi_1\sin 2\varphi\sin\varDelta\varphi+\cdots\end{array}\right\} \quad (9^*)$$

$$\mathfrak{C} = \sqrt{1-e^2}\sin^2\beta_0\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{8}k^2\right)\varDelta\varphi+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)\cos 2\varphi\sin\varDelta\varphi \\ -\frac{1}{32}k^2\cos 4\varphi\sin 2\varDelta\varphi+\cdots.\end{array}\right\} \quad (10^*)$$

§ 16. **Vorstehende Formeln für kleine Distanzen.** Wir führen hier die geographische Breite ein und erhalten aus den Formeln (1) bis (3) des vorigen Paragraphen mit Beachtung der Relationen (5) S. 280:

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} = -\varrho'' \frac{\delta a_0}{a_0} \frac{s}{a_0} \frac{W_2^3}{1-e^2} \cos\alpha_{2.1} \\
&+\varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} \frac{W_2^3}{1-e^2} \left\{ \frac{\mathfrak{S}}{a_0} \cos\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0} \sin\alpha_{2.1} \right\}, \\
&\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_{1.2}} = +\varrho'' \frac{\delta a_0}{a_0} \frac{s}{a_0} W_2 \sec B_2 \sin\alpha_{2.1} \\
&+\varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} W_2 \left\{ -\frac{\mathfrak{S}}{a_0} \sec B_2 \sin\alpha_{2.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0} \sec B_2 \cos\alpha_{2.1} \right\}, \\
&\underset{\text{in Sek.}}{\delta \alpha_{2.1}} = -\varrho'' \frac{\delta a_0}{a_0} \frac{s}{a_0} W_2 \tan B_2 \sin\alpha_{2.1} \\
&+\varrho'' \frac{1}{2} \frac{\delta e^2}{1-e^2} W_2 \left\{ \frac{\mathfrak{S}}{a_0} \tan B_2 \sin\alpha_{2.1} - \frac{\mathfrak{T}}{a_0} \tan B_2 \cos\alpha_{2.1} + \frac{1}{W_2} \mathfrak{U} \right\}.
\end{aligned}\right\} (1)$$

Nach (2) S. 291 ist für den Fall, dafs $s : a_0$ eine Gröfse 1. Ordnung ist:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} s \left\{ \begin{aligned} &1 - \left(\frac{1}{W_1^2} \cos^2 B_1 \sin^2 \alpha_{1.2} \text{ oder } \frac{1}{W_2^2} \cos^2 B_2 \sin^2 \alpha_{2.1} \right) \\ &- \frac{3}{W_1 W_2} \left\{ \begin{aligned} &\sin B_1 \sin B_2 [1 - e^2] \\ &+ \cos B_1 \cos B_2 \cos\alpha_{1.2} \cos\alpha_{2.1} \end{aligned} \right\} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} \right] + Gl_4. \end{aligned} \right\} (2)$$

Es wird ferner mit $\mathfrak{m} = s\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{a_0^2} + Gl_4\right)$ erhalten:

$$\mathfrak{T} = s \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{W_1^2} \cos^2 B_1 \cos\alpha_{1.2} \sin\alpha_{1.2} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{a_0^2} \right] \\ &+ \frac{1}{W_2^2} \cos^2 B_2 \cos\alpha_{2.1} \sin\alpha_{2.1} + Gl_4 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

$$\mathfrak{U} = \frac{s}{2a_0^2} \mathfrak{T} - \frac{s^3}{6a_0^3} \sin B_1 \cos B_1 \sin\alpha_{1.2} + Gl_4. \quad (4)$$

Handelt es sich um Seiten mefsbarer Dreiecke, so wird man in den geschlungenen Parenthesen der beiden ersten Formeln (1) die Glieder mit $s^3 : a_0^3$ und in der 3. Formel (1) bereits solche mit $s^2 : a_0^2$ vernachlässigen können. Dann wird einfacher:

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{\text{in Sek.}}{\delta B_2} = -\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0}\frac{W_2^3}{1-e^2}\cos\alpha_{2.1}\\
&-\varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{s}{a_0}\frac{W_2}{1-e^2}\frac{W_2^2}{W^2}\left\{\begin{matrix}\cos^2 B\cos\alpha_{1.2}\\ -(1-[2-e^2]\sin^2 B)\cos\alpha_{2.1}+\cdots\end{matrix}\right\},\\
&\underset{\text{in Sek.}}{\delta L_{1.2}} = +\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0}W_2\sec B_2\sin\alpha_{2.1}\\
&-\varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{s}{a_0}\frac{\sec B_2}{W_2}\frac{W_2^2}{W^2}\left\{\begin{matrix}\cos^2 B\sin\alpha_{1.2}\\ +(1-[2-e^2]\sin^2 B)\sin\alpha_{2.1}+\cdots\end{matrix}\right\},\\
&\underset{\text{in Sek.}}{\delta\alpha_{2.1}} = -\varrho''\frac{\delta a_0}{a_0}\frac{s}{a_0}W_2\tan B_2\sin\alpha_{2.1}\\
&+\varrho''\frac{1}{2}\frac{\delta e^2}{1-e^2}\frac{s}{a_0}\frac{\tan B_2}{W_2}\frac{W_2^2}{W^2}\left\{\begin{matrix}\cos^2 B\sin\alpha_{1.2}\\ +(1-[2-e^2]\sin^2 B)\sin\alpha_{2.1}+\cdots\end{matrix}\right\},
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2),\quad W \text{ mit Argument } B.$$

In den geschlungenen Parenthesen der beiden ersten Formeln sind die Glieder mit $s^2 : a_0^2$ vernachlässigt, in der Formel für $\delta\alpha_{2.1}$ bereits solche mit $s : a_0$.

Differentialformeln, die den (5), (6) und (7) des vorigen Paragraphen entsprechen, entwickelte *Bessel* 1837 in den Astronom. Nachr. Bd. 14 S. 269 u. ff., [*Abhandlungen* Bd. 3 S. 34 (27)]. Er ging zum Teil anders vor, wie wir (abgesehen davon, dafs wir hier überhaupt die direkte Ableitung nicht mitgeteilt haben), insofern er nämlich in den Integralen nicht φ und λ, sondern $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\lambda$ als Variable betrachtete. Doch ist das nicht vorteilhaft.

Unsere strengen Formeln für $\delta\beta_2$ und $\delta\alpha_{1.2}$ stimmen mit den seinigen nach gehöriger Umformung, $\delta L_{1.2}$ dagegen nicht. Es ist *Bessel* hier ein Mifsverständnis passiert. Differenziert man nämlich die Integrale für s und $L_{1.2}$, so entsteht in beiden ein $\delta\beta$ (vergl. z. B. S. 266 u. 268). Diese sind aber verschieden, denn während das eine konstantes φ (bei *Bessel* $\varDelta\varphi$), das andere konstantes λ (bei *Bessel* $\varDelta\lambda$) voraussetzt, nimmt *Bessel* in beiden Fällen den ersteren Wert. Zufolge dieses Umstandes wird bei ihm in $\delta L_{1.2}$ der Koefficient von δe^2 um ein in e^2 multipliziertes Glied fehlerhaft (der 2. Teil seines P' mufs nämlich, um richtig zu werden, unter dem Integralzeichen mit $\cos u \sec u' \cos\sigma \sec\omega$ multipliziert werden). Es nimmt auch dieser Koefficient bei der Reihenentwicklung nur infolge des Versehens eine sehr komplizierte Form an, doch werden die Resultate der numerischen Rechnung nicht erheblich beeinflufst.

Aufserdem ist im 1. Glied rechter Hand der 2. Formel (27) S. 34 bei *Bessel* das eine der beiden r des Nenners zu streichen.

[Es mag noch bemerkt werden, dafs a. a. O. S. 35 1. Spalte u. in der zu

einer andern Entwicklung dienenden Formel für $d\sigma$ das von $\delta\alpha'$ abhängige Glied fehlt, was indes nur die Glieder mit e^2 beeinflufst.]

Jordan giebt Bd. 2 S. 441 seines *Handbuchs der Vermessungskunde* abgekürzte Differentialformeln, welche aufser s nicht $\alpha_{1.2}$ und B_1, sondern das arithmische Mittel der Breiten und Azimute als gegeben voraussetzen.

§ 17. Reihenentwicklungen f. d. Übertragung geographischer Koordinaten nach Potenzen von s. Man hat im allgemeinen nach *Taylors* Satz:

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_1 + \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 \cdot \frac{s}{1} + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 \cdot \frac{s^2}{1.2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_1 \cdot \frac{s^3}{1.2.3} + \cdots \\ L_2 &= L_1 + \left(\frac{dL}{ds}\right)_1 \cdot \frac{s}{1} + \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_1 \cdot \frac{s^2}{1.2} + \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_1 \cdot \frac{s^3}{1.2.3} + \cdots \\ \alpha_{2.1} &= \alpha_{1.2} + 180^0 + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_1 \cdot \frac{s}{1} + \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)_1 \cdot \frac{s^2}{1.2} + \left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right)_1 \cdot \frac{s^3}{1.2.3} + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei der Index 1 an den Differentialquotienten bedeutet, dafs nach erfolgter Differentiation die Werte von B, L und α für Punkt P_1 einzuführen sind. α ist so zu verstehen, dafs es das Azimut der von P_1 in Richtung nach P_2 wachsenden Linie anzeigt.

Setzt man in den Formeln (6) S. 280 $\delta\alpha_{1.2} =$ null, so erhält man ohne Schwierigkeit, wenn für δ als Zeichen der Differentiation jetzt d geschrieben und der Index 2 unterdrückt wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= -\frac{W^3 \cos\alpha}{a_0(1-e^2)} = -\frac{W^3(1+\delta)\cos\alpha}{a_0} \\ \frac{dL}{ds} &= +\frac{W}{a_0}\sec B \sin\alpha \\ \frac{d\alpha}{ds} &= -\frac{W}{a_0}\tan B \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Das hier noch auftretende δ ist die früher schon benutzte Gröfse $e^2 : (1-e^2)$, deren Einführung hier vorteilhaft ist. Man hat nun weiter:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad (3)$$

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dB}\frac{dB}{ds} = -\frac{e^2 \sin 2B}{2W}\frac{dB}{ds} = \delta\frac{W^2}{2a_0}\sin 2B\cos\alpha \quad (4)$$

und

$$\frac{d^2B}{ds^2} = -\frac{W^2}{a_0}(1+\delta)\left\{3\cos\alpha\frac{dW}{ds} - W\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}\right\}$$

$$\frac{d^2L}{ds^2} = \frac{1}{a_0}\sec B\left\{\sin\alpha\frac{dW}{ds} + W\tan B\sin\alpha\frac{dB}{ds} + W\cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}\right\}$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = -\frac{1}{a_0}\left\{\begin{aligned}&\tan B \sin\alpha \frac{dW}{ds} + W\sec^2 B \sin\alpha \frac{dB}{ds}\\ &+ W\tan B\cos\alpha \frac{d\alpha}{ds}\end{aligned}\right\}.$$

Substituiert man hier die (2) und (4) und beachtet auch die Relation

$$W^2(1+\delta) = 1 + \delta\cos^2 B. \tag{5}$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2B}{ds^2} &= -\frac{W^4}{a_0^2}(1+\delta)\left\{\tan B\sin^2\alpha + \frac{3}{2}\delta\sin 2B\cos^2\alpha\right\}\\ \frac{d^2L}{ds^2} &= -\frac{W^2}{a_0^2}\tan B\sec B\sin 2\alpha\\ \frac{d^2\alpha}{ds^2} &= +\frac{W^2}{2a_0^2}\sin 2\alpha\left\{1+2\tan^2 B+\delta\cos^2 B\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die nochmalige Differentiation giebt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3B}{ds^3} &= \frac{W^5}{a_0^3}(1+\delta)\cos\alpha\{[1+3\tan^2 B]\sin^2\alpha + \delta(3\cos 2B\cos^2\alpha\\ &\qquad + [1-10\sin^2 B]\sin^2\alpha) - 3\delta^2[6\sin^2 B-1]\cos^2 B\cos^2\alpha\}\\ \frac{d^3L}{ds^3} &= \frac{2W^3}{a_0^3}\sec B\sin\alpha\{[1+3\tan^2 B]\cos^2\alpha\\ &\qquad - \tan^2 B\sin^2\alpha + \delta\cos^2 B\cos^2\alpha\}\\ \frac{d^3\alpha}{ds^3} &= \frac{W^3}{a_0^3}\tan B\sin\alpha\{-[5+6\tan^2 B]\cos^2\alpha\\ &\qquad + [1+2\tan^2 B]\sin^2\alpha - \delta\cos^2 B\cos 2\alpha + 4\delta^2\cos^4 B\cos^2\alpha\}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bei der Bildung noch höherer Differentialquotienten vernachlässigen wir e^2 und δ und erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^4B}{ds^4} &= \frac{1}{a_0^4}\tan B\sin^2\alpha\{-4[2+3\tan^2 B]\cos^2\alpha\\ &\qquad + [1+3\tan^2 B]\sin^2\alpha + \cdots\}\\ \frac{d^4L}{ds^4} &= \frac{8}{a_0^4}\tan B\sec B\cos\alpha\sin\alpha\{-[2+3\tan^2 B]\cos^2\alpha\\ &\qquad + [1+3\tan^2 B]\sin^2\alpha + \cdots\}\\ \frac{d^4\alpha}{ds^4} &= \frac{1}{a_0^4}\cos\alpha\sin\alpha\{[5+28\tan^2 B+24\tan^4 B]\cos^2\alpha\\ &\qquad - [1+20\tan^2 B+24\tan^4 B]\sin^2\alpha + \cdots\}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^5B}{ds^5} &= \frac{1}{a_0^5}\cos\alpha\sin^2\alpha\{[8+60\tan^2 B+60\tan^4 B]\cos^2\alpha\\ &\qquad - [1+30\tan^2 B+45\tan^4 B]\sin^2\alpha + \cdots\}\\ \frac{d^5L}{ds^5} &= \frac{8}{a_0^5}\sec B\sin\alpha\{[2+15\tan^2 B+15\tan^4 B]\cos^4\alpha\\ &\qquad - [1+20\tan^2 B+30\tan^4 B]\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\ &\qquad + [1+3\tan^2 B]\tan^2 B\sin^4\alpha + \cdots\}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^5\alpha}{ds^5} = \frac{1}{a_0{}^5}\tan B \sin\alpha\, \{ &-[61 + 180\tan^2 B + 120\tan^4 B]\cos^4\alpha \\ &+[58 + 280\tan^2 B + 240\tan^4 B]\sin^2\cos^2\alpha \\ &-[1 + 20\tan^2 B + 24\tan^4 B]\sin^4\alpha + \cdots\}.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Bezeichnen wir

$$\left.\begin{aligned}&\frac{W_1}{a_0} s\cos\alpha_{1.2} \quad \text{mit} \quad u \\ &\frac{W_1}{a_0} s\sin\alpha_{1.2} \quad \text{mit} \quad v \\ &\tan B_1 \qquad\quad \text{mit} \quad t,\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

so findet sich mittelst der entwickelten Differentialquotienten aus den Reihenentwicklungen (1):

$$\underset{\text{in Sek.}}{B_2} = \underset{\text{in Sek.}}{B_1} - \varrho'' W_1^2(1+\delta)\left\{\begin{aligned}&u + \frac{1}{2}tv^2 - \frac{1}{6}[1+3t^2)uv^2 + \frac{1}{6}[2+3t^2]tu^2v^2 \\ &-\frac{1}{24}[1+3t^2]tv^4 - \frac{1}{30}[2+15t^2+15t^4]u^3v^2 \\ &+\frac{1}{120}[1+30t^2+45t^4]uv^4 + \frac{3}{4}\delta\sin 2B_1 u^2 \\ &-\delta\left(\frac{1}{2}\cos 2B_1 u^3 + \frac{1}{6}[5\cos 2B_1 - 4]uv^2\right) + Gl_6\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_2} = \underset{\text{in Sek.}}{L_1} + \varrho''\sec B_1\left\{\begin{aligned}&v - tuv + \frac{1}{3}[1+3t^2]u^2v - \frac{1}{3}t^2v^3 \\ &-\frac{1}{3}[2+3t^2]tu^3v + \frac{1}{3}[1+3t^2]tuv^3 \\ &+\frac{1}{15}[1+3t^2]t^2v^5 + \frac{1}{15}[2+15t^2+15t^4]u^4v \\ &-\frac{1}{15}[1+20t^2+30t^4]u^2v^3 + \frac{1}{3}\delta\cos^2 B_1 u^2v + Gl_6\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{2.1}} = \underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{1.2}} + 180^0 - \varrho''\left\{\begin{aligned}&tv - \frac{1}{2}[1+2t^2]uv - \frac{1}{6}[1+2t^2]tv^3 \\ &+\frac{1}{6}[5+6t^2]tu^2v - \frac{1}{24}[5+28t^2+24t^4]u^3v \\ &+\frac{1}{24}[1+20t^2+24t^4]uv^3 \\ &+\frac{1}{120}[61+180t^2+120t^4]tu^4v \\ &-\frac{1}{120}[58+280t^2+240t^4]tu^2v^3 \\ &+\frac{1}{120}[1+20t^2+24t^4]tv^5 - \frac{1}{2}\delta\cos^2 B_1 uv \\ &+\frac{1}{12}\delta\sin 2B_1(u^2-v^2)v + Gl_6.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Setzt man hierin e^2 und δ gleich null, so gelangt man zu Formeln, die sich aus den Entwicklungen S. 126 u. ff. ableiten lassen.

Für $\alpha_{1.2} = 0^0$ bezw. 90^0 erhält man aus (11), (12) und (13) Formeln, die zur Übertragung von Breite, Länge und Azimut dienen, sobald die *rechtwinkligen geodätischen Koordinaten* x und y von P_2 in Bezug auf P_1 und seinen Meridian gegeben sind. s geht nämlich in x über für $\alpha_{1.2} = 0^0$, in y für $\alpha_{1.2} = 90^0$. Der Fufspunkt der Ordinate y dient, wie leicht zu sehen, als Zwischenpunkt für die Übertragung der geographischen Breite.

Bei Angabe der Ordnung der vernachlässigten Glieder in (11) bis (13) ist vorausgesetzt, dafs die Gröfse $t = \tan B_1$, welche im allgemeinen in irgend einem Gliede in derselben Potenz auftritt, wie s, nicht die Einheit so sehr überschreitet, dafs dadurch der Charakter der Gröfsenordnung wesentlich verändert wird. Zur raschen Konvergenz gehört unbedingt ein geringer Betrag nicht allein von $\frac{s}{a_0}$, sondern auch von $\frac{s}{a_0} \tan B_1$.

Um in jedem Falle eine Vorstellung von der Genauigkeit zu gewinnen, hat man den Rest nach S. 25 (1) mittelst des ersten der vernachlässigten Differentialquotienten zu bilden, oder nach (2) mittelst des höchsten der berücksichtigten Differentialquotienten. Im letztern Falle wird man diejenige Änderung der höchsten angesetzten Glieder prüfen, welche durch Anwendung der Werte von B und α für einen Punkt zwischen P_1 und P_2 (anstatt derjenigen für P_1) im Maximum entstehen kann.

Es läfst sich leicht erkennen, dafs für $s = 0{,}1\,a_0$ die Formeln bei einigem Abstand vom Äquator B_2, L_2 und $\alpha_{2.1}$ um Zehntelsekunden fehlerhaft geben können, dafs aber andrerseits bei abnehmendem Werte von s die Genauigkeit sich rasch steigert. Bei $s = 0{,}05 a_0$ werden in mäfsigen Breiten die Hundertstelsekunden sicher erhalten.

Die Anwendung der Formeln (11), (12) und (13) kann nur dann von Nutzen sein, wenn von einem Punkte nicht *eine*, sondern *mehrere* Linien ausgehen, für welche die Übertragung der geographischen Koordinaten auszuführen ist. Dies trifft zu für P_1 als Zentrum von Polarkoordinaten, auch einigermafsen für Stationen dichter Dreiecksnetze. In diesen Fällen tritt die mühsame Arbeit der Berechnung der vielen Funktionen von B_1 zurück, weil sie sich gewissermafsen auf mehrere Linien verteilt.

Ist s eine Linie von der Länge der Seiten mefsbarer Dreiecke, also etwa $\leq 0{,}01 a_0$, so wird man in obigen Formeln in der Regel noch die höchsten angesetzten Glieder ohne Gefährdung der 4. Decimalstelle der Sekunden von B_2, L_2 und $\alpha_{2.1}$ weglassen können.

Die genauere Untersuchung läfst sich ohne Weitläufigkeit nicht

allgemein erledigen. Da man sie in einem bestimmten Falle aber leicht erledigen kann und auch nicht entbehren wollen wird, so haben wir um so mehr Ursache, auf eine solche nicht einzugehen.

Auf die Bedeutung der Formeln (11) bis (13) für den Fall, dafs P_1 Zentrum von Polarkoordinaten ist, wurde Verfasser durch das Werk: *Die bayerische Landesvermessung* u. s. w. 1873 S. 517 u. ff. aufmerksam. Darin ist zunächst eine Abhandlung *Soldners* von 1810 (vergl. a. a. O. S. 262) abgedruckt, welche mit einer Aufstellung allgemein gültiger Formeln zur Übertragung geographischer Koordinaten beginnt, wobei aber nur die 1. Potenz der Abplattung berücksichtigt ist. Hieran schliefst *Soldner* Reihenentwicklungen, geht jedoch nur bis s^3. Weiterhin folgt eine Abhandlung von *C. v. Orff*, die mit Umgehung der allgemeinen Formeln direkt an die Differentialformeln anknüpft und noch s^5 (ausgenommen in $\alpha_{2.1}$) berücksichtigt. Unsere Formeln stimmen bis auf eine Abweichung im 5. Differentialquotient von B_2 nach s mit den *Orff*schen Resultaten überein; in der Entwicklung haben wir indes anstatt e^2 zur Vereinfachung δ benutzt und anstatt der *drei* Gröfsen s, $\cos\alpha_{1.2}$ und $\sin\alpha_{1.2}$ die *zwei* Gröfsen u und v eingeführt. (*Orff* führt noch rechtwinklige Koordinaten ein, auf deren Verwendung zur Übertragung geographischer Koordinaten wir an späterer Stelle gelangen.)

Im 80. Bd. der *Comptes rendus* der franz. Akademie der Wiss. giebt 1875 auf S. 36 u. ff. *Trepied* Formeln, welche unseren Formeln (11) bis (13) entsprechen, ohne jedoch die Glieder mit s^5 zu enthalten und in die einfachste Form durch Einführung von δ und u, v gebracht zu sein. Diese Formeln sind hervorgegangen aus einer Ergänzung der 1806 in den Memoiren der Akademie von *Legendre* gegebenen Formeln, welche s^3 und e^2s^2 berücksichtigen. Sie sind aber nicht völlig korrekt. In der Formel für B_2 mufs im Gliede mit s^2 der Nenner ϱN anstatt ϱ^2 angebracht werden. Aufserdem sind die Glieder in e^4 irrig. Dies zeigt auch eine Entwicklung von *Levret* im 76. Bde. der *Comptes rendus* S. 410 u. ff., welche die Glieder bis s^3 incl. *vollständig* giebt und mit der wir (nach Berichtigung eines Druckfehlers im Gliede mit s^2 in der Azimutformel) übereinstimmen.

§ 18. Zahlenbeispiel I. Gegeben: $B_1 = 52^0\,30'\,16{,}7''$ (Berlin)

$$s = 529979{,}58^m \quad \alpha_{1.2} = 239^0\,33'\,0{,}689''.$$

Wir rechnen mit 7 ziffrigen Logarithmen und setzen die 8. Decimalstelle nach den Proportionalteilen an. Man hat zunächst, abgesehen von den speziellen Werten für s und $\alpha_{1.2}$:

$$\log W_1 = 9{,}9990857.5 - 10$$
$$\log \frac{W_1}{a_0} = 3{,}1944422.9 - 10$$
$$\log (1 + \delta) = 0{,}0029083.6$$
$$\log \varrho'' = 5{,}3144251.3$$
$$\log \delta = 7{,}82732 - 10$$

$$\log t = 0{,}1150923.1$$
$$t^2 = 1{,}69897$$
$$t^4 = 2{,}886$$
$$1 + 2t^2 = 4{,}39794 = [0{,}643249]$$
$$1 + 3t^2 = 6{,}09691 = [0{,}785110]$$
$$2 + 3t^2 = 7{,}0969 = [0{,}85107]$$
$$5 + 6t^2 = 15{,}1938 = [1{,}18167]$$
$$2 + 15t^2 + 15t^4 = 70{,}78 = [1{,}8499]$$
$$5 + 28t^2 + 24t^4 = 121{,}83 = [2{,}0858]$$
$$1 + 30t^2 + 45t^4 = 181{,}85 = [2{,}2597]$$
$$1 + 20t^2 + 30t^4 = 121{,}56 = [2{,}0848]$$
$$1 + 20t^2 + 24t^4 = 104{,}24 = [2{,}0180]$$
$$58 + 280t^2 + 240t^4 = 1226{,}4 = [3{,}0886]$$
$$61 + 180t^2 + 120t^4 = 713{,}1 = [2{,}8532]$$
$$\log \cos B_1 = 9{,}7844012.8 - 10$$
$$\log \cos^2 B_1 = 9{,}5688 - 10$$
$$\log \sin 2B_1 = 9{,}9849 - 10$$
$$\log \cos 2B_1 = 9{,}4133_n - 10$$
$$\log [5 \cos 2B_1 - 4] = 0{,}7239_n .$$

Hiermit findet sich aus den Formeln (11), (12) und (13) S. 298:

$$\underset{\text{in Sek.}}{B_2} = 52^0\, 30'\, 16{,}7'' + [5{,}3155049.9_n]\, u + [5{,}1295673_n]\, v^2$$
$$+ [5{,}322464]\, uv^2 + [5{,}50352_n]\, u^2v^2 + [4{,}8355]\, v^4$$
$$+ [5{,}6883]\, u^3v^2 + [5{,}4960_n]\, uv^4 + [3{,}0028_n]\, u^2$$
$$+ [2{,}2551_n]\, u^3 + [3{,}0885_n]\, uv^2 + \cdots$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_2} = \underset{\text{in Sek.}}{L_1} + [5{,}5300238.5]\, v + [5{,}6451162_n]\, uv$$
$$+ [5{,}838013]\, u^2v + [5{,}283088_n]\, v^3 + [6{,}01906_n]\, u^3v$$
$$+ [5{,}95310]\, uv^3 + [5{,}3692]\, v^5 + [6{,}2038]\, u^4v$$
$$+ [6{,}4387_n]\, u^2v^3 + [2{,}4490]\, u^2v + \cdots$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{2.1}} = \underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{1.2}} + 180^0 + [5{,}4295174.4_n]\, v + [5{,}656644]\, uv$$
$$+ [5{,}294615]\, v^3 + [5{,}83304_n]\, u^2v + [6{,}0200]\, u^3v$$
$$+ [5{,}9522_n]\, uv^3 + [6{,}2035_n]\, u^4v + [6{,}4389]\, u^2v^3$$
$$+ [5{,}3683_n]\, v^5 + [2{,}4095]\, uv + [2{,}4074_n]\, (u^2 - v^2)\, v + \cdots$$

Mit den speziellen Werten von s und $\alpha_{1.2}$ hat man jetzt:

$$\left.\begin{array}{r} \log s = 5{,}7242591.6 \\ \log\cos\alpha_{1.2} = 9{,}7048223.3_n - 10 \\ \log\sin\alpha_{1.2} = 9{,}9355442.5_n - 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \log u = 8{,}6235237.8_n - 10 \\ \log v = 8{,}8542457.0_n - 10. \end{array}$$

$B_2 =$	$L_2 - L_1 =$	$\alpha_{2.1} =$
52° 30′ 16,7″	− 6° 43′ 45,32″	59° 33′ 0,69″
+ 2 24 50,18	− 22 7,05	+ 5 20 20,43
− 11 28,74	− 1 26,96	+ 22 42,74
− 45,13	+ 1 10,12	− 1 12,00
− 2,88	− 5,54	+ 1 25,97
+ 1,79	+ 13,78	+ 5,56
− 0,19	− 0,44	− 13,75
+ 0,34	− 0,36	+ 0,36
− 1,78	+ 1,77	− 1,77
+ 0,01	− 0,04	+ 0,44
+ 0,26		+ 0,77
		− 0,03
54° 42′ 50,56″	− 7° 6′ 0,04″	65° 16′ 9,41″
anstatt 50,60	anstatt 0,00	anstatt 9,37 .

Für die genauen Angaben ist S. 247 zu vergleichen. Was den 1. Horizontalstrich in obigen 3 Kolonnen betrifft, so ist zu erwähnen, dafs unterhalb desselben die von δ abhängigen Glieder sich befinden.

§ 19. Zahlenbeispiel II.

Gegeben: $B_1 = 57°$

$$s = 120000^m \quad \alpha_{1.2} = 315°.$$

Wir rechnen hier mit Logarithmen bis zu 9 richtigen Decimalen. Es ist zunächst:

$$\begin{aligned} \log W_1 &= 9{,}9989781.93 - 10 \\ \log \frac{W_1}{a_0} &= 3{,}1943347.29 - 10 \\ \log(1+\delta) &= 0{,}0029083.60 \\ \log \varrho'' &= 5{,}3144251.33 \\ \log \delta &= 7{,}82732 - 10 \\ \log t &= 0{,}1874826.38 \\ t^2 &= 2{,}371184 \\ t^4 &= 5{,}6225 \end{aligned}$$

$$1 + 2t^2 = 5{,}742368 = [0{,}7590910]$$
$$1 + 3t^2 = 8{,}113552 = [0{,}909211]$$
$$2 + 3t^2 = 9{,}11355 = [0{,}9597]$$
$$5 + 6t^2 = 19{,}22710 = [1{,}283914]$$
$$2 + 15t^2 + 15t^4 = 121{,}91 = [2{,}086]$$
$$5 + 28t^2 + 24t^4 = 206{,}33 = [2{,}3146]$$
$$1 + 30t^2 + 45t^4 = 325{,}2 = [2{,}512]$$
$$1 + 20t^2 + 30t^4 = 217{,}1 = [2{,}337]$$
$$1 + 20t^2 + 24t^4 = 183{,}36 = [2{,}2633]$$
$$58 + 280t^2 + 240t^4 = 2071 = [3{,}316]$$
$$61 + 180t^2 + 120t^4 = 1163 = [3{,}065]$$
$$\log\cos B_1 = 9{,}7361087.65 - 10$$
$$\log\cos^2 B_1 = 9{,}47222 - 10$$
$$\log\sin 2B_1 = 9{,}96073 - 10$$
$$\log\cos 2B_1 = 9{,}609_n - 10$$
$$\log[5\cos 2B_1 - 4] = 0{,}7806_n.$$

Hiermit geben die Formeln (11) bis (13) S. 298:

$$\underset{\text{in Sek.}}{B_2} = 57^0\,0'\,0'' + [5{,}3152898.79_n]\,u + [5{,}2017425_n]\,v^2$$
$$+ [5{,}446350]\,uv^2 + [5{,}6843_n]\,u^2v^2 + [5{,}0318]\,v^4$$
$$+ [5{,}924]\,u^3v^2 + [5{,}748_n]\,uv^4 + [2{,}97840_n]\,u^2$$
$$+ [2{,}450_n]\,u^3 + [3{,}1450_n]\,uv^2 + \cdots$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{L_2} = \underset{\text{in Sek.}}{L_1} + [5{,}5783163.68]v + [5{,}7657990.1_n]uv$$
$$+ [6{,}010406]u^2v + [5{,}47616_n]v^3 + [6{,}2484_n]u^3v$$
$$+ [6{,}1979]uv^3 + [5{,}686]v^5 + [6{,}488]u^4v + [6{,}739_n]u^2v^3$$
$$+ [2{,}40074]u^2v + \cdots$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{2.1}} = \underset{\text{in Sek.}}{\alpha_{1.2}} + 180^0 + [5{,}5019077.71_n]v + [5{,}7724861]uv$$
$$+ [5{,}482848]v^3 + [6{,}007670_n]u^2v + [6{,}2488]u^3v$$
$$+ [6{,}1975_n]uv^3 + [6{,}487_n]u^4v + [6{,}738]u^2v^3$$
$$+ [5{,}685_n]v^5 + [2{,}31294]uv + [2{,}023_n](u^2 - v^2)v + \cdots.$$

Mit den speziellen Werten von s und $\alpha_{1.2}$ hat man jetzt:

$$\left.\begin{aligned}\log s &= 5{,}0791812.46\\ \log\cos\alpha_{1.2} &= 9{,}8494850.02 - 10\\ \log\sin\alpha_{1.2} &= 9{,}8494850.02_n - 10\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}u &= 8{,}1230009.77 - 10\\ v &= 8{,}1230009.77_n - 10\end{aligned}$$

$B_2 =$	$L_2 - L_1 =$	$\alpha_{2.1} =$
57° 0′ 0″	— 1° 23′ 47,09792″	135° 0′ 0″
— 45 43,41088	+ 1 42,75453	+ 1 10 16,07908
— 28,03783	— 2,39557	— 1 44,34892
+ 0,65366	+ 0,70010	— 0,71097
— 0,01501	+ 0,05500	+ 2,38053
+ 0,00334	— 0,04897	— 0,05506
+ 0,00035	— 0,00020	+ 0,04892
— 0,00023	— 0,00127	+ 0,00127
— 0,16765	+ 0,00226	— 0,00225
— 0,00066	— 0,00059	+ 0,00020
— 0,00327		— 0,03622
		— 0,00000
56°13′49,02182″	— 1° 22′ 6,03263″	136° 8′33,35658″

Diese Werte müssen in der 4. Decimalstelle der Sekunden noch richtig sein, was in der That sich später durch Anwendung anderer Formeln bestätigen wird.

§ 20. **Formeln mit mittleren Werten der geographischen Breite und des Azimuts.** Die Formeln des § 17 enthalten B_1 und $\alpha_{1.2}$ als Ausgangswerte. Für manche Zwecke sind aber Formeln mit mittleren Werten von B und α für beide Endpunkte P_1 und P_2 erwünscht. Um solche zu gewinnen, knüpfen wir am besten an die allgemeinen Formeln des vorigen Kapitels an.

Nach S. 248 (1) ist zunächst:

$$\tan\frac{\Delta\beta}{2} = -\tan\frac{\Delta\varphi}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}}, \tag{1}$$

wobei zum Teil von den Abkürzungen:

$$\left.\begin{array}{c} \beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta \qquad \dfrac{\beta_2+\beta_1}{2} = \beta \\ \dfrac{\alpha_{1.2}+\alpha_{2.1}}{2} = 90^0 + \alpha \\ \alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\alpha \end{array}\right\} \tag{2}$$

Gebrauch gemacht worden ist. In die Formel (1) führen wir nun anstatt $\Delta\varphi$ und $\Delta\beta$ die linearen Längen s und M ein, letzteres in der Bedeutung als Meridianbogen für die Breitendifferenz $B_2 - B_1$.

Nach S. 223 (9) ist aber für kleine Entfernungen, indem wir $\frac{s}{a_0}$ ebenso wie e als Gröfse 1. Ordnung ansehen:

$$s = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{\Delta\varphi + k_1\cos 2\varphi \sin\Delta\varphi - \frac{1}{8}k_1^2\cos 4\varphi\sin 2\Delta\varphi + Gl_7\right\} \quad (3)$$

und hieraus durch Entwicklung von $\sin\Delta\varphi$ und $\sin 2\Delta\varphi$ in Reihen:

$$s = b_0 \frac{1+\frac{1}{4}k_1^2}{1-k_1}\left\{1 + k_1\cos 2\varphi\left(1-\frac{1}{6}\Delta\varphi^2\right) - \frac{1}{4}k_1^2\cos 4\varphi + Gl_6\right\}\Delta\varphi,$$

worin wir nun nach S. 220 u. 221 substituieren:

$$k_1 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4 + \cdots = \frac{1}{4}e^2\sin^2\beta_0\left(1+e^2-\frac{1}{2}e^2\sin^2\beta_0\right)+\cdots.$$

Gleichzeitig setzen wir $\cos 4\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1$ und reduzieren auf $\Delta\varphi$; es ergiebt sich dann nach einfacher Rechnung:

$$\Delta\varphi = \frac{s}{b_0}\left\{\begin{array}{c}1-\frac{1}{4}e^2(1+e^2)\sin^2\beta_0(1+\cos 2\varphi)+\frac{1}{24}e^2\Delta\varphi^2\sin^2\beta_0\cos 2\varphi \\ +\frac{3}{32}e^4\sin^4\beta_0(1+\cos 2\varphi)^2+Gl_6.\end{array}\right\} \quad (4)$$

Rechter Hand ist noch β_0 und φ zu eliminieren und durch β_1, β_2 und die Azimute $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ auszudrücken.

Man hat aber wegen $2\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ und mit Rücksicht auf die (4) S. 248:

$$\begin{aligned}\sin^2\beta_0(1+\cos 2\varphi) &= \sin^2\beta_0 + \sin^2\beta_0\cos(\varphi_1+\varphi_2)\\ &= 1-\frac{1}{2}(\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_{1.2}+\cos^2\beta_2\sin^2\alpha_{2.1})\\ &\quad +\sin\beta_1\sin\beta_2+\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}.\end{aligned}$$

Setzt man für $\sin^2\alpha$ den gleichen Wert $1-\cos^2\alpha$, so hat man nach einiger Reduktion weiter:

$$\sin^2\beta_0(1+\cos 2\varphi) = \left\{\begin{array}{c}1-\cos(\beta_1+\beta_2)-\frac{1}{2}(\cos\beta_1-\cos\beta_2)^2 \\ +\frac{1}{2}(\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2}+\cos\beta_2\cos\alpha_{2.1})^2.\end{array}\right\} \quad (5)$$

Es ist nun nach bekannten Formeln und mit Rücksicht auf das sphärische Hilfsdreieck Fig. 21. S. 248:

$$\begin{aligned}\cos\beta_1 - \cos\beta_2 &= 2\sin\frac{\Delta\beta}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\\ &= -2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\sin\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\sin\frac{\alpha_{1.2}+\alpha_{2.1}}{2}\sec\frac{\Delta\lambda}{2}\end{aligned}$$

und wenn wir die Abkürzungen (2) einführen, sowie $\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$ und $\sec\frac{\Delta\lambda}{2}$ in Reihen auflösen:

$$\cos\beta_1 - \cos\beta_2 = -\Delta\varphi\sin\beta\cos\alpha + Gl_3. \tag{6}$$

Man hat ferner mit Rücksicht auf die (4) S. 248:

$$\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} + \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} = \sin\beta_0(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$$
$$= -2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\sin\beta_0\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}.$$

Hiernach ist aber:

$$\cos\beta_1\cos\alpha_{1.2} + \cos\beta_2\cos\alpha_{2.1} = -\Delta\varphi\sin\beta + Gl_3; \tag{7}$$

denn man hat durch Addition der beiden ersten Gleichungen (4) S. 248 die Relation:

$$\sin\beta_0\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \sin\beta\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}\sec\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$$
$$= \sin\beta + Gl_3.$$

In gleicher Weise findet sich noch die Beziehung:

$$\sin^2\beta_0\cos 2\varphi = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}$$

oder

$$\sin^2\beta_0\cos 2\varphi = \sin^2\beta - \cos^2\beta\cos^2\alpha + Gl_2. \tag{8}$$

Substituiert man jetzt (7) und (6) in (5), sodann (5) und (8) in (4), so findet sich ohne Schwierigkeit:

$$\Delta\varphi = \frac{s}{b_0}\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2}e^2(1+e^2)\sin^2\beta + \frac{3}{8}e^4\sin^4\beta \\ + \frac{1}{24}e^2\Delta\varphi^2(\cos^2\alpha[4\sin^2\beta - 1] - 2\sin^2\beta) + Gl_6. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Setzt man hierin $\alpha = 180^0$, so bezieht sich diese Formel auf den Meridianbogen M von β_1 bis β_2, und es geht $\Delta\varphi$ in $\Delta\beta$ über. Man hat daher

$$\Delta\beta = \frac{M}{b_0}\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2}e^2(1+e^2)\sin^2\beta + \frac{3}{8}e^4\sin^4\beta \\ + \frac{1}{24}e^2\Delta\beta^2(2\sin^2\beta - 1) + Gl_6. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Dividieren wir dies Seite für Seite in Gleichung (9) und beachten dabei, dafs aus (1) folgt:

$$\Delta\beta = -\Delta\varphi\cos\alpha + Gl_3,$$

um damit $\Delta\beta$ aus der Parenthese von (10) zu eliminieren, so findet sich:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\beta} = \frac{s}{M}\left(1 - \frac{1}{12}e^2\Delta\varphi^2 \sin^2\beta \sin^2\alpha + Gl_6\right) \cdot \qquad (11)$$

Wir kehren nun zurück zu Formel (1), verwandeln rechter Hand $\tan\frac{\Delta\varphi}{2}$ in eine Reihe und gehen dann von $\tan\frac{\Delta\beta}{2}$ zu $\frac{\Delta\beta}{2}$ über mittelst der 2. Reihe (2) S. 29. Schreiben wir für den Augenblick zur Abkürzung:

$$\tan\frac{\Delta\beta}{2} = Q\tan\frac{\Delta\varphi}{2},$$

so wird

$$\tan\frac{\Delta\beta}{2} = \frac{1}{2}Q\Delta\varphi\left(1 + \frac{1}{12}\Delta\varphi^2 + \frac{1}{120}\Delta\varphi^4 + Gl_6\right)$$

und

$$\Delta\beta = Q\Delta\varphi\left\{1 + \frac{1}{12}\Delta\varphi^2(1 - Q^2) + \frac{1}{240}\Delta\varphi^4(1 - Q^2)(2 - 3Q^2) + Gl_6\right\}. \qquad (12)$$

Hierin ist für Q^2 zu setzen $\cos^2\alpha : \cos^2\frac{\Delta\alpha}{2}$, womit sich aufserdem findet:

$$1 - Q^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\Delta\alpha}{2}} - \tan^2\frac{\Delta\alpha}{2} \cdot \qquad (13)$$

Führt man auch dies in (12) ein und verbindet dann diese Gleichung durch Multiplikation entsprechender Seiten mit (11), so entsteht die Formel:

$$M = -s\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}}\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{12}\Delta\varphi^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\Delta\alpha}{2}} - \tan^2\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - \frac{1}{12}e^2\Delta\varphi^2\sin^2\beta\sin^2\alpha \\ + \frac{1}{240}\Delta\varphi^4\sin^2\alpha(2 - 3\cos^2\alpha) + Gl_6. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Bei diesen Entwicklungen für (12) und (14) ist Voraussetzung, dafs nicht nur $s : a_0$, sondern auch $\Delta\alpha$ eine kleine Gröfse 1. Ordnung ist; mit Rücksicht auf die 4. Gleichung (1) S. 248 ergiebt sich hieraus die gleiche Bedingung für $L_{1.2}$.

Die 2. und 4. Gleichung (1) S. 248 geben nun ohne Schwierigkeit:

$$\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = -\tan\frac{\Delta\varphi}{2}\tan\beta\sin\alpha,$$

und hieraus erhält man sofort:

$$\Delta\alpha = -\Delta\varphi\tan\beta\sin\alpha + Gl_3. \qquad (15)$$

Dies führen wir in (14) ein, aufserdem für $\Delta\varphi$ nach (9) den Ausdruck:

$$\Delta\varphi = \frac{s}{a_0}\left(1 + \frac{1}{2}\, e^2 \cos^2\beta + Gl_4\right),$$

wir setzen ferner im 2. Gliede der geschlungenen Parenthese

$$1 : \cos^2 \frac{\Delta\alpha}{2} = 1 + \sin^2 \frac{\Delta\alpha}{2} + Gl_4$$

und vertauschen schliefslich in den kleinsten Gliedern β mit B. So findet sich:

$$M = -s\,\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}}\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{12}\frac{s^2}{a_0^{\,2}}\sin^2\alpha\,(1 + e^2\cos 2B) \\ -\frac{1}{240}\frac{s^4}{a_0^{\,4}}\sin^2\alpha\,(-2 + [5\tan^2 B + 3]\cos^2\alpha) + Gl_6 \end{array}\right\}; \tag{16}$$

$$\left.\begin{array}{c} B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2), \\ \alpha = \frac{\alpha_{1.2} + \alpha_{2.1} - 180^\circ}{2}, \quad \Delta\alpha = \alpha_{2.1} - \alpha_{1.2} - 180^\circ. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Diese Formel stimmt nach gehöriger Reduktion mit derjenigen überein, welche *Bessel* 1837 im 14. Bd. der *Astronom. Nachr.* No. 331 S. 310 gegeben hat (*Abhandlungen* Bd. 3, S. 40).

§ 21. **Fortsetzung: Längendifferenz.** Nach S. 231 ist

$$L_{1.2} = \Delta\lambda - \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left\{\left(1 + n - \frac{1}{2}k_1\right)\Delta\varphi - \frac{1}{2}k_1\cos 2\varphi\,\sin\Delta\varphi + Gl_5\right\}. \tag{1}$$

Hieraus folgt durch Entwicklung von $\sin\Delta\varphi$ in eine Reihe und unter Substitution der Werte

$$k_1 = \frac{1}{4}\, e^2 \sin^2\beta_0 + Gl_4, \qquad n = \frac{1}{4}\, e^2 + Gl_4$$

ohne Schwierigkeit:

$$L_{1.2} = \Delta\lambda - \frac{1}{2}\, e^2\cos\beta_0\left(1 + \frac{1}{4}\, e^2\,[1 - \sin^2\beta_0\cos^2\varphi] + Gl_4\right)\Delta\varphi. \tag{2}$$

Man hat nun nach den Gleichungen (4) S. 248:

$$\cos\beta_0 = \frac{1}{2}\,(\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} - \cos\beta_2 \sin\alpha_{2.1}).$$

Hierin setzen wir

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1) - \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1) \text{ und } \beta_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1) + \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$$

sowie

$$\alpha_{1.2} = \frac{1}{2}(\alpha_{2.1} + \alpha_{1.2}) - \frac{1}{2}(\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2})$$

und

$$\alpha_{2.1} = \frac{1}{2}(\alpha_{2.1} + \alpha_{1.2}) + \frac{1}{2}(\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2}).$$

Es wird dann mit Rücksicht auf die Abkürzungen (2) S. 304 erhalten:

$$\cos\beta_0 = \quad \cos\beta \sin\alpha \cos\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \sin\frac{\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2}}{2}$$

$$+ \sin\beta \cos\alpha \sin\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \cos\frac{\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2}}{2}. \tag{3}$$

Zur weitern Umformung dieses Ausdrucks geben die (1) S. 248 sofort:

$$\sin\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = -\frac{1}{2}\varDelta\varphi \cos\alpha + Gl_3$$

$$\cos\frac{\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2}}{2} = \quad \frac{1}{2}\varDelta\varphi \tan\beta \sin\alpha + Gl_3,$$

womit sich auch findet:

$$\cos\frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = 1 - \frac{1}{8}\varDelta\varphi^2 \cos^2\alpha + Gl_4$$

$$\sin\frac{\alpha_{2.1} - \alpha_{1.2}}{2} = 1 - \frac{1}{8}\varDelta\varphi^2 \tan^2\beta \sin^2\alpha + Gl_4.$$

Mittelst dieser Formeln gestaltet sich Ausdruck (3) für $\cos\beta_0$ wie folgt:

$$\cos\beta_0 = \cos\beta \sin\alpha \left(1 - \frac{1}{8}\varDelta\varphi^2 \sec^2\beta\, [\sin^2\beta + \cos^2\alpha] + Gl_4\right). \tag{4}$$

Dieser Wert ist in (2) einzuführen und zugleich mit Rücksicht auf die beiden ersten Gleichungen (4) S. 248 zu setzen:

$$\sin\beta_0 \cos\varphi = \sin\beta + Gl_2.$$

Man erhält damit:

$$L_{1.2} = \varDelta\lambda - \frac{1}{2} e^2 \cos\beta \sin\alpha \left\{ 1 + \frac{1}{4} e^2 \cos^2\beta \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\varDelta\varphi^2 \sec^2\beta\, [\sin^2\beta + \cos^2\alpha] + Gl_4 \right\} \varDelta\varphi. \tag{5}$$

Für $\varDelta\lambda$ giebt die 2. Gleichung (1) S. 248 die Relation:

$$\sin\frac{1}{2}\varDelta\lambda = \sin\frac{1}{2}\varDelta\varphi \sec\beta \sin\alpha.$$

Wir verwandeln $\sin\frac{1}{2}\varDelta\varphi$ in eine Reihe und leiten sodann aus $\sin\frac{1}{2}\varDelta\lambda$ mittelst der 1. Reihe (2) S. 29 $\frac{1}{2}\varDelta\lambda$ ab. Es folgt:

$$\varDelta\lambda = \varDelta\varphi \sec\beta \sin\alpha \left\{1 - \frac{1}{24}\varDelta\varphi^2 (1 - \sec^2\beta \sin^2\alpha) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1920}\varDelta\varphi^4 (1 - \sec^2\beta \sin^2\alpha)(1 - 9\sec^2\beta\sin^2\alpha) + Gl_6 \right\} \quad (6)$$

und zwar unter der Voraussetzung, dafs nicht nur $s : a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ von der 1. Ordnung ist. (5) und (6) geben nun zusammen:

$$L_{1.2} = \varDelta\varphi \sec\beta \sin\alpha \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2\beta \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \cos^2\beta\right) \\ + \frac{1}{16} e^2 \varDelta\varphi^2 (\sin^2\beta + \cos^2\alpha) \\ - \frac{1}{24}\varDelta\varphi^2 (1 - \sec^2\beta\sin^2\alpha) \\ + \frac{1}{1920}\varDelta\varphi^4 (1 - \sec^2\beta\sin^2\alpha)(1 - 9\sec^2\beta\sin^2\alpha) + Gl_6. \end{array} \right\} \quad (7)$$

Für $\varDelta\varphi$ führen wir hier die Reihe (9) S. 306 ein, nachdem wir darin für b_0 den gleichen Wert $a_0\sqrt{1-e^2}$ substituiert haben, womit $\varDelta\varphi$ in

$$\varDelta\varphi = \frac{s}{a_0} \left\{1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2\beta + \frac{3}{8} e^4 \cos^4\beta \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24} e^2 \varDelta\varphi^2 (\cos^2\alpha [4\sin^2\beta - 1] - 2\sin^2\beta) + Gl_6 \right\} \quad (8)$$

übergeht. Für (7) findet sich nun:

$$L_{1.2} = \frac{s}{a_0} \sec\beta \sin\alpha \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}(1 - \sec^2\beta\sin^2\alpha - e^2[\sin^2\beta + (4\sin^2\beta - 1)\cos^2\alpha]) \\ + \frac{1}{1920}\frac{s^4}{a_0^4}(1 - \sec^2\beta\sin^2\alpha)(1 - 9\sec^2\beta\sin^2\alpha) + Gl_6. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Hierin führen wir noch die mittlere geographische Breite B ein. Nach S. 42 ist aber:

$$B_1 = \beta_1 + n \sin 2\beta_1 + \frac{1}{2} n^2 \sin 4\beta_1 + Gl_6$$

$$B_2 = \beta_2 + n \sin 2\beta_2 + \frac{1}{2} n^2 \sin 4\beta_2 + Gl_6,$$

daher

$$B = \beta + n \sin 2\beta \cos \varDelta\beta + \frac{1}{2} n^2 \sin 4\beta + Gl_6. \quad (10)$$

Hieraus ergiebt sich leicht nach und nach folgende Rechnung, bei welcher $n = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + Gl_6$ gesetzt ist:

$$\cos B = \cos\beta \cos(n \sin 2\beta \cos\varDelta\beta + Gl_4)$$

$$- \sin\beta \sin\left(n \sin 2\beta \cos\varDelta\beta + \frac{1}{2} n^2 \sin 4\beta + Gl_6\right)$$

oder

$$\cos B = \cos\beta \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2\beta \cos \varDelta\beta - \frac{1}{2} e^4 \sin^2\beta \\ + \frac{3}{8} e^4 \sin^4\beta + Gl_6 \end{array} \right\};$$

andrerseits ist:

$$1 : \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2\beta + \frac{1}{2} e^4 \sin^2\beta - \frac{1}{8} e^4 \sin^4\beta + Gl_6, \quad (11)$$

daher

$$\frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \cos\beta \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \sin^2\beta \sin^2 \varDelta\beta + Gl_6\right).$$

Nach (9) und (12) S. 306 u. 307 ist nun $\varDelta\beta = -\frac{s}{a_0}\cos\alpha + Gl_3$, womit diese Formel endlich noch in nachstehende Gestalt gebracht werden kann:

$$\frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \cos\beta \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin^2\beta \cos^2\alpha + Gl_6\right). \quad (12)$$

Hiermit giebt (θ):

$$L_{1\cdot 2 \atop \text{in Sek.}} = \varrho'' \frac{s}{a_0} W \sec B \sin\alpha \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{24} \frac{s^2}{a_0^2} \left(W^2 [1 - \sec^2 B \sin^2\alpha] - e^2 [10 \sin^2 B - 1] \cos^2\alpha \right) \\ + \frac{1}{1920} \frac{s^4}{a_0^4} (1 - \sec^2 B \sin^2\alpha)(1 - 9 \sec^2 B \sin^2\alpha) + Gl_6. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Die Bedeutung von B und α ist durch die (17) S. 308 definiert. Aufserdem ist wie früher $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$.

§ 22. Fortsetzung: Azimutdifferenz.

Die 2. und 4. der Gleichungen (1) S. 248 geben:

$$\sin \frac{\varDelta\alpha}{2} = -\tan \frac{\varDelta\varphi}{2} \tan\beta \sin\alpha. \quad (1)$$

Wir verwandeln $\tan \frac{\varDelta\varphi}{2}$ in eine Reihe und gehen dann mittelst der 1. Reihe (2) S. 29 zu $\frac{\varDelta\alpha}{2}$ über. Es wird:

$$\varDelta\alpha = -\varDelta\varphi \tan\beta \sin\alpha \left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{24} \varDelta\varphi^2 (2 + \tan^2\beta \sin^2\alpha) \\ + \frac{1}{1920} \varDelta\varphi^4 \begin{pmatrix} 16 + 20 \tan^2\beta \sin^2\alpha \\ + 9 \tan^4\beta \sin^4\alpha \end{pmatrix} + Gl_6. \end{array} \right\}$$

Für $\varDelta\varphi$ setzen wir jetzt den Ausdruck (8) S. 310 und erhalten:

$$\Delta\alpha = -\frac{s}{a_0}\frac{\tan\beta\sin\alpha}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}}\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}\left(\begin{array}{c}2+\tan^2\beta\sin^2\alpha\\ +e^2[1-3\sin^2\beta\sin^2\alpha+\sin^2\alpha]\end{array}\right)\\ +\frac{1}{1920}\frac{s^4}{a_0^4}\left(\begin{array}{c}16+20\tan^2\beta\sin^2\alpha\\ +9\tan^4\beta\sin^4\alpha\end{array}\right)+Gl_6\,.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Aus (12) S. 311 leiten wir aber leicht ab:

$$\cos\beta = \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\left(1-\frac{1}{4}e^2\frac{s^2}{a_0^2}\sin^2 B\cos^2\alpha + Gl_6\right)$$

und hieraus:

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\left(1+\frac{1}{4}e^2\frac{s^2}{a_0^2}\cos^2 B\cos^2\alpha + Gl_6\right),$$

womit sich ergiebt:

$$\sqrt{1-e^2}\tan B = \tan\beta\left(1-\frac{1}{4}e^2\frac{s^2}{a_0^2}\cos^2\alpha + Gl_6\right), \quad (3)$$

während aus (11) S. 311 noch folgt:

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = \sqrt{1-e^2\cos^2\beta} + Gl_6\,. \quad (4)$$

Indem wir dies in (2) substituieren, erhalten wir die Formel:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\alpha} = -\varrho''\frac{s}{a_0}W\tan B\sin\alpha\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}\left(\begin{array}{c}2+\tan^2 B\sin^2\alpha\\ +e^2[7-(5+\tan^2 B+3\sin^2 B)\sin^2\alpha]\end{array}\right)\\ +\frac{1}{1920}\frac{s^4}{a_0^4}\left(\begin{array}{c}16+20\tan^2 B\sin^2\alpha\\ +9\tan^4 B\sin^4\alpha\end{array}\right)+Gl_6\,.\end{array}\right\} \quad (5)$$

Diese Formel setzt, wie (16) S. 308 u. (13) S. 311 voraus, dafs nicht nur $s:a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ eine kleine Gröfse 1. Ordnung sei.

Drückt man in (16) S. 308 den Meridianbogen M durch B und ΔB aus und reduziert auf ΔB, so erhält man damit sowie in den zwei Formeln (13) S. 311 und (5) oben ein Mittel zur indirekten Berechnung von B_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ aus B_1, s und $\alpha_{1.2}$, welches zu rascher Rechnung sehr geeignet ist, falls die gesuchten Gröfsen schon näherungsweise bekannt sind.

Derartige Formeln gab 1847 *Gaufs* in seinen *Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie* 2. Teil S. 26 u. ff., wobei er aber nur die Glieder bis mit s^3, diese jedoch vollständig, entwickelte. Der von ihm eingeschlagene Weg ist ein anderer als der unsrige, indem er nämlich direkt an die Differentialformeln (11) bis (13) S. 298 anknüpft und sie auf einen in der halben Länge zwischen P_1 und P_2 liegenden Punkt als Ausgangspunkt, sowie P_1 *und* P_2 als Endpunkte anwendet. Aus den 6 so entstehenden Gleichungen eliminiert er dann die Werte von B, L und α des

erwähnten mittleren Punktes. — Für unsere Zwecke schien aber der hier eingeschlagene Weg, welcher allerdings die Anwendung der allgemeinen Formeln bedingt, einfacher, insofern er die Formel (16) S. 308 direkt in die für eine spätere Anwendung geeignetste Gestalt bringt.

§ 23. Entfernung und Azimute aus geographischen Positionen. Die Formeln (16) S. 308 und (13) S. 311 geben ohne Schwierigkeit:

$$s\cos\alpha = -M\cos\frac{\Delta\alpha}{2}\left\{\begin{array}{c} 1-\frac{1}{12}\frac{s^2}{a_0^2}\sin^2\alpha\,(1+e^2\cos 2B) \\ +\frac{1}{720}\frac{s^4}{a_0^4}\sin^2\alpha\left([15\tan^2 B+3]\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+Gl_6 \end{array}\right\}, \quad (1)$$

$$s\sin\alpha = P\left\{\begin{array}{c} 1+\frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}\left(W^2[\cos^2\alpha-\tan^2 B\sin^2\alpha]-e^2[10\sin^2 B-1]\cos^2\alpha\right) \\ +\frac{1}{5760}\frac{s^4}{a_0^4}(\cos^2\alpha-\tan^2 B\sin^2\alpha)(7+17\sec^2 B\sin^2\alpha)+Gl_6 \end{array}\right\}, \quad (2)$$

wobei P den Parallelbogen für den Längenunterschied $L_{1.2}$ in der geographischen Breite B bedeutet:

$$\left.\begin{array}{c} P = a_0\,\frac{L_{1.2}\text{ in Sek.}}{\varrho''}\,\frac{\cos B}{W} \\ W\text{ mit Argument } B = \frac{1}{2}(B_1+B_2) \end{array}\right\}, \quad (3)$$

und M nach S. 50 (3) und S. 44 (2) sich mittelst der Formel berechnet:

$$\log M = \log\left(a_0\,\frac{\Delta B\text{ in Sek.}}{\varrho''}\,\frac{1-e^2}{W^3}\right)+\frac{1}{8}\,\text{Mod.}\,e^2\cos 2B\left(\frac{\Delta B\text{ in Sek.}}{\varrho''}\right)^2+Gl_6. \quad (4)$$

Aufserdem ist durch Einführung von (2) und (3) in die Formel (5) des vorigen Paragraphen:

$$\Delta\alpha = -L_{1.2}\sin B\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{24}\frac{s^2}{a_0^2}\left\{\begin{array}{c} 3\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha \\ -e^2[(11\sin^2 B-8)\cos^2\alpha+(4\sin^2 B-2)\sin^2\alpha] \end{array}\right\} \\ +\frac{1}{5760}\frac{s^4}{a_0^4}\left\{\begin{array}{c} 75\cos^4\alpha+140\cos^2\alpha\sin^2\alpha+48\sin^4\alpha \\ +[60\cos^2\alpha\sin^2\alpha+16\sin^4\alpha]\tan^2 B \end{array}\right\}+Gl_6. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Berechnung wird nach diesen Formeln teilweise eine indirekte. Zuerst werden P und M definitiv aus (3) und (4) bestimmt. Dieses sind zugleich die Werte von $s\cos\alpha$ und $s\sin\alpha$ mit Vernachlässigung von Gliedern 3. Ordnung. Hiermit giebt (5) den Wert von $\Delta\alpha$ bis auf Glieder 5. Ordnung, jedoch kann man die von e^2s^2 ab-

hängigen Glieder der Parenthese bereits berücksichtigen. Nun lassen sich mittelst (1) und (2) $s \cos \alpha$ und $s \sin \alpha$ genauer berechnen und zwar ebenfalls bis auf Glieder 5. Ordnung, aber mit Berücksichtigung der Glieder $e^2 s^2$ der Parenthesen. Eine folgende Annäherung giebt die Glieder 5. Ordnung vollständig.

Zum praktischen Gebrauch empfiehlt sich nun die logarithmische Form für (1), (2) und (5), welche wir daher noch ableiten. Aufserdem setzen wir diejenigen Formeln her, welche sich durch die angegebenen Operationen mit den allgemeinen Symbolen und insbesondere für $s \cos \alpha$ durch Benutzung der Reihe

$$\log \cos \frac{\varDelta \alpha}{2} = - \text{Mod.} \left(\frac{1}{8} \varDelta \alpha^2 + \frac{1}{192} \varDelta \alpha^4 + Gl_6 \right)$$

nach S. 29 (3) ergeben.

Endlich schreiben wir auch die Formeln (2) und (4) etwas anders, so wie es im Hinblick auf die Gesamtheit aller am besten erscheint.

Auf diese Weise erhalten wir folgende Formeln zu direkter Rechnung:

$$\left.\begin{array}{ll} P' = \dfrac{L_{1.2} \text{ in Sek.}}{\varrho''} \dfrac{\cos B}{W} & M' = \dfrac{\varDelta B \text{ in Sek.}}{\varrho''} \dfrac{1 - e^2}{W^3} \\[2ex] \varDelta B = B_2 - B_1 & B = \dfrac{1}{2} (B_2 + B_1) \\ \multicolumn{2}{c}{W \text{ zum Argument } B} \\ P = a_0 P' \quad \log M = \log (a_0 M') + \frac{1}{24} \text{Mod.} M'^2 e^2 [3 - 6 \sin^2 B] + Gl_6 & \end{array} \right\} (6)$$

$$\left.\begin{array}{c} \log \varDelta \alpha = \log (- L_{1.2} \sin B) \\ + \frac{1}{24} \text{Mod.} \left\{ M'^2 (3 + e^2 [8 - 11 \sin^2 B]) + P'^2 (2 + e^2 [2 - 4 \sin^2 B]) \right\} + Gl_4 . \end{array} \right\} (7)$$

$$\log (s \cos \alpha) = \log (- M) - \frac{1}{24} \text{Mod} \left\{ \begin{array}{c} P'^2 (2 + e^2 [2 - 4 \sin^2 B]) \\ + 3 P'^2 W^2 \tan^2 B \end{array} \right\} + Gl_4 \quad (8)$$

$$\log (s \sin \alpha) = \log P + \frac{1}{24} \text{Mod} \left\{ \begin{array}{c} M'^2 (1 + e^2 [1 - 11 \sin^2 B]) \\ - P'^2 W^2 \tan^2 B \end{array} \right\} + Gl_4 . \quad (9)$$

Hierin sind die von e^2 unabhängigen Glieder 4. Ordnung vernachlässigt.

Ist eine noch gröfsere Genauigkeit wünschenswert, so läfst dieselbe sich erzielen, indem man vorstehenden Werten für die Logarithmen von $\varDelta \alpha$, $s \cos \alpha$ und $s \sin \alpha$ nachstehende Ausdrücke bezw. hinzufügt:

$$+ \frac{1}{2880} \text{Mod} \left\{ 15 M'^4 + 14 P'^4 - [60 M'^2 P'^2 + 12 P'^4] \tan^2 B \right\} \quad (7^*)$$

$$+\frac{1}{2880}\,\mathrm{Mod}\left\{-8M'^2P'^2-14P'^4-[30M'^2P'^2+40P'^4]\tan^2 B-15P'^4\tan^4 B\right\} \tag{8*}$$

$$+\frac{1}{2880}\,\mathrm{Mod}\left\{M'^4-8M'^2P'^2-[30M'^2P'^2+12P'^4]\tan^2 B-P'^4\tan^4 B\right\}, \tag{9*}$$

wodurch die Vernachlässigungen in den Logarithmen auf Gl_6 herabsinken. Zu diesen Formeln gelangt man leicht, indem man in (5), (1) und (2) rechter Hand $s\cos\alpha = -M(1-\frac{1}{8}P'^2\tan^2 B-\frac{1}{12}P'^2+Gl_4)$ und $s\sin\alpha = P(1+\frac{1}{24}M'^2-\frac{1}{24}P'^2\tan^2 B+Gl_4)$ setzt und dann logarithmiert.

Schliefslich hat man noch

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{1.2} &= \alpha-\frac{\Delta\alpha}{2}\\ \alpha_{2.1} &= \alpha+\frac{\Delta\alpha}{2}+180^0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Für vorstehende Formeln besteht ebenso wie für diejenigen der vorhergehenden Paragraphen, aus welchen sie hervorgegangen sind, die Voraussetzung, dafs nicht nur $s:a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ eine Gröfse 1. Ordnung ist.

Dieselben lassen sich auch noch in andere Gestalt bringen, wozu die rein sphärischen Formeln S. 132 u. ff. Fingerzeige geben. Es giebt u. a. die Differenz der Formeln (8) und (9) genau die Formel (1) a. a. O. bis auf die in e^2 multiplizierten Glieder; ebenso läfst sich (7) auf die Form von (2) ebenda hinführen. Wir bleiben indessen bei den obigen, für gleichzeitige Berechnung von s und α sehr bequemen und scharfen Formeln stehen; die kleinen Glieder derselben berechnen sich um so leichter, als in verschiedenen Formeln dieselben Terme auftreten.

Für Seiten mefsbarer Dreiecke wird es oftmals ausreichen, in den Logarithmen des Systems (6) bis (9) die Glieder 4. Ordnung wegzulassen. Dann aber hat man rein sphärische Formeln vor sich, mit der Modifikation, dafs für $L_{1.2}$ und ΔB verschiedene Krümmungsradien angewandt sind. Diese Verschiedenheit verschwindet durch Einführung der reduzierten Breitendifferenz $\Delta B\,\frac{1-e^2}{W^2}$, und man überzeugt sich nun leicht, dafs man innerhalb der angegebenen Genauigkeit durch sphärische Behandlung von $L_{1.2}$ und der reduzierten Breitendifferenz mittelst des Krümmungsradius $a_0:W$ (d. i. die Normale in mittlerer Breite) zu obigen Formeln zurückkommt. Man kann hiernach überhaupt alle auf eine hinreichend kleine geodätische Linie bezüglichen Rechnungen rein sphärisch ausführen. Das ist ja auch geometrisch unmittelbar klar, nur fehlt dabei die Angabe der Vernachlässigungen. [Vergl. auch *Jordan, Handbuch* Bd. 2, S. 236.]

§ 24. Zahlenbeispiel I. Gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = 54^0\ 42'\ 50{,}6'' \\ B_2 = 52\ \ 30\ \ 16{,}7 \end{array}\right\} L_{1.2} = 7^0\ 6'\ 0''.$$

Man hat zunächst:

$B = 53^0\ 36'\ 33{,}65''$	$\log W = 9{,}9990587.89 - 10$
$\Delta B = -\ 7953{,}9''$	$\log \Delta B = 3{,}9005801.27_n$
$L_{1.2} = 25560{,}0''$	$\log L_{1.2} = 4{,}4075608.50$
$\log \frac{\text{Mod}}{24} = 5{,}2575731$ } für Einh. der 7. Dec.	$\log a_0 = 6{,}8046434.64$
$\log \frac{\text{Mod}}{2880} = 3{,}17839$ } für Einh. der 7. Dec.	$\log \tan^2 B = 0{,}2650511$
$\log e^2 = 7{,}82441 - 10$	$\log \sin^2 B = 9{,}81158 - 10$

$$\log \varrho'' = 5{,}3144251.33$$
$$\log \frac{\Delta B}{\varrho''} = 8{,}5861549.94_n - 10$$
$$\log \frac{L_{1.2}}{\varrho''} = 9{,}0931357.17 - 10$$
$$\log \sin B = 9{,}9057908.07 - 10$$
$$\log \cos B = 9{,}7732652.48 - 10$$
$$\log (1 - e^2) = 9{,}9970916.40 - 10$$
$$\log M' = 8{,}5860702.67_n - 10$$
$$\log (a_0 M') = 5{,}3907137.31_n$$
$$\log P' = 8{,}8673421.76 - 10$$
$$\log P = 5{,}6719856.40$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,M'^2 & = & 268.976 \\ \quad\text{"}\quad P'^2 & = & 982.330 \\ \quad\text{"}\quad P'^2\,W^2 \tan^2 B & = & 1800.637 \end{array}\right\} \text{Einh. der 7. Dec.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2 M'^2 & = & 1.7952 \\ \quad\text{"}\quad e^2 M'^2 \sin^2 B & = & 1.1634 \\ \quad\text{"}\quad e^2 P'^2 & = & 6.5564 \\ \quad\text{"}\quad e^2 P'^2 \sin^2 B & = & 4.2486 \end{array}\right\} \text{"}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{2880}\,\text{Mod}\,.\,M'^4 & = & 0.0033 \\ \quad\text{"}\quad P'^4 & = & 0.0444 \\ \quad\text{"}\quad M'^2 P'^2 & = & 0.0122 \end{array}\right\} \text{"}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{2880}\,\text{Mod}\,.\,M'^2P'^2\tan^2 B & = 0.02240 \\ \quad\text{„}\qquad P'^4\tan^2 B & = 0.08183 \\ \quad\text{„}\qquad P'^4\tan^4 B & = 0.15065 \end{array}\right\}\ \text{Einh. der 7. Dec.}$$

Hiermit ergiebt sich nun folgende Zusammenstellung:

$$\left\{\begin{array}{llrl} & \log(-L_{1.2}\sin B) & = & 4{,}3133516.57_n \\ + & \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,3M'^2 & =+ & 806.928 \\ + & \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2M'^2\,.\,8 & =+ & 14.362 \\ - & \text{„}\quad\text{„}\quad 11\sin^2 B & =- & 12.797 \\ + & \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,2P'^2 & =+ & 1964.660 \\ + & \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2P'^2\,.\,2 & =+ & 13.113 \\ - & \text{„}\quad\text{„}\quad 4\sin^2 B & =- & 16.994 \\ + & \frac{-1}{2880}\,\text{Mod}\,.\,15M'^4 & =+ & 0.050 \\ + & \text{„}\quad 14P'^4 & =+ & 0.622 \\ - & \text{„}\quad 60M'^2P'^2\tan^2 B & =- & 1.344 \\ - & \text{„}\quad 12P'^4\tan^2 B & =- & 0.982 \end{array}\right.$$

(The values 1964.660, 13.113, 16.994: wird unten gebraucht)

$$\log \varDelta\alpha = 4{,}3136284.19_n$$

$$\varDelta\alpha = -20588{,}6760'' = -5^0\,43'\,8{,}6760''.$$

$$\left\{\begin{array}{llrl} & \log(-a_0M') & = & 5{,}3907137.31 \\ + & \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,e^2M'^2\,.\,3 & =+ & 5.386 \\ - & \text{„}\quad\text{„}\quad 6\sin^2 B & =- & 6.980 \\ - & \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,P'^2(2+e^2[2-4\sin^2 B]) & =- & 1960.779 \\ - & \frac{1}{24}\,\text{Mod}\,.\,3P'^2W^2\tan^2 B & =- & 5401.911 \\ - & \frac{1}{2880}\,\text{Mod}\,.\,8M'^2P'^2 & =- & 0.098 \\ - & \text{„}\quad 14P'^4 & =- & 0.622 \\ - & \text{„}\quad 30M'^2P'^2\tan^2 B & =- & 0.672 \\ - & \text{„}\quad 40P'^4\tan^2 B & =- & 3.273 \\ - & \text{„}\quad 15P'^4\tan^4 B & =- & 2.260 \end{array}\right.$$

(The first three values: ist log M; 1960.779: siehe oben; 0.622: siehe oben; 0.672: siehe oben)

$$\log(s\cos\alpha) = 5{,}3899766.10$$

$\log P$	$=$	5,6719856.40	
$+\frac{1}{24}$ Mod . M'^2	$=+$	268.976	
$+\frac{1}{24}$ Mod . $e^2 M'^2 . 1$	$=+$	1.795	
$-$ „ „ $11 \sin^2 B$	$=-$	12.797	siehe oben
$-\frac{1}{24}$ Mod . $P'^2 W^2 \tan^2 B$	$=-$	1800.637	
$+\frac{1}{2880}$ Mod . M'^4	$=+$	0.003	
$-$ „ $8 M'^2 P'^2$	$=-$	0.098	siehe oben
$-$ „ $30 M'^2 P'^2 \tan^2 B$	$=-$	0.672	siehe oben
$-$ „ $12 P'^4 \tan^2 B$	$=-$	0.982	siehe oben
$-$ „ $P'^4 \tan^4 B$	$=-$	0.151	
$\log(s \sin \alpha)$	$=$	5,6718311.84	

Aus $\log(s \cos \alpha)$ und $\log(s \sin \alpha)$ erhält man:

$$\alpha = 62^0\ 24'\ 35{,}029'',$$

und hiermit ergeben sich für s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ folgende

Resultate:		anstatt	
	$\log s = 5{,}7242591.34$	.35	nach S. 261.
	$\alpha_{1.2} = 65^0\ 16'\ 9{,}367''$	,365	
	$\alpha_{2.1} = 239\ \ 33\ \ 0{,}691$	,689	

Die Schärfe der Rechnung ist befriedigend, wie die Vergleichung mit der strengeren Rechnung S. 261 zeigt, $\Delta\alpha$ paſst sogar bis auf 0,0001″.

§ 25. **Zahlenbeispiel II.** Gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = 57^0 \\ B_2 = 56^0\ 13'\ 49{,}02186'' \end{array}\right\} L_{1.2} = 1^0\ 22'\ 6{,}03270''\text{östlich.}$$

Man hat zunächst:

$B = 56^0\ 36'\ 54{,}51093''$	$\log W = 9{,}9989871.55 - 10$
$\Delta B = -2770{,}97814''$	$\log \Delta B = 3{,}4426331.00_n$
$L_{1.2} = -4926{,}03270''$	$\log L_{1.2} = 3{,}6924972.90_n$
$\log \frac{\text{Mod}}{24} = 5{,}25757$ } f. Einh. der 7. Dec.	$\log a_0 = 6{,}8046434.64$
	$\log \tan^2 B = 0{,}36223$
$\log \frac{\text{Mod}}{2880} = 3{,}17839$ }	$\log \sin^2 B = 9{,}8434 - 10$
$\log e^2 = 7{,}82441 - 10$	

$$\log \varrho'' = 5{,}3144251.33$$

$$\log(1 - e^2) = 9{,}9970916.40 - 10$$

$$\log \frac{\varDelta B}{\varrho''} = 8{,}1282079.67_n - 10$$

$$\log \frac{L_{1.2}}{\varrho''} = 8{,}3780721.57_n - 10$$

$$\log \sin B = 9{,}9216829.98 - 10$$

$$\log \cos B = 9{,}7405680.15 - 10$$

$$\log M' = 8{,}1283381.42_n - 10$$

$$\log (a_0 M') = 4{,}9329816.06_n$$

$$\log P' = 8{,}1196530.17_n - 10$$

$$\log P = 4{,}9242964.81_n$$

$\frac{1}{24}$ Mod . M'^2	$= 32.678$	Einh. der 7. Dec.
„ P'^2	$= 31.396$	
„ $P'^2 W^2 \tan^2 B$	$= 71.958$	
$\frac{1}{24}$ Mod . $e^2 M'^2$	$= 0.2181$	„
„ $e^2 M'^2 \sin^2 B$	$= 0.1521$	
„ $e^2 P'^2$	$= 0.2096$	
„ $e^2 P'^2 \sin^2 B$	$= 0.1461$	
$\frac{1}{2880}$ Mod . M'^4	$= 0.0000$	„
„ P'^4	$= 0.0000$	
„ $M'^2 P'^2$	$= 0.0000$	
$\frac{1}{2880}$ Mod . $M'^2 P'^2 \tan^2 B$	$= 0.00011$	„
„ $P'^4 \tan^2 B$	$= 0.00011$	
„ $P'^4 \tan^4 B$	$= 0.00024$	

Hiermit ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$\log (- L_{1.2} \sin B)$	$=$	3,6141802.88	
$+ \frac{1}{24}$ Mod . $3 M'^2$	$= +$	98.034	
$+ \frac{1}{24}$ Mod . $e^2 M'^2 . 8$	$= +$	1.745	
$-$ „ „ $11 \sin^2 B$	$= -$	1.673	
$+ \frac{1}{24}$ Mod . $2 P'^2$	$= +$	62.792	wird später nochmals gebraucht
$+ \frac{1}{24}$ Mod . $e^2 P'^2 . 2$	$= +$	0.419	
$-$ „ „ $4 \sin^2 B$	$= -$	0.584	
die Glieder (7*) S. 314	$= -$	0.008	
$\log \varDelta\alpha$	$=$	3,6141963.61	

$$\varDelta\alpha = 4113{,}35659'' = 1^0\ 8'\ 33{,}35659''.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}
\log(-a_0 M') & = & 4{,}9329816.06 \\
+\frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,e^2 M'^2.\,3 & =+ & 0.654 \\
-\quad ,, \qquad ,, \quad 6\sin^2 B & =- & 0.913 \\
-\frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,P'^2\,(2+e^2\,[2-4\sin^2 B]) & =- & 62.627 \text{ siehe oben} \\
-\frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,3\,P'\,W^2\tan^2 B & =- & 215.874 \\
\text{Die Glieder (8*) S. 315} & =- & 0.011
\end{array}\right.$$

$$\log(s\cos\alpha) = 4{,}9329537.29$$

$$\left\{\begin{array}{lll}
\log P & = & 4{,}9242964.81_n \\
+\frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,M'^2 & =+ & 32.678 \\
+\frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,e^2 M'^2.\,1 & =+ & 0.218 \\
-\quad ,, \qquad ,, \quad 11\sin^2 B & =- & 1.673 \text{ siehe oben} \\
-\frac{1}{24}\,\mathrm{Mod}\,.\,P'^2\,W^2\tan^2 B & =- & 71.958 \\
\text{Die Glieder (9*) S. 315} & =- & 7
\end{array}\right.$$

$$\log(s\sin\alpha) = 4{,}9242924.07_n$$

Aus $\log(s\cos\alpha)$ und $\log(s\sin\alpha)$ erhält man:

$$\alpha = 315^0\,34'\,16{,}6775'',$$

und hiermit ergeben sich für s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ folgende

$$\text{Resultate:}\left\{\begin{array}{l}
\log s = 5{,}0791812.47 \\
\alpha_{1.2} = 314^0\,59'\,59{,}9992'' \\
\alpha_{2.1} = 136\quad 8\;\;33{,}3558'',
\end{array}\right.$$

welche ebenso wie auch $\varDelta\alpha$ noch in den letzten angesetzten Ziffern so genau sein müssen, als die Unsicherheit der Zahlenrechnung zuläfst.

Vernachlässigt man die Glieder 4. Ordnung der Logarithmen gänzlich, so wird erhalten:

	woraus mit 7 ziffr. Log. folgt:
$\log\varDelta\alpha = 3{,}6141963.7$	$\varDelta\alpha = \quad 1^0\;\;8'\,33{,}3568''$
$\log(s\cos\alpha) = 4{,}9329536.4$	$\alpha = 315^0\,34'\,16{,}63''$
$\log(s\sin\alpha) = 4{,}9242925.2_n,$	

$$\left\{\begin{array}{l}
\log s = 5{,}0791812.8 \\
\alpha_{1.2} = 314^0\,59'\,59{,}95'' \\
\alpha_{2.1} = 135\quad 8\;\;33{,}31.
\end{array}\right.$$

Man erkennt, dafs für Seiten mefsbarer Dreiecke bei Anwendung 7 ziffriger Logarithmen die Glieder 4. Ordnung in der Regel ohne Einflufs bleiben.

7. Kapitel.

Der Lauf der geodätischen Linie.

§ 1. **Die Form der geodätischen Kreise in der Nähe des, dem Drehpunkt einer geodätischen Linie auf dem Rotationsellipsoid gegenüberliegenden Punktes.** In Ergänzung des S. 217 über den Lauf der geodätischen Linie Gesagten interessiert zunächst das Verhalten der in der Überschrift dieses Paragraphen genannten geodätischen Kreise. Wir gehen bei Untersuchung derselben nur bis zu Gliedern mit e^2 und vernachlässigen e^4 und höhere Potenzen der Excentricität e der Meridianellipse. Nach S. 223 hat man alsdann für die Länge der geodätischen Linie zwischen den Punkten P_1 und P_2, e als Gröfse 1. Ordnung betrachtet:

$$s = b_0 \left\{ (1 + k_1)\, \varDelta\varphi + \frac{1}{2} k_1 (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + Gl_4 \right\}, \quad (1)$$

worin mit Beibehaltung der angeführten Genauigkeit

$$k_1 = \frac{1}{4} k^2 + \cdots = \frac{e^2}{4} \sin^2\beta_0 + \cdots = \frac{1}{2} \mathfrak{a} \sin^2\beta_0 + \cdots \quad (2)$$

genommen werden darf. β_0 ist die gröfste reduzierte Breite, welche die durch P_1 und P_2 bestimmte geodätische Linie in ihrem ganzen Laufe erreichen kann.

Für geodätische Kreise ist s konstant. Nehmen wir ferner an, dafs $\varDelta\varphi$ mit π bis auf einen Bruchteil der 2. Ordnung übereinstimmt, sodafs in der Gleichung

$$\varDelta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi + \chi \quad (3)$$

χ die 2. Ordnung hat, so geht der Faktor von b_0 in Gleichung (1) über in:

$$\pi + \frac{1}{2} \mathfrak{a}\pi \sin^2\beta_0 + \chi + Gl_4.$$

Es ist daher, wenn χ_0 eine Konstante bezeichnet, s konstant, falls

$$\chi = \chi_0 - \frac{1}{2} \mathfrak{a}\pi \sin^2\beta_0 + Gl_4 \quad (4)$$

genommen wird.

Diese Bedingungsgleichung für die geodätischen Kreise ist nunmehr anzuwenden auf das sphärische Hilfsdreieck, Fig. 21 S. 232. Mit Rücksicht auf (3) erhält man:

$$\sin\beta_2 = -\sin\beta_1 \cos\chi + \cos\beta_1 \sin\chi \cos\alpha_{1.2}$$

und hieraus:

$$\beta_2 = -\beta_1 + \chi \cos \alpha_{1.2} + Gl_4.$$

Diese Relation vernachlässigt, wie angemerkt, nur Glieder 4. Ordnung, falls P_1 und P_2 nicht den Polen nahe liegen. Von diesem besondern Falle sehen wir ab und erhalten dann unter Substitution des Wertes von χ aus (4):

$$\beta_2 = -\beta_1 - \frac{1}{2} \mathfrak{k}\pi \sin^2\beta_0 \cos \alpha_{1.2} + \chi_0 \cos \alpha_{1.2} + Gl_4. \tag{5}$$

Für den Längenunterschied $L_{1.2}$ der Punkte P_1 und P_2 erhält man nach S. 231 (14) unter Beibehaltung derselben Genauigkeit wie bisher die Gleichung:

$$L_{1.2} = \Delta\lambda - \mathfrak{k} \cos \beta_0 \Delta\varphi + Gl_4. \tag{6}$$

Hierzu giebt zunächst wieder das sphärische Hilfsdreieck, Fig. 21:

$$\sin \Delta\lambda = \sin \Delta\varphi \sin \alpha_{1.2} \sec \beta_2,$$

und es wird mit Rücksicht auf die Relation (3) für $\Delta\varphi$, abgesehen von der Nähe der Pole:

$$\Delta\lambda = \pi + \chi \sec \beta_2 \sin \alpha_{1.2} + Gl_4$$

Substituiert man dies in (6) und setzt für χ den Wert nach (4), für $\Delta\varphi$ im letzten Gliede aber einfach π, so folgt:

$$L_{1.2} = \pi - \frac{1}{2}\mathfrak{k}\pi(2\cos\beta_0 + \sin^2\beta_0 \sec\beta_2 \sin\alpha_{1.2}) + \chi_0 \sec\beta_2 \sin\alpha_{1.2} + Gl_4. \tag{7}$$

Da wir von der Nähe des Poles absehen, dürfen wir hierin ferner für β_2 einfach $-\beta_1$ setzen. Substituieren wir aufserdem für $\cos\beta_0$ nach S. 232 (2) den Wert $\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2}$ und für $\sin^2\beta_0$ entsprechend $1 - \cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2}$, so erhalten wir aus (5) und (7) nach einfacher Reduktion:

$$\left.\begin{aligned} \beta_2 &= -\beta_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{k}\pi\cos\alpha_{1.2}(1-\cos^2\beta_1\sin^2\alpha_{1.2}) + \chi_0\cos\alpha_{1.2} + Gl_4 \\ L_{1.2} &= \quad \pi - \frac{1}{2}\mathfrak{k}\pi \cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2}(1 + \sec^2\beta_1 + \cos^2\alpha_{1.2}) \\ &\qquad + \chi_0 \sec\beta_1 \sin\alpha_{1.2} + Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Der Variation von $\alpha_{1.2}$ entspricht eine Bewegung von P_2 in einem geodätischen Kreis, dessen Figur sich (abgesehen von Gliedern der 4. Ordnung) aus den (8) herleiten läfst.

Vergleicht man nun den Punkt C, welcher P_1 auf der Oberfläche gerade gegenüberliegt und die geographische Breite $-\beta_1$ hat, mit

P_2, so ist $\beta_2 + \beta_1$ die Breitendifferenz und $L_{1.2} - \pi$ die geographische Längendifferenz beider.

Beziehen wir also in einer Ebene einen Punkt B auf einen Anfang C rechtwinkliger Koordinaten ξ und η, wobei gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -(\beta_2 + \beta_1)\\ \eta &= (L_{1.2} - \pi)\cos\beta_1\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

so giebt die, konstantem χ_0 und veränderlichem $\alpha_{1.2}$ entsprechende Kurve der B offenbar sehr nahe ein Bild des von P_2 beschriebenen geodätischen Kreises und zwar in der Verjüngung $\frac{1}{a_0}$.

Ändert man dagegen χ_0 bei konstantem $\alpha_{1.2}$, so beschreibt B eine Gerade im Azimut $180^0 - \alpha_{1.2}$ gegen die Axe der ξ. Dasselbe stimmt mit dem Azimut der wachsenden geodätischen Linie P_2 bis auf Gröfsen der 2. Ordnung überein, denn es ist nach (9)

$$d\xi : d\eta = -\,d\beta_2 : \cos\beta_1\, dL_{1.2},$$

und es ist ferner das letztere Verhältnis bis auf Gröfsen 2. Ordnung gleich der Cotangente jenes Azimuts, d. i. nach S. 279 (1)

$$-\,w_2 d\beta_2 : \cos\beta_2\, dL_{1.2}.$$

Die Formeln für ξ und η werden mit Rücksicht auf (8) und indem wir von jetzt ab die Anführung der Restglieder unterlassen:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \quad \frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi\cos\alpha_{1.2}\,(1 - \cos^2\beta_1\sin^2\alpha_{1.2}) \qquad\qquad - \chi_0\cos\alpha_{1.2}\\ \eta &= -\frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi\cos^2\beta_1\sin\alpha_{1.2}\,(1 + \sec^2\beta_1 + \cos^2\alpha_{1.2}) + \chi_0\sin\alpha_{1.2}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die positiven ξ und η sind von C aus bezw. nach Süden nnd Westen gerichtet.

Differenziert man nach $\alpha_{1.2}$, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\alpha_{1.2}} &= -\sin\alpha_{1.2}\left\{\frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi\,(\sin^2\beta_1 + 3\cos^2\beta_1\cos^2\alpha_{1.2}) - \chi_0\right\}\\ \frac{d\eta}{d\alpha_{1.2}} &= -\cos\alpha_{1.2}\left\{\frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi\,(\sin^2\beta_1 + 3\cos^2\beta_1\cos^2\alpha_{1.2}) - \chi_0\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Hieraus folgt zunächst $\frac{d\eta}{d\xi} = \cot\alpha_{1.2}$ bei konstantem χ_0; mithin ist in der Abbildung das Azimut des geodätischen Kreises gleich $90^0 - \alpha_{1.2}$, sodafs er also normal zur geodätischen Linie steht — eine Thatsache, die schon in aller Strenge fürs Ellipsoid selbst nachgewiesen ist.

Man sieht ferner, dafs die Differentialquotienten von ξ und η nach $\alpha_{1.2}$ gleichzeitig null werden für

$$\chi_0 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi\,(\sin^2\beta_1 + 3\cos^2\beta_1\cos^2\alpha_{1.2}). \tag{12}$$

Existiert nun bei konstantem χ_0 ein $\alpha_{1.2}$, welches dieser Gleichung entspricht, so hat der zugehörige geodätische Kreis in der Abbildung *Spitzen*, deren Koordinaten nach (10) sind:

$$\xi_0 = -\,\mathfrak{k}\pi\cos^2\beta_1\cdot\cos^3\alpha_{1.2} \qquad \eta_0 = -\,\mathfrak{k}\pi\cos^2\beta_1\cdot\sin^3\alpha_{1.2} \tag{13}$$

Hierzu giebt (12):

$$\cos^2\alpha_{1.2} = \frac{\chi_0 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi\sin^2\beta_1}{\frac{3}{2}\,\mathfrak{k}\pi\cos^2\beta_1}. \tag{14}$$

Zur Bedingungsgleichung für das Auftreten einer Spitze gelangt man auch, indem man

$$\mathfrak{m} = 0$$

setzt. Die Gleichung (5) S. 274 giebt hiermit:

$$\sin\Delta\varphi = \mathfrak{k}\sin^2\beta_0\sin\varphi_1\sin\varphi_2\,\Delta\varphi + Gl_4, \tag{15}$$

woraus man sofort erkennt, dafs Spitzen nur für solche geodätische Kreise möglich sind, welche ihrem Drehungszentrum nahezu diametral gegenüberliegen. Aus (15) gelangt man mit Rücksicht auf (3) und (4) sowie (2) S. 232 wieder zu (12), womit sich diese Bedingungsgleichung bis auf Glieder 4. Ordnung richtig erweist; da $\cos^2\alpha_{1.2}$ an die Grenzen null und 1 gebunden ist, folgt aus (12), dafs (abgesehen von Gliedern 4. Ordnung) nur für solche Werte χ_0, welche sich der Bedingung

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi\sin^2\beta_1 \leqq \chi_0 \leqq \frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi\,(1 + 2\cos^2\beta_1) \tag{16}$$

fügen, Spitzen in den geodätischen Kreisen vorkommen.

§ 2. **Fortsetzung: Die Form der geodätischen Kreise mit Spitzen.** Um einen Überblick zu gewinnen, wurde für einen Äquatorpunkt als Zentrum der Drehung die durch Fig. 25 gegebene ebene Darstellung des Verlaufs der geodätischen Kreise mit Spitzen mit Hilfe der Formeln (10) entworfen, in welchen also $\cos\beta_1 = 1$ gesetzt ist.

Die Figur giebt geodätische Kreise für Werte von χ_0 im Intervall $\frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi$. Den geodätischen Kreisen I, II, III, IV insbesondere entsprechen die Werte χ_0 gleich null, $\frac{1}{2}\,\mathfrak{k}\pi$, $\mathfrak{k}\pi$ und $\frac{3}{2}\,\mathfrak{k}\pi$, mithin wachsende Abstände vom Drehungszentrum.

Aufser den geodätischen Kreisen und den geodätischen Linien von 10 zu 10^0 Azimut giebt Fig. 25 auch die Verbindungskurve der Spitzen an, welche in der ebenen Darstellung im allgemeinen charakterisiert ist durch die Gleichung:

$$\xi_0^{\frac{2}{3}} + \eta_0^{\frac{2}{3}} = (\mathfrak{a}\pi \cos^2\beta_1)^{\frac{2}{3}}, \tag{1}$$

worin im speziellen Falle der Fig. 25 aber $\cos\beta_1 = 1$ einzuführen ist.

Ein Äquatorpunkt als Zentrum.

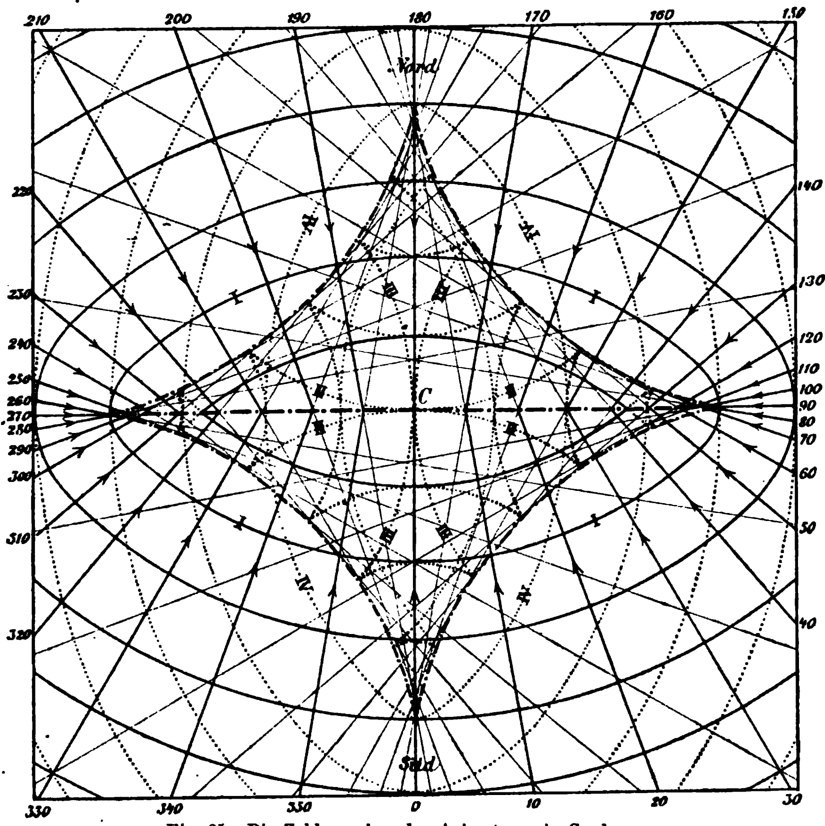


Fig. 25. Die Zahlen geben das Azimut $\alpha_{1\cdot 2}$ in Graden an.

Nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie ist dies die Gleichung der Einhüllenden aller Geraden von der konstanten Länge $\mathfrak{a}\pi\cos^2\beta_1$ zwischen den Axen der ξ und η.

Diese Geraden sind identisch mit denjenigen, welche in der ebenen Darstellung den geodätischen Linien entsprechen; denn bildet man $\frac{d\eta_0}{d\xi_0}$, so sieht man sogleich, dafs die Tangente der Einhüllenden im Punkte (ξ_0, η_0) gleiche Richtung hat mit der, der geodätischen Linie entsprechenden Geraden, die durch diesen Punkt führt.

Man erkennt übrigens unmittelbar geometrisch, dafs der Ort aller Spitzen eine Einhüllende der geodätischen Linien sein mufs, weil wegen $\mathfrak{m} = 0$ in jeder Spitze 2 unendlich benachbarte dieser. Linien sich schneiden.

Die Fig. 25 behält im wesentlichen ihre Gültigkeit auch für beliebige Punkte als Drehungszentrum; nur zieht sich zufolge Gleichung (1) die Einhüllende mehr und mehr zusammen, je näher jenes einem der Pole rückt. Ihre halben Axenlängen sind bis auf Bruchteile 2. Ordnung gleich

$$a_0 \mathfrak{k} \pi \cos^2 B_1 , \tag{2}$$

wenn B_1 die geographische Breite des Zentrums bezeichnet.

Infolge dieses Zusammenziehens wird das Gebiet, in welchem die geodätischen Kreise von der einfachen kreisartigen Form abweichen, immer kleiner, je mehr sich das Zentrum einem der Pole nähert, und es verschwindet ganz, sobald einer der Pole selbst Zentrum ist. Da unsere Entwicklungen z. T. unter Ausschlufs der Nähe der Pole angestellt sind, so bedarf die letztere Folgerung allerdings der Bestätigung, die indes ohne weiteres aus dem Faktum entnommen wird, dafs die geodätischen Linien für einen Pol als Zentrum die Parallelkreise sind.*)

Die geodätischen Kreise der Fig. 25 zeigen nun auch unmittelbar, wie die *kürzesten* Linien von dem Ausgangspunkte hergelaufen kommen. Man hat dabei nur zu beachten, dafs die Kreise I bis IV, wie schon angegeben, in wachsenden Abständen vom Drehungszentrum liegen, und man wird leicht verificieren, dafs die kräftigen Geraden kürzesten Linien angehören, die in Richtung der Pfeile von dem Drehungszentrum herkommen. Die geodätischen Kreise sind in Fig. 25, insoweit sie *Linien gleichen kürzesten Abstandes* sind, ebenfalls kräftig ausgezogen.

Um streng festzustellen, wie die Kürzesten laufen, ist eine *genaue* Kenntnis der Mittellinien (Axen) der von der Einhüllenden auf dem Ellipsoid begrenzten Fläche nötig; denn Fig. 25 zeigt auf einen Blick, dafs für den Lauf einer Kürzesten die Lage ihres Endpunktes P_2 in Bezug auf diese Mittellinien — kurz gesagt: dafs der Quadrant der eingehüllten Fläche, welcher P_2 enthält — mafsgebend ist.

---

*) Eine Untersuchung über die Einhüllende, welche ihr Zentrum im Äquator hat, giebt *Cayley* in dem *Philosophical Magazine* Vol. 40, 1870 2. Sem., S. 10 u. ff. Er nennt diese Linie *die geodätische Evolute*. *Cayleys* Untersuchung, welche für beliebige Abplattung gilt und elliptische Funktionen anwendet, wurde dem Verfasser erst während des Druckes bekannt.



Die eine Mittellinie fällt in den Meridian des Punktes C, welcher P_1 gegenüber liegt. Dieses bedarf keines Beweises.

Die andere hat die Eigentümlichkeit, dafs ihre Punkte durch je 2 gleichlange Kürzeste mit dem Ausgangspunkt P_1 verbunden sind, und sie fällt in den Parallelkreis des Punktes C. Dieses letztere ist noch zu beweisen.

§ 3. Kürzeste Linien zwischen nahezu diametralen Punkten. Verbinden wir auf der Hilfskugel (Fig. 21 S. 232) zwei diametral liegende Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch einen gröfsten Kreis, so ist $\varDelta\lambda = \varDelta\varphi = \pi$ und nach S. 231 (14)

$$L_{1.2} = \pi - \mathfrak{a}\pi \cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} \left(1 - \frac{1}{2} k_1 + \cdots\right) \tag{1}$$

unter Verschwinden aller periodischen Glieder. Zugleich ergiebt sich als lineare Länge der geodätischen Linie $P_1 P_2$ nach S. 223:

$$s = \pi b_0 \frac{1 + \frac{1}{4} k_1^2 + \cdots}{1 - k_1}, \tag{2}$$

ebenfalls unter Verschwinden aller periodischen Glieder. Dabei ist nach S. 221

$$k_1 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{8} k^4 + \cdots \qquad k^2 = \frac{e^2 \sin^2\beta_0}{1 - e^2 + e^2 \sin^2\beta_0}, \tag{3}$$

mit nachstehendem Werte für $\sin^2\beta_0$ zufolge S. 232 (2):

$$\sin^2\beta_0 = 1 - \cos^2\beta_1 \sin^2\alpha_{1.2}. \tag{4}$$

Diese Formeln zeigen, dafs $L_{1.2}$ und s in Bezug auf $\alpha_{1.2}$ nur vom Sinus abhängen, dafs daher für zwei Punkte P_1 und P_2 mit den geographischen Breiten B_1 und $B_2 = - B_1$ *zwei* gleichlange geodätische Verbindungslinien existieren *können*, deren Azimute $\alpha_{1.2}$ alsdann sich zu 180^0 ergänzen werden. Es *müssen* selbstverständlich diese zwei Verbindungen nicht notwendig existieren; sie werden nur dann vorhanden sein, wenn $L_{1.2}$ die Gleichung (1) erfüllt. Da nun die Grenzwerte von $\sin\alpha_{1.2}$ gleich ± 1 sind, so mufs $L_{1.2}$ der Bedingung genügen:

$$\left.\begin{aligned} \pi - \mathfrak{a}\pi \cos\beta_1 \left(1 - \frac{1}{8} e^2 \sin^2\beta_1 + \cdots\right) \leq L_{1.2} \\ L_{1.2} \leq \pi + \mathfrak{a}\pi \cos\beta_1 \left(1 - \frac{1}{8} e^2 \sin^2\beta_1 + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ist $L_{1.2} = \pi \mp \mathfrak{a}\pi \cos\beta_1 \left(1 - \frac{1}{8} e^2 \sin^2\beta_1 + \cdots\right)$, so fallen die

2 gleichlangen Verbindungen in eine, im Azimut $\alpha_{1.2} = 90^0$ bezw. 270^0 von P_1 ausgehende und im Azimut $\alpha_{2.1} = 270^0$ bezw. 90^0 in P_2 einmündende Linie zusammen.

In diesem Falle liegt P_2 in der östlichen oder westlichen Spitze der Einhüllenden. Der geometrische Ort aller P_2 mit 2 gleichlangen Verbindungen ist die ostwestliche Axe der Einhüllenden (Fig. 25), und dies ist nach der Voraussetzung $B_2 = -B_1$ (wie zu beweisen war) ein Stück des Parallelkreises, welcher durch den zu P_1 diametralen Punkt C führt.

Mit Rücksicht auf Fig. 25 erkennt man nunmehr auch, dafs die kürzeste Verbindung zweier nahezu diametralen Punkte P_1 und P_2 niemals die, durch den zu P_1 diametralen Punkt C führende, ostwestliche Axe der Einhüllenden der von P_1 ausgehenden geodätischen Linien schneiden kann, ebenso wenig wie überhaupt den Meridian von C. Hierdurch ist der Quadrant von $\alpha_{1.2}$ bestimmt.

Da bei gehöriger Verlängerung alle von P_1 ausgehenden geodätischen Linien die ostwestliche Axe der Einhüllenden schneiden, hier aber $\Delta\varphi = \pi$ ist, so erkennt man ferner, dafs für eine Kürzeste stets

$$\Delta\varphi \leqq \pi \tag{6}$$

sein mufs, was zur Ergänzung von S. 264 bemerkt wird.

Um eine Näherungsformel für das Azimut der Kürzesten zwischen zwei gegebenen, nahezu diametral liegenden Punkten zu gewinnen, eliminieren wir aus den Formeln (8) S. 322 die Unbekannte χ_0, indem wir die erste derselben mit $\sin\alpha_{1.2}$, die zweite mit $\cos\alpha_{1.2}\cos\beta_1$ multiplizieren und dann beide subtrahieren. Es folgt:

$$\begin{aligned}(\beta_1 + \beta_2)\sin\alpha_{1.2} + (\pi - L_{1.2})\cos\alpha_{1.2}\cos\beta_1 \\ = \mathfrak{n}\pi\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2}\cos^2\beta_1 + Gl_4.\end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus kann man eine Gleichung 4. Grades für $\sin\alpha_{1.2}$ herleiten; indessen dürfte es bequemer sein, die einzige in betracht kommende Wurzel durch Versuche aus der Gleichung (7) oder aus der meist ausreichenden Gleichung

$$(\beta_1 + \beta_2)\tan\alpha_{1.2} + (\pi - L_{1.2})\cos\beta_1 = \mathfrak{n}\pi\cos^2\beta_1\sin\alpha_{1.2} + \cdots \tag{8}$$

zu bestimmen. Man hat dabei zu beachten, dafs nach dem oben Entwickelten die Beziehung besteht:

$$\left.\begin{array}{lll}\alpha_{1.2} < 180^0 & \text{für} & L_{1.2} < 180^0 \\ \alpha_{1.2} > 180^0 & ,, & L_{1.2} > 180^0\end{array}\right\}. \tag{9}$$

Wenn nun der Punkt P_2 innerhalb des Raumes der Einhüllenden liegt, d. h. nach S. 323 (9) und S. 325 (1), wenn

$$(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{2}{3}} + (\pi - L_{1.2})^{\frac{2}{3}} \cos \beta_1^{\frac{2}{3}} \leq (\mathfrak{a}\pi \cos^2\beta_1)^{\frac{2}{3}} + \cdots,$$

so haben obige Gleichungen (7) und (8) zwei Wurzeln kleiner oder gröfser als 180°, von denen der Kürzesten entspricht (vergl. Fig. 25):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{1.2} \text{ im 1. oder 4. Quadr. für } (\beta_2 + \beta_1) < 0 \\ \alpha_{1.2} \text{ „ 2. „ 3. „ „ } (\beta_2 + \beta_1) > 0 \end{array}\right\}. \qquad (10)$$

Mit Hilfe dieser Formeln wird es gelingen, in allen Fällen, wo bei dem Verfahren S. 247 § 13 die 1. Annäherung $\Delta\lambda = L_{1.2}$ ungenügend sein sollte, einen brauchbaren 1. Annäherungswert für $\alpha_{1.2}$ zu gewinnen, mittelst dessen weiter in 1. Annäherung folgt:

$$\Delta\lambda = L_{1.2} + \mathfrak{a}\pi \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2} + \cdots. \qquad (11)$$

Nur natürlich mufs es erscheinen, dafs auch diese 1. Annäherung eine verhältnismäfsig ungünstige ist für Lagen von P_2 nahe der östlichen oder westlichen Spitze der Einhüllenden der von P_1 ausgehenden geodätischen Linien (oder umgekehrt). Denn hier giebt eine endliche Drehung der Geodätischen eine mehr oder weniger als verschwindend zu betrachtende Ortsänderung von P_2.

§ 4. Der Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts.

Für die Geodäsie ist der Richtungsunterschied zwischen dem Vertikalschnitt und der geodätischen Linie, welche dieselben beiden Punkte verbinden, besonders dadurch wichtig, dafs sich die beobachteten Horizontalwinkel und Azimute auf Vertikalschnitte beziehen, während die Einführung der geodätischen Linie selbstverständlich verlangt, dafs mit den Azimuten dieser Linie gerechnet wird. Es mufs daher eine Reduktion der Vertikalschnittsazimute d. i. der astronomischen Azimute auf geodätische Azimute stattfinden.

Hierbei handelt es sich nun nur um geringe Abstände zweier Punkte und dafür ist mit Hilfe bereits entwickelter Formeln jene Richtungsdifferenz leicht zu erhalten. Für Punkte in ganz beliebiger gegenseitiger Lage jedoch kann man ebenso wenig eine direkte Formel aufstellen, wie für die Azimutaldifferenz der beiden verbindenden Vertikalschnitte (S. 183), weil die betreffenden Reihen im allgemeinen nicht konvergieren.

Der Unterschied von astronomischem und geodätischem Azimut ist eben auch nur für mäfsig grofse Abstände der Punkte eine kleine Gröfse; er kann aber den Charakter einer solchen ganz verlieren und Werte bis zu 180° erlangen, wie sich weiterhin zeigen wird.



Gehen wir jetzt zu den Formeln über, so ist zunächst einerseits für die von P_1 nach P_2 führende Geodätische mit Hilfe des sphärischen Dreiecks Fig. 21 S. 232:

$$\cot \alpha_{1.2} = (\cos \varDelta\lambda \sin \beta_1 - \tan \beta_2 \cos \beta_1) : \sin \varDelta\lambda, \tag{1}$$

wobei nach S. 231 und wegen $\cos \beta_0 = \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}$ für $\varDelta\lambda$ die Beziehung zu $L_{1.2}$ besteht:

$$L_{1.2} = \varDelta\lambda - \frac{1}{2} e^2 \varkappa \varDelta\varphi \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}. \tag{2}$$

Der hierin angebrachte Faktor $\varkappa$ unterscheidet sich von 1 nur um Glieder, die in e^2 und höhere Potenzen desselben multipliziert sind und die jederzeit nur einen kleinen Bruch von gleicher Ordnung mit e^2 geben.

Man hat andrerseits für den von P_1 nach P_2 gelegten Vertikalschnitt zufolge S. 138 (2):

$$\cot \alpha_{1.2} = \frac{(\cos L_{1.2} \sin \beta_1 - \tan \beta_2 \cdot \cos \beta_1) + e^2 (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \cos \beta_1 \sec \beta_2}{\sin L_{1.2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta_1}}, \tag{3}$$

worin wir nun $\varDelta\lambda$ einführen. Indem wir vorläufig $L_{1.2} = \varDelta\lambda - \zeta$ setzen, haben wir zunächst:

$$\left.\begin{aligned} \cos L_{1.2} &= \cos \varDelta\lambda \cos \zeta + \sin \varDelta\lambda \sin \zeta, \\ \sin L_{1.2} &= \sin \varDelta\lambda \cos \zeta - \cos \varDelta\lambda \sin \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Da $\sin L_{1.2}$ im Nenner von (3) steht, schreiben wir die 2. dieser Gleichungen besser:

$$\sin L_{1.2} = \sin \varDelta\lambda \cos \zeta \left(1 - \cos \varDelta\lambda \frac{\tan \zeta}{\sin \varDelta\lambda}\right).$$

Hieraus folgt, da $\zeta = \frac{1}{2} e^2 \varkappa \varDelta\varphi \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}$ selbst für Linien von einem halben Umlauf noch klein ist:

$$\sin L_{1.2} = \sin \varDelta\lambda \cos \zeta \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \varkappa' \varDelta\varphi \cot \varDelta\lambda \cos \beta_1 \sin \alpha_{1.2}\right),$$

wobei $\varkappa'$ von 1 nur um kleine von e^2 abhängende Gröfsen abweicht, während $\cos \zeta$ mit 1 sogar bis auf ein Glied mit $e^4 \varDelta\varphi^2$ übereinstimmt.

Eliminieren wir in der Parenthese rechter Hand $\sin \varDelta\lambda$ mittelst der Relation des sphärischen Dreiecks:

$$\sin \varDelta\varphi : \sin \varDelta\lambda = \cos \beta_2 : \sin \alpha_{1.2},$$

so ergiebt sich:



$$\sin L_{1.2} = \sin \Delta\lambda \cos \zeta \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \varkappa' \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \Delta\lambda\right). \quad (5)$$

Wir führen jetzt diesen Ausdruck für $\sin L_{1.2}$ in (3) ein und können sodann offenbar für mäfsig grofse Distanzen eine Reihenentwicklung der in den Nenner von (3) tretenden Parenthese vornehmen. Entwickelt man dabei auch noch die Wurzelgröfse im Nenner von (3), substituiert den Wert von $\cos L_{1.2}$ nach (4) und beachtet schliefslich noch (1), so folgt:

$$\cot a_{1.2} = \left\{ \begin{array}{l} \cot \alpha_{1.2} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \beta_1 + \frac{1}{2} e^2 \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos \Delta\lambda + \cdots\right) \\ + e^2 \cos\beta_1 \sec\beta_2 \frac{\sin\beta_2 - \sin\beta_1}{\sin \Delta\lambda} + \frac{1}{4} e^2 \Delta\varphi \sin 2\beta_1 \sin \alpha_{1.2} + \cdots . \end{array} \right\} \quad (6)$$

Diese Gleichung vernachlässigt e^4 u. s. f., enthält aber die von e^2 abhängigen Glieder vollständig.

Wir eliminieren nunmehr auch noch β_2 und $\Delta\lambda$, um alles durch $\alpha_{1.2}$, β_1 und $\Delta\varphi$ dargestellt zu erhalten. Dazu dienen nachstehende Relationen. Zunächst hat man im sphärischen Dreieck die Gleichung: $\cos \Delta\varphi = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \Delta\lambda$. Setzt man hierin $\sin \beta_2 = \sin \beta_1 \cos \Delta\varphi - \cos \beta_1 \sin \Delta\varphi \cos \alpha_{1.2}$, so findet sich:

$$\cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos \Delta\lambda = \cos\Delta\varphi - \sin^2\beta_1 \cos\Delta\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 \sin\Delta\varphi \cos\alpha_{1.2}. \quad (7)$$

Es folgt ferner aus der eben angegebenen Gleichung für $\sin \beta_2$ die Differenz $\sin \beta_2 - \sin \beta_1 = - 2 \sin \beta_1 \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} - \cos \beta_1 \sin \Delta\varphi \cos \alpha_{1.2}$. Da nun $\sin \Delta\lambda = \sin \Delta\varphi \sec \beta_2 \sin \alpha_{1.2}$, so hat man weiter:

$$\frac{\sin\beta_2 - \sin\beta_1}{\sin \Delta\lambda} = - \tan \frac{\Delta\varphi}{2} \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_{1.2}} \cos \beta_2 - \cot \alpha_{1.2} \cos \beta_1 \cos \beta_2 . \quad (8)$$

Setzt man (7) und (8) in (6) ein, so führt eine leichte Reduktion zu der Gleichung:

$$\cot a_{1.2} = \cot \alpha_{1.2} - \frac{1}{2} e^2 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{\tan \Delta\varphi}\right) \cos^2\beta_1 \cot \alpha_{1.2}$$
$$- \frac{1}{2} e^2 \left(\tan \frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \frac{\sin 2\beta_1}{\sin \alpha_{1.2}} + \cdots . \quad (9)$$

Substituieren wir hierin für $\Delta\varphi$ einfach $s : a_0$, so ändert sich der Genauigkeitsgrad dieser Formel nicht, denn sie giebt wie vorher die in e^2 multiplizierten Glieder vollständig.

Diese Einführung von s nehmen wir gleichzeitig mit dem Übergang auf die Azimutaldifferenz $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ vor. Nach § 8 S. 30

kann man, solange überhaupt die Entwicklung (9) gilt, jedenfalls auch setzen:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} e^2 \left(1 - \frac{\frac{s}{a_0}}{\tan \frac{s}{a_0}} \right) \cos^2\beta_1 \sin 2\alpha_{1.2} \\ + \frac{1}{2} e^2 \left(\tan \frac{s}{2a_0} - \frac{s}{2a_0} \right) \sin 2\beta_1 \sin \alpha_{1.2} + \cdots . \end{array} \right\} \quad (10)$$

Diese Entwicklung enthält die in e^2 multiplizierten Glieder vollständig — auch dann noch, wenn man für β_1 einfach B_1 schreibt, also die geographische Breite einführt.

Wendet man nun endlich noch die Reihenentwicklungen für $\tan \frac{s}{a_0}$ und $\tan \frac{s}{2a_0}$ an und vernachlässigt s^5, so ergiebt sich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{a_{1.2} - \alpha_{1.2}} = \frac{1}{12} \varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} + \frac{1}{4} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \right) + Gl_6 , \quad (11)$$

in welcher Formel, ebenso wie in (10), bei unveränderter Genauigkeit rechter Hand $\alpha_{1.2}$ auch durch $a_{1.2}$ ersetzt werden darf.

Wenn in Formel (11) angegeben ist, dafs Glieder 6. Ordnung vernachlässigt sind, e und $s : a_0$ wie früher als Gröfsen 1. Ordnung betrachtet, so setzt dies voraus, dafs die vernachlässigten in e^4 multiplizierten Glieder mindestens den Faktor s^2 haben. Dieser Faktor haftet aber jedenfalls allen Glieder der Entwicklung für $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ an. Denn wenn $\frac{s}{a_0}$ unendlich klein von der 1. Ordnung ist, so fällt nach der S. 212 u. ff. gegebenen Darstellung der Vertikalschnitt mit der geodätischen Linie zusammen, d. h. ihre Richtungsdifferenz ist dann im Unendlichkleinen von höherer Ordnung als $s : a_0$. In der Entwicklung der ersteren nach Potenzen von s (deren Möglichkeit für hinreichend kleine s keinem Zweifel unterliegt) mufs somit mindestens allenthalben s^2 als Faktor auftreten.

§. 5. **Fortsetzung: Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts.** Vergleicht man obige Formel (11) mit Formel (21) S. 186, so zeigt sich in der Form der Hauptglieder für $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ und $a_{1.2} - \alpha'_{1.2}$ volle Übereinstimmung, es ist aber das erstere nur ein Drittel des letzteren.

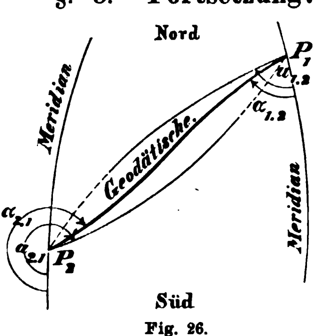


Fig. 26.

Für eine kurze geodätische Linie ist daher im allgemeinen der Verlauf bezüglich der Vertikalschnitte in der Nähe der Endpunkte P_1 und P_2 durch die Bemerkung gegeben, dafs sie den Winkelraum zwischen den Vertikalschnitten in zwei Teile im Verhältnis 1 : 2 teilt und dabei demjenigen

Vertikalschnitt am nächsten liegt, welcher von dem in betracht gezogenen Endpunkte ausgeht.

Die Differenz $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ ist für $s = 64^{km}$ höchstens rund 0,01″ und mithin so klein, dafs man die beobachteten Horizontalwinkel und Azimute direkt auf die geodätischen Linien beziehen kann, ohne im Vergleich zu den Beobachtungsfehlern merkliche Fehler zu begehen.

Anders ist es indes, wenn es sich um gröfsere Distanzen handelt, als die Seiten mefsbarer Dreiecke in der Regel sind. Für $s = a_0$ beträgt die Differenz $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ im Maximum bereits etwa 2′, wie Formel (10) auf voriger Seite zeigt. Bei weiter wachsenden s wächst diese Differenz immer rascher als mit dem Quadrat von s, was man zunächst noch aus der genannten Formel ersehen kann. Dieselbe verliert aber für nahezu diametrale Punkte P_1 und P_2 alle Brauchbarkeit, wie schon bei ihrer Entwicklung angegeben wurde.

Für solche Punkte zeigen die Formeln (1) bis (3) des vorigen Paragraphen das Verhalten von $a_{1.2}$ zu $\alpha_{1.2}$. Betrachten wir der Einfachheit halber nur den speziellen Fall, wo bei beliebigem $\alpha_{1.2}$ $\beta_2 = -\beta_1$ ist und $\Delta\lambda$ sowie $\Delta\varphi$ gleich π sind, wo also P_1 und P_2 auf gegenüberliegenden Parallelkreisen sich befinden und P_2 bei festgehaltenem P_1 alle Lagen innerhalb der östlichen und westlichen Spitze derjenigen Einhüllenden annehmen kann, welche den zu P_1 diametralen Punkt C umgiebt (Fig. 25 S. 325), so giebt Formel (2) für einen festgesetzten Wert von $\alpha_{1.2}$ sofort $L_{1.2}$ mittelst der Gleichung

$$L_{1.2} = \pi - \frac{1}{2} e^2 \pi \varkappa \cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} \,. \tag{1}$$

Die Einführung dieses Ausdrucks in die mit der Bedingung $\beta_2 = -\beta_1$ bereits umgeformte Gleichung (3):

$$\cot a_{1.2} = \frac{-\sin\beta_1 \cot\dfrac{L_{1.2}}{2} - 2e^2 \dfrac{\sin\beta_1}{\sin L_{1.2}}}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_1}},$$

ergiebt hierauf:

$$\cot a_{1.2} = -\frac{\sin\beta_1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\beta_1}} \left(\frac{4\varkappa'}{\pi\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2}} + \frac{1}{4} e^2 \pi \varkappa'' \cos\beta_1 \sin\alpha_{1.2} \right), \tag{2}$$

worin $\varkappa'$ und $\varkappa''$ Koefficienten sind, die von 1 nur um kleine Gröfsen der Ordnung e^2 abweichen. β_1 sei nun der Kürze halber nur positiv.

Alsdann ist $a_{1.2}$ gleich 180° für $\alpha_{1.2}$ = null; es nimmt mit wachsendem $\alpha_{1.2}$ ab bis zu einem Minimalwerte, der zu einem $\alpha_{1.2}$ näherungsweise gleich 90° gehört; es nimmt aber sodann bei weiter wachsenden $\alpha_{1.2}$ wieder zu und ist für $\alpha_{1.2} = 180°$ ebenfalls 180°, u. s. f.

Einen guten Überblick über das gegenseitige Verhalten von Vertikalschnitt und kürzester Linie erhält man mittelst Fig. 25 durch Einzeichnen der von P_1 ausgehenden und in einem Punkte C' zusammenlaufenden Vertikalschnitte. C' ist der Punkt, wo die verlängerte Normale des Ausgangspunkt P_1 das Ellipsoid zum 2. Male trifft, Fig. 27.

Ein Punkt in 45° Breite als Zentrum.

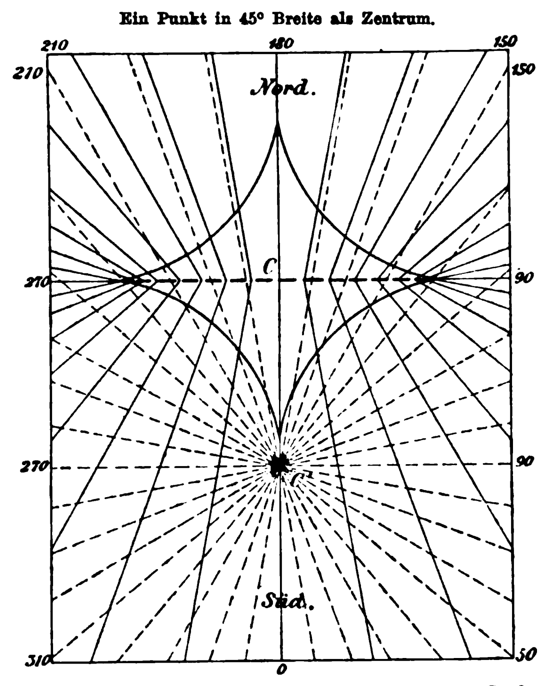


Fig. 27. Die Zahlen geben die Azimute $\alpha_{1\cdot 2}$ bezw. $a_{1\cdot 2}$ in Graden an.

Um die reduzierte Breite β' des Punktes C' zu finden, entnehmen wir aus Fig. 1 auf S. 40 als Gleichung der Normalen durch P_1:

$$z + MK_1' = x \tan B_1,$$

worin wir

$$x = -a_0 \cos \beta', \quad z = a_0\sqrt{1-e^2}\sin \beta', \quad \tan B_1 = \tan \beta_1 : \sqrt{1-e^2}$$

setzen, sowie für MK_1' den S. 41 (9) angegebenen Wert substituieren. Eine leichte Reduktion ergiebt:

$$\sin(\beta' + \beta_1) = e^2 \cos \beta_1 (\sin \beta' - \sin \beta_1).$$

Da β' ohne Zweifel nahezu gleich $-\beta_1$ ist, setzen wir $\beta' = -\beta_1 - \zeta$ und erhalten:

$$\sin \zeta = e^2 \cos \beta_1 \left(\sin(\beta_1 + \zeta) + \sin \beta_1\right).$$

Es ist daher genähert $\zeta = e^2 \sin 2\beta_1 + Gl_4$, so dass sich für die geographische Breite von C' die Formel findet:

$$B' = -B_1 - e^2 \sin 2B_1 + Gl_4. \tag{3}$$

Die Lage von C' gegen C bestimmt sich durch die Strecke CC', welche gleich ist $a_0(B' + B_1)$, abgesehen von Gliedern mit e^4. Schreibt man für e^2 einfach $2\mathfrak{a}$, so wird erhalten, wenn man CC' von C ab positiv nach Süden rechnet:

$$CC' = 2a_0\mathfrak{a} \sin 2B_1 + \cdots, \tag{4}$$

abgesehen von Bruchteilen 2. Ordnung seines Wertes.

Fig. 27 entwirft für einen Punkt P_1 in 45^0 geographischer Breite ein Bild der kürzesten Linien und der Vertikalschnitte auf dem zu P_1 diametralen Teile der Oberfläche in demselben Mafsstab wie Fig. 25.

§ 6. **Andere Bestimmungsweise des Unterschiedes von astronomischem und geodätischem Azimut für kleine Distanzen.** Zwischen den Punkten P_0 und P_n denken wir uns wie in Fig. 14 S. 213 eine geodätische Linie aus unendlich vielen, unendlich kleinen Vertikalschnitten P_0P_1, P_1P_2 u. s. f. zusammengesetzt. Zunächst bezeichnen wir die Anzahl dieser Teile mit n und die Länge jedes Teiles mit $s:n$.

Betrachten wir nun insbesondere die ersten beiden Vertikalschnitte und denken sie uns bis zu einem Werte ihrer Länge gleich s, also bis in die Nähe des Punktes P_n verlängert, so ist einleuchtend, dafs sie hier einen Abstand von einander haben, der erstens dem Flächenwinkel ν zwischen den zugehörigen Ebenen und zweitens dem Abstand der Sehne P_0P_1 von der Oberfläche bei P_n proportional ist. Dieser Abstand ist angenähert gleich $s^2 : 2\varrho_\alpha$, insofern man den Vertikalschnitt P_0P_1 und seine Verlängerung als Kreisbogen mit dem Radius ϱ_α auffassen darf, wenn ϱ_α der Krümmungsradius der Oberfläche bei P_0 im Azimut $\alpha_{0.1}$ ist. Man hat ferner nach S. 188 zu setzen, wenn ϱ_n den Querkrümmungshalbmesser in P_0 und B_0 die geographische Breite von P_0 bezeichnet:

$$\nu = \frac{1}{2}\,\delta\,\frac{s}{n\varrho_n}\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1}$$

unter Wegfall der höheren Glieder, welche wegen $n = \infty$ im Verhältnis zum angesetzten Gliede verschwinden. Der Abstand der verlängerten Vertikalschnitte P_0P_1 und P_1P_2 ist somit:

$$\frac{1}{4}\,\delta\,\frac{s^3}{\varrho_n\varrho_\alpha}\,\frac{n^2}{n^3}\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1}. \tag{1}$$

Betrachtet man in derselben Weise die gehörig verlängerten Vertikalschnitte $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$, $P_2 P_3$ und $P_3 P_4$, u. s. f., so ergeben sich ganz gleichartige Ausdrücke für die Abstände bei P_n; es tritt aber an Stelle von n^2 im Zähler der Reihe nach $(n-1)^2$, $(n-2)^2$, u. s. f., und B_0, $\alpha_{0.1}$, ϱ_n und ϱ_α beziehen sich successive auf P_1, P_2 u. s. f.

Mit Hilfe der Differentialformeln (1) und (2) S. 279, in denen $\delta s = is : n$, $i = 0, 1, 2 \dots n-1$, zu setzen ist, findet man leicht mit Vernachlässigung von in e^2 multiplizierten Gliedern:

$$\cos^2 B_i \sin 2\alpha_{i.i+1} = \cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1}$$

$$+ \frac{i}{n}\frac{s}{a_0} \sin 2B_0 \sin \alpha_{0.1} + \cdots. \qquad (2)$$

Nimmt man keine Rücksicht auf die Änderungen von $\varrho_n \varrho_\alpha$, die nur Bruchteile der Ordnung $e^2 s : a_0$ betragen, so erhält man als Summe der Abstände je zweier benachbarter, verlängerter Vertikalschnitte bei P_n d. h. als Abstand dieses Punktes vom verlängerten Vertikalschnitt $P_0 P_1$:

$$\frac{1}{4}\,\delta\,\frac{s^3}{\varrho_n \varrho_\alpha}\left\{\begin{array}{l} \cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1}\,\dfrac{\Sigma(n-i)^2}{n^3} \\ + \dfrac{s}{a_0} \sin 2B_0 \sin \alpha_{0.1}\,\dfrac{\Sigma i(n-i)^2}{n^4} \end{array}\right\} + \cdots, \qquad (3)$$

wobei die Σ eine Summierung von $i = 0$ bis $n-1$ andeuten. Schreibt man die von n und i abhängigen Quotienten in der Form:

$$\Sigma\left(1-\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \Sigma \frac{i}{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

und beachtet, dafs $n = \infty$ zu nehmen ist, so kann man dieselben als Integrale berechnen mit der Variablen $\frac{i}{n} = x$ von 0 bis 1 und mit $\frac{1}{n} = dx$. Somit folgt endlich anstatt (3) für den Abstand:

$$\frac{1}{12}\,\delta\,\frac{s^3}{\varrho_n \varrho_\alpha}\left(\cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1} + \frac{s}{4a_0} \sin 2B_0 \sin \alpha_{0.1}\right) + \cdots. \qquad (4)$$

Insofern wir $n = \infty$ gesetzt haben, ist dies ein Näherungswert für den Abstand einer geodätischen Linie und eines Vertikalschnitts, welche beide in demselben Azimut $\alpha_{0.1}$ von P_0 ausgehen, in der Entfernung s vom Ausgangspunkt.

Dreht man nunmehr die geodätische Linie um P_0, bis P_n in den unveränderten Vertikalschnitt zu liegen kommt, so ist offenbar der Drehungswinkel gleich der Gröfse, welche in den vorhergehenden

Paragraphen mit $a_{1.2} - \alpha_{1.2}$ bezeichnet worden ist. Da nun das Produkt des Winkels in die zu s gehörige reduzierte Länge $\mathfrak{m}$ jedenfalls mit sehr grofser Annäherung gleich dem oben ermittelten Abstand ist, $\mathfrak{m}$ aber bis auf Glieder 3. Ordnung mit s übereinstimmt, so folgt als Drehungswinkel:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = \frac{1}{12} \varrho'' \delta \frac{s^2}{\varrho_\alpha \varrho_n} \left(\cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} + \frac{1}{4} \frac{s}{a_0} \sin 2 B_1 \sin \alpha_{1.2} \right) + Gl_6. \quad (5)$$

Hierin sind wie früher die Symbole P_1 und P_2 als Bezeichnung der Endpunkte P_0 und P_n gedacht.

Die Formel stimmt im wesentlichen mit (11) S. 332 überein. Sie ist jedoch im 1. Gliede genauer als jene, denn in Bezug auf die Potenzen von e^2 ist das 1. Glied jetzt vollständig.

Vorstehende näherungsweise Entwicklung zeigt überdies deutlich, auf welche Weise der Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts zustande kommt.

Der Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts wurde 1821 von *Bessel* ohne Entwicklung angegeben in den *Astronom. Nachr.* Bd. 1 Nr. 3, S. 33 (vergl. *Engelmann, Abhandl.* von *Bessel*, Bd. 3 S. 1). Eine Entwicklung gab *Bessel* später (1837) *Astronom. Nachr.* Bd. 14 Nr. 330, S. 289 Gleichung (19) (*Abhandl.* Bd. 3 S. 29); sie unterscheidet sich nicht wesentlich von dem hier S. 329 u. ff. eingeschlagenen Wege und führt zu Formel (10) S. 332.

In wesentlich anderer Weise aber und zwar nach einem für jede krumme Oberfläche brauchbaren Verfahren ging *Weingarten* vor (vergl. *Baeyer, Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche.* 1862, S. 88 oder eine kurze Notiz in *Astronom. Nachr.* Bd. 60 Nr. 1425, S. 135).

Diese Entwicklung hat *Jordan* im 2. Bande seines Handbuches der Vermessungskunde 1878 S. 334 reproduziert. Bei *Weingartens* Verfahren erhält man den betrachteten Richtungsunterschied direkt nach Potenzen von s entwickelt und zwar wird unmittelbar das 1. Glied der Formel (11) S. 332 erhalten; es setzt natürlich voraus, dafs man die Differentialgleichungen der geodätischen Linie für eine beliebige Oberfläche abgeleitet hat, und es läfst aufserdem imstich für nahezu diametrale Punkte des Rotationsellipsoids. Eine gleichartige, aber bis zu s^3 incl. fortgesetzte und höhere Potenzen von e^2 enthaltende Entwicklung gab *Andrae* 1867 in Bd. 1 der *Danske Gradmaaling* S. 181 (vergl. auch *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* Bd. 13, S 19). Sein Ausdruck stimmt mit unserer Formel (5) bis auf den Nenner des in s^3 multiplizierten Gliedes, der bei ihm ϱ_α^3 lautet. Dieser Unterschied ist aber unwesentlich.

Die Methode unserer Entwicklung in diesem Paragraphen entspricht dem von *Sonderhof* 1869 im 51. Teile von *Grunerts Archiv* (2. Abhandlung) eingeschlagenen Wege. Sie gestattet auch eine Schätzung des Fehlers, den man begeht, wenn man eine *geodätische Linie* nach Art der Fig. 14 S. 213 *aus n endlichen Stücken* zusammensetzt:

Wir müssen zu dem Zwecke den Abstand der Sehnen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$,

u. s. f. von der Oberfläche zum Teil genauer als oben ermitteln, berücksichtigen aber konsequent nur die in e^2 multiplizierten Glieder. Betrachten wir zunächst den Bogen des bis in die Nähe von P verlängerten vertikalen Schnittes $P_0 P_1$ in der Ausdehnung s als Kreisbogen vom Radius a_0, so gehört dazu ein Zentriwinkel $s : a_0$. Eine einfache Figur zeigt nun, dafs die zur Sehne $P_0 P_1$ parallele Tangente des Kreisbogens von dessen Endpunkt um

$$a_0 \left(1 - \cos \left\{ \frac{s}{a_0} \left[1 - \frac{1}{2n}\right]\right\}\right)$$

absteht, die Tangente von der Sehne aber um

$$a_0 \left(1 - \cos \frac{s}{2 a_0 n}\right),$$

mithin die Sehne vom betreffenden Endpunkt des Kreisbogens um

$$a_0 \left(\cos \frac{s}{2 a_0 n} - \cos \left\{ \frac{s}{a_0} \left[1 - \frac{1}{2n}\right]\right\}\right)$$

d. i. sehr nahe

$$\frac{s^2}{2 a_0 n^2} (n^2 - n).$$

Für $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ u. s. f. erhält man ebensolche Ausdrücke, nur tritt für n in der Parenthese der Reihe nach $n - 1$, $n - 2$ u. s. f. bis 1 auf. Jeder dieser Ausdrücke multipliziert sich mit $\frac{1}{2} e^2 \frac{s}{a_0 n} \cos B_0 \sin 2\alpha_{0.1}$ und ihre Addition giebt als Abstand des Punktes P_n von dem 1. Vertikalschnitt $P_0 P_1$:

$$\frac{1}{4} e^2 \frac{s^3}{a_0^2} \cos B_0 \cos 2\alpha_{0.1} \frac{\Sigma (n - i)^2 - \Sigma (n - i)}{n^3}.$$

Da i von 0 bis n geht, kann man statt des Zählers auch $\Sigma i^2 - \Sigma i$ schreiben.

Nun ist $\Sigma i^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$, $\Sigma i = \frac{1}{2} n(n + 1)$, also

$\Sigma (i^2 - i) = \frac{1}{3} n(n^2 - 1)$ und der Abstand daher angenähert gleich

$$\frac{1}{12} e^2 \frac{s^3}{a_0^2} \cos^2 B_0 \sin 2\alpha_{0.1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{6}$$

Dieser Ausdruck bezieht sich vorerst auf den Abstand des Vertikalschnitts $P_0 P_1$ von der gebrochenen, aus n Vertikalschnitten zusammengesetzten Linie in der Entfernung s von P_0. Zieht man von (6) aber den Ausdruck (4) ab, welcher den entsprechenden Abstand des Vertikalschnitts $P_0 P_1$ von der ihn in P_0 tangierenden geodätischen Linie giebt, so erhält man endlich als Abstand der geodätischen Linie von einer im gleichen Azimut beginnenden, aus n Vertikalschnitten von endlicher Länge zusammengesetzten Linie (Fig. 14 S. 213) in der Entfernung s:

$$\frac{1}{12}\, e^2 \frac{s^3}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots \qquad (7)$$

Hierbei sind Anfangs- und Endpunkt, anstatt mit P_0 und P_n, ebenso wie für Formel (5) mit P_1 und P_2 bezeichnet gedacht.

Hat man nun z. B. in äquatorialer Gegend eine Kette von Dreiecken in südwestlicher Richtung, und setzen sich 10 Dreiecksseiten mit 180°-Winkeln an einander, ist ferner die Länge einer Seite gleich $s:10$ mit $s:10 = 0{,}01\,a_0$ d. h. $s = 640000^m$, so giebt (7) als Abstand einer genauen Geodätischen, welche mit der 1. Dreiecksseite gleiches Anfangsazimut hat, vom Endpunkt der 10. Dreiecksseite $0{,}036^m$.

§ 7. Zahlenbeispiel I. Für die Linie Königsberg-Berlin hat man nach S. 158 u. 162 sowie nach S. 256 u. 261:

$$B_1 = 54^0\,42'\,50{,}6'' \qquad B_2 = 52^0\,30'\,16{,}7'' \quad \log s = 5{,}72426$$

$$\left.\begin{aligned} a_{1.2} &= 65^0\,16'\,9{,}5806'' \\ \alpha_{1.2} &= 65\;.16\;\;9{,}3650 \end{aligned}\right\} a_{1.2} - \alpha_{1.2} = +\,0{,}2156''$$

$$\left.\begin{aligned} a_{2.1} &= 239\;33\;0{,}9324 \\ \alpha_{2.1} &= 239\;33\;0{,}6889 \end{aligned}\right\} a_{2.1} - \alpha_{2.1} = +\,0{,}2435''.$$

Da nun

$$\log \frac{1}{12}\, \varrho''\delta = 2{,}0626 \qquad \text{und} \qquad \log \frac{1}{48}\, \varrho''\delta = 1{,}461$$

ist, so hat man nach Formel (5) S. 337:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = [13{,}5111]\, \frac{\cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.2}}{\varrho_{\alpha_1}\varrho_{n_1}} + [18{,}634]\, \frac{\sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2}}{a_0\, \varrho_{\alpha_1} \varrho_{n_1}}$$

$$a_{2.1} - \alpha_{2.1} = [13{,}5111]\, \frac{\cos^2 B_2 \sin 2\alpha_{2.1}}{\varrho_{\alpha_2}\varrho_{n_2}} + [18{,}634]\, \frac{\sin 2B_2 \sin \alpha_{2.1}}{a_0\, \varrho_{\alpha_2} \varrho_{n_2}}$$

Nach *Albrecht* S. 200 und 201 findet sich für obige Werte von

$$B_1 \text{ und } \alpha_{1.2}: \;\log \varrho_{n_1} = 6{,}8056 \qquad \log \varrho_{\alpha_1} = 6{,}8054$$

und für

$$B_2 \text{ und } \alpha_{2.1}: \;\log \varrho_{n_2} = 6{,}8056 \qquad \log \varrho_{\alpha_2} = 6{,}8053.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \log \cos^2 B_1 &= 9{,}5233 - 10 & \log \sin 2B_1 &= 9{,}975 - 10 \\ \log \sin 2\alpha_{1.2} &= 9{,}8808 - 10 & \log \sin \alpha_{1.2} &= 9{,}958 - 10 \\ \log \cos^2 B_2 &= 9{,}5689 - 10 & \log \sin 2B_2 &= 9{,}985 - 10 \\ \log \sin 2\alpha_{2.1} &= 9{,}9414 - 10 & \log \sin \alpha_{2.1} &= 9{,}936_n - 10 \end{aligned}$$

und hiermit:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = +\,0{,}2015 + 0{,}0141 = +\,0{,}2156''$$

$$a_{2.1} - \alpha_{2.1} = +\,0{,}2573 - 0{,}0138 = +\,0{,}2435''.$$

Dies stimmt vollständig mit den nach strengen Formeln berechneten Werten überein.

Zahlenbeispiel II. Hier erhält man, wie es S. 166 und 320 verlangen, als Differenzen:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = -\,0{,}012'' \quad \text{und} \quad a_{2.1} - \alpha_{2.1} = -\,0{,}012''.$$

§ 8. **Der Unterschied der linearen Längen von geodätischer Linie und Vertikalschnitt zwischen denselben beiden Punkten.** Derselbe kann mit Benutzung des Vorhergehenden leicht angegeben werden. Nehmen wir P_1, von wo aus der Vertikalschnitt gelegt sein mag, als Zentrum A geodätischer Polarkoordinaten, Fig. 23 S. 269, so wird nach Gleichung (3) ebenda für das Linienelement ds des Vertikalschnitts, welches an den beliebigen Punkt P desselben angrenzt:

$$ds^2 = dr^2 + \mathfrak{m}_r^2 d\alpha_0^2, \tag{1}$$

wobei r der geodätische Radiusvektor AP, $\mathfrak{m}_r$ dessen reduzierte Länge und α_0 sein Azimut ist. Bezeichnen wir nun das Azimut des Vertikalschnitts in A mit $a_{1.2}$, so ist nach Formel (11) S. 332 in 1. Annäherung:

$$\alpha_0 = a_{1.2} - \frac{1}{12} e^2 \frac{r^2}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \cdots,$$

worin B_1 die geographische Breite von A bedeutet. Hieraus folgt:

$$d\alpha_0 = -\left(\frac{1}{6} e^2 \frac{r}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \cdots\right) dr. \tag{2}$$

Bedenken wir ferner, dafs es im 2. Gliede der Formel (1) rechter Hand in 1. Annäherung offenbar ausreicht, für mäfsig grofse Distanzen $\mathfrak{m}_r$ gleich r zu setzen, so erhalten wir aus (1) durch diese Substitution und wegen (2):

$$ds = \sqrt{1 + \frac{1}{36} e^4 \frac{r^4}{a_0^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2a_{1.2} + \cdots}\, dr.$$

Hieraus folgt:

$$ds = \left(1 + \frac{1}{72} e^4 \frac{r^4}{a_0^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2a_{1.2} + \cdots\right) dr.$$

Integriert man dies vom Anfangspunkt A d. i. P_1 bis zum Endpunkt P_2, so folgt:

$$s = r_{1.2}\left\{1 + \frac{1}{360}\,e^4\,\frac{r_{1.2}^{\;4}}{a_0^{\;4}}\cos^4 B_1\,\sin^2 2a_{1.2} + \cdots\right\}, \tag{3}$$

worin s die lineare Länge des Vertikalschnitts $P_1 P_2$, $r_{1.2}$ aber diejenige der geodätischen Linie $P_1 P_2$ bedeutet.

Diese Formel ist noch ausreichend für Distanzen gleich $0{,}2\,a_0$. Wird die Distanz gleich a_0 und gröfser, so ist die Entwicklung zunächst zwar noch konvergent, aber das angesetzte Glied giebt doch nur eine rohe Annäherung.

Nimmt man $r_{1.2} = 0{,}2\,a_0$, so ist im Maximum

$$s = r_{1.2}\left(1 + \frac{1}{5000000000}\right),$$

sodafs bei zehnziffriger Rechnung die Logarithmen von s und $r_{1.2}$ sich noch nicht um eine Einheit der letzten Decimalstelle unterscheiden; es ist hiernach für die meisten praktischen Fälle in Bezug auf lineare Länge der *Vertikalschnitt* von der *geodätischen Linie* nicht merklich verschieden. [Für die Linie Berlin — Königsberg ist die Differenz $0{,}0002^{mm}$. Vergl. auch die Beispiele I u. II S. 182, 183, 261 und 320.]

Vertauscht man in (3) die Indices 1 und 2, so zeigt sich, e und $r_{1.2} : a_0$ wie immer als Gröfsen 1. Ordnung aufgefafst, für beide Vertikalschnitte eine Vergröfserung gegen die geodätische Linie um ein Glied 8. Ordnung in Bruchteilen der Länge. Der Unterschied der Längen der Vertikalschnitte gegen einander wegen der Ungleichheit dieser Glieder 8. Ordnung und wegen höherer Glieder ist daher, in Bruchteilen der Länge, höchstens von der 9. Ordnung, wie zur Ergänzung von S. 182 bemerkt werden mag.

Nach dem Vorhergehenden kann man nun die S. 181 u. 182 angegebenen Beziehungen der Länge des Vertikalschnitts zur Sehne und zu σ' unmittelbar, falls es erwünscht sein sollte, als solche der geodätischen Linie zur Sehne und bezw. zu σ' betrachten.

Die Formel (3) gab *Bessel* 1837 ohne Herleitung *Astronom. Nachr.* Bd. 14 No. 330, S. 285 (*Abhandlungen* Bd. 3, S. 26). *Weingarten* gelangte zu dieser Formel im Verfolg der oben (S. 337) erwähnten Entwicklung für eine beliebige krumme Oberfläche (vergl. *Baeyer*, a. a. O. S. 93; *Jordan* Bd. 2, S. 339). Eine Schätzung der Ordnung des Längenunterschieds von geodätischer Linie und vertikalem Schnitt in einfacher geometrischer Weise gab *Andrae* im 1. Bd. der *Dän. Gradmessung* S. 179 (vergl. auch *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* Bd. 13, S. 18).

§ 9. **Abstand der geodätischen Linie von den beiden Vertikalschnitten bei kleinen Distanzen.** In Fig. 26 S. 332 denken wir uns auf dem Vertikalschnitt $P_1 P_2$ einen Punkt P und die geodätische Linie r, welche P_1 und P verbindet. Ist α_0 deren Azimut in P_1, so hat man in 1. Annäherung wie oben:

$$\alpha_0 = a_{1.2} - \frac{1}{12} e^2 \frac{r^2}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \cdots.$$

Dagegen ist für die geodätische Linie $P_1 P_2$, deren Länge wir nunmehr mit s bezeichnen, das Azimut in P_1 gleich

$$\alpha_{1.2} = a_{1.2} - \frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \cdots.$$

Der Azimutalunterschied der geodätischen Linien $P_1 P$ und $P_1 P_2$ ist nun $\alpha_0 - \alpha_{1.2}$; multipliziert man ihn mit der reduzierten Länge (in der mit grofser Annäherung zulässigen Voraussetzung, dafs $\alpha_0 - \alpha_{1.2}$ wie eine unendlich kleine Drehung behandelt werden darf) und setzt diese näherungsweise gleich r, so folgt als Abstand des Vertikalschnitts $P_1 P_2$ von der geodätischen Linie $P_1 P_2$ in der Entfernung r von P_1 in 1. Annäherung:

$$\frac{1}{12} e^2 r \frac{s^2 - r^2}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \cdots. \tag{1}$$

Vertauscht man hierin die Punkte P_1 und P_2, wobei an Stelle von r $s - r$ tritt, so folgt dagegen als Abstand des Vertikalschnitts $P_2 P_1$ von der geodätischen Linie an derselben Stelle wie vorher nach einfacher Reduktion:

$$\frac{1}{12} e^2 r \frac{(s - r)(2s - r)}{a_0^2} \cos^2 B_2 \sin 2a_{2.1} + \cdots. \tag{2}$$

Da von höheren Gliedern abgesehen wird, so kann man hierin und in (1) für B_1 und B_2 einerseits, und $2a_{1.2}$ und $2a_{2.1}$ andrerseits, einen und denselben mittleren Wert oder auch B_1, bezw. $2a_{1.2}$ einführen. Die Addition von (1) und (2) giebt dann den Abstand der Vertikalschnitte. Derselbe ist demnach im Abstande r von P_1 in 1. Annäherung gleich

$$\frac{1}{4} e^2 \frac{sr(s - r)}{a_0^2} \cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \cdots. \tag{3}$$

Vergleicht man (1) und (3), so zeigt sich, dafs Ausdruck (3) immer gröfser ist, als (1); denn es gilt die Proportion:

$$(1) : (3) = s + r : 3s. \tag{4}$$

Daher liegt die geodätische Linie in 1. Annäherung für kleine Distanzen immer *zwischen* den beiden Vertikalschnitten, welche die Endpunkte derselben verbinden.

Es lehrt ferner die Differentiation von (3) bezw. (1) nach r, dafs in 1. Annäherung der Maximalabstand der Vertikalschnitte inmitten zwischen P_1 und P_2 sich befindet, dagegen der von geodätischer Linie

und Vertikalschnitt in der Entfernung $s:\sqrt{3}$ von demjenigen der beiden Punkte, von welchem aus der Vertikalschnitt geführt ist. Daselbst verhalten sich die Abstände (1) und (3) wie

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) : 3 \quad \text{d. i. wie} \quad 1 : 1{,}902.$$

Vorstehende Beziehungen, wie diejenige über die Dreiteilung der Winkel zwischen den Vertikalschnitten durch die Geodätische, welche S. 332 erwähnt ist, dürfen selbstredend nicht als streng gültige und für beliebig lange Linien anwendbare aufgefafst werden. Will man die Beziehungen genauer feststellen, so ist ein genauerer Ausdruck der astronomisch-geodätischen Azimutaldifferenz anzuwenden, im übrigen aber so, wie oben geschehen ist, vorzugehen.

Wir betrachten jetzt in dieser Weise denjenigen Fall, wo Vertikalschnitt und geodätische Linie nahezu das Azimut 90^0 haben und insbesondere, wenn $B_1 = B_2$ ist. Nach den Formeln (1) und (3) würden für $a_{1.2} = 90^0$ die beiden Vertikalschnitte untereinander und mit der geodätischen Linie zusammenfallen. Dies mufs jedoch für die beiden Vertikalschnitte genauer dahin modificiert werden, dafs sie nur zusammenfallen, wenn beide Punkte P_1 und P_2 auf demselben Parallelkreis liegen — in jedem andern Falle (ausgenommen für die Lage beider Punkte auf demselben Meridian) fallen sie nicht zusammen. Die geodätische Linie aber hat überhaupt für Werte von $\alpha_{1.2}$ um 90^0 herum eine etwas abweichende Lage von beiden Vertikalschnitten (sie kann mit diesen auch nur für zwei in demselben Meridian gelegene Punkte P_1 und P_2 genau koincidieren, weil nur dann die Schmiegungsebene jedes der beiden verbindenden Vertikalschnitte zugleich für alle Zwischenpunkte Vertikalebene ist).

Aus Formel (11) S. 332 ist zu ersehen, dafs für Werte von $a_{1.2}$ und $\alpha_{1.2}$ nahe an 90^0 sich die Azimutaldifferenz auf eine Gröfse 5. Ordnung reduziert; der lineare Abstand zwischen geodätischer Linie und vertikalem Schnitt ist daher für solche Lagen eine Ordnung höher als im allgemeinen. Man sieht aber sogleich, dafs er nicht null wird.

Wenn wegen $B_1 = B_2$ die Vertikalschnitte zusammenfallen, so ist nach S. 144 im sphärischen Hilfsdreieck (1)

$$\tan\frac{\sigma'}{2} = -\cot B_1 \cos a_{1.2}\,.$$

Hieraus folgt mit Vernachlässigung von Bruchteilen der 2. Ordnung (vergl. S. 182 (13))

$$\cos a_{1.2} = -\frac{1}{2}\,\frac{s}{a_0}\tan B_1\,(1 + Gl_2). \tag{5}$$

Nach S. 332 (11) ist ferner:

$$\alpha_{1.2} = a_{1.2} - \frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \frac{1}{4} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin a_{1.2}\right) + Gl_6. \quad (6)$$

Ersetzt man hierin im 1. Gliede $\cos a_{1.2}$ durch den Ausdruck (5), so ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dafs $\sin a_{1.2}$ von 1 nur um eine Gröfse der 2. Ordnung abweicht:

$$\alpha_{1.2} = a_{1.2} + \frac{1}{48} e^2 \frac{s^3}{a_0^3} \sin 2B_1 + \cdots. \quad (7)$$

Die mehrfach erwähnte Formel (11) S. 332 giebt ferner mit $s:2$ als Distanz in Bezug auf diejenige geodätische Linie, welche von P_1 nach dem zwischen P_1 und P_2 inmitten gelegenen Punkt der Vertikalschnitte gelegt werden kann, das Azimut:

$$\alpha_0 = a_{1.2} - \frac{1}{48} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \left(\cos^2 B_1 \sin 2a_{1.2} + \frac{1}{8} \frac{s}{a_0} \sin 2B_1 \sin a_{1.2}\right) + Gl_6. \quad (8)$$

Setzt man hierin im 2. Gliede rechter Hand für $\cos a_{1.2}$ den in (5) angegebenen Wert, so wird erhalten:

$$\alpha_0 = a_{1.2} + \frac{1}{128} e^2 \frac{s^3}{a_0^3} \sin 2B_1 + \cdots. \quad (9)$$

Vergleicht man α_0 mit $\alpha_{1.2}$, so sieht man, dafs für positive B_1 die geodätische Linie nördlich von den zusammenfallenden Vertikalschnitten liegt. Der Abstand ist inmitten am gröfsten und gleich $\frac{1}{2}(\alpha_{1.2} - \alpha_0)\, s$ d. i. gleich:

$$\frac{5}{768} e^2 \frac{s^4}{a_0^3} \sin 2B_1 + \cdots.^{*)} \quad (10)$$

Für $s = 0{,}1 a_0$ giebt dies im Maximum nur rund $\frac{1}{4}$ Meter wobei nach (7) $\alpha_{1.2} = a_{1.2} + 0{,}03''$.

Für $s < 0{,}02 a_0$ sind die bezüglichen Werte so klein, dafs praktisch genommen zwischen den zusammenfallenden Vertikalschnitten und der geodätischen Linie kein Unterschied mehr ist.

§ 10. **Überblick über die Lage der geodätischen Linie zu den beiden Vertikalschnitten für kleine Distanzen.** Untersucht man mit Hilfe der zweigliedrigen Ausdrücke für die Azimutaldifferenzen

*) Nach (10) ist unsere ganz gelegentlich bei einer Besprechung entstandene Angabe (ohne Entwicklung) in der *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* von *Schlömilch*, Litteraturzeitung 1873 S. 39 zu korrigieren. Der richtige Ausdruck (10) geht übrigens ohne weiteres aus einer schon 1870 angestellten Untersuchung von *A. R. Clarke* in dem *Philosophical Magazine* 1870 Vol. 39 p. 361 Art. 8 hervor.

Der Rest von (10) hat die Form $a_0 Gl_8$, da (10) eine gerade Funktion von s sein mufs; denn man kann (10) als Funktion jedes einzelnen der beiden Abstände $\pm s:2$ auffassen, welche P_1 und P_2 vom Scheitel der Geodätischen haben. Der Rest in (7) hat ebenso die 7. Ordnung.

die Lage einer geodätischen Linie $P_1 P_2$ zu den beiden Vertikalschnitten im allgemeinen, so findet man Folgendes.

Man denke sich P_2 in der Entfernung s von P_1, welches eine nördliche Breite haben soll, um diesen Punkt einen geodätischen Kreis beschreibend. Das südwestliche Azimut $\alpha_{1.2}$ sei anfangs null; dabei fallen die Geodätische und die zwei Vertikalschnitte zusammen. Wenn dann $\alpha_{1.2}$ wächst, so ist für Werte dieses Azimuts im 1. Quadranten die geodätische Linie stets zwischen den beiden vertikalen Schnitten, von denen $P_1 P_2$ der nördlichere ist, gelegen.

Ist in P_1 bei weiterem Wachsen aber

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{1}{4} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots \tag{1}$$

geworden, so tangiert die Geodätische den Vertikalschnitt $P_1 P_2$ in P_1; bei fortgesetzter Drehung rückt der an P_1 grenzende Teil der Geodätischen nördlich aus dem von den beiden Vertikalschnitten umschlossenen Raum heraus und für

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{3}{8} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots \tag{2}$$

liegt sie ganz aufserhalb, wobei sie den Vertikalschnitt $P_1 P_2$ bei P_2 tangiert. Bei weiterer Drehung werden für

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{1}{2} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots \tag{3}$$

die Vertikalschnitte identisch; die Geodätische liegt von da an nördlich von denselben bis zu dem Zeitpunkt, wo der nördlichere der beiden Vertikalschnitte, nämlich $P_2 P_1$, die Geodätische in P_1 tangiert für

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{5}{8} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots; \tag{4}$$

von hier ab kommt die Geodätische wieder z. T. zwischen die Vertikalschnitte zu liegen, bis sie für

$$\cos \alpha_{1.2} = -\frac{3}{4} \frac{s}{a_0} \tan B_1 + \cdots \tag{5}$$

den Vertikalschnitt $P_2 P_1$ in P_2 tangiert und von nun an für weitere Werte von $\alpha_{1.2}$ im 2. Quadranten ganz zwischen beiden Vertikalschnitten enthalten ist. U. s. f.

Vorstehendes schliefst man aus den Formeln (21) und (25) S. 186 u. 187 und aus Formel (11) S. 332. Hiernach hat man für die Azimutaldifferenzen der beiden Vertikalschnitte:

$$\left.\begin{aligned} a_{1.2} - a'_{1.2} &= \\ a_{2.1} - a'_{2.1} &= \end{aligned}\right\} \frac{1}{4} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{s}{2a_0}\right) + Gl_6, \tag{6}$$

und für die Azimutaldifferenz der geodätischen Linie und des Vertikalschnittes $P_1 P_2$ in P_1:

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = \frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{s}{4a_0}\right) + Gl_6. \quad (7)$$

Es ist daher

$$a_{1.2} - \alpha_{1.2} = \frac{1}{3}(a_{1.2} - a'_{1.2}) - \frac{1}{48} e^2 \frac{s^3}{a_0^3} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} + Gl_6.$$

Vertauscht man die Indices 1 und 2, so folgt, weil bei Vernachlässigung von Gliedern 6. Ordnung im 2. Teil rechts B_2 mit B_1 und $\alpha_{2.1}$ mit $180^0 + \alpha_{1.2}$ vertauscht werden kann:

$$a_{2.1} - \alpha_{2.1} = \frac{1}{3}(a_{2.1} - a'_{2.1}) + \frac{1}{48} e^2 \frac{s^3}{a_0^3} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} + Gl_6.$$

Die Substitution des Wertes von $a_{2.1} - a'_{2.1}$ aus (6) führt endlich zu:

$$a_{2.1} - \alpha_{2.1} = \frac{1}{12} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{3s}{4a_0}\right) + Gl_6. \quad (8)$$

Schliefslich hat man noch durch Kombination von (7) bezw. (8) mit (6):

$$\alpha_{1.2} - a'_{1.2} = \frac{1}{6} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{5s}{8a_0}\right) + Gl_6 \quad (9)$$

$$\alpha_{2.1} - a'_{2.1} = \frac{1}{6} e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \sin 2B_1 \sin \alpha_{1.2} \left(\cot B_1 \cos \alpha_{1.2} + \frac{3s}{8a_0}\right) + Gl_6. \quad (10)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man das oben entworfene Bild von der gegenseitigen Lage der 3 Linien noch vervollständigen, was wir aber dem Leser überlassen.

---

8. Kapitel.

Das geodätische Dreieck; Dreiecksnetze.

§ 1. **Fundamentalsatz für geodätische Polarkoordinaten.** Auf S. 269 sind bereits einige Beziehungen für geodätische Polarkoordinaten angegeben, zu denen jetzt, um in die Theorie des geodätischen Dreiecks eintreten zu können, eine weitere hinzugefügt werden mufs, welche zeigt, wie sich entlang einer Kurve der Neigungswinkel Θ derselben gegen den geodätischen Radiusvektor r, insbesondere wenn diese Kurve wieder eine geodätische Linie ist, ändert: Fig. 28. Θ bezieht sich auf die Richtungen des wachsenden Radiusvektors und der wachsenden Kurve, von ersterem im Sinne der wachsenden Azimute bis zu letzterer. Es ist also

$$\alpha' - \alpha = \Theta, \quad (1)$$

wenn α' das Azimut der Kurve und α dasjenige des Radiusvektors ist. Hieraus folgt:

$$\frac{d\alpha'}{ds} - \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\Theta}{ds}, \tag{2}$$

wobei ds das Bogenelement PP' der Kurve bedeutet. Selbstverständlich mufs, um $\frac{d\Theta}{ds}$ berechnen zu können, die Kurve bekannt sein, sodafs man $\frac{d\alpha'}{ds}$ angeben kann.

Was $\frac{d\alpha}{ds}$ anbetrifft, so können wir dies unmittelbar durch Addition der Ausdrücke (2) S. 279 und (4) S. 280 zusammensetzen. Dabei ist zu beachten, dafs $\alpha_{2.1}$ in $\alpha + 180^0$ und s in r übergeht.

Man erhält so zunächst:

$$d\alpha = \left(\frac{d\mathfrak{m}_r}{dr} - \frac{\mathfrak{m}_r}{a_0 w} \tan\beta \cos\alpha\right) d\alpha_0$$

$$- \frac{dr}{a_0 w} \tan\beta \sin\alpha\,,$$

Fig. 28.

worin β die reduzierte Breite von P und $w = \sqrt{1 - e^2 \cos^2\beta}$ ist. Beachtet man nun, dafs $\mathfrak{m}_r d\alpha_0 = ds . \sin\Theta$ und $dr = ds . \cos\Theta$ ist, so folgt ohne Schwierigkeit wegen $\alpha + \Theta = \alpha'$:

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{d\alpha'}{ds} - \frac{\sin\Theta}{\mathfrak{m}_r}\frac{d\mathfrak{m}_r}{dr} + \frac{\tan\beta \sin\alpha'}{a_0 w}. \tag{3}$$

Ist aber die Kurve PP' selbst eine Geodätische, so ist nach S. 279 (2)

$$\frac{d\alpha'}{ds} = - \frac{\tan\beta \sin\alpha'}{a_0 w}$$

mit Rücksicht darauf, dafs das dort vorkommende $\alpha_{2.1}$ dem jetzigen $\alpha' + 180^0$ entspricht. Mithin wird für den Neigungswinkel einer *geodätischen* Linie PP' gegen den geodätischen Radiusvektor AP:

$$\frac{d\Theta}{ds} = - \frac{\sin\Theta}{\mathfrak{m}_r}\frac{\partial\mathfrak{m}_r}{\partial r}. \tag{4}$$

In Bezug auf $\frac{\partial\mathfrak{m}_r}{\partial r}$ ist zu erinnern (S. 280), dafs sich dieser Differentialquotient auf eine Verschiebung von P in Richtung des Radiusvektors $AP = r$ bezieht.

Um dies anzudeuten, wurde das Zeichen der partiellen Differentiation

gewählt, denn es könnte sonst eine Verwechslung mit demjenigen Differentialquotienten stattfinden, welcher sich auf die totale Änderung von r durch Verschiebung des Punktes P nach P' bezieht.

Vorstehende Gleichung kann man, wie sofort ersichtlich, noch in die nachstehende Form bringen:

$$\frac{d\Theta}{ds} = -\sin\Theta \frac{\partial \log \text{nat}\, \mathfrak{m}_r}{\partial r}. \tag{5}$$

Man kann aber auch für ds setzen $dr \,.\, \sec\Theta$ und erhält alsdann:

$$\frac{d \log \text{nat} \sin\Theta}{dr} = -\frac{\partial \log \text{nat}\, \mathfrak{m}_r}{\partial r}. \tag{6}$$

Vorstehende Formeln (3) bis (6) gelten wiederum wie (6) S. 275 allgemein für geodätische Linien auf jeder Fläche, wie *Gaufs* a. a. O. Art. 19 bewiesen hat (bei *Christoffel* a. a. O. S. 132).

§ 2. **Sinussatz für das geodätische Dreieck.** Mit Hilfe der zuletzt entwickelten Formeln ist es nunmehr möglich, die Differentialformeln für ein Dreieck mit *kürzesten Linien als Seiten*, d. h. nach dem üblichen Sprachgebrauch: für ein geodätisches Dreieck, aufzustellen und unter Anwendung des früher für $\mathfrak{m}$ gefundenen Ausdrucks zu integrieren.

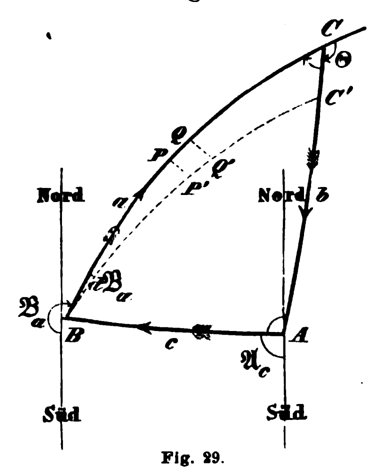


Fig. 29.

Als S. 72 u. ff. die Differentialformeln für das sphärische Dreieck aufgestellt wurden, konnte zur Ableitung endlicher Formeln der Umstand benutzt werden, dafs auf der Kugel jedes Dreieck ohne Formveränderung sich verschieben läfst. Da für das Rotationsellipsoid diese Eigenschaft nicht existiert, mufs hier die obige Gleichung (5) bezw. (6) als Ersatz dienen. Sie führt uns ebenso wie jene Eigenschaft der Kugel zum Sinussatz.

In dem Dreieck ABC Fig. 29 mit den in beliebigem Sinne auf einander folgenden Seiten abc bilden wir (wie früher S. 71) die Dreieckswinkel nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c \\ B &= \mathfrak{B}_c - \mathfrak{B}_a \\ C &= \mathfrak{C}_a - \mathfrak{C}_b \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

worin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Azimute in den Ecken A, B, C für die als Indices vorkommenden Seiten bezeichnen. Die Azimute werden jetzt von

den Meridianen der betreffenden Ecken ab gezählt, wie z. T. in Fig. 29 angedeutet ist.

Die Definition der Winkel nach den Formeln (1) macht es wie früher möglich, die beiden Fälle, dafs die Winkel im Innern oder aufserhalb des Dreiecks gezählt werden, zusammenzufassen; vergl. hierzu S. 71.

Dreht man nun die Seite a um $d\mathfrak{A}_a$ im Sinne wachsender Azimute, so bewegt sich auf der ruhenden Seite b die Ecke C nach C', und man kann nach obiger Formel (5) angeben, um wie viel der Winkel Θ bei C, genommen vom wachsenden Radiusvektor a bis zur Richtung von C nach C', wächst. Θ ist gleich $\mathfrak{C}_b - (\mathfrak{C}_a + 180^0)$ d. i. $180^0 - C$.

Man hat daher:

$$d \log \text{nat} \sin (180^0 - C) = d \log \text{nat} \sin C = - \frac{\partial \log \text{nat} \sin \mathfrak{m}_a}{\partial a} da. \quad (2)$$

Nach Formel (11) S. 278 ist nun, die Dreiecksseiten als Gröfsen 1. Ordnung im Verhältnis zu a_0 betrachtet, für die Seite a mit B als Drehpunkt:

$$\mathfrak{m}_a = \frac{a_0}{\sqrt{K_2}} \sin \frac{a\sqrt{K_2}}{a_0} - \frac{1}{6} e^2 \sin 2\beta_2 \cos \mathfrak{A}_a \frac{a^4}{a_0^{\ 3}} + a_0\, Gl_7, \quad (3)$$

wenn a_0 den Äquatorialradius, $K_2 : a_0^{\ 2}$ das Krümmungsmafs in der Ecke B und β_2 die reduzierte Breite daselbst bezeichnet.

Zur Vereinfachung setzen wir vorderhand:

$$a_0 = 1,$$

sodafs vorläufig die linearen Dimensionen abc in Bruchteilen des Äquatorialradius ausgedrückt zu denken sind. Die Rückkehr zu beliebiger Einheit ist später leicht ausführbar. Wir erhalten jetzt, wenn wir zur Abkürzung die Konstante

$$\frac{1}{6} e^2 \sin 2\beta_2 = E_2 \quad (4)$$

setzen, zunächst aus (3):

$$\mathfrak{m}_a = \frac{\sin [a\sqrt{K_2}]}{\sqrt{K_2}} - E_2\, a^4 \cos \mathfrak{A}_a + Gl_7$$

oder

$$\mathfrak{m}_a = \frac{\sin [a\sqrt{K_2}]}{\sqrt{K_2}} (1 - E_2\, a^3 \cos \mathfrak{A}_a + Gl_6). \quad (5)$$

Hieraus folgt sofort für den natürlichen Logarithmus von $\mathfrak{m}_a$ mit gleicher Genauigkeit wie bisher:

$$\log \text{nat}\, \mathfrak{m}_a = \log \text{nat} \sin [a\sqrt{K_2}] - \log \text{nat} \sqrt{K_2} - E_2\, a^3 \cos \mathfrak{A}_a + Gl_6.$$

Differenziert man dies partiell nach a und führt den Differentialquotienten in (2) ein, so findet sich:

$$d \log \operatorname{nat} \sin C = (-\sqrt{K_2} \cot [a\sqrt{K_2}] + 3E_2\, a^2 \cos \mathfrak{B}_a + Gl_5)\, da\,. \quad (6)$$

Bei der nunmehr auszuführenden Integration ist auf die Veränderlichkeit von $\mathfrak{B}_a$ mit a Rücksicht zu nehmen. Wenn sich nämlich die Seite $a = BC$, Fig. 29, um B dreht, so bleibt zwar E_2 konstant, aber $\mathfrak{B}_a$ ändert sich. Dabei erscheint $\mathfrak{B}_a$ als eine von a abhängige Variable. Die Integration führt nun zu der Gleichung:

$$\log \operatorname{nat} \sin C = -\log \operatorname{nat} \sin [a\sqrt{K_2}] + 3E_2 \int a^2 \cos \mathfrak{B}_a\, da + \int Gl_5\, da + \text{Konst.} \quad (7)$$

Behufs Auswertung des 1. Integrals betrachten wir die Seite $CA = b$ als unabhängige Variable. Es ist dann vor allem, unabhängig von der besondern Beschaffenheit der Fig. 29:

$$da = \cos C\, db\,. \quad (8)$$

Wendet man die Formel (11) S. 298 auf je 2 der 3 Ecken des Dreiecks an, so folgt ferner:

$$(B_2 - B_1) \cos \beta = -c \cos \mathfrak{A}_c \cos \beta + Gl_2$$
$$(B_3 - B_2) \cos \beta = -a \cos \mathfrak{B}_a \cos \beta + Gl_2$$
$$(B_1 - B_3) \cos \beta = -b \cos \mathfrak{C}_b \cos \beta + Gl_2,$$

wenn B_1, B_2, B_3 die geographischen Breiten von A, B, C bedeuten und für β irgend eine mittlere (geographische oder) reduzierte Breite des Dreiecks genommen wird. Die Addition der 3 Gleichungen giebt:

$$\cos \beta\, (a \cos \mathfrak{B}_a + b \cos \mathfrak{C}_b + c \cos \mathfrak{A}_c) + Gl_2 = 0\,. \quad (9)$$

Ebenso findet man mittelst der Formel (12) S. 298:

$$\cos \beta\, (a \sin \mathfrak{B}_a + b \sin \mathfrak{C}_b + c \sin \mathfrak{A}_c) + Gl_2 = 0\,. \quad (10)$$

Diese Formeln gelten auch noch in der Nähe der Pole. Denn reduziert man die genannten Formeln (11) und (12) auf ihr erstes Glied und multipliziert mit $\cos \beta$ bezw. $\cos^2 \beta$, so sind auch an den Polen die Restglieder kleine Glieder 2. Ordnung, wie die Betrachtung der ersten beiden Differentialquotienten (6) S. 297 im Hinblick auf den Rest der allgemeinen Entwicklung (1) S. 25 zeigt.

Man erkennt übrigens bei der Ableitung sofort, daſs man in diesen Formeln (9) und (10) für die Azimute der Seiten immer die um 180° vermehrten Azimute derselben Seiten am andern Endpunkt substituieren darf. In dieser Weise giebt (9):

$$\cos \beta\, .\, a \cos \mathfrak{B}_a = \cos \beta\, (b \cos \mathfrak{A}_b + c \cos \mathfrak{B}_c) + Gl_2\,. \quad (11)$$

Die Formeln (9) und (10) zeigen nun die Möglichkeit der Anwendung der Sätze der ebenen Polygonometrie auf geodätische Dreiecke bei einer 1. Annäherung.

Aus denselben kann man bekanntlich Sätze zwischen den Winkeln und Seiten des Dreiecks herleiten. Jedoch ist es besser, dieselben direkt aufzusuchen, um zu bemerken, dafs zur Erzielung der Gültigkeit dieser Formeln an den Polen der Faktor $\cos\beta$ wegbleiben darf. Betrachtet man die 1. und die 4. Gleichung (1) S. 76, so giebt die Reihenentwicklung für die Cosinus und Sinus der Seiten sofort für sphärische Dreiecke allgemein gültig:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + Gl_4, \tag{12}$$

$$a \cos C = b - c \cos A + Gl_3. \tag{13}$$

Diese Relationen erhält man fürs Ellipsoid aus (9) und (10) noch mit dem Faktor $\cos\beta$ behaftet und anscheinend eine Ordnung weniger genau, welches letztere hier aber gleichgültig ist. Dafs man aber jenen Faktor weglassen kann, zeigt eine geometrische Betrachtung. Man denke sich durch die 3 Punkte ABC eine Kugel gelegt, ihren Radius dem mittleren Krümmungsmafs der Gegend möglichst entsprechend. Für die Stücke des Kugeldreiecks gelten (12) und (13) unmittelbar. Nun weichen von denselben diejenigen des geodätischen Dreiecks um Glieder ab, die in e^2 multipliziert sind, die jedoch die Gleichungen (12) und (13) bei gehöriger Entfernung vom Pole jedenfalls nicht beeinflussen. Jene Abweichungen sind aber offenbar für die Nähe der Pole eher geringfügiger, als im allgemeinen. Es müssen daher (12) und (13) allgemein gültig sein.

Wir erhalten nun durch Multiplikation von (11) und (13):

$$\cos\beta \,.\, a^2 \cos \mathfrak{A}_a \cos C = \cos\beta\,(b - c\cos A)\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c) + Gl_3 .$$

Führen wir dies in (7) ein und beachten, dafs das 1. Integral noch in E_2, eine Gröfse 2. Ordnung, die $\cos\beta$ als Faktor enthält, multipliziert ist, so ergiebt sich nach einfacher Reduktion:

$$\log \text{nat}\left(\sin C \sin\left[a\sqrt{K_2}\right]\right)$$

$$= 3E_2\int(b - c\cos A)\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\,db + \int Gl_5\,da + \text{Konst.} \tag{14}$$

Das 1. Integral rechter Hand enthält nur noch die Variable b; multipliziert man aus und integriert, so folgt dafür:

$$\frac{1}{2}\,(b^2 - 2bc\cos A)\,c\cos\mathfrak{A}_c + \left(\frac{1}{3}\,b^3 - \frac{1}{2}\,b^2 c\cos A\right)\cos\mathfrak{A}_b,$$

oder durch Elimination von $bc \cos A$ mittelst (12):

$$\frac{1}{4}(a^2 - c^2)(b \cos \mathfrak{A}_b + 2c \cos \mathfrak{B}_c) + \frac{1}{12} b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_5,$$

oder endlich unter Substitution des Wertes von $b \cos \mathfrak{A}_b$ nach (11) im 1. Gliede:

$$\frac{1}{4}(a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c) + \frac{1}{12} b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_4. \qquad (15)$$

Multiplizieren wir dies mit E_2, so geben die Gl_4 Glieder 6. Ordnung. Ebensolche giebt das 2. Integral der Formel (14) und zwar braucht man nicht zu fürchten, dafs dieselben in der Nähe der Pole eine beträchtliche Gröfse erlangen. Denn die Entwicklung von K S. 275 u. ff. läfst nicht im Zweifel, dafs in den höheren Gliedern von K und damit von $\mathfrak{m}$, sowie von (14) überall das Azimut α nur in der Form $\cos \beta \cos \alpha$ auftritt, sodafs die starken Änderungen von α in der Nähe der Pole durch den Faktor $\cos \beta$ auf das gewöhnliche Mafs herabgedrückt werden.

Das Resultat aus (14) und (15) ist jetzt:

$$\log \operatorname{nat}\left(\sin C \sin [a\sqrt{K_2}]\right) = \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c)$$
$$+ \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6 + \text{Konst.} \qquad (16)$$

Die Konstante bestimmen wir durch Spezialisierung für $b = 0$. Hierfür wird a mit c identisch; ferner wird $\mathfrak{C}_a = \mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{C}_b = \mathfrak{A}_b - 180^0$, mithin

$$C \text{ d. i. } \mathfrak{C}_a - \mathfrak{C}_b = \mathfrak{A}_c - \mathfrak{A}_b + 180^0 \text{ d. i. } 180^0 - A.$$

Folglich ist $\log \operatorname{nat}\left(\sin A \sin [c\sqrt{K_2}]\right) = \text{Konst.}$ und (16) geht über in:

$$\log \operatorname{nat}\left(\frac{\sin C \sin [a\sqrt{K_2}]}{\sin A \sin [c\sqrt{K_2}]}\right) = \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c)$$
$$+ \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6.$$

Hieraus hat man endlich noch ohne merkliche Änderung der Genauigkeit:

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin [c\sqrt{K_2}]}{\sin [a\sqrt{K_2}]} \left\{ \begin{aligned} 1 + \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c) \\ + \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6. \end{aligned} \right\} \qquad (17)$$

Diese Formel läfst sich noch sehr vereinfachen; indessen genügt sie in vorstehender Gestalt für das Folgende, sodafs wir bei ihr stehen bleiben.

§ 3. **Der Cosinussatz im geodätischen Dreieck.** Um a als Funktion von b, c und A zu erhalten, betrachten wir in Fig. 30 c als festliegend und b als konstant, aber um A beweglich. Geht nun AC in die Lage AC' über und zieht man zugleich CC'' rechtwinklig zu BC', so giebt das entstehende differentiale rechtwinklige Dreieck $CC'C''$:

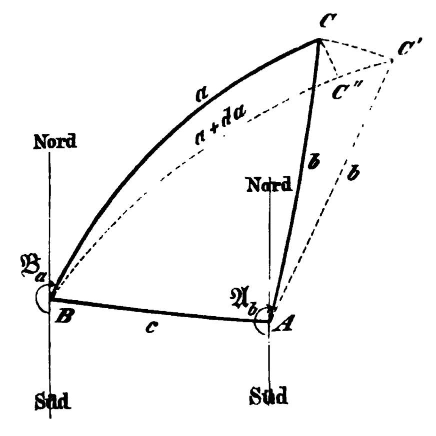


Fig. 30.

$$da = C'C'' = CC' \sin C$$
$$= \mathfrak{m}_b \sin C \, d\mathfrak{A}_b, \qquad (1)$$

allgemein gültig für $C = \mathfrak{C}_a - \mathfrak{C}_b$. Diese Differentialformel für a läfst sich leicht integrieren, denn wegen der Konstanz von b ist $\mathfrak{m}_b$ nur Funktion von $\mathfrak{A}_b$ und $\sin C$ läfst sich mittelst des Sinussatzes als Funktion von A und a darstellen.

Zunächst ist nach Formel (17) des vorigen Paragraphen:

$$\sin C = \sin A \frac{\sin [c\sqrt{K_2}]}{\sin [a\sqrt{K_2}]} \Big(1 + \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a \cos \mathfrak{B}_a + c \cos \mathfrak{B}_c)$$
$$+ \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6\Big). \qquad (2)$$

Aufserdem ist nach (11) S. 278 mit Rücksicht auf die Einführung des Äquatorialhalbmessers als Einheit der Längen:

$$\mathfrak{m}_b = \frac{\sin [b\sqrt{K_1}]}{\sqrt{K_1}} (1 - E_1 b^3 \cos \mathfrak{A}_b + Gl_6). \qquad (3)$$

Ehe wir diese Ausdrücke in (1) substituieren, führen wir in (2) auch K_1 anstatt K_2 ein, um in den Sinus der Seiten dasselbe K zu haben.

Man hat aber allgemein für eine Seite u:

$$\sin [u\sqrt{K_2}] = u\sqrt{K_2} \Big(1 - \frac{1}{6} u^2 K_2 + \frac{1}{120} u^4 K_2^2 + Gl_6\Big),$$

sowie

$$\sin [u\sqrt{K_1}] = u\sqrt{K_1} \Big(1 - \frac{1}{6} u^2 K_1 + \frac{1}{120} u^4 K_1^2 + Gl_6\Big)$$

und hieraus, da $K_2 - K_1$ nach Formel (5) S. 276 von der 3. Ordnung ist, indem

$$K_1 = K_2 + 12 E_2 c \cos \mathfrak{B}_c + Gl_4$$

wird, durch Division beider Gleichungen:

$$\frac{\sin[u\sqrt{K_2}]}{\sin[u\sqrt{K_1}]} = \frac{\sqrt{K_2}}{\sqrt{K_1}}\left(1 - \frac{1}{6}[K_2 - K_1]\,u^2 + Gl_7\right).$$

Wendet man dies auf $u = c$ und $u = a$ an und dividiert, so ergiebt sich:

$$\frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{\sin[a\sqrt{K_2}]} = \frac{\sin[c\sqrt{K_1}]}{\sin[a\sqrt{K_1}]}\left(1 + 2E_2\,(c^2 - a^2)\,c\cos\mathfrak{B}_c + Gl_7\right),$$

womit (2) übergeht in:

$$\sin C = \sin A\,\frac{\sin[c\sqrt{K_1}]}{\sin[a\sqrt{K_1}]}\left(1 + E_2\,(a^2 - c^2)\left[\frac{3}{4}\,a\cos\mathfrak{B}_a - \frac{5}{4}\,c\cos\mathfrak{B}_c\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\,E_2 b^3 \cos\mathfrak{A}_b + Gl_6\right). \qquad (4)$$

Wird dies nun nebst (3) in (1) eingesetzt und dabei für E_2 einfach E_1 geschrieben, was nur einen kleinen Fehler der 3. Ordnung in E und also der 6. Ordnung in der Parenthese von (4) ergiebt, so folgt:

$$\sqrt{K_1}\sin[a\sqrt{K_1}]\,da = \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left(1 + E_1(a^2 - c^2)\left[\frac{3}{4}\,a\cos\mathfrak{B}_a - \frac{5}{4}\,c\cos\mathfrak{B}_c\right]\right.$$
$$\left. - \frac{3}{4}\,E_1 b^3 \cos\mathfrak{A}_b + Gl_6\right)\sin A\,d\mathfrak{A}_b. \quad (5)$$

Rechter Hand eliminieren wir $a\cos\mathfrak{B}_a$ und a^2 mittelst der Relationen (11) und (12) S. 350 u. 351 und erhalten:

$$\sin[a\sqrt{K_1}]\,d(a\sqrt{K_1}) = \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left(1 - bc\,E_1\left[\frac{1}{2}\,b\cos\mathfrak{B}_c + \frac{3}{2}\,b\cos A\cos\mathfrak{A}_b\right.\right.$$
$$\left.\left. - c\cos\mathfrak{B}_c\cos A\right] + Gl_6\right)\sin A\,d\mathfrak{A}_b. \quad (6)$$

Für A setzen wir nun $\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c$ und wenden zugleich, um integrieren zu können, die Formeln an:

$$\cos A\sin A = \frac{1}{2}\sin 2\,(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_o)$$

$$\cos A\cos\mathfrak{A}_b\sin A = \frac{1}{4}\left(\sin(3\mathfrak{A}_b - 2\mathfrak{A}_c) + \sin(\mathfrak{A}_b - 2\,\mathfrak{A}_c)\right).$$

Denkt man sich dies in (6) eingeführt, so giebt alsdann die Integration ohne Schwierigkeit:

$$\cos[a\sqrt{K_1}] + \text{Konst.} = \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left\{\cos(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c)\right.$$
$$\left. - bc\,E_1(g_1 + g_2 + g_3) + Gl_6\right\}, \quad (7)$$

worin für den Augenblick folgende Bezeichnungen zur Abkürzung dienen:

$$g_1 = \frac{1}{2} b \cos \mathfrak{B}_c \cos(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c) = \frac{1}{2} b \cos \mathfrak{B}_c \cos A$$

$$g_2 = \frac{3}{8} b \left(\frac{1}{3} \cos(3\mathfrak{A}_b - 2\mathfrak{A}_c) + \cos(\mathfrak{A}_b - 2\mathfrak{A}_c)\right)$$

$$= \frac{1}{4} b \left(\cos 2A \cos \mathfrak{A}_b + \cos(A - \mathfrak{A}_c)\right)$$

$$g_3 = -\frac{1}{4} c \cos \mathfrak{B}_c \cos 2(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c) = -\frac{1}{4} c \cos \mathfrak{B}_c \cos 2A.$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich durch die Bemerkung, dafs für $\mathfrak{A}_b = \mathfrak{A}_c + 180^0$ die Seite $a = b + c$ werden mufs. Zugleich ist $A = 180^0$ und demnach $g_1 = -\frac{1}{2} b \cos \mathfrak{B}_c$; $g_2 = -\frac{1}{2} b \cos \mathfrak{A}_c$; $g_3 = -\frac{1}{4} c \cos \mathfrak{B}_c$. Die Summe $g_1 + g_2 = -\frac{1}{2} b (\cos \mathfrak{B}_c + \cos \mathfrak{A}_c)$ reduziert sich, abgesehen von Gliedern 1. Ordnung, aufserdem auf null, weil $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{A}_c + 180^0 + Gl_1$ ist. Dies gilt zwar zunächst nicht auch für die Nähe der Pole; indes die Existenz des Faktors $\cos\beta$ in E_1 erweitert das Gültigkeitsgebiet auch bis dahin.

Man erhält demnach:

$$\cos[(b+c)\sqrt{K_1}] + \text{Konst.} = -\sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left(1 - \frac{1}{4} bc^2 E_1 \cos \mathfrak{B}_c + Gl_6\right).$$

Zieht man dies von (7) ab und beachtet bei der Vereinigung der g wiederum, dafs $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{A}_c + 180^0 + Gl_1$, so folgt nach einiger Reduktion:

$$\cos[a\sqrt{K_1}] = \cos[b\sqrt{K_1}]\cos[c\sqrt{K_1}]$$

$$+ \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left(\cos A + \frac{1}{2} E_1 bc(b \cos \mathfrak{A}_b + c \cos \mathfrak{A}_c)\sin^2 A + Gl_6\right). \quad (8)$$

Die in E_1 multiplizierten Glieder kann man aber sehr einfach mittelst der Differenzen der Krümmungsmafse darstellen. Man hat nach (5) S. 276:

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= K_1 + 12 E_1 c \cos \mathfrak{A}_c + Gl_4 \\ K_3 &= K_1 + 12 E_1 b \cos \mathfrak{A}_b + Gl_4; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

es ist daher:

$$E_1 (b \cos \mathfrak{A}_b + c \cos \mathfrak{A}_c) = \frac{1}{4}[K - K_1] + Gl_4, \quad (10)$$

wobei $K = \frac{1}{3}(K_1 + K_2 + K_3)$ das arithmetische Mittel der K der 3 Ecken ist. Die grofse Parenthese in (8) giebt hiermit:

$$\cos A + \frac{1}{8}[K - K_1]\, bc \sin^2 A + Gl_6, \quad (11)$$

wofür man mit derselben Genauigkeit setzen kann:

$$\cos\left(A - \frac{1}{4}[K - K_1]\,F_A\right) + Gl_6. \qquad (12)$$

wenn $\frac{1}{2}bc \sin A$ vorläufig mit F_A bezeichnet wird. Somit findet sich:

$$\cos[a\sqrt{K_1}] = \cos[b\sqrt{K_1}]\cos[c\sqrt{K_1}]$$
$$+ \sin[b\sqrt{K_1}]\sin[c\sqrt{K_1}]\left\{\cos\left(A - \frac{1}{4}[K - K_1]\,F_A\right) + Gl_6\right\}. \qquad (13)$$

Diese Formel wird noch günstiger, wenn man in den Sinus und Cosinus $\sqrt{K}$ anstatt $\sqrt{K_1}$ einführt. Dazu dienen die Relationen:

$$\cos[u\sqrt{K_1}] = 1 - \frac{1}{2}u^2K_1 + \frac{1}{24}u^4K_1^2 - \frac{1}{720}u^6K_1^3 + Gl_8$$

$$\sin[u\sqrt{K_1}] = u\sqrt{K_1}\left(1 - \frac{1}{6}u^2K_1 + \frac{1}{120}u^4K_1^2 - Gl_6\right)$$

$$\cos[u\sqrt{K}] = 1 - \frac{1}{2}u^2K + \frac{1}{24}u^4K^2 - \frac{1}{720}u^6K^3 + Gl_8$$

$$\sin[u\sqrt{K}] = u\sqrt{K}\left(1 - \frac{1}{6}u^2K + \frac{1}{120}u^4K^2 - Gl_6\right).$$

Denkt man sich nun in (13) die ersten beiden dieser Reihen für $u = a, b, c$ eingeführt und beiderseits 1 abgezogen, so enthalten alle Glieder K_1 als Faktor. Diesen dividiert man weg und multipliziert mit K. K_1 tritt dann noch auf in Gliedern 4. Ordnung und 6. Ordnung. Ersetzt man es durch K, so giebt es in den letzteren nur einen Fehler 9. Ordnung. Dieser ist zu vernachlässigen. Dagegen mufs für die Glieder 4. Ordnung eine Korrektion zugefügt werden. Diese Glieder 4. Ordnung lauten aber:

linker Hand	rechter Hand
$+\frac{a^4}{24}KK_1$	$+\frac{b^4 + c^4 + 6b^2c^2 - 4(b^2 + c^2)\,bc\cos A}{24}KK_1.$

Schreiben wir an Stelle von K_1 auch hier K und setzen beiderseits in der (wie oben angegeben) umgeformten Gleichung (13) wieder 1 zu, so läfst sich alles so zusammenziehen, dafs eine Gleichung entsteht, die sich von (13) nur dadurch unterscheidet, dafs in den Sinus und Cosinus überall $\sqrt{K}$ anstatt $\sqrt{K_1}$ steht und dafs die Korrektion hinzutritt, welche der Vertauschung von K_1 mit K in den oben erwähnten Gliedern 4. Ordnung entspricht. Wird alles nach rechts geschafft, so lautet dieselbe:

$$\frac{1}{24}\left\{-a^4 + b^4 + c^4 + 6b_2c_2 - 4(b^2 + c^2)\,bc\cos A\right\}K[K_1 - K]. \quad 14)$$

Eliminiert man hieraus $2bc \cos A$ mittelst (12) S. 351 und wendet die für den Inhalt des ebenen Dreiecks mit den Seiten abc bestehende Relation an:

$$16 F^{*2} = 2\,(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - a^4 - b^4 - c^4,$$

so giebt (14):

$$+ \frac{2}{3} F^{*2} K [K_1 - K] + Gl_9. \qquad (15)$$

Quadriert man aber die Gleichung (12) S. 351, so folgt nach einiger Reduktion leicht:

$$F^{*2} = F_A{}^2 + Gl_6. \qquad (16)$$

Es läfst sich hiermit der Ausdruck (15) wie folgt schreiben:

$$\sin [b\sqrt{K}] \sin [c\sqrt{K}] \left(- \frac{1}{6} [K - K_1]\, bc \sin^2 A\right) + Gl_9. \qquad (17)$$

Dies ist zu (13) hinzuzufügen, wenn daselbst $\sqrt{K}$ eingeführt wird. Ein Blick auf (11) und (12) zeigt aber, wie sich (17) mit (13) vereinigen läfst. Man erhält:

$$\cos [a\sqrt{K}] = \cos [b\sqrt{K}] \cos [c\sqrt{K}]$$
$$+ \sin [b\sqrt{K}] \sin [c\sqrt{K}] \cos \left(A + \frac{1}{12} [K - K_1]\, F_A\right) + Gl_8. \qquad (18)$$

Die Gl_8 dieser Formel, welche als Funktionen von b, c und A nach Potenzen von b und c und den Sinus und Cosinus von A und seiner Vielfachen dargestellt gedacht werden können, müssen aber den Faktor $bc \sin^2 A$ enthalten. Denn sie verschwinden für b und c gleich null, sowie für $A = 0^0$ und 180^0; sie müssen endlich ihren Wert behalten, wenn man A mit $360^0 - A$ vertauscht.

(Das Auftreten des Faktors $\sin^2 A$ kann aufserdem leicht aus der Analysierung des Übergangs von Formel (4) zu (8) erkannt werden. Die weiteren Umformungen, welche nur Übergänge von einer Kugel zu einer andern bedeuten, können daran nichts ändern, weil man immer die Ebene als Zwischenglied nehmen kann. Für diese ist die Existenz des Faktors $\sin^2 A$ früher bewiesen.)

Die Gl_8 der Formel (18) lassen sich demnach in die Form $\sin b\sqrt{K} \sin c\sqrt{K} \sin^2 A \,.\, Gl_6$ bringen und die Formel (18) kann wie folgt geschrieben werden:

$$\cos [a\sqrt{K}] = \cos [b\sqrt{K}] \cos [c\sqrt{K}]$$
$$+ \sin [b\sqrt{K}] \sin [c\sqrt{K}] \cos \left(A + \frac{1}{12} [K - K_1]\, F_A + Gl_6\right). \qquad (19)$$

Es ist hier zum Schlufs wiederholt daran zu erinnern, dafs der Äquatorialhalbmesser a_0 als Einheit der Längen gewählt ist.

Die Vergleichung von (13) und (19) zeigt wieder, dafs bei rein sphärischer Rechnung es vorteilhafter ist, das mittlere Krümmungsmafs anzuwenden, als dasjenige einer Ecke. Insoweit es sich aber nur um die Formel (16) handelt, ist es noch vorteilhafter anstatt K das Krümmungsmafs

$$K' = \frac{1}{4}(2K_1 + K_2 + K_3)$$

anzuwenden, womit sich nämlich findet:

$$\cos[a\sqrt{K'}] = \cos[b\sqrt{K'}]\cos[c\sqrt{K'}] + \sin[b\sqrt{K'}]\sin[c\sqrt{K'}]\cos(A + Gl_6).$$

§ 4. **Reduktion des geodätischen Dreiecks auf ein sphärisches oder ebenes mit denselben Seiten.** Die Vergleichung von Formel (19) des vorigen Paragraphen mit der 1. Formel (1) S. 76 zeigt, dafs der Gegenwinkel A' der Seite a in einem sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b und c bei $1:\sqrt{K}$ als Kugelradius sich durch die Relation bestimmt:

$$A' = A + \frac{1}{12}[K - K_1]F_A + Gl_6. \tag{1}$$

Die Gröfse $F_A = \frac{1}{2}ab\sin A$ kann nun mit $\frac{1}{2}ab\sin A'$ vertauscht werden, was in F_A nur Fehler 7. Ordnung erzeugt. Nach S. 98 ist aber F^* bis auf Gl_4 gleich $\frac{1}{2}ab\sin A'$. Setzen wir also

$$A' = A + \frac{1}{12}[K - K_1]F^* + Gl_6, \tag{2}$$

so kann hierin F^* ohne wesentliche Änderung des Ergebnisses beliebig aus den 3 Seiten abc oder aus irgend 2 Seiten und dem zugehörigen Zwischenwinkel nach den Formeln der ebenen Geometrie berechnet werden.

Indem wir jetzt a_0 wieder von 1 verschieden nehmen, zugleich die Differenz $A' - A$ in Sekunden ausdrücken und endlich die Formel (2) auch auf B und C anwenden, erhalten wir zur *Reduktion des geodätischen Dreiecks auf ein sphärisches* die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{A' - A} &= \frac{1}{12}\varrho''\frac{F^*}{a_0^2}[K - K_1] + Gl_6 \\ \underset{\text{in Sek.}}{B' - B} &= \frac{1}{12}\varrho''\frac{F^*}{a_0^2}[K - K_2] + Gl_6 \\ \underset{\text{in Sek.}}{C' - C} &= \frac{1}{12}\varrho''\frac{F^*}{a_0^2}[K - K_3] + Gl_6. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hierin beziehen sich A', B' und C' auf das sphärische Dreieck, dessen Kugelradius dem arithmetischen Mittel der Krümmungsmafse der

3 Ecken, d. h. demjenigen des Dreiecksschwerpunktes entspricht; der Kugelradius ist also gleich

$$\frac{a_0}{\sqrt{K}}; \qquad K = \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3}. \tag{4}$$

F^*, der Inhalt des ebenen Dreiecks mit denselben Seiten, ist positiv oder negativ, je nachdem die Winkel im Innern oder aufserhalb des Dreiecks gezählt sind. Er wird am bequemsten, unmittelbar mit richtigem Vorzeichen und genügend scharf durch einen der Ausdrücke $\frac{1}{2}\,ab \sin C$, $\frac{1}{2}\,ac \sin B$ oder $\frac{1}{2}\,bc \sin A$ dargestellt.

Addiert man die (3), so wird erhalten:

$$A + B + C = A' + B' + C' + Gl_6, \tag{5}$$

d. h. der *Excefs des geodätischen Dreiecks ist* bis auf Glieder 6. Ordnung *gleich demjenigen eines sphärischen Dreiecks mit denselben Seiten*, wenn der Kugelradius dem mittlern Krümmungsmafse des Dreiecks entspricht.

Reduziert man das sphärische Dreieck auf ein ebenes mit denselben Seiten (S. 93), so folgt durch Kombination mit (3) zur *Reduktion des geodätischen Dreiecks auf ein ebenes*:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3a_0^2} K \left\{\frac{m^2 - a^2}{20 a_0^2} K + \frac{K_1 - K}{4K} + Gl_4\right\} \\
\underset{\text{in Sek.}}{B - B^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3a_0^2} K \left\{\frac{m^2 - b^2}{20 a_0^2} K + \frac{K_2 - K}{4K} + Gl_4\right\} \\
\underset{\text{in Sek.}}{C - C^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{3a_0^2} K \left\{\frac{m^2 - c^2}{20 a_0^2} K + \frac{K_3 - K}{4K} + Gl_4\right\} \\
\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} &= \varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} K \left(1 + \frac{m^2}{8a_0^2} K + Gl_4\right).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

In diesen Formeln durften die Restglieder mit in die Parenthesen genommen werden, da sie gleichzeitig mit F^* verschwinden (vergl. S. 357).

§ 5. Die von e^2 abhängigen Glieder 5. Ordnung. Um den Einflufs derjenigen Glieder in vorstehenden Formeln zu untersuchen, welche den Fehler charakterisieren, der bei Behandlung des geodätischen Dreiecks als eines sphärischen ohne weitere Korrektion entsteht, betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{12} \varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} [K - K_1], \tag{1}$$

welcher sich auf Winkel A bezieht. Hierin setzen wir nach S. 349 (4) und S. 355 (10):



$$K - K_1 = \frac{2e^2K_1}{3a_0}\sin 2\beta_1\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c) + \cdots \tag{2}$$

und ferner nach S. 94 (2), wenn $3m^2 = a^2 + b^2 + c^2$ genommen wird:

$$F^{*2} = \frac{1}{16}\left(6a^2m^2 - 3a^4 - (b^2 - c^2)^2\right). \tag{3}$$

Dadurch ergiebt sich anstatt (1) der hier als gleichwertig zu betrachtende Ausdruck:

$$\varrho''\,\frac{e^2K_1}{72\,a_0^{\,3}}\sin 2\beta_1\,(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\sqrt{3a^2(2m^2 - a^2) - (b^2 - c^2)^2}. \tag{4}$$

Nehmen wir nun die Ecke A fest an, dagegen Richtung und Länge der Seiten veränderlich mit der Mafsgabe, dafs m^2 konstant bleibt, so wird (4) ein Maximum, sobald

$$(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\sqrt{3a^2(2m^2 - a^2) - (b^2 - c^2)^2} \tag{5}$$

ein Maximum ist mit Rücksicht auf die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} 3m^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c) + a_0^{\,2}\cdot Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Diese Ausdrücke sind symmetrisch zu $b\cos\mathfrak{A}_b$ und $c\cos\mathfrak{A}_c$, $b\sin\mathfrak{A}_b$ und $\pm c\sin\mathfrak{A}_c$. Es wird daher mit Ausschlufs des Falles $\mathfrak{A}_b = \mathfrak{A}_c$ fürs Maximum:

$$b = c \qquad \mathfrak{A}_b = 360^0 - \mathfrak{A}_c, \tag{7}$$

mit welchen Werten (4) in nachstehenden Ausdruck übergeht:

$$\varrho''\,\frac{e^2K_1}{36\,a_0^{\,3}}\sin 2\beta_1\,.\,b\cos\mathfrak{A}_b\sqrt{3a^2(2m^2 - a^2)}. \tag{8}$$

Fig. 31.

Nun ist aber abgesehen vom Vorzeichen $b\cos\mathfrak{A}_b$ gleich der Höhe h_a des Dreiecks, Fig. 31 (dieses als eben betrachtet), womit man erhält $b^2 = c^2 = \frac{1}{4}a^2 + h_a^2$; es ist also auch $3m^2 = 2h_a^{\,2} + \frac{3}{2}a^2$.

Hieraus folgt $2m^2 - a^2 = \frac{4}{3}h_a^{\,2}$ und es geht (8) über in:

$$\pm\,\varrho''\,\frac{e^2K_1}{18\,a_0^{\,3}}\sin 2\beta_1\,.\,ah_a^2. \tag{9}$$

Der veränderliche Faktor $ah_a^{\,2}$ d. i. $\frac{3}{4}(2m^2a - a^3)$ wird ein Maximum für

$$\left.\begin{aligned} &a = m\sqrt{\tfrac{2}{3}};\ h_a = m;\ A = 44^0 \text{ ca. mit*)} \\ &\mathfrak{A}_b = 22^0 \text{ und } \mathfrak{A}_c = 338^0 \text{ oder } \mathfrak{A}_b = 202^0 \text{ und } \mathfrak{A}_c = 158^0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

*) In Fig. 31 ist fürs Maximum die Basis CB etwas zu breit angenommen.

Es ist somit im Maximum das in Rede stehende Glied d. h. $A' - A$ gleich

$$\pm \varrho'' \frac{e^2 K_1}{18} \sqrt{\frac{2}{3}} \sin 2\beta_1 \left(\frac{m}{a_0}\right)^3, \tag{11}$$

was für $m = 0{,}1\, a_0$ und $\beta_1 = 45^0$ den nachstehenden geringen Betrag ergiebt:

$$\pm 0{,}062''. \tag{12}$$

Dieser Betrag reduziert sich für mefsbare Dreiecke stets noch beträchtlich; denn er ist

$$\left.\begin{array}{lll} \pm 0{,}008'' & \text{für } m = 0{,}05 a_0 & \text{d. i. } 319^{km} \\ \pm 0{,}0005'' & \text{für } m = 0{,}02 a_0 & \text{d. i. } 127^{km} \end{array}\right\}. \tag{13}$$

Selbst wenn in einzelnen Fällen der letztere Betrag überschritten werden sollte, so wird mit Rücksicht auf die verminderte Genauigkeit der Beobachtung auf sehr grofse Entfernungen es doch zulässig sein, *direkt beobachtete geodätische Dreiecke wie sphärische zu behandeln,* wenn dabei der Krümmungsradius dem mittleren Krümmungsmafs der drei Ecken entsprechend angenommen wird. Vergleicht man (12) u. (13) mit S. 96 (8), so zeigt sich, dafs in den Formeln (6) S. 359 etwa gleich grofse Maximalfehler für $A - A^*$ durch Vernachlässigung der in $m^2 - a^2$ und $K_1 - K$ multiplizierten Glieder entstehen, und entsprechend für $B - B^*$ und $C - C^*$. Mit anderen Worten:

Nimmt man bei Verteilung des Excesses auf die 3 Winkel Rücksicht auf die Ungleichheit der Seiten, so mufs man auch auf die Ungleichheit der Krümmungsmafse Rücksicht nehmen.

Solange man ein Dreieck demnach als ein *sphärisches* betrachtet, ist es einfach nur konsequent, den Excefs *gleichmäfsig* zu verteilen, was nicht ausschliefst, dafs zur Berechnung von ε die unter (6) S. 359 gegebene Formel mit Gliedern 4. Ordnung zur Anwendung gelangt. Für beobachtete Dreiecke dürfte es aber in der Regel überflüssig sein, diese letzteren herbeizuziehen [vergl. S. 95 (5)].

Berechnet man nun den Excefs einfach nach der Formel:

$$\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3} \tag{14}$$

und verteilt ihn gleichmäfsig auf die 3 Winkel, so kann noch die Frage entstehen, ob in einer Kette von Dreiecken eine ungünstige *Anhäufung der hiermit begangenen Fehler* möglich ist. Bei der geringen Gröfse dieser Fehler für beobachtete Dreiecke im einzelnen ist dies aber weder für die Seitenlängen noch für die Azimute zu befürchten. Untersucht man insbesondere den Einflufs der begangenen Fehler bei

Anwendung des Sinussatzes, so zeigt sich, dafs dieselben nur in der 9. Decimale der Logarithmen der Seiten beim einzelnen wohlgeformten Dreieck sich äufsern und dafs selbst bei 20 bis 30 zusammenhängenden Dreiecken die 7. Decimale stets unberührt bleibt.

§ 6. Excefs des geodätischen Dreiecks aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel. Erinnern wir uns zunächst der Formel fürs sphärische Dreieck, so ist nach S. 98, wenn A' der Zwischenwinkel, b und c die Seiten sind:

$$\varepsilon = \frac{bc \sin A'}{2a_0^2} K\left(1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24a_0^2} K + Gl_4\right).$$

Diese Formel gilt aber auch fürs geodätische Dreieck, weil bis auf Glieder 6. Ordnung es mit dem sphärischen gleichen Excefs hat. Nur ist zu setzen:

$$A' = A - \frac{1}{12}\frac{F^*}{a_0^2}[K_1 - K] + Gl_6,$$

wobei man F^* gleich $\frac{1}{2} bc \sin A$ nehmen darf. Führen wir dies oben ein, so folgt:

$$\varepsilon = \frac{bc \sin A}{2a_0^2} K\left\{1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24a_0^2} K - \frac{K_1 - K}{24}\frac{bc \cos A}{a_0^2} + Gl_4\right\}.$$

Man sieht hier sogleich, dafs rechter Hand das von $bc \cos A$ abhängende Glied weggelassen werden kann, weil es eine Ordnung höher ist, als die vernachlässigten Glieder 4. Ordnung. Mit Rücksicht auf S. 98 hat man nun sofort:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a^2}{a_0^2} &= \frac{b^2}{a_0^2} + \frac{c^2}{a_0^2} - \frac{2bc \cos A}{a_0^2} + Gl_4 \\
\underset{\text{in Sek.}}{\log \varepsilon} &= \log \frac{\varrho'' bc \sin A}{2a_0^2} K + M\left\{\frac{4a^2 - 3m^2}{24a_0^2} K + Gl_4\right\} \\
A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - a^2}{20a_0^2} K + \frac{K_1 - K}{4K} + Gl_4\right\} \\
B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - b^2}{20a_0^2} K + \frac{K_2 - K}{4K} + Gl_4\right\} \\
C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3}\left\{1 + \frac{m^2 - c^2}{20a_0^2} K + \frac{K_3 - K}{4K} + Gl_4\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Kürzt man diese Formeln auf ihre 1. Glieder ab, so sind die Fehler für die Winkelreduktionen ebenso grofs wie im entsprechenden Falle des vorigen Paragraphen; für $\log \varepsilon$ ist, wie schon S. 99 gezeigt, der Fehler sogar, wenn auch unwesentlich, kleiner. Diese einfache Rechnung wird daher für direkt *beobachtete* Dreiecke in der Regel zulässig erscheinen.

§ 7. Flächeninhalt des geodätischen Dreiecks. Um den Inhalt zu finden, bestimmen wir zunächst, Fig. 29 S. 348, den Inhalt des Streifens BCC'. Ist P ein Punkt zwischen B und C, der bei der Drehung von BP die Lage P' erhält, sind ferner Q und Q' zwei unendlich benachbarte Punkte und wird aufserdem gesetzt:

$$BP = BP' = r \qquad PQ = P'Q' = dr,$$

so ist der Inhalt des unendlich kleinen Rechtecks $PQP'Q' = \mathfrak{m}_r d\mathfrak{B}_a dr$, mithin Dreieck BCC' oder

$$-dF = d\mathfrak{B}_a \int_0^a \mathfrak{m}_r dr.$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf S. 349 (5), wenn wie dort vorläufig $a_0 = 1$ genommen wird:

$$\mathfrak{m}_r = \frac{\sin[r\sqrt{K_2}]}{\sqrt{K_2}} - E_2 r^4 \cos \mathfrak{B}_a + Gl_7.$$

Die leicht auszuführende Integration giebt hieraus nach einiger Reduktion:

$$dF = -\frac{2\sin^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right]}{K_2}\left(1 - \frac{2}{5} E_2 a^5 \cos \mathfrak{B}_a + Gl_6\right) d\mathfrak{B}_a. \tag{1}$$

Um nun nochmals integrieren zu können, führen wir b als unabhängige Variable ein und setzen nach Fig. 29 S. 348:

$$\mathfrak{m}_a d\mathfrak{B}_a = -db \sin C,$$

ferner nach S. 352 (17):

$$\sin C = \sin A \frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{\sin[a\sqrt{K_2}]}\left(1 + \frac{3}{4} E_2(a^2 - c^2)(a\cos\mathfrak{B}_a + c\cos\mathfrak{B}_c) + \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos\mathfrak{A}_b + Gl_6\right)$$

und nach S. 349 (5) wie oben für $\mathfrak{m}_r$:

$$\mathfrak{m}_a = \frac{\sin[a\sqrt{K_2}]}{\sqrt{K_2}}\left(1 - E_2 a^3 \cos \mathfrak{B}_a + Gl_6\right).$$

Durch Einführung dieser Ausdrücke in (1) wird nach einiger Reduktion erhalten:

$$dF = \frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{2\cos^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right]} \frac{\sin A\, db}{\sqrt{K_2}} \left\{ \begin{matrix} 1 + \frac{3}{4} E_2 (a^2 - c^2)(a\cos\mathfrak{B}_a + c\cos\mathfrak{B}_c) \\ + \frac{3}{5} E_2 a^3 \cos\mathfrak{B}_a + \frac{1}{4} E_2 b^3 \cos\mathfrak{A}_b + Gl_6 \end{matrix} \right\}. \tag{2}$$

Aus dieser Formel folgt sofort auch die nachstehende für das Differential des Flächeninhalts F_2' eines sphärischen Dreiecks mit den Seiten b und c und dem Zwischenwinkel A, wenn als Kugelradius $1 : \sqrt{K_2}$ genommen wird:

$$dF_2' = \frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{2\cos^2\left[\frac{a'}{2}\sqrt{K_2}\right]} \frac{\sin A\, db}{\sqrt{K_2}}. \tag{3}$$

Die Seite a' ist hierzu sphärisch aus b, c und A nach der Formel zu berechnen:

$$\cos[a'\sqrt{K_2}] = \cos[b\sqrt{K_2}]\cos[c\sqrt{K_2}] + \sin[b\sqrt{K_2}]\sin[c\sqrt{K_2}]\cos A.$$

Andrerseits ist nach S. 355 u. 356 offenbar:

$$\cos[a\sqrt{K_2}] = \cos[b\sqrt{K_2}]\cos[c\sqrt{K_2}] + \sin[b\sqrt{K_2}]\sin[c\sqrt{K_2}]\cos A + Gl_7.$$

Es weichen daher $\cos[a'\sqrt{K_2}]$ und $\cos[a\sqrt{K_2}]$ nur um Glieder 7. Ordnung von einander ab, und man hat mit Rücksicht auf die Gleichung $2\cos^2\frac{u}{2} = 1 + \cos u$:

$$2\cos^2\left[\frac{a'}{2}\sqrt{K_2}\right] = 2\cos^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right] + Gl_7 = 2\cos^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right](1 + Gl_7).$$

Es ist nun mit Rücksicht aufs Vorige:

$$dF_2' = \frac{\sin[c\sqrt{K_2}]}{2\cos^2\left[\frac{a}{2}\sqrt{K_2}\right]} \frac{\sin A\, db}{\sqrt{K_2}}(1 + Gl_7). \tag{4}$$

Hieraus folgt unter Einführung einiger zulässiger Vereinfachungen in Verbindung mit (2):

$$dF = dF_2' + \left\{\left[\begin{array}{l}\frac{3}{4}(a^2 - c^2)(a\cos\mathfrak{B}_a + c\cos\mathfrak{B}_c)\\ + \frac{3}{5}a^3\cos\mathfrak{B}_a + \frac{1}{4}b^3\cos\mathfrak{A}_b\end{array}\right]E_2 + Gl_7\right\}\frac{c\sin A\, db}{2}. \tag{5}$$

Die abhängigen Veränderlichen a und $\mathfrak{B}_a$, welche noch rechter Hand in den kleinen Gliedern vorkommen, eliminieren wir mittelst der bekannten Relationen (11) und (12) S. 350 u. 351, womit die eckige Parenthese den nachstehenden Wert erhält:

$$\left(\frac{8}{5}b^2 + \frac{3}{5}c^2 - \frac{27}{10}bc\cos A\right)b\cos\mathfrak{A}_b + \left(\frac{21}{10}b^2 + \frac{3}{5}c^2 - \frac{21}{5}bc\cos A\right)c\cos\mathfrak{B}_c,$$

nach dessen Einführung sich (5) sofort integrieren läfst. Berücksichtigt man, dafs für $b = 0$ das allgemeine Integral verschwindet

und F sowie F_2' null sind, so gelangt man ohne Schwierigkeit zu der Gleichung:

$$F = F_2' + \left\{ \left[\begin{array}{l} \dfrac{4b^2 + 3c^2 - 9bc\cos A}{10}\, b\cos \mathfrak{A}_b \\ + \dfrac{7b^2 + 6c^2 - 21bc\cos A}{10}\, c\cos \mathfrak{B}_c \end{array} \right] E_2 + Gl_7 \right\} \frac{bc\sin A}{2}. \quad (6)$$

Hierbei ist $F_2' = \varepsilon\varrho^2$ mit $\varrho = 1 : \sqrt{K_2}$ zu setzen d. i. nach S. 98 (3):

$$F_2' = \frac{1}{2}\, bc\sin A \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{4a^2 - 3m^2}{24} K_2 + \dfrac{14a^4 - 15a^2m^2 + 3n^4}{720} K_2^2 \\ \qquad + \dfrac{b^2c^2\sin^2 A}{72} K_2^2 + Gl_6 \end{array} \right\}, \quad (7)$$

in welcher Formel anstatt a eigentlich a' anzuwenden ist, was indessen nach dem oben über den Unterschied der zugehörigen Cosinus Gesagten nichts Merkliches ausmacht.

Setzen wir in F_2' für K_2 das mittlere Krümmungsmaſs K, so wird der Inhalt F' eines sphärischen Dreiecks mit den Stücken b, c, A auf der Kugel vom Radius $1 : \sqrt{K}$ erhalten. — Man sieht, daſs

$$F_2' = F' + \frac{1}{2}\, bc\sin A \left(\frac{4a^2 - 3m^2}{24} [K_2 - K] + Gl_7 \right),$$

worin man wegen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A + Gl_4$$

auch

$$4a^2 - 3m^2 = 2b^2 + 2c^2 - 6bc\cos A + Gl_4$$

setzen kann. Hiermit ergiebt sich nun, wenn man in (6) rechter Hand noch nach S. 276 (5) von den Relationen

$$E_2 c\cos \mathfrak{B}_c = \frac{K_1 - K_2}{12} + Gl_4 = \frac{[K_1 - K] - [K_2 - K]}{12} + Gl_4$$

$$E_2 b\cos \mathfrak{A}_b = \frac{K_3 - K_1}{12} + Gl_4 = \frac{[K_3 - K] - [K_1 - K]}{12} + Gl_4$$

Gebrauch macht, nach einfacher Reduktion als Inhalt F des *geodätischen* Dreiecks (a_0 nicht mehr als Einheit der Längen vorausgesetzt):

$$F = F' \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{3b^2 + 3c^2 - 12bc\cos A}{120a_0^2} [K_1 - K] + \dfrac{3b^2 + 4c^2 - 9bc\cos A}{120a_0^2} [K_2 - K] \\ \qquad + \dfrac{4b^2 + 3c^2 - 9bc\cos A}{120a_0^2} [K_3 - K] + Gl_6 \end{array} \right\} \quad (8)$$

mit Bezug auf den Inhalt F' des *sphärischen* Dreiecks, das mit jenem

die Stücke b, c und A gemein hat und auf der Kugel vom Radius $a_0 : \sqrt{K}$ liegt. Für F' hat man:

$$\log F' = \log\left(\frac{1}{2} bc \sin A\right) + M \left\{ \begin{array}{l} \frac{4a^2 - 3m^2}{24 a_0^2} K + \frac{32a^4 - 45m^4 + 24n^4}{5760 a_0^4} K^2 \\ \qquad + \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{72 a_0^4} K^2 + Gl_6 \end{array} \right\}, \quad (9)$$

wobei nach S. 98 zu berechnen ist:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{b^2}{a_0^2} + \frac{c^2}{a_0^2} - \frac{2bc \cos A}{a_0^2} - \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{3 a_0^4} + Gl_6 \\ m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \qquad n^4 = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Die Formel (8) läfst sich dadurch noch vereinfachen, dafs man in der Parenthese null in der Form hinzufügt:

$$-\frac{3b^2 + 3c^2 - 12bc \cos A}{120 a_0^2} \{ [K_1 - K] + [K_2 - K] + [K_3 - K] \}.$$

Dann wird anstatt (8) erhalten:

$$F = F' \left\{ 1 + \frac{c^2 + 3bc \cos A}{120 a_0^2} [K_2 - K] + \frac{b^2 + 3bc \cos A}{120 a_0^2} [K_3 - K] + Gl_6 \right\}. \quad (11)$$

§ 8. **Fortsetzung. Geodätisches und sphärisches Dreieck mit denselben Seiten.** Um nun endlich noch den Inhalt F des geodätischen Dreiecks mit dem Inhalt F' eines sphärischen Dreiecks von denselben Seiten zu vergleichen, beachten wir, dafs im sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b und c auf der Kugel mit dem Radius $1 : \sqrt{K}$ der Winkel A', welcher a gegenüberliegt, nach (3) S. 358 gegeben ist durch die Gleichung:

$$A' = A - \frac{K_1 - K}{12} F^* + Gl_6, \quad (12)$$

wenn wir vorläufig a_0 wieder gleich 1 setzen. Nun ist aber

$$F' = \frac{1}{2} bc \sin A' \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{4a^2 - 3m^2}{24} K + \frac{14a^4 - 15a^2 m^2 + 3n^4}{720} K^2 \\ \qquad + \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{72} K^2 + Gl_6 \end{array} \right\} \quad (13)$$

und hierzu nach (12):

$$\sin A' = \sin A - \frac{K_1 - K}{12} F^* \cos A + Gl_6.$$

Setzt man in letzterer Formel $F^* = \frac{1}{2} bc \sin A + Gl_4$, so wird ohne Schwierigkeit aus (9) und (13) erhalten:

$$F' = F'\left(1 + \frac{K_1 - K}{24} bc \cos A + Gl_7\right). \qquad (14)$$

Die Einführung dieses Ausdrucks für F' in (11) giebt nun sofort:

$$F = F'\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{bc\cos A}{24}[K_1 - K] + \frac{c^2 + 3bc\cos A}{120}[K_2 - K] \\ \quad + \frac{b^2 + 3bc\cos A}{120}[K_3 - K] + Gl_6 \end{array}\right\},$$

welche Formel dadurch eleganter wird, dafs man in der Parenthese null in der Gestalt addiert:

$$-\frac{b^2 + c^2 + 11bc\cos A}{360}\left([K_1 - K] + [K_2 - K] + [K_3 - K]\right).$$

Eliminiert man dann noch $bc\cos A$ mittelst der Relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A + Gl_4$ und führt m^2 ein, so wird endlich erhalten (a_0 nicht mehr als Einheit der Längen vorausgesetzt):

$$F = F'\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{m^2 - a^2}{120a_0^2}[K_1 - K] + \frac{m^2 - b^2}{120a_0^2}[K_2 - K] \\ \quad + \frac{m^2 - c^2}{120a_0^2}[K_3 - K] + Gl_6 \end{array}\right\}. \qquad (15)$$

Hierin sind F und F' die Inhalte des *geodätischen* und *sphärischen* Dreiecks mit denselben Seiten a, b, c; der Kugelradius ist dem arithmetischen Mittel der 3 Eck-Krümmungsmafse entsprechend gleich $a_0 : \sqrt{K}$ angenommen.*)

Zur Berechnung von F' hat man nach S. 93 (2), insofern $F' = \varepsilon\varrho^2$ für $\varrho^2 = a_0^2 : K$ ist, die Formel:

$$\log F' = \log F^* + M\left(\frac{m^2}{8a_0^2}K + \frac{8n^4 + 9m^4}{1920a_0^4}K^2 + Gl_6\right), \qquad (16)$$

wozu F^* in bekannter Weise als Inhalt des ebenen Dreiecks aus den 3 Seiten a, b und c zu berechnen ist.

Für Dreiecksseiten von mehr als $0{,}2a_0$ Länge wird man es vorziehen, F' aus dem strengen Wert des sphärischen Excesses abzuleiten, der nach S. 87 (8) zu berechnen ist; ebenso F' aus Formel (3) S. 84.

Dadurch wird dem Mifsstand begegnet, dafs die Glieder 8. Ord-

*) Diese Formel stimmt überein mit einer von *Hansen* in seinen *Geodätischen Untersuchungen* S. 191 oben angegebenen, wenn man die Krümmungsmafse einführt, sowie den Unterschied berücksichtigt, der zwischen F' und dem *Hansen*schen Kugeldreieck F'' stattfindet, welches auf einer Kugel vom Radius a_0 liegt. Dieser Unterschied ist mittelst unserer Formel (16) leicht abzuleiten.



nung, welche von m^6 u. s. f. herrühren, nicht gegen die numerisch kleineren Glieder vernachlässigt werden, die von $K_1 - K$ u. s. f. erzeugt werden.

In Bezug auf die Gültigkeit obiger Entwicklungen, deren Zulässigkeit im einzelnen der Kürze halber nicht überall betont ist, bleibt kein Zweifel für mäfsig grofse Werte der Seitenlängen. Der Einflufs der in den Parenthesen von (11) und (15) auftretenden Glieder 5. Ordnung, die in erster Annäherung den Unterschied zwischen genauer und sphärischer Inhaltsberechnung angeben, beträgt für $m = 0{,}1\,a_b$ kaum eine Einheit der 7. Decimalstelle des $\log F$.

Der Inhalt geodätischer Dreiecke darf daher in der Regel aus beliebigen Stücken rein sphärisch berechnet werden, wenn nur der Kugelradius nach dem mittleren Krümmungsmafs gewählt wird.

§ 9. **Die Theorie der geodätischen Dreiecke** auf beliebig krummen Oberflächen ist das Hauptziel von *Gaufs'* Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gottingae 1828.*) Wenn wir die Formeln S. 358 u. 359 zur Reduktion des geodätischen Dreiecks auf ein sphärisches oder ebenes mit denselben Seiten nur für das Rotationsellipsoid nachgewiesen haben, so zeigt *Gaufs* die Allgemeingültigkeit dieser Formeln (abgesehen von unwesentlichen Unterschieden der Darstellung) für jede Fläche.

Gaufs knüpft nicht an das schiefwinklige Dreieck an, sondern er zerlegt es in 2 rechtwinklige Dreiecke und stellt Differentialformeln für ein rechtwinkliges Dreieck auf, dessen beide Katheten veränderlich angenommen werden, dergestalt, dafs sie beide ein System rechtwinkliger geodätischer Koordinaten bilden. Auf Formelentwicklungen dieser Art und die Entwicklung einer Hilfsvariablen $\mathfrak{n}$, die an Stelle unseres $\mathfrak{m}$ tritt, kommen wir im nächsten Kapitel bei der Behandlung des Problems rechtwinkliger geodätischer Koordinaten.

Würde man die *Gaufs*ische Methode der Zurückführung des Problems auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit 2 unabhängigen Variablen im Anschlufs an unsere Entwicklungen beim schiefwinkligen Dreieck anwenden wollen, so hätte man zu bilden nach Fig. 29 S. 348:

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \cos C \tag{1}$$

als partiellen Differentialquotienten von a nach b bei konstantem A und $\mathfrak{A}_b$. Ferner nach Fig. 30 S. 353:

*) Vergl. auch in *Gaufs'* Werken Bd. 4, S. 341 u. ff. die von *Gaufs* selbst verfafste Anzeige dieser Abhandlung, mit einer übersichtlichen Inhaltserklärung.



$$\frac{\partial a}{\mathfrak{m}_b \partial \mathfrak{A}_b} = \sin C \tag{2}$$

als partiellen Differentialquotienten von a nach $\mathfrak{A}_b$ bei konstantem b. Beide Gleichungen geben zusammen durch Elimination der Variablen C mittelst der Relation $\cos^2 C + \sin^2 C = 1$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\mathfrak{m}_b \partial \mathfrak{A}_b}\right)^2 = 1 \tag{3}$$

oder, da $\partial(a^2) = 2a\partial a$ ist, wie man leicht findet:

$$\left(\frac{\partial (a^2)}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial (a^2)}{\mathfrak{m}_b \partial \mathfrak{A}_b}\right)^2 = 4a^2. \tag{4}$$

Behufs Integration wäre hier a^2 als Funktion von b und $\mathfrak{A}_b$, und zwar versuchsweise als Reihe nach Potenzen von b und nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von $\mathfrak{A}_b$ einzuführen, und es würden nach der Methode der unbestimmten Koefficienten die Koefficienten dieser Reihe zu bestimmen sein. Die Formel für a^2 ersetzt dann in der weiteren Rechnung den Cosinussatz und gestattet $\cos A$ und $\cos A^*$ zu vergleichen.

Für ein ebenes Dreieck ergiebt sich nun bekanntlich

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\,(\cos \mathfrak{A}_b \cos \mathfrak{A}_c + \sin \mathfrak{A}_b \sin \mathfrak{A}_c)$$

und man erkennt, dafs im allgemeinen a^2 ein langgestreckter Ausdruck wird, dafs also jedenfalls eine ziemlich umfängliche Rechnung entsteht, die obendrein über die Konvergenz der Resultate keinen Aufschlufs giebt — wenigstens ist nur für unendlich kleine Dreiecke dieselbe ohne weiteres klar.

Bei *Gaufs'* Methode wird die Rechnung dadurch bequemer, dafs das variable Azimut wegfällt, und man es nur mit 2 veränderlichen Katheten, also nur mit einfachen Potenzreihen zu thun hat.

Die Rechnung läfst sich aber auch dadurch vereinfachen, dafs man wie in Fig. 29 nur b als unabhängige Variable einführt, Winkel A aber gleich 90^0 setzt. Dieses sehr empfehlenswerte Verfahren erfordert die Integration eines Systems von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche auch nach der Methode der unbestimmten Koefficienten geschehen kann. *Hansen* hat es angewandt und wir werden es im nächsten Paragraphen ausführlicher skizzieren.

Die von uns eingeschlagene Methode der successiven Annäherung dürfte vielleicht, obgleich sie keineswegs der *Gaufs*ischen Methode an die Seite gestellt werden soll, manchem Leser nicht unwillkommen sein, da die Entwicklungen verhältnismäfsig einfach werden und das Gültigkeitsgebiet der Vernachlässigungen vielleicht etwas besser als bei den Methoden von *Gaufs* und *Hansen* zu überblicken ist.

Man kann auf diesem Wege die Genauigkeit der Reihenentwicklungen auch noch weiter treiben. Für $\mathfrak{m}$ wäre dabei am zweckmäfsigsten der Ausdruck (11) S. 278 anzuwenden, welcher 2 Ordnungen genauer ist, als der früher benutzte. Nur eine Ordnung weiter zu gehen würde wenig Erfolg bieten, weil für Entfernungen $> 0{,}1\, a_0$, um welche es sich handeln würde, die Konvergenz der Reihe für K nur gering ist.

Wir übergehen diese Entwicklung, da geodätische Dreiecke von mehr als $0{,}1\, a_0$ Durchschnittsseitenlänge immer vermieden werden können und jedenfalls der Komplikation der Rechnung halber auch werden vermieden werden. Es sind jedoch diese Formeln nach *Weingarten* und *Hansen* weiterhin mitgeteilt.

Gaufs ging in seinen Formelentwicklungen nur eine Ordnung weiter, was jedoch, wie eben gezeigt wurde und wie auch *Hansen* in seinen Geodätischen Untersuchungen durch Betrachtung der Endformeln genau erörtert hat, wenig Gewinn bietet.

Hier ist zunächst noch der Abhandlung von *Christoffel: Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.* Berlin 1868 (Abh. der Kön. Akad. der Wiss.), als derjenigen Arbeit zu gedenken, welche die Theorie des *schiefwinkligen* geodätischen Dreiecks in direkter Weise behandelt. Wie *Gaufs* begründet *Christoffel* die Theorie der geodätischen Linie mittelst der Variationsrechnung. Er beweist damit namentlich zuerst, dafs bei einer Drehung die Kürzeste immer normal zur Bahn des bewegten Endpunktes steht und dafs für geodätische Polarkoordinaten die Formel (5) S. 348 besteht.

Nun werden die Differentialformeln im Dreieck aufgestellt, deren Integrabilitätsbedingungen (vergl. S. 74 die Entwicklung der Formel (10)) alsdann unter andern zu den fundamentalen Eigenschaften der reduzierten Länge führen: Gleichheit für Drehung um beide Endpunkte, sowie Erfüllung der Differentialgleichung (6) S. 275.

Eine Integration der Differentialformeln wird nicht ausgeführt, dagegen werden weitere Folgerungen im Gebiete der Klassifikation der Flächen gezogen.

§ 10. **Höhere Glieder in den Formeln zur Berechnung geodätischer Dreiecke.** Am unmittelbarsten an *Gaufs'* Entwicklungen schliefsen sich diejenigen von *Weingarten* an (Astronom. Nachr. 1869 Bd. 73 Nr. 1733 S. 65 und 1870 Bd. 75 Nr. 1782 S. 91; auch im 2. Heft der Schrift: *Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Zentralbureaus der Europäischen Gradmessung*). Er findet:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} K + \left[(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + (\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2 \right] \frac{e^2}{6} \\ - \left[\frac{b^2 + c^2}{a_0^2} \sin^2\beta_1 + \frac{a^2 + c^2}{a_0^2} \sin^2\beta_2 + \frac{a^2 + b^2}{a_0^2} \sin^2\beta_3 \right] \frac{e^2}{12} + Gl_6 \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Hierzu ist die Fläche F des geodätischen Dreiecks nach § 7 (8) bis (11) S. 365 oder (15) und (16) S. 367 zu berechnen, event. unter teilweiser Benutzung der Formeln (8) S. 87 und (3) S. 84 für den sphärischen Teil der Rechnung.

Nach *Weingartens* Entwicklungen findet man ferner zur Reduktion auf das ebene Dreieck (unter Ergänzung des *Weingarten*schen Ausdrucks um das von n^4 und m^4 abhängende Glied, vergl. S. 93):

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{c} \frac{3K + K_1}{12} + \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2) + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^4} \\ + \left[\begin{array}{c} 2(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + 2(\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2 \\ + (\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 \end{array} \right] \frac{e^2}{30} \\ - \left[\begin{array}{c} \frac{-10a^2 + 34b^2 + 34c^2}{a_0^2} \sin^2\beta_1 + \frac{a^2 + 5b^2 + 25c^2}{a_0^2} \sin^2\beta_2 \\ + \frac{a^2 + 25b^2 + 5c^2}{a_0^2} \sin^2\beta_3 \end{array} \right] \frac{e^2}{720} + Gl_6 \end{array} \right\} \cdot (2)$$

Zieht man hiervon $\frac{\varepsilon}{3}$ beiderseits ab, rechter Hand nach Mafsgabe der obigen Formel, so ergiebt sich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{c} \frac{K_1 - K}{12} + \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2) + \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^4} \\ + \left[\begin{array}{c} (\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2 \\ - 2(\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 \end{array} \right] \frac{e^2}{90} \\ - \left[\begin{array}{c} \frac{14m^2 - 8a^2}{a_0^2} \sin^2\beta_1 \\ + \frac{5m^2 - 8a^2}{a_0^2} (\sin^2\beta_2 + \sin^2\beta_3) \end{array} \right] \frac{e^2}{240} + Gl_6 \end{array} \right\} \cdot (3)$$

Aus diesem Ausdrucke folgen diejenigen für $B - B^*$ und $C - C^*$ durch cyklische Vertauschung der auf die 3 Ecken bezüglichen Symbole.

Man darf in diesen Formeln anstatt der reduzierten Breiten β auch die geographischen Breiten B anwenden.

Hansen ging 1865 in seinen *Geodätischen Untersuchungen*, wie bereits erwähnt, nicht von der *Gaufs*ischen partiellen Differential-

gleichung mit 2 unabhängigen Variablen (den beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks) aus, sondern verfuhr in folgender Weise, wenn wir an Fig. 29 S. 348 anknüpfen (vergl. bei *Hansen* a. a. O. S. 137, 153 und 155 u. ff.; daselbst ist mit σ, φ, ψ bezeichnet, was hier a, B, C heifst).

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} da &= db \cos C \\ \mathfrak{m}_a dB &= db \sin C \\ dC &= -\frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a} dB. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dieses System wird mit Hilfe der Identitäten $d(a \sin C) = \sin C da + a \cos C dC$ und $d(a \cos C) = \cos C da - a \sin C dC$ übergeführt in das neue und vorteilhaftere:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(a \sin C)}{db} &= \left(\mathfrak{m}_a - a\frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a}\right)\frac{dB}{db}\cos C \\ \frac{d(a \cos C)}{db} &= 1 - \left(\mathfrak{m}_a - a\frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a}\right)\frac{dB}{db}\sin C \\ \frac{d(B+C)}{db} &= \left(1 - \frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a}\right)\frac{dB}{db}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wie wir sogleich sehen werden, kommt es nun darauf an, $a \sin B$ und $a \cos B$ kennen zu lernen (auf welche Unbekannte hin zu gleichem Zwecke auch *Gaufs* operiert). *Hansen* setzt daher für $a \sin B$, $a \cos B$ und $B + C$ Reihen mit unbestimmten Koefficienten, geordnet nach Potenzen von b, und geht dann mittelst der dritten der Reihen von den ersten beiden Ausdrücken zu $a \sin C$ und $a \cos C$ über, wobei die Rechnung am einfachsten wird, wenn Winkel A gleich 90^0, also in 1. Annäherung $B + C = 90^0$ ist.

Aus $a \sin C$ und $a \cos C$ folgen andere Funktionen von a und C, die in $\mathfrak{m}_a$ und $\frac{\partial \mathfrak{m}_a}{\partial a}$ vorkommen. Werden nun alle diese Ausdrücke in obiges System eingesetzt, so müssen die Gleichungen identisch erfüllt sein d. h. die Koefficienten der verschiedenen Potenzen von b müssen einzeln verschwinden. Aus diesen Bedingungen folgen endlich die unbekannten Koefficienten in den angenommenen Ausdrücken für $a \sin B$, $a \cos B$ und $B + C$. (Bei *Hansen* a. a. O. S. 159.)

Wendet man sie an auf 2 rechtwinklige Dreiecke ABC_1 und ABC_2, die A und B gemeinsam haben, so folgt für das schiefwinklige Dreieck BC_1C_2 leicht $a_1 a_2 \cos(B_1 - B_2)$ aus $a_1 \cos B_1 . a_2 \cos B_2 + a_1 \sin B_1 . a_2 \sin B_2$, in Potenzen von a_1, a_2 und $b_1 - b_2$, d. h. man erhält $\cos(B_1 - B_2)$, den Cosinus eines Winkels des schiefwinkligen Dreiecks, durch die 3 Seiten dargestellt und kann ihn direkt mit

dem Cosinus des entsprechenden Winkels im ebenen Dreieck vergleichen.

Nach S. 188 und 189 a. a. O. findet *Hansen:*

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left\{\begin{array}{l} 1 + (\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3)\dfrac{e^2 + \frac{1}{2}e^4}{3} \\ + (\cos^2 2\beta_1 + \cos^2 2\beta_2 + \cos^2 2\beta_3 - 1)\dfrac{e^4}{4} \\ + \left[\begin{array}{l}\dfrac{-14a^2 + 2b^2 + 2c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_1 + \dfrac{7a^2 + b^2 - 3c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_2 \\ + \dfrac{7a^2 - 3b^2 + c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_3\end{array}\right]\dfrac{e^2}{360} \\ - \left[\dfrac{3m^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 - 2\,\dfrac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{a_0^2}\cos^2\beta_1\right]\dfrac{e^2}{6} \\ + \left[\dfrac{a^2 + 6b^2 - 2c^2}{a_0^3}\,b\cos\mathfrak{A}_b + \dfrac{a^2 - 2b^2 + 6c^2}{a_0^3}\,c\cos\mathfrak{A}_c\right]\dfrac{2e^2}{45}\sin 2\beta_1 + Gl_6 \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left\{\begin{array}{l} (2\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3)\dfrac{2e^2 + e^4}{24} \\ + \left(2\cos^2 2\beta_1 + \cos^2 2\beta_2 + \cos^2 2\beta_3 - \dfrac{4}{3}\right)\dfrac{e^4}{16} \\ + \left[\begin{array}{l}\dfrac{-58a^2 + 54b^2 + 54c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_1 \\ + \dfrac{11a^2 + 23b^2 + 31c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_2 \\ + \dfrac{11a^2 + 31b^2 + 23c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_3\end{array}\right]\dfrac{e^2}{4320} \\ - \left[\begin{array}{l}\dfrac{a^2 + 2b^2 + 2c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 \\ - \dfrac{3b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + 3c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 2bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{a_0^2}\cos^2\beta_1\end{array}\right]\dfrac{e^2}{30} \\ + \left[\begin{array}{l}\dfrac{a^2 + 11b^2 - 2c^2}{a_0^3}\,b\cos\mathfrak{A}_b \\ + \dfrac{a^2 - 2b^2 + 11c^2}{a_0^3}\,c\cos\mathfrak{A}_c\end{array}\right]\dfrac{e^2}{135}\sin 2\beta_1 + Gl_6 \end{array}\right\}$$

$$+ \varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3} + \dfrac{m^2 - a^2}{60a_0^2} + \dfrac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240a_0^2} \\ - \left[\begin{array}{l}\dfrac{a^2 + 2b^2 + 2c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_1 + \dfrac{2a^2 + b^2 + 2c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_2 \\ + \dfrac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{a_0^2}\cos 2\beta_3\end{array}\right]\dfrac{e^2}{360}\end{array}\right\}. \quad (7)$$

Hansen giebt nur den ersten Teil des Ausdrucks für $A - A^*$

als Reduktion von A auf den Winkel eines sphärischen Dreiecks mit gleichen Seiten auf einer Kugel vom Radius a_0. Wir fügten dazu die Reduktion aufs ebene Dreieck mit Benutzung von S. 93 (4), worin ε durch $F'' : a_0^2$ zu ersetzen war, wenn F'' der Inhalt des sphärischen Dreiecks ist, dessen Beziehung zu F *Hansen* a. a. O. S. 191 angiebt (vergl. die Anm. zu S. 367).

Die Formeln für $B - B^*$ und $C - C^*$ findet man aus der obigen für $A - A^*$ durch Vertauschung der Ecken; aufserdem giebt *Hansen* noch Ausdrücke, um für alle 3 Reduktionen dieselben 2 Azimute anwenden zu können.

Wir wandeln die obigen beiden Formeln noch etwas um. Nach S. 59 hat man leicht:

$$K_1 = 1 + \left(e^2 + \frac{1}{2} e^4\right) \cos 2\beta_1 + \frac{1}{4} e^4 (3 \cos^2 2\beta_1 - 1) + Gl_6 \quad (8)$$

und entsprechend für K_2 und K_3. Hiermit findet man sofort als Wert der 1. Zeile in ε den Betrag K, d. i. das arithmetische Mittel von K_1, K_2 und K_3.

Ferner hat man hiermit:

$$K_2 - K_1 = e^2 (\cos 2\beta_2 - \cos 2\beta_1) + Gl_4,$$

was aber nach S. 355 (9) auch gleich dem nachstehenden Betrag ist:

$$K_2 - K_1 = 2e^2 \sin 2\beta_1 \frac{c}{a_0} \cos \mathfrak{A}_c + Gl_4 .$$

Durch Gleichsetzung beider Werte ergiebt sich:

$$e^2 (\cos 2\beta_2 - \cos 2\beta_1) = 2e^2 \sin 2\beta_1 \frac{c}{a_0} \cos \mathfrak{A}_c + Gl_4 . \quad (9)$$

Ebenso ist:

$$e^2 (\cos 2\beta_3 - \cos 2\beta_1) = 2e^2 \sin 2\beta_1 \frac{b}{a_0} \cos \mathfrak{A}_b + Gl_4 . \quad (10)$$

Mit Hilfe beider Formeln läfst sich die 2. Zeile im obigen Ausdruck für ε auf die Form der letzten Zeile daselbst bringen und man erhält:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} K - \left[\frac{3m^2}{a_0^2} \sin^2\beta_1 - 2 \frac{b^2 \cos^2 \mathfrak{A}_b + c^2 \cos^2 \mathfrak{A}_c - bc \cos \mathfrak{A}_b \cos \mathfrak{A}_c}{a_0^2} \cos^2\beta_1\right] \frac{e^2}{6} \\ \quad + \left[\frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{a_0^3} b \cos \mathfrak{A}_b + \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{a_0^3} c \cos \mathfrak{A}_c\right] \frac{e^2}{12} \sin 2\beta_1 + Gl_6 . \end{array} \right\} \quad (11)$$

In derselben Weise findet sich ohne Schwierigkeit:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3K + K_1}{12} + \dfrac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2) + \dfrac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^4} \\ - \left[\begin{array}{c} \dfrac{8m^2 - 3a^2}{a_0^2} \sin^2\beta_1 \\ - \dfrac{3b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + 3c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 2bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{a_0^2}\cos^2\beta_1 \end{array} \right] \dfrac{e^2}{30} \\ + \left[\begin{array}{c} \dfrac{a^2 + 61b^2 - 7c^2}{a_0^3} b\cos\mathfrak{A}_b \\ + \dfrac{a^2 - 7b^2 + 61c^2}{a_0^3} c\cos\mathfrak{A}_c \end{array} \right] \dfrac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + Gl_6 . \end{array} \right\} \quad (12)$$

Führt man hier noch $\frac{\varepsilon}{3}$ ein mit Hilfe des vorhergehenden Ausdrucks (11) für ε, so wird schliefslich erhalten:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{K_1 - K}{12} + \dfrac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2 - 6e^2\sin^2\beta_1) \\ \qquad + \dfrac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^2} \\ - \dfrac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 4bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{90 a_0^2} e^2\cos^2\beta_1 \\ + \left[\begin{array}{c} \dfrac{-19a^2 + b^2 + 13c^2}{a_0^3} b\cos\mathfrak{A}_b \\ + \dfrac{-19a^2 + 13b^2 + c^2}{a_0^3} c\cos\mathfrak{A}_c \end{array} \right] \dfrac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + Gl_6 . \end{array} \right\} \quad (13)$$

In diesen Formeln (11) und (13) darf man ebenfalls die geographischen Breiten B anstatt der reduzierten Breiten β anwenden.

§ 11. **Fortsetzung. Vergleichung der höheren Glieder nach Hansen und Weingarten.** Um die im Vorhergehenden nach beiden Autoren angesetzten Formeln zu vergleichen, setzen wir im Anschlufs an Fig. 19 S. 225 mittelst des sphärischen Hilfsdreiecks, welches der geodätischen Linie $AB = c$ zugeordnet ist:

$$\sin\beta_2 = \sin\beta_1 \cos\Delta\varphi - \cos\beta_1 \sin\Delta\varphi \cos\mathfrak{A}_c .$$

Da nach S. 223 (9) aber $\Delta\varphi$ gleich $\frac{c}{a_0} + Gl_3$ ist, hat man hieraus sofort:

$$\sin\beta_2 = \sin\beta_1 - \frac{c}{a_0}\cos\mathfrak{A}_c\cos\beta_1 - \frac{c^2}{2a_0^2}\sin\beta_1 + Gl_3 . \quad (1)$$

Entsprechend ist:

$$\sin\beta_3 = \sin\beta_1 - \frac{b}{a_0}\cos\mathfrak{A}_b\cos\beta_1 - \frac{b^2}{2a_0^2}\sin\beta_1 + Gl_3 \quad (2)$$

und durch Subtraktion beider Gleichungen:

$$\sin\beta_2 - \sin\beta_3 = \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{b}{a_0}\cos\mathfrak{A}_b - \frac{c}{a_0}\cos\mathfrak{A}_c\right)\cos\beta_1 \\ + \left(\frac{b^2}{2a_0^2} - \frac{c^2}{2a_0^2}\right)\sin\beta_1 + Gl_3 . \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Hieraus folgt nun ohne Schwierigkeit weiter:

$$\left[(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + (\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2\right]\frac{e^2}{6}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{3a_0^2}\, e^2\cos^2\beta_1 \\ + \left[\frac{2b^2 - c^2}{a_0^3}\, b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{2c^2 - b^2}{a_0^3}\, c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{12}\sin 2\beta_1 + Gl_6 \end{array}\right\},$$

sowie:

$$\left[\frac{b^2 + c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 + \frac{a^2 + c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_2 + \frac{a^2 + b^2}{a_0^2}\sin^2\beta_3\right]\frac{e^2}{12}$$

$$= \frac{m^2}{2a_0^2}\, e^2\sin^2\beta_1 - \left[\frac{a^2 + b^2}{a_0^3}\, b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{a^2 + c^2}{a_0^3}\, c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{12}\sin 2\beta_1 + Gl_6 .$$

Subtrahiert man beide Gleichungen Seite für Seite, so ersieht man bald, dafs die Ausdrücke für ε nach (1) S. 371 und (11) S. 374 identisch sind bis auf die überhaupt vernachlässigten Glieder 8. Ordnung.

Ferner erhält man aus den Formeln (1) bis (3):

$$\left[(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 - 2(\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2\right]\frac{e^2}{90}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} -\frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 4bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{90a_0^2}\, e^2\cos^2\beta_1 \\ + \left[\frac{-4b^2 + 8c^2}{a_0^3}\, b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{8b^2 - 4c^2}{a_0^3}\, c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + Gl_8 \end{array}\right\}.$$

sowie:

$$\left[\frac{14m^2 - 8a^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 + \frac{5m^2 - 8a^2}{a_0^2}(\sin^2\beta_2 + \sin^2\beta_3)\right]\frac{e^2}{240}$$

$$= \frac{m^2 - a^2}{10a_0^2}\, e^2\sin^2\beta_1 + \frac{19a^2 - 5b^2 - 5c^2}{a_0^3}(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\frac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + Gl_6 .$$

Hiermit ersieht man leicht, dafs die Formeln (3) S. 371 und (13) S. 375 bis auf Glieder 8. Ordnung ebenfalls identisch sind.

Für die Anwendung sind die Formeln (1) und (3) S. 371 ebenso bequem als (11) und (13) S. 374 u. 375.

Es ist aber einleuchtend, dafs an der Grenze der Anwendbarkeit vorstehender Formeln die verschiedenen Modifikationen merklich verschiedene Resultate geben können. Dies ist in der That für einen

Betrag der mittleren Seitenlängen $m = 0{,}3\,a_0$ der Fall; verschieden modificierte Formeln für den Excefs zeigen hier Differenzen bis zu ca. 0,2″.

Hansen ist es gelungen, bei gleicher analytischer Genauigkeit eine solche Modifikation zu finden, die auch für $m = 0{,}3\,a_0$ noch in den Hundertstelsekunden sicher ist. Er bedient sich dabei der Krümmungsmafse gewisser Hilfspunkte aufser denjenigen der Ecken, ein Verfahren, welches auch 1868 *Schering*, jedoch unter Beschränkung auf geringere analytische Genauigkeit, eingeschlagen hat.

Hierüber ist zu vergleichen die Mitteilung *Hansens: Reflexionen über die Reduktion der Winkel eines sphärischen Dreiecks* u. s. f. in den Berichten über die Verhandl. der Ges. der Wiss. zu Leipzig, math.-physik. Klasse, 1869, S. 139.

Ausführlicher mit Beispielen (die an die in den *Geodätischen Untersuchungen* S. 191 u. ff. gegebenen anknüpfen) im *Supplement zu der »Geodätische Untersuchungen« benannten Abhandlung* etc. in den Abhandlungen derselben Gesellschaft von 1869, Bd. 9, Nr. III.

Vergleiche auch eine übersichtliche Besprechung in der Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges. 1870, Bd. 5, S. 222, sowie einige Bemerkungen in Bd. 13, 1878, S. 79.

Wir dürfen uns hier darauf beschränken, eines der von *Hansen* für sehr grofse Dreiecke berechneten Beispiele auf die oben angegebenen Formeln anzuwenden. Man wird dadurch zugleich hinlänglich erkennen, dafs bei $m \leq 0{,}2\,a_0$ diese Formeln in jeder Modifikation ausreichen und jedenfalls genügen, um die früher von uns für $m \leq 0{,}1\,a_0$ entwickelten einfacheren Formeln nach ihren Fehlern zu beurteilen.

§ 12. Zahlenbeispiel zu Hansens und Weingartens Formeln.

In seinen *Geodätischen Untersuchungen* S. 199 und insbesondere in dem *Supplement* S. 348 giebt *Hansen* folgendes Dreieck, nach den strengen Formeln für geodätische Linien (welche Formeln denen unseres 5. Kapitels entsprechen) berechnet:

A	$\beta_1 = 15^0\,14'\,30{,}0318''$	$\varrho''\,\dfrac{a}{a_0} = 70351{,}4184$	$\mathfrak{A}_b = 32^0\,18'\,53{,}2155'' = -\,\mathfrak{A}_c$	
B	$\beta_2 = 0$	$\varrho''\,\dfrac{b}{a_0} = 64800$	$\mathfrak{B}_c = 148^0$	$\mathfrak{B}_a = 90^0$
C	$\beta_3 = 0$	$\varrho''\,\dfrac{c}{a_0} = 64800$	$\mathfrak{C}_a = 270^0$	$\mathfrak{C}_b = 212^0.$

Die ältere Rechnung *Hansens* in den *Geodätischen Untersuchungen* stimmt mit diesen dem *Supplement* entnommenen Angaben im wesentlichen überein; wir haben deshalb nicht nachgerechnet. Der Excefs ist nach diesen Zahlen gleich

$$\varepsilon = 9466{,}4310''.$$

Berechnet man ferner zu den linearen Längen 70351, 4184, 64800 und 64800 der 3 Seiten die zugehörigen Winkel des ebenen Dreiecks nach bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie, so folgt:

$$\begin{aligned} A^* &= 65^0\ 45'\ 13{,}2493'' \\ B^* &= 57\ \ \ 7\ \ 23{,}3754 \\ C^* &= 57\ \ \ 7\ \ 23{,}3754 \\ \hline \text{Summa} &= 180\ \ 0\ \ \ 0{,}0001\ . \end{aligned}$$

Da man nun für das geodätische Dreieck hat:

$$A = 66^0\ 37'\ 46{,}4310''$$
$$B = 58^0$$
$$C = 58^0,$$

so ist:

$$\begin{aligned} A - A^* &= 3153{,}1817'' = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}2953'' \\ B - B^* &= 3156{,}6246 \ \ = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}1476 \\ C - C^* &= 3156{,}6246 \ \ = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}1476 \\ \hline \text{Summa} &= 9466{,}4309\,. \end{aligned}$$

Zugleich folgt

$$\varrho'' \frac{F^*}{a_0^{\ 2}} = 3{,}9675889.6\,.$$

Behufs Anwendung der Formeln des § 10 haben wir zunächst nach S. 59:

$$\log K_1 = 9{,}9970916.4 - 10 - 4 \log w_1 = 0{,}0025051.0$$
$$K_1 = 1{,}00578487\ .$$
$$K_2 = K_3 = 1 : (1 - e^2) = 1 + \delta\,,$$

also nach S. 38:

$$K_2 = K_3 = 1{,}00671922$$
$$K = \frac{K_1 + K_2 + K_3}{3} = 1{,}00640777\,.$$

Man erhält ferner:

$\frac{a^2}{a_0^{\ 2}} = 0{,}1163311$	$\frac{m^2 - a^2}{a_0^{\ 2}} = -0{,}0117567$	$\frac{a^4}{a_0^{\ 4}} = 0{,}013533$	$\frac{n^4 - a^4}{a_0^{\ 4}} = -0{,}002528$
$\frac{b^2}{a_0^{\ 2}} = 0{,}0986961$	$\frac{m^2 - b^2}{a_0^{\ 2}} = +0{,}0058783$	$\frac{b^4}{a_0^{\ 4}} = 0{,}009741$	$\frac{n^4 - b^4}{a_0^{\ 4}} = +0{,}001264$
$\frac{c^2}{a_0^{\ 2}} = 0{,}0986960$	$\frac{m^2 - c^2}{a_0^{\ 2}} = +0{,}0058783$	$\frac{c^4}{a_0^{\ 4}} = 0{,}009741$	$\frac{n^4 - c^4}{a_0^{\ 4}} = +0{,}001264$
$\frac{m^2}{a_0^{\ 2}} = 0{,}1045744$		$\frac{n^4}{a_0^{\ 4}} = 0{,}011005$	

Nach Formel (16) S. 367 hat man jetzt:

$$\log F' = \log F^* + 0{,}0057133.9 + 0{,}0000427.2\,,$$

also ist:

$$\log \varrho'' \frac{F'}{a_0^2} = 3{,}9733450.7\,.$$

Wegen der bedeutenden Gröfse des Dreiecks ist dieser Betrag etwas zu klein, wie die nachfolgende strenge Rechnung zeigt.

Man hat zunächst $\sqrt{K} = 1{,}00319878$ und hiermit als Seiten des sphärischen Dreiecks F':

$$\varrho'' \frac{a}{a_0}\sqrt{K} = 70576{,}4569'' = 19^0\,36'\,16{,}4569''$$

$$\varrho'' \frac{b}{a_0}\sqrt{K} = 65007{,}2809 \quad = 18 \quad 3 \quad 27{,}2809$$

$$\varrho'' \frac{c}{a_0}\sqrt{K} = 65007{,}2809 \quad = 18 \quad 3 \quad 27{,}2809\,.$$

Hiermit folgt nach (8) S. 87:

$$\log \tan \frac{\varepsilon'}{4} = 8{,}0596534.9-10 \qquad \log \frac{\varepsilon'}{4} = 8{,}0596344.3-10$$

$$\log \varepsilon' = 8{,}6616944.3-10\,,$$

wobei ε' als Arcus zu verstehen ist. Subtrahiert man $\log K$ und addiert $\log \varrho''$, so ergiebt sich sofort:

$$\log \varrho'' \frac{F'}{a_0^2} = 3{,}9733455.8\,.$$

Um auf F zu kommen, berechnen wir noch:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{m^2-a^2}{a_0^2}(K_1-K) &= -\,0{,}0118.(-\,0{,}00062) = +\,0{,}0000073\\
\frac{m^2-b^2}{a_0^2}(K_2-K) &= +\,0{,}0059.(+\,0{,}00031) = + \qquad\quad 18\\
\frac{m^2-c^2}{a_0^2}(K_3-K) &= +\,0{,}0059.(+\,0{,}00031) = + \qquad\quad 18
\end{aligned}\right\}$$

$$+\,0{,}0000109.$$

Das giebt als Zuwachs im Logarithmus nach S. 367 (15):

$$+\,M\,\frac{0{,}0000109}{120} = +\,0{,}0000000.4\,;$$

es wird daher:

$$\log \varrho'' \frac{F}{a_0^2} = 3{,}9733456.2-10\,.$$

Formel (1) S. 371 giebt nunmehr zur Berechnung von ε:

$$\log \varrho'' \frac{F}{a_0^2} K = 3{,}9761196.0 \qquad \varrho'' \frac{F}{a_0^2} K = 9464{,}978''$$

Es ist aber $\sin \beta_2 = \sin \beta_3 = 0$, $\log e^2 \frac{\sin^2 \beta_1}{6} = 5{,}88582 - 10$, daher wird:

$$\varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left[(\sin\beta_1 - \sin\beta_2)^2 + (\sin\beta_2 - \sin\beta_3)^2 + (\sin\beta_3 - \sin\beta_1)^2\right]\frac{e^2}{6} = +\ 1{,}446''$$

Ferner ist:

$$-\varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left[\frac{b^2+c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 + \frac{a^2+c^2}{a_0^2}\sin^2\beta_2 + \frac{a^2+b^2}{a_0^2}\sin^2\beta_3\right]\frac{e^2}{12} = -\ 0{,}071''$$

Diese drei Glieder geben zusammen $\varepsilon = 9466{,}353''$

fehlerhaft um $+\ 0{,}078$.

Rechnet man mit der *geographischen* Breite $B_1 = 15^0\ 17'\ 25{,}46''$, so folgt für das 2. und 3. Glied bezw. $+\ 1{,}455 - 0{,}072$ und damit $\varepsilon = 9466{,}361''$

fehlerhaft um $+\ 0{,}070$.

Formel (6) S. 359 giebt $\varepsilon = 9340{,}346 + 122{,}877 = 9463{,}223''$

fehlerhaft um $+\ 3{,}208$.

Der Fehler vermindert sich etwas durch streng sphärische Rechnung, wonach sich findet:

$$\log \varepsilon' = \log \varrho'' \frac{F'}{a_0^2} K = 3{,}9761195.6 \text{ und damit } \varepsilon' = 9464{,}977''$$

fehlerhaft um $+\ 1{,}458$.

Formel (3) S. 371 giebt

für $A - A^*$:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{K_1 - K}{12} &&= -\ 0{,}00005191\\
&+\frac{m^2 - a^2}{60\,a_0^2}(1 + 2e^2) &&= -\qquad 19856\\
&+\frac{n^4 - a^4}{1512\,a_0^4} &&= -\qquad 17\\
&-\frac{m^2(m^2 - a^2)}{10080\,a_0^4} &&= +\qquad 12\\
&+\frac{e^2 \sin^2\beta_1}{45} &&= +\qquad 1025\\
&-\frac{14m^2 - 8a^2}{240\,a_0^2} e^2 \sin^2\beta_1 &&= -\qquad 103
\end{aligned}\right.$$

Summa $= -\ 0{,}00024130$

für $B - B^*$ und $C - C^*$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{K_2 - K}{12} &&= + 0{,}00002596 \\ &+ \frac{m^2 - b^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2) &&= + \qquad 9928 \\ &+ \frac{m^4 - b^4}{1512 a_0^4} &&= + \qquad 8 \\ &- \frac{m^2 (m^2 - b^2)}{10080 a_0^4} &&= - \qquad 6 \\ &- \frac{e^2 \sin^2 \beta_1}{90} &&= - \qquad 513 \\ &\frac{-5m + 8b^2}{240 a_0^2} e^2 \sin^2 \beta_1 &&= + \qquad 52 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = + 0{,}00012065.$$

Diese Zahlen sind mit $\varrho'' \frac{F}{a_0^2}$ zu multiplizieren. Es folgt dann:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}269'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}134''$$

fehlerhaft um $-0{,}026$ fehlerhaft um $+0{,}014$.

Führt man $\frac{\varepsilon}{3}$ nach Formel (1), wie oben erhalten, gleich $3155{,}451''$ ein, so wird:

$$A - A^* = 3153{,}182'' \qquad B - B^* = C - C^* = 3156{,}585''$$

fehlerhaft um $0{,}000$ fehlerhaft um $+0{,}040$.

Die *Formeln* (6) S. 359 führen zu folgenden Zahlen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{K_1 - K}{12} &&= - 0{,}00005191 \\ &\frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2} K^2 &&= - 0{,}00019846 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{K_2 - K}{12} &&= + 0{,}00002596 \\ &\frac{m^2 - b^2}{60 a_0^2} K^2 &&= + 0{,}00009923 \end{aligned}\right.$$

$$\text{Summa} = - 0{,}00025037 \qquad \text{Summa} = + 0{,}00012519.$$

Dieses mit $\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2}$ multipliziert, ergiebt:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}323'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}162''$$

fehlerhaft um $+0{,}028$ fehlerhaft um $-0{,}014$;

es sind also hier die Resultate ebenso genau wie bei der strengeren Rechnung. Wir werden weiterhin sehen, dafs die Formeln (6) S. 359 in der That für sehr grofse Dreiecke noch ausreichen, wenn nur ε nach einer strengeren Formel berechnet wird.

Formel (11) S. 374 giebt für den Excefs:

$$\left.\begin{array}{rl}
\varrho'' \dfrac{F}{a_0^2} K = & 9464{,}978'' \\
\log\left(\dfrac{e^2 m^2}{2a_0^2}\sin^2\beta_1\right) = 5{,}38236-10 \text{ und } -\varrho'' \dfrac{F}{a_0^2}\cdot\dfrac{e^2 m^2}{2a_0^2}\sin^2\beta_1 = - & 0{,}227 \\
+\varrho'' \dfrac{F}{a_0^2}\cdot\dfrac{b^2}{a_0^2}\cos^2\mathfrak{A}_b \cdot \dfrac{e^2}{3}\cos^2\beta_1 = [0{,}13768] \quad = + & 1{,}373 \\
+\varrho'' \dfrac{F}{a_0^2}\cdot\dfrac{3m^2}{a_0^3}\, b\cos\mathfrak{A}_b\cdot\dfrac{e^2}{6}\sin 2\beta_1 = [0{,}9645 - 10] \quad = + & 0{,}442
\end{array}\right\}$$

$$\varepsilon = 9466{,}566''$$

fehlerhaft um $-\ 0{,}135.$

Die Einführung der geographischen Breite B_1 ändert das Resultat nicht merklich, dagegen kommt ein anderer Wert heraus, wenn man in Formel (11) die Ecken cyklisch vertauscht d. h. alles was sich daselbst auf Ecke A und ihre Nachbarseiten bezieht, auf Ecke B oder C und deren Nachbarseiten bezieht. Man erhält z. B. für Ecke C, da aufser dem Hauptglied die andern Glieder bis auf eines verschwinden:

$$\left.\begin{array}{rl}
\varrho'' \dfrac{F}{a_0^2} K = & 9464{,}978'' \\
\varrho'' \dfrac{F}{a_0^2}\,\dfrac{b^2\cos^2 212^0 + a^2\cos^2 270^0 - ab\cos 212^0\cos 270^0}{a_0^2}\cdot\dfrac{e^2}{3} = & 1{,}485
\end{array}\right\}$$

$$\varepsilon = 9466{,}463''$$

fehlerhaft um $-\ 0{,}032.$

Dieser Wert resultiert auch, wenn man von Ecke B ausgeht.

Das arithmetische Mittel der 3 Werte von ε mit Ecke A, B und C als Ausgang führt zu dem Werte:

$$\varepsilon = 9466{,}497''$$

fehlerhaft um $-\ 0{,}066.$

Das Mittel dieses letzten Wertes und des Wertes aus Formel (1) S. 371 endlich giebt:

$$\varepsilon = 9466{,}425'' \text{ bezw. } 429''$$

fehlerhaft um $+\ 0{,}006 \quad +\ 0{,}002$

je nachdem man mit reduzierter oder geographischer Breite rechnet.

Nach *Hansens* Bemerkungen in der Abhandlung *Reflexionen* etc. S. 142 und 143 mufs man annehmen, dafs überhaupt in allen Fällen das soeben gebildete Mittel *besonders genau* ist, indem es ver-

mutlich die numerisch beträchtlichsten der höheren Glieder mit einschliefst.

Formel (13) S. 375 giebt:

für $A - A^*$:

$$\left\{\begin{array}{lr}
\frac{K_1 - K}{12} & = - 0{,}00005191 \\
+ \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2 - 6e^2 \sin^2\beta_1) = - & \cdot\ 19803 \\
+ \frac{20(n^4 - a^4) - 3m^2(m^2 - a^2)}{30240 a_0^4} = - & 5 \\
+ \frac{b^2 \cos^2 \mathfrak{A}_b}{45 a_0^2} e^2 \cos^2\beta_1 = + & 973 \\
\frac{-19a^2 + 14b^2}{360 a_0^3} b \cos \mathfrak{A}_b e^2 \sin^2\beta_1 = - & 207
\end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = - 0{,}00024233$$

für $B - B^*$ und $C - C^*$:

$$\left\{\begin{array}{lr}
\frac{K_2 - K}{12} & = + 0{,}00002596 \\
+ \frac{m^2 - b^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2) = + & 9928 \\
+ \frac{20(n^4 - b^4) - 3m^2(m^2 - b^2)}{30240 a_0^4} = + & 2 \\
- \frac{b^2 \cos^2 212^0}{90 a_0^2} e^2 = - & 526 \\
\text{letztes Glied} = & 0
\end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = + 0{,}00012000.$$

Diese Koefficienten geben mit $\varrho'' \frac{F}{a_0^2}$ multipliziert:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}279'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}129''.$$

Infolge des Einflusses höherer Glieder ist die Summe von

$$- 2{,}279 + 1{,}129 + 1{,}129$$

nicht null, sondern $- 0{,}021$. Korrigiert man diese Zahlen entsprechend um $\pm 0{,}007$, so wird

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}272'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}136''$$

fehlerhaft um $- 0{,}023$ fehlerhaft um $+ 0{,}012$.

Nimmt man $\frac{\varepsilon}{3} = 3155{,}499''$, entsprechend dem Mittelwerte der 3 Berechnungen nach Formel (11) S. 374, so wird erhalten:

$$A - A^* = 3153{,}227'' \qquad B - B^* = C - C^* = 3156{,}635''$$

fehlerhaft um — 0,045 fehlerhaft um — 0,010.

Verbinden wir aber die Mittelwerte der Ergebnisse von (3) und (13):

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 2{,}271'' \qquad B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 1{,}135''$$

mit dem Mittelwert der Ergebnisse von (1) und (11), d. h. mit $\varepsilon = 9466{,}425''$, so folgt:

$$A - A^* = 3153{,}204'' \qquad B - B^* = C - C^* = 3156{,}610''$$

fehlerhaft um — 0,022 fehlerhaft um + 0,015.

§ 13. **Maximalbeträge der Glieder 6. und 7. Ordnung.** Die Formeln des § 10 gestatten die Beantwortung der Frage, wie lange es zulässig ist, die Glieder 6. und 7. Ordnung bei Berechnung der Reduktionen $A - A^*$ u. s. f. zu vernachlässigen, also die Formeln (6) S. 359 zu benutzen.

Wenden wir uns zunächst zu dem Excefs ε, so kommen die folgenden Formeln in betracht. Einerseits nach S. 359 (6):

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F^*}{a_0^2}\left(K + \frac{m^2}{8 a_0^2} K^2 + Gl_4\right). \tag{1}$$

Andererseits nach S. 374 (11) und S. 367 (15) und (16), wobei wir aber im letzteren Falle die logarithmische Formel durch die direkte Formel nach S. 93 (2) ersetzen:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\varepsilon} = \varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left\{\begin{aligned} &K - \left[\frac{3m^2}{a_0^2}\sin^2\beta_1 - 2\frac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{a_0^2}\cos^2\beta_1\right]\frac{e^2}{6} \\ &+ \left[\frac{a^2+3b^2-c^2}{a_0^3}\,b\cos\mathfrak{A}_b + \frac{a^2-b^2+3c^2}{a_0^3}\,c\cos\mathfrak{A}_c\right]\frac{e^2}{12}\sin^2\beta_1 + Gl_6 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\varrho''\frac{F}{a_0^2} = \varrho''\frac{F^*}{a_0^2}\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{m^2}{8a_0^2}K + \frac{3m^4+n^4}{240a_0^4}K^2 \\ &+ \frac{(m^2-a^2)(K_1-K)+(m^2-b^2)(K_2-K)+(m^2-c^2)(K_3-K)}{120a_0^2} + Gl_6. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Formel (2) geht in (1) über, wenn man in (3) das 3. und 4. Glied der Parenthese und in (2) sämtliche Glieder bis aufs erste d. i. K vernachlässigt.

Das 3. Glied in (3):

$$\varrho''\frac{F^*}{a_0^2}\cdot\frac{3m^4+n^4}{240a_0^4}K^2 \tag{4}$$

hat seinen Maximalwert im gleichseitigen Dreieck. Wie schon S. 95 berechnet, beträgt es für $m = n = 0{,}1\,a_0$:

$$0{,}0015''. \tag{5}$$

Man kann daher für Dreiecke mit $m \leqq 0{,}1\,a_0$ das 3. Glied der Formel (3) unbedenklich fortlassen.

Dies gilt in noch höherem Maſse für das 4. Glied dieser Formel:

$$\varrho''\,\frac{F^*}{a_0^{\,2}}\cdot\frac{(m^2-a^2)\,(K_1-K)+(m^2-b^2)\,(K_2-K)+(m^2-c^2)\,(K_3-K)}{120\,a_0^{\,2}}. \tag{6}$$

Wir untersuchen dessen Maximum für konstantes m mit Rücksicht auf die Bedingungen (3) und (6) S. 360, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} F^{*2} &= \frac{1}{16}\left(6a^2m^2 - 3a^4 - (b^2-c^2)^2\right)\\ 3m^2 &= a^2+b^2+c^2\\ a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos(\mathfrak{A}_b-\mathfrak{A}_c)+a_0^{\,2}\,Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hierzu treten nach S. 360 (2) und S. 355 (9) noch folgende Bestimmungsgleichungen für $K - K_1$ u. s. f.:

$$\left.\begin{aligned} K-K_1 &= \frac{2}{3}\,e^2\sin 2\beta\,\frac{b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c}{a_0} + Gl_4\\ K-K_2 &= \frac{2}{3}\,e^2\sin 2\beta\,\frac{b\cos\mathfrak{A}_b - 2c\cos\mathfrak{A}_c}{a_0} + Gl_4\\ K-K_3 &= \frac{2}{3}\,e^2\sin 2\beta\,\frac{-2b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c}{a_0} + Gl_4. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Unter β kann man eine mittlere reduzierte Breite der 3 Ecken verstehen.

Man bemerkt nun sofort, daſs das zu untersuchende Glied (6) symmetrisch zu $b\cos\mathfrak{A}_b$ und $c\cos\mathfrak{A}_c$, $b\sin\mathfrak{A}_b$ und $\pm c\sin\mathfrak{A}_c$ ist. Dem Maximum entspricht daher:

$$b = c \qquad \mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b. \tag{9}$$

Substituieren wir dies, so geht der Ausdruck (6) mit Rücksicht darauf, daſs $b\cos\mathfrak{A}_b$ die positive oder negative Höhe h_a des Dreiecks ist, über in:

$$\pm\,\varrho''\,\frac{e^2\sin 2\beta}{180}\,\frac{(b^2-a^2)\,a h_a^2}{a_0^{\,5}}$$

oder

$$\pm\,\varrho''\,\frac{e^2\sin 2\beta}{160}\,\frac{(2m^2-a^2)\,(m^2-a^2)\,a}{a_0^{\,5}}. \tag{10}$$

Dieses hat sein Maximum bei $a^2 = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{10}\,m^2$. Zu dem kleineren a

welches sehr nahe gleich $\frac{m}{2}$ ist, gehört das gröfsere Maximum; es beträgt für $\beta = 45^0$ und $m = 0{,}1\,a_0$:

$$\pm 0{,}00006''. \tag{11}$$

Das 2. Glied der Formel (2) ist angenähert gleich

$$-\rho'' \frac{F^*}{a_0^2} \cdot \frac{m^2}{2\,a_0^2}\, e^2 \sin^2 \beta_1. \tag{12}$$

Es erhält sein Maximum fürs gleichseitige Dreieck und zwar beträgt dasselbe bei $\beta_1 = 90^\sigma$ für $m = 0{,}1\,a_0$:

$$-\,0{,}030''. \tag{13}$$

Das 3. Glied der Formel (2) ist angenähert gleich

$$+\rho'' \frac{F^*}{a_0^2} \frac{b^2 \cos^2 \mathfrak{A}_b + c^2 \cos^2 \mathfrak{A}_c - bc \cos \mathfrak{A}_b \cos \mathfrak{A}_c}{3\,a_0^2}\, e^2 \cos^2 \beta_1. \tag{14}$$

Wenn dasselbe ein Maximum werden soll unter Voraussetzung konstanten Wertes von m, so zeigen die hierbei zu beachtenden Bedingungen (7), dafs $b = c$ und entweder $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ oder $180^0 - \mathfrak{A}_b$ sein mufs. Denn das Glied (14) und die (7) sind symmetrisch zu $b \cos \mathfrak{A}_c$ und $\pm\, c \cos \mathfrak{A}_c$, $b \sin \mathfrak{A}_b$ und $\pm\, c \sin \mathfrak{A}_c$.

Für $b = c$, $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ liegt das Dreieck symmetrisch zum Meridian von A, $b \cos \mathfrak{A}_b$ ist wieder die Höhe $\pm\, h_a$ und das Glied wird gleich

$$+\rho'' \frac{a h_a^3}{6\,a_0^4}\, e^2 \cos^2\beta_1 \tag{15}$$

mit $h_a = \sqrt{\frac{3\,(2\,m^2 - a^2)}{4}}$. Das Maximum tritt ein bei $a^2 = \frac{1}{2}\, m^2$, $\tan \mathfrak{A}_b = \frac{1}{3}$ mit $\mathfrak{A}_b = 18{,}4^0$ oder $198{,}4^0$, vergl. Fig. 32. Es beträgt:

Fig. 32.

$$+\rho'' \frac{9\,m^4}{64\,a_0^4}\, e^2 \cos^2 \beta_1. \tag{16}$$

Insbesondere ist sein Betrag für $\beta_1 = 0^0$ und $m = 0{,}1\,a_0$:

$$+\,0{,}019''. \tag{17}$$

Für $b = c$, $\mathfrak{A}_c = 180^0 - \mathfrak{A}_b$ liegt das Dreieck östlich oder westlich vom Meridian A, symmetrisch zu dessen Perpendikel. Das Glied (14) wird hier, da $b \cos \mathfrak{A}_b$ jetzt $\pm \frac{a}{2}$ ist, gleich

$$+\rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_1}{16\,a_0^4}\, a^2 \sqrt{6\,a^2 m^2 - 3\,a^4} \tag{18}$$

und ein Maximum für $a^2 = \frac{3}{2} m^2$. Dieses beträgt soviel wie (16), ist also auch für $\beta_1 = 0^0$ und $m = 0{,}1 a_0$ so grofs wie (17). Dabei ist jedoch $\mathfrak{A}_c = 45^0$ oder 225^0; vergl. Fig. 33.

Das 4. Glied der Formel (2) ist angenähert gleich

$$\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \left(\frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{a_0^3} b \cos \mathfrak{A}_b + \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{a_0^3} c \cos \mathfrak{A}_c \right) \frac{e^2}{12} \sin 2\beta_1. \quad (19)$$

Mit Rücksicht auf die Bedingungen (7) ersieht man leicht, dafs bei konstantem m für ein Maximum $b = c$ und $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ erforderlich ist, womit der Ausdruck (19) in

$$\varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \frac{m^2 b \cos \mathfrak{A}_b}{2 a_0^3} e^2 \sin 2\beta_1$$

Fig. 33.

übergeht. Nun ist $b \cos \mathfrak{A}_b$ jetzt wieder $\pm h_a$, daher der Ausdruck (19) auch gleich

$$\pm \varrho'' \frac{m^2 a h_a^2}{4 a_0^5} e^2 \sin 2\beta_1. \quad (20)$$

Wegen $h_a^2 = \frac{3}{4}(2m^2 - a^2)$ wird dies ein Maximum für $a = m\sqrt{\frac{2}{3}}$ wobei $h_a = m$. Das Maximum beträgt

$$\mp \varrho'' \frac{m^5 \sqrt{6}}{12 a_0^5} e^2 \sin 2\beta_1. \quad (21)$$

Insbesondere hat man für dasselbe bei $\beta_1 = 45^0$ und $m = 0{,}1 a_0$:

$$\pm 0{,}003''. \quad (22)$$

Überblickt man nunmehr die Maximalwerte der einzelnen Glieder, so zeigt sich, dafs für $m \leq 0{,}1 a_0$ nur 2 Glieder in betracht kommen, nämlich das 2. und 3. Glied in ε. Um das Zusammenwirken derselben festzustellen, betrachten wir noch ihre Summe für $\beta_1 = 45^0$. Mit Rücksicht auf das Obige erkennt man leicht, dafs 2 Maxima eintreten.

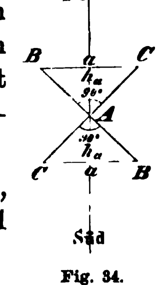


Fig. 34.

Man erhält erstens für $b = c$ und $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$, wobei das Dreieck symmetrisch zum Meridian von A liegt, Fig. 34:

$$- \varrho'' \frac{e^2}{24} \frac{a h_a}{a_0^4} (3m^2 - 2h_a^2); \quad (23)$$

zweitens für $b = c$ und $\mathfrak{A}_c = 180^0 - \mathfrak{A}_b$, wobei das Dreieck symmetrisch zum Perpendikel von A liegt, Fig. 35:

$$-\varrho'' \frac{e^2}{32 a_0^4} (2m^2 - a^2) \sqrt{3(2m^2 - a^2) a^2}. \tag{24}$$

(23) wird ein Maximum für $a = m\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $\mathfrak{A}_b = 45$ oder 225^0; (24) dagegen für $a = \frac{m}{\sqrt{2}}$, $\tan \mathfrak{A}_c = 3$, $\mathfrak{A}_c = 71{,}6^0$ oder $251{,}6^0$. Beide sind gleich

$$-\varrho'' \frac{9e^2}{128} \frac{m^4}{a_0^4}; \tag{25}$$

Das ist für $m = 0{,}1 a_0$:

$$-0{,}010''. \tag{26}$$

Fig. 35.

In Bezug auf die beiden beträchtlichsten Glieder der Formel (2) hat man nunmehr folgende Zusammenstellung, welche durch Mitnahme der kleinen vernachlässigten Glieder nur unerheblich modificiert werden würde:

Maximaler Fehler der Formel (1) *im Vergleich zu* (2)
für $m = 0{,}1 a_0$.

B_1	Fehler		
$B_1 = 0^0$	$+ 0{,}019''$	Fig. 32 und 33.	
45	$- 0{,}010$	Fig. 34 und 35.	(27)
90	$- 0{,}030$	Beliebig gelegenes gleichseitiges Dreieck.	

§ 14. Fortsetzung. Maximalbeträge der Glieder 6. und 7. Ordnung in $A - A^*$ u. s. f. Um die Formel (6) S. 359 für $A - A^*$, nämlich

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{a_0^2}\left(\frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2} K^2 + \frac{K_1 - K}{12}\right) + Gl_6 \tag{1}$$

mit der strengen Formel (13) S. 375 zu vergleichen, führen wir in dieser für F den Inhalt F^* ein mittelst der Relation (3) S. 384. Es wird dann:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho'' \frac{F^*}{a_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{m^2 - a^2}{60 a_0^2}(1 + 2e^2 - 6e^2 \sin^2\beta_1) + \frac{K_1 - K}{12}\left(1 + \frac{m^2}{8 a_0^2}\right) \\ \qquad + \frac{(n^4 - a^4) + 3m^2(m^2 - a^2)}{1512 a_0^4} \\ - \frac{b^2 \cos^2 \mathfrak{A}_b + c^2 \cos^2 \mathfrak{A}_c - 4bc \cos \mathfrak{A}_b \cos \mathfrak{A}_c}{90 a_0^2} e^2 \cos^2 \beta_1 \\ + \left[\begin{array}{l} \frac{-19a^2 + b^2 + 13c^2}{a_0^3} b \cos \mathfrak{A}_b \\ + \frac{-19a^2 + 13b^2 + c^2}{a_0^3} c \cos \mathfrak{A}_c \end{array} \right] \frac{e^2}{720} \sin 2\beta_1 + Gl_6 \end{array} \right\}.$$

Hierin setzen wir noch nach S. 360 (2):

$$\frac{K_1 - K}{12}\,\frac{m^2}{8a_0^2} = -\frac{(5b\cos\mathfrak{A}_b + 5c\cos\mathfrak{A}_c)\,m^2}{a_0^3}\,\frac{e^2}{720}\sin 2\beta_1 + \cdots$$

sowie:

$$\begin{aligned} 1 + 2e^2 - 6e^2\sin^2\beta_1 &= K_1^2 - 2e^2\sin^2\beta_1 + \cdots \\ &= K^2 + (K_1^2 - K^2) - 2e^2\sin^2\beta_1 + \cdots \\ &= K^2 - \frac{4}{3}\,\frac{b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c}{a_0}\,e^2\sin 2\beta_1 - 2e^2\sin^2\beta_1 + \cdots. \end{aligned}$$

Damit wird erhalten:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A - A^*} = \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \varrho''\frac{F^*}{a_0^2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{m^2 - a^2}{60a_0^2}K^2 + \dfrac{K_1 - K}{12} + \dfrac{(n^4 - a^4) + 3m^2(m^2 - a^2)}{1512a_0^4} \\ \qquad - \dfrac{m^2 - a^2}{30a_0^2}\,e^2\sin^2\beta_1 \\ \quad - \dfrac{b^2\cos^2\mathfrak{A}_b + c^2\cos^2\mathfrak{A}_c - 4bc\cos\mathfrak{A}_b\cos\mathfrak{A}_c}{90a_0^2}\,e^2\cos^2\beta_1 \\ - \left[\begin{array}{l} \dfrac{5a^2 + 3b^2 - 3c^2}{a_0^3}\,b\cos\mathfrak{A}_b \\ + \dfrac{5a^2 - 3b^2 + 3c^2}{a_0^3}\,c\cos\mathfrak{A}_c \end{array}\right]\dfrac{e^2}{360}\sin 2\beta_1 + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Das 3. Glied in der Parenthese von (2) beträgt, wie der Vergleich mit (4) S. 384 zeigt, für $m = 0{,}1a_0$ sicher nur wenige Zehntausendstelsekunden.

Das 4. Glied ist ein Maximum für $a^2 = m^2(1 \pm \sqrt{0{,}5})$, weil für diesen Wert von a^2 nach S. 96 (6) und (7) das Produkt $F^*(m^2 - a^2)$ ein Maximum wird. Es beträgt darnach bei $m = 0{,}1a_0$ im Maximum:

$$\pm\, 0{,}0010''\sin^2\beta_1. \quad (3)$$

Für das 5. Glied erhält man mit Rücksicht auf den vorigen Paragraphen sofort als Maximum $\frac{1}{15}$ des Ausdruckes (16) S. 386 d. i. bei $m = 0{,}1a_0$ der Betrag

$$\pm\, 0{,}0013''\cos^2\beta_1. \quad (4)$$

Das 6. Glied wird ein Maximum für $b = c$ und $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ mit $a = \sqrt{\frac{6}{5}}\,m$, $b\cos\mathfrak{A}_b = \pm h_a = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}\,m$. Es wird für $m = 0{,}1a_0$ gleich

$$\pm\, 0{,}00015''\sin 2\beta_1. \quad (5)$$

Aus dem Vorstehenden wird ersichtlich, dafs die Formel (1) völlig genügt, solange $m \leq 0{,}1a_0$ ist. Mit Rücksicht auf die Ergebnisse des vorigen Paragraphen kann man daher sagen:

Die Formeln (6) S. 359 *genügen in der Regel zur Berechnung eines geodätischen Dreiecks, so lange*

$$m < 0{,}1\,a_0 \text{ oder } 637^{km}. \tag{6}$$

Ebenso lange gelten die Formeln (3) ebenda, denn die entsprechenden Formeln im System (3) und (6) unterscheiden sich nur durch die Reduktion vom sphärischen Dreieck auf die Ebene, für welche Reduktio die S. 359 angewandte Formel nach S. 96 jedenfalls genügt.

Auch die Formeln (1) S. 362 gelten ebenso lange. Die Entwicklung daselbst zeigt nämlich, dafs es dabei wesentlich darauf ankommt, ob es zulässig ist, A mit A' zu vertauschen. Abgesehen hiervon handelt es sich nur um die Berechnung des sphärischen Excesses aus 2 Seiten und dem Zwischenwinkel und dafür reicht nach S. 99 die angewandte Formel vollkommen aus. Nun ist, wie man aus § 6 S. 362 leicht entnimmt, der Fehler in ε durch Vertauschung von A und A' angenähert gleich

$$-\,\varrho''\frac{F^*}{a_0^2}\,\frac{[K_1 - K]\,b\,c\cos A}{24\,a_0^2}. \tag{7}$$

Setzt man hierin für $K_1 - K$ den Ausdruck (2) S. 360, so folgt für (7) in ausreichender Annäherung:

$$\varrho''\frac{e^2\sin 2\beta_1}{36}\,\frac{F^*(b\cos\mathfrak{A}_b + c\cos\mathfrak{A}_c)\,b\,c\cos(\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_c)}{a_0^5}.$$

Das Maximum dieses Ausdrucks kann nur mit $b = c$, $\mathfrak{A}_c = 360^0 - \mathfrak{A}_b$ bestehen. Führt man aber $h_a = \pm\, b\cos\mathfrak{A}_b = \sqrt{\frac{3}{4}\,(2m^2 - a^2)}$ ein, so geht derselbe über in

$$\pm\,\varrho''\frac{e^2\sin 2\beta_1}{144}\,\frac{a\,h_a^2\,(4h_a^2 - a^2)}{a_0^5}. \tag{8}$$

Bei konstantem m wird dies für $a^2 = \frac{21 - \sqrt{201}}{20}\,m^2$ am gröfsten und zwar bei $m = 0{,}1\,a_0$ gleich

$$\pm\,0{,}00032''\sin 2\beta_1. \tag{9}$$

Dieser Betrag ist ganz unerheblich. Die Formeln (1) des § 6 S. 362 genügen also in der That ebensoweit wie die (6) des § 4 S. 359, vorausgesetzt, dafs a^2 genügend scharf berechnet wird. Berechnet man dies, wie in § 6 S. 362 (1) angenommen, so ist es nach S. 98 (4) näherungsweise mit dem Fehler behaftet:

$$-\,\frac{b^2c^2\sin^2 A}{3\,a_0^4}\ \text{ d. i. } -\frac{F^{*2}}{12\,a_0^4}. \tag{10}$$

Man sieht leicht, dafs der Einflufs hiervon auf ε und $A - A^*$ u. s. f. ein Maximum wird fürs gleichseitige Dreieck und zwar näherungsweise

$$\left.\begin{array}{l} \text{in } \varepsilon \text{ gleich } - \varrho'' \dfrac{F^{*3}}{96 a_0^6} \\ \text{in } A - A^* \text{ gleich } + \varrho'' \dfrac{F^{*3}}{1080 a_0^6} \end{array}\right\} \text{mit } F^* = \frac{1}{4} m^2 \sqrt{3}. \tag{11}$$

Diese Werte sind für $m = 0{,}1 a_0$ völlig unerheblich, denn sie betragen nur:

$$- 0{,}00017'' \text{ bezw. } + 0{,}00002''. \tag{12}$$

§ 15. **Zahlenbeispiel III.** Dem auf S. 200 als Beispiel behandelten Sehnendreieck mit Horizontalwinkeln entspricht nachstehendes von kürzesten Linien gebildete geodätische Dreieck:

		Azimut α.	Winkel.	Meter.
Berlin	K	239° 33′ 0,6889″	95° 19′ 5,1218″	$\log KW = 5{,}8907956.989$
	W	334 52 5,8107		
Königsberg	W	23 11 41,5017	42 4 27,8633	$\log WB = 5{,}7182160.562$
	B	65 16 9,3650		
Wien	B	157 10 7,2216	42 48 6,1935	$\log BK = 5{,}7242591.353$
	K	199 58 13,4151		
		$180^0 + \varepsilon = 180^0\ 11'\ 39{,}1786''$		

	Geographische Breite.	Reduzierte Breite.
Berlin	$B_1 = 52^0\ 30'\ 16{,}7''$	$\beta_1 = 52^0\ 24'\ 43{,}01137''$
Königsberg	$B_2 = 54\ \ 42\ \ 50{,}6$	$\beta_2 = 54\ \ 37\ \ 24{,}75639$
Wien	$B_3 = 48\ \ 12\ \ 35{,}5$	$\beta_3 = 48\ \ 6\ \ 52{,}27604$

Die Azimute und Entfernungen sind aus den Angaben von S. 200 in derselben Weise abgeleitet, wie für die Linie BK allein es S. 339, 182 und 341 geschehen ist. Für das Verfahren ergab sich dabei eine Kontrole durch direkte Behandlung der Linie BK S. 256 u. ff.

Werden die Punkte B, K, W mit den Indices 1, 2, 3 ausgezeichnet, so ist zur Reduktion der Azimute nach Formel (5) S. 337:

$$a_{1.3} - \alpha_{1.3} = [13{,}4990]\,\frac{\cos^2 B_1 \sin 2\alpha_{1.3}}{\varrho_{\alpha_1}\varrho_{n_1}} + [18{,}616]\,\frac{\sin 2B_1 \sin \alpha_{1.3}}{a_0\,\varrho_\alpha\,\varrho_{n_1}},$$

$$a_{3.1} - \alpha_{3.1} = [13{,}4990]\,\frac{\cos^2 B_3 \sin 2\alpha_{3.1}}{\varrho_{\alpha_3}\varrho_{n_3}} + [18{,}616]\,\frac{\sin 2B_3 \sin \alpha_{3.1}}{a_0\,\varrho_{\alpha_3}\,\varrho_{n_3}},$$

$\log \varrho_{\alpha_1} = 6{,}8047$ $\log \varrho_{\alpha_3} = 6{,}8044$ $\log \varrho_{n_1} = 6{,}8056$ $\log \varrho_{n_3}' = 6{,}8055$

und hiermit:

$$a_{1.3} - \alpha_{1.3} = -\,0{,}2205 - 0{,}0065 = -\,0{,}2270''$$

$$a_{3.1} - \alpha_{3.1} = -\,0{,}2460 + 0{,}0061 = -\,0{,}2399\,.$$

Ferner hat man:

$$a_{2.3} - \alpha_{2.3} = [13{,}8442]\,\frac{\cos^2 B_2 \sin 2\alpha_{2.3}}{\varrho_{\alpha_2}\varrho_{n_2}} + [19{,}133]\,\frac{\sin 2B_2 \sin \alpha_{2.3}}{a_0\,\varrho_{\alpha_2}\,\varrho_{n_2}},$$

$$a_{3.2} - \alpha_{3.2} = [13{,}8442]\,\frac{\cos^2 B_3 \sin 2\alpha_{3.2}}{\varrho_{\alpha_3}\varrho_{n_3}} + [19{,}133]\,\frac{\sin 2B_3 \sin \alpha_{3.2}}{a_0\,\varrho_{\alpha_3}\,\varrho_{n_3}},$$

$\log \varrho_{\alpha_2} = 6{,}8048$ $\log \varrho_{\alpha_3} = 6{,}8043$ $\log \varrho_{n_2} = 6{,}8056$ $\log \varrho_{n_3} = 6{,}8055$

und hiermit:

$$a_{2.3} - \alpha_{2.3} = +\,0{,}4142 + 0{,}0194 = +\,0{,}4336''$$

$$a_{3.2} - \alpha_{3.2} = +\,0{,}4891 - 0{,}0177 = +\,0{,}4714\,.$$

Zur Probe wurden die Gleichungen gerechnet:

$$\cos\beta_1 \sin\alpha_{1.3} = -\cos\beta_3 \sin\alpha_{3.1}$$

$$\cos\beta_2 \sin\alpha_{2.3} = -\cos\beta_3 \sin\alpha_{3.2}\,.$$

Es fand sich bezw.:

$\log\cos\beta_1$	$= 9{,}7853155.518 \quad -10$	$\log\cos\beta_3$	$= 9{,}8245448.818 \quad -10$
$\log\sin\alpha_{1.3}$	$= 9{,}6280829.617_n - 10$	$\log\sin\alpha_{3.1}$	$= 9{,}5888536.313 \quad -10$
Summa	$= 9{,}4133985.135_n - 10$	Summa	$= 9{,}4133985.131 \quad -10$
$\log\cos\beta_2$	$= 9{,}7626381.918 \quad -10$	$\log\cos\beta_3$	$= 9{,}8245448.818 \quad -10$
$\log\sin\alpha_{2.3}$	$= 9{,}5953413.007 \quad -10$	$\log\sin\alpha_{3.2}$	$= 9{,}5334346.092_n - 10$
Summa	$= 9{,}3579794.925 \quad -10$	Summa	$= 9{,}3579794.910_n - 10.$

Die Differenzen deuten auf Ungenauigkeiten der Azimute von einigen wenigen Einheiten der 4. Decimale.

Für die Reduktion der Sehne BW diente zunächst Formel (11) S. 181. Zu dem mittleren Azimut $156^0\,1'\,6''$ in der mittleren Breite $50^0\,21'\,26''$ gehört $\log\varrho = 6{,}8045141$. Hiermit wird für die kürzeste Distanz BW:

$$\log s = 5{,}7180944.366 + 1215.440 + .748$$
$$= 5{,}7182160.554.$$

Rechnet man dagegen mit dem Mittel der $\log \rho$ für 52° 30′ 17″ Breite und 154° 52′ 6″ Azimut einerseits, sowie 48° 12′ 36″ Breite und 157° 10′ 7″ Azimut andrerseits, welche nach strenger Rechnung bezw. betragen:

$$\left.\begin{matrix} 6{,}8046724 \\ 6{,}8043503 \end{matrix}\right\} \text{Mittel} = 6{,}8045113,$$

so wird nach den Formeln (10) und (11) S. 181 erhalten für BW:

$$\begin{array}{rrl} \log s = & \left.\begin{array}{r} 5{,}7180944.366 \\ +\quad 1215.456 \\ +\quad 0.748 \end{array}\right\} & \text{nach (11)} \\ & -\quad 0.008 & \text{nach (10)} \\ \hline \log s = & 5{,}7182160.562. & \end{array}$$

Für KW findet sich zu der mittleren geographischen Breite 51° 27′ 44″ und dem mittleren Azimut 21° 34′ 57″ in strenger Rechnung

$$\log \rho = 6{,}8055536$$

und hieraus nach Formel (11) S. 181:

$$\log s = 5{,}8905264.742 + 2688.558 + 3.662$$
$$= 5{,}8907956.962$$

Schärfer ist die folgende Berechnung von $\log s$, bei welcher die Glieder 6. Ordnung in $\log s$ vollständig berücksichtigt werden.

Es ist $\log \rho$ für 48° 12′ 36″ Breite und 19° 58′ 13″ Azimut, sowie 54° 42′ 51″ Breite und 23° 11′ 42″ Azimut nach strenger Rechnung bezw.:

$$\left.\begin{matrix} 6{,}8043073 \\ 6{,}8047889 \end{matrix}\right\} \text{Mittel} = 6{,}8045481\,.$$

Hiermit folgt nach S. 181 (10) und (11) unter Beifügung eines aus der 1. Formel (4) S. 30 leicht zu entnehmenden Gliedes:

$$\left\{\begin{array}{rr} \log k = & 5{,}8905264.742 \\ + \frac{1}{6} M\left(\frac{k}{2\rho}\right)^2 = + & 2688.623 \\ + \frac{11}{180} M\left(\frac{k}{2\rho}\right)^4 = + & 3.662 \\ + \frac{191}{5670} M\left(\frac{k}{2\rho}\right)^6 = + & 0.007 \\ + M\frac{e^2}{40}\frac{k^4}{\rho^4}(\cos^2 B \cos^2 a - \sin^2 B) = - & 0.045 \end{array}\right.$$

$$\text{Für } KW: \quad \log s = 5{,}8907956.989\,.$$

Für die 3 Ecken des Dreiecks ergiebt sich nunmehr behufs Anwendung der Formeln (1) S. 362:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= 0{,}9982777 \\ K_2 &= 0{,}9977849 \\ K_3 &= 0{,}9992626 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} K &= 0{,}9984417 \\ \log K &= 9{,}9993227-10 \end{aligned}$$

$$\log \frac{\varrho'' K}{2a_0^2} = 1{,}4034309-10 \qquad \log \frac{MK}{24 a_0^2} = 4{,}6476-20$$

$\log a = 5{,}8907957$	$A = 95^0\, 19'\ 5{,}12''$	$\log \sin A = 9{,}9981266-10$
$\log b = 5{,}7182161$	$B = 42\ \ 4\ 27{,}86$	$\log \sin B = 9{,}8261364-10$
$\log c = 5{,}7242591$	$C = 42\ 48\ \ 6{,}19$	$\log \sin C = 9{,}8321660-10$

$a^2 = 10^{10}.\ 60{,}477$	$4a^2 - 3m^2 = 126{,}026 . 10^{10} = [12{,}1005\ ]$
$b^2 = 10^{10}.\ 27{,}317$	$4b^2 - 3m^2 = -6{,}614 . 10^{10} = [10{,}8205_n]$
$c^2 = 10^{10}.\ 28{,}088$	$4c^2 - 3m^2 = -3{,}530 . 10^{10} = [10{,}5478_n]$
$3m^2 = 10^{10}. 115{,}882$	Probe: Sa. $= 115{,}882 . 10^{10}$.

Damit wird erhalten aus

$$\begin{aligned} &A, b \text{ und } c: \ \log \varepsilon = 2{,}8440327 + 5598 = 2{,}8445925 \\ &B, a \text{ und } c: \qquad\quad 2{,}8446221 - 294 = \qquad 5927 \\ &C, a \text{ und } b: \qquad\quad 2{,}8446087 - 157 = \qquad 5930 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon = 699{,}1856'' \\ 1860 \\ 1864 \end{aligned}\right\} \ \overset{\text{im Mittel}}{11'\ 39{,}1860''}\,.$$

Dieser Wert ist etwas zu grofs und zwar um 0'',0074.

Es ist jetzt weiter für $A - A^*$, u. s. f., nach den Formeln (1) S. 362:

$\log (K_1 - K) = 6{,}2151_n-10$	$\log (m^2 - a^2) = 11{,}3395_n$
$\log (K_2 - K) = 6{,}8174_n-10$	$\log (m^2 - b^2) = 11{,}0535$
$\log (K_3 - K) = 6{,}9143\ -10$	$\log (m^2 - c^2) = 11{,}0229$
$\log \frac{\varepsilon}{12K} = 1{,}7661\ -10$	$\log \frac{\varepsilon K}{60 a_0^2} = 7{,}4565-20$

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - 0{,}0096'' - 0{,}0625'' = \frac{\varepsilon}{3} - 0{,}0721''$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} - 0{,}0383 + 0{,}0324 = \frac{\varepsilon}{3} - 0{,}0059$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + 0{,}0479 + 0{,}0301 = \frac{\varepsilon}{3} + 0{,}0780\,.$$

Mit $\varepsilon = 699{,}1786$ ergeben sich hieraus die Werte:

$$\left\{\begin{array}{lrrr} A^* = & 95^0 & 15' & 12{,}1343'' \\ B^* = & 42 & 0 & 34{,}8097 \\ C^* = & 42 & 44 & 13{,}0560 \end{array}\right.$$

$$\text{Summa} = 180 \quad 00 \quad 00{,}0000\,.$$

Die Sinus dieser Winkel müssen sich wie die Seiten a, b, c verhalten. In der That hat man:

$\log a = 5{,}8907956.989$	$\log b = 5{,}7182160.562$	$\log c = 5{,}7242591.353$
$\log \sin A^* = 9{,}9981719.226$	$\log \sin B^* = 9{,}8255922.810$	$\log \sin C^* = 9{,}8316353.602$
$5{,}8926237.763$	$5{,}8926237.752$	$5{,}8926237.751$

Die Übereinstimmung dürfte genügen.

Vorstehende Ergebnisse benutzen wir endlich noch zu einer strengen Berechnung des Excesses nach *Weingartens* Formel (1) S. 371.

Wir haben vorerst mittelst der Winkel des ebenen Dreiecks $\log F^* = 11{,}4406471.1$ und hieraus mittelst Formel (16) S. 367:

$$\log F = 11{,}4406471.1 + 5147.7 + 3.5 = 11{,}4411622\,.$$

Jetzt wird:

$$\varrho'' \frac{F}{a_0^2} K = [2{,}8445931] = 699{,}1866''\,.$$

Es ist weiter:

$$\sin B_1 = 0{,}7934 \quad \sin B_2 = 0{,}8163 \quad \sin B_3 = 0{,}7456$$

und hiermit:

$$\varrho'' \frac{F}{a_0^2} \frac{e^2}{6} \left\{ \begin{array}{c} (\sin B_1 - \sin B_2)^2 + (\sin B_2 - \sin B_3)^2 \\ + (\sin B_3 - \sin B_1)^2 \end{array} \right\} = + 0{,}0061''$$

$$- \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \frac{e^2}{12} \left[\frac{b^2 + c^2}{a_0^2} \sin^2 B_1 + \frac{a^2 + c^2}{a_0^2} \sin^2 B_2 + \frac{a^2 + b^2}{a_0^2} \sin^2 B_3 \right] = - 0{,}0136\,.$$

Dies giebt zusammen $-0{,}0075''$. Man hat daher genauer:

$$\varepsilon = 699{,}1791''\,,$$

welcher Wert bis auf $0{,}0005''$ mit demjenigen übereinstimmt, der aus den Horizontalwinkeln abgeleitet worden ist.

Auf $A - A^*$ u. s. f. haben die höheren Glieder, um welche sich

die Formeln S. 371 u. ff. von denen S. 362 unterscheiden, nur einen Einflufs von durchschnittlich 0,0001″.

§ 16. **Bessels Formeln zur Reduktion eines geodätischen Dreiecks.** Bereits im Jahre 1822 hat *Bessel* in den Astronom. Nachr. Bd. 1 Nr. 6 S. 85 (*Abhandlungen* Bd. 3 S. 3) eine Formel zur Reduktion der Winkel eines geodätischen Dreiecks auf ein sphärisches mit denselben Seiten angegeben, ohne jedoch ihre Entwicklung zu zeigen. Die Formel enthält alle Glieder, welche von e^2 abhängen, vollständig, vernachlässigt aber die höheren Potenzen von e^2. Sie kann dadurch erhalten werden, dafs man die Formeln des § 9 S. 232 u. ff. auf Glieder mit e^2 abkürzt und alsdann auf die 3 Seiten eines geodätischen Dreiecks anwendet. (Die Entwicklung hat Ähnlichkeit mit derjenigen des § 4 S. 329 u. ff.; in den Endresultaten treten auch ähnliche Parenthesen-Ausdrücke auf wie in (10) S. 332.)

Hansen hat die Entwicklung in seinen *Geodätischen Untersuchungen* S. 116—136 durchgeführt (vergl. auch S. 104) und schliefslich eine interessante Abkürzung der Ausdrücke für mäfsig grofse Dreiecksseiten gegeben. Darnach hat man zur Reduktion der Winkel A, B, C im geodätischen Dreieck auf die Winkel A'', B'', C'' des sphärischen Dreiecks mit denselben Seiten die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} A - A'' &= \frac{1}{12}\, e^2 \frac{F}{a_0^2} (2\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3) + Gl_6 \\ B - B'' &= \frac{1}{12}\, e^2 \frac{F}{a_0^2} (\cos 2\beta_1 + 2\cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3) + Gl_6 \\ C - C'' &= \frac{1}{12}\, e^2 \frac{F}{a_0^2} (\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + 2\cos 2\beta_3) + Gl_6 \,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hierbei ist als Kugelradius der Äquatorialradius a_0 vorausgesetzt. Berücksichtigt man dies, sowie die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= 1 + e^2 \cos 2\beta_1 + Gl_4 \\ K_2 &= 1 + e^2 \cos 2\beta_2 + Gl_4 \\ K_3 &= 1 + e^2 \cos 2\beta_3 + Gl_4 \,, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

so kann man leicht von den Formeln (1) zu den Formeln (3) S. 358 gelangen, wie folgt.

Letztere setzen als Kugelradius $a_0 : \sqrt{K}$ voraus, K das arithmetische Mittel von K_1, K_2 und K_3. Geht man aber vom sphärischen Dreieck auf der Kugel mit dem Radius a_0 erst zum ebenen Dreieck über und dann von hieraus auf die Kugel vom Radius $a_0 : \sqrt{K}$, so ist unter Beachtung der Formeln S. 92:

$$A'' - A' = \frac{F^*}{3a_0^2}(1-K) + Gl_6$$

$$= -\frac{1}{9}e^2\frac{F}{a_0^2}(\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3) + Gl_6\,.$$

Addiert man diese Gleichung zur 1. Gleichung (1), so folgt ein Ausdruck für $A - A'$, woraus durch Analogie auch $B - B'$ und $C - C'$ hervorgeht. Das Resultat ist darnach:

$$\left.\begin{aligned} A - A' &= \frac{1}{12}e^2\frac{F}{a_0^2}\left(\cos 2\beta_1 - \frac{\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3}{3}\right) + Gl_6 \\ B - B' &= \frac{1}{12}e^2\frac{F}{a_0^2}\left(\cos 2\beta_2 - \frac{\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3}{3}\right) + Gl_6 \\ C - C' &= \frac{1}{12}e^2\frac{F}{a_0^2}\left(\cos 2\beta_3 - \frac{\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3}{3}\right) + Gl_6\,, \end{aligned}\right\} (3)$$

welches Formelsystem nun augenscheinlich mit (3) auf S. 358 übereinstimmt.

Es läfst sich nicht verkennen, dafs die im Vorstehenden angedeutete Entwicklung den Vorteil vor der S. 348 u. ff. gegebenen hat, weniger Vorbereitungen zu erfordern. Sie wird sich auch namentlich (im Vergleich zu *Hansen* a. a. O.) noch sehr vereinfachen, wenn von vornherein nur mäfsig grofse Werte der Dreiecksseiten vorausgesetzt werden. Dagegen scheint es sehr schwierig zu sein, in diese Entwicklung auch höhere Potenzen von e^2 aufzunehmen, was bei jener keineswegs der Fall ist.

Hansen benutzt auf S. 210 bis 218 seiner Geodätischen Untersuchungen die allgemeinen *Bessel*schen Formeln noch zur Näherungsauflösung mehrerer Aufgaben, die sich auf eine durch 8 Stücke bestimmte geodätische Linie beziehen, welche dabei eine beträchtliche Länge haben kann. Insbesondere betrachtet er den Fall gegebener Breiten der Endpunkte und gegebener linearer Länge der Linie. Diese selten auftretende Aufgabe kann selbstverständlich auch durch successive Annäherung mittelst der hier gegebenen Formeln in ähnlicher Weise wie die Aufgabe, eine geodätische Linie aus der geographischen Lage ihrer Endpunkte zu bestimmen, gelöst werden. Auch *Hansens* Formeln sind, wie bemerkt, keine strengen und erfordern eventuell ebenfalls eine weitere Annäherungsrechnung.

§ 17. Andraes Entwicklungen. Dreiecke aus Vertikalschnitten u. s. f.

Schon S. 94 ist die Art und Weise erörtert worden, wie *Andrae* im 1. Bde. der *Dänischen Gradmessung* bei der Entwicklung von *Legendres* Theorem vorgeht. Für das Ellipsoid knüpft er (S. 187—200) seine Betrachtungen zunächst an die (als mit der geodätischen Linie gleichlang zu setzenden) Vertikalschnitte und die zwischen denselben liegenden Horizontalwinkel an und zeigt in der bereits angedeuteten Weise (bei *Zachariae* a. a. O. S. 129—132),

welche Reduktionen an den Horizontalwinkeln angebracht werden müssen, um sie als Winkel eines ebenen Dreiecks betrachten zu können, dessen Seiten den Längen der Vertikalschnitte (also auch der geodätischen Linien) zwischen den Endpunkten entsprechen.

Um zu diesen ein besonderes Interesse bietenden Formeln zu gelangen, drehen wir hier den Gang um. Denn die Reduktionsformeln für das geodätische Dreieck haben wir bereits. Wir brauchen in dieselben nur anstatt der Winkel zwischen den geodätischen Linien die Horizontalwinkel (d. h. die Winkel zwischen den Vertikalschnitten) einzuführen und haben dann die Formeln für die von den Vertikalschnitten gebildete Figur, weil eben in den linearen Längen der Vertikalschnitte und der geodätischen Linien kein Unterschied ist, so lange man sich auf mäfsig grofse Entfernungen beschränkt.

Nennen wir die Horizontalwinkel A_0, B_0 und C_0, die Winkel zwischen den geodätischen Linien aber A, B und C, und beschränken uns auf die gröfsten Glieder in den Differenzen $A - A_0$, u. s. f., dann ist mit Rücksicht auf Formel (11) S. 332, weil $A = \alpha_{1.3} - \alpha_{1.2}$, $A_0 = a_{1.3} - a_{1.2}$ ist:

$$\left.\begin{aligned}\underset{\text{in Sek.}}{A - A_0} &= \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_1}{12 a_0^2}(c^2 \sin 2a_{1.2} - b^2 \sin 2a_{1.3}) + Gl_5\\ \underset{\text{in Sek.}}{B - B_0} &= \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_2}{12 a_0^2}(a^2 \sin 2a_{2.3} - c^2 \sin 2a_{2.1}) + Gl_5\\ \underset{\text{in Sek.}}{C - C_0} &= \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_3}{12 a_0^2}(b^2 \sin 2a_{3.1} - a^2 \sin 2a_{3.2}) + Gl_5.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Verbinden wir dies mit den Formeln (6) S. 359, wobei wir aber auch nur bis zu Gliedern 5. Ordnung gehen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\underset{\text{in Sek.}}{A_0 - A^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \rho'' \frac{F^* K^2 (m^2 - a^2)}{60 a_0^4}\\ &\quad + \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_1}{12 a_0^2}(b^2 \sin 2a_{1.3} - c^2 \sin 2a_{1.2}) + Gl_5\\ \underset{\text{in Sek.}}{B_0 - B^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \rho'' \frac{F^* K^2 (m^2 - b^2)}{60 a_0^4}\\ &\quad + \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_2}{12 a_0^2}(c^2 \sin 2a_{2.1} - a^2 \sin 2a_{2.3}) + Gl_5\\ \underset{\text{in Sek.}}{C_0 - C^*} &= \underset{\text{in Sek.}}{\frac{\varepsilon}{3}} + \rho'' \frac{F^* K^2 (m^2 - c^2)}{60 a_0^4}\\ &\quad + \rho'' \frac{e^2 \cos^2\beta_3}{12 a_0^2}(a^2 \sin 2a_{3.2} - b^2 \sin 2a_{3.1}) + Gl_5.\end{aligned}\right\} (2)$$

Aus diesen Formeln ersieht man sofort, dafs in allen Fällen, wo überhaupt solche Entfernungen in betracht kommen, für welche

geodätisches und astronomisches Azimut merklich von einander verschieden sind, es immer weit einfacher ist, mit der geodätischen Linie, als mit dem Vertikalschnitt zu rechnen.

Nach *Andraes* Auseinandersetzung ist überhaupt der Vorteil der Einführung der geodätischen Linie der, dafs die Berechnung der Dreiecksnetze möglichst einfach wird. In der That zeigt die Vergleichung der Formeln (2) mit den (6) S. 359, dafs von allen möglichen als gleichlang zu betrachtenden (und auf der Kugel zusammenfallenden) Verbindungslinien *die geodätische Linie die einfachsten Reduktionsformeln giebt.* Die Rechnung ist eben, wenn man nur Glieder bis zur 4. Ordnung incl. berücksichtigt, fürs einzelne geodätische Dreieck auf dem Ellipsoid gerade so einfach wie auf der Kugel. Sie wird erst durch Herbeiziehung von Gliedern 5. Ordnung etwas komplizierter, aber doch in nur geringem Mafse.

Insoweit es sich nun um mefsbare Dreiecke handelt, ist allerdings ein Vorzug der geodätischen Verbindungslinie nicht notwendig vorhanden. Da nämlich die *beobachteten* Azimute astronomische Azimute sind, die Horizontalwinkel aber Differenzen solcher, so ist einleuchtend, dafs letztere bei Anwendung der geodätischen Linie zunächst auf geodätische Azimute reduziert werden müssen. Hierbei kommen aber gerade wieder die in den Formeln (1) steckenden Glieder zur Geltung. Dieselben sind jedoch lediglich geringfügige Gröfsen, die als gegen die Beobachtungsfehler ganz zurücktretend vielfach weggelassen werden. Werden aber diese Korrektionen angebracht, so zeigt obige Auseinandersetzung, dafs sie auch bei der Wahl irgend einer andern Verbindungslinie nicht zu vermeiden sind. Es müssen sogar, wenn diese Linien in den Dreieckspunkten nicht wieder gerade die Horizontalwinkel A_0, B_0, C_0 mit einander einschliefsen, zu den rechten Seiten der Formeln (2) noch weitere Korrektionsglieder treten.

Der Vorteil der geodätischen Linie für die Dreiecksberechnung geht aber evident hervor bei Betrachtung der Berechnung von *Polarkoordinaten.* Hier hat man es, wenn einmal die beobachteten Richtungen korrigiert sind, für alle durch Rechnung abgeleiteten nur mit geodätischen Azimuten zu thun. Hier treten also die (verhältnismäfsig) einfachen Formeln (6) S. 359 in sehr günstigen Gegensatz zu obigen Formeln (2) oder noch komplizierteren Formeln.

Ebenso zeigt sich hier die Rechnung mit der geodätischen Linie derjenigen mit der Sehne weit überlegen (vergl. S. 197 und 211), in Bezug auf diese aber auch schon bei mefsbaren Dreiecken, weil die Sehnenrechnung die von e^2 abhängigen Glieder 4. Ordnung dreimal so grofs hat, als die Rechnung mit der geodätischen Linie (vergl. die Formeln (2) mit den (1) S. 197).

Von verschiedenen ins Auge gefafsten Hilfslinien ist besonders die *Feldlinie* untersucht worden, von *Andrae* a. a. O. Bd. 1 S. 179 und von *Bremiker* a. a. O. S. 59 u. ff. Die Feldlinie ist durch die Eigenschaft definiert, dafs in jedem Punkt der Horizontalwinkel nach den beiden Endpunkten 180° beträgt, d. h. dafs die Normale der Fläche in einer Ebene durch diesen Punkt und die beiden Endpunkte liegt. Sie schliefst sich daher in P_1 dem Vertikalschnitt nach P_2 und in P_2 dem nach P_1 tangential an. Wenn aber *Bremiker* S. 64 findet, dafs jene Ebene allgemein Tangentialebene der Kurve sei, so ist das ein Irrtum und beruht nur auf einem Scheinbeweis, wie die genaue Rechnung und der Umstand zeigen, dafs alsdann die Kurve eine ebene Kurve wäre und dafs ihre Ebene mit den Vertikalebenen $P_1 P_2$ und $P_2 P_1$ zusammenfallen müfste. In unseren beiden Referaten, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* von *Schlömilch* 1870 Litt.-Ztg. S. 29 und *Astronom. Vierteljahrsschrift* Bd. 13 S. 73 ist demgemäfs an der entsprechenden Stelle statt *tangierende Normalebene (Vertikalebene)* nur einfach *Normalebene* zu lesen. (Das Versehen am letztgenannten Orte beruht nur auf einem Schreibfehler, da wir schon gleich nach dem Erscheinen des erstgenannten Referats bei einer ausführlichen Untersuchung der Feldlinie sofort auf den Scheinbeweis *Bremikers* aufmerksam geworden waren. Diese Untersuchung wurde nicht publiziert, da der Feldlinie vom geodätischen Standpunkte aus so wenig Interesse gebührt, dafs andere Arbeiten bald ihrer vergessen liefsen.)

Man vergleiche auch über die Feldlinie das Hauptwerk der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 237.

§ 18. **Berechnung einer Dreieckskette. Polarkoordinaten.** Die beobachteten Azimute und ihre Differenzen, die Horizontalwinkel, sind zunächst wegen der Unterschiede der astronomischen und geodätischen Azimute nach der auf ihr 1. Glied reduzierten Formel (11) S. 332:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha - a} = -\frac{1}{12}\,\varrho''\,e^2\,\frac{s^2}{a_0^2}\cos^2 B \sin 2a + \cdots \tag{1}$$

zu korrigieren, wobei s die Entfernung ist und B die geographische Breite des Standpunktes, α das geodätische, a das astronomische Azimut bezeichnet. Im übrigen sind die Formeln (6) S. 359 anzuwenden.

Vielfach wird nicht nur die Reduktion der Azimute und Horizontalwinkel unterlassen, sondern auch die Berechnung der Dreiecksseiten und Polarkoordinaten rein sphärisch mit Zugrundelegung eines mittleren Krümmungsmafses des *ganzen* trigonometrischen Netzes ausgeführt. *Bessel* nahm bei Berechnung der ostpreufsischen Gradmessung als Kugelradius sogar den Äquatorialradius des Ellipsoids und betrachtete doch schliefslich die Ergebnisse der sphärischen Rechnung als für die geodätischen Linien zwischen den Netzpunkten gültig.

Die Frage nach den Fehlern, die hierbei begangen werden, ist

eine dreifache. Sie betrifft 1. den Einfluſs mangelnder Reduktion der gemessenen Azimute und Winkel, 2. den Einfluſs des Krümmungsmaſses auf die nach dem Sinussatz berechneten Dreiecksseiten und die ausgeglichenen Winkel und 3. den Einfluſs der sphärischen Rechnung bei Ausmittelung der Polarkoordinaten.

Die Reduktion der Azimute nach (1) beträgt für $s = 0{,}01 a_0$ d. i. 64^{km} im Maximum rund $\pm 0{,}01''$. Da nun s in direkt beobachteten Dreiecksketten jenen Betrag in der Regel nur ausnahmsweise etwas überschreitet, so kann man wohl die Reduktion als weit innerhalb der Beobachtungsfehler liegend vernachlässigen.

Günstig ist diesem Verfahren, daſs abgesehen von Gliedern 5. Ordnung, der Überschuſs der Summe der 3 Horizontalwinkel über 180° den Exceſs des geodätischen Dreiecks giebt, wie die Addition der Gleichungen (1) S. 398 zeigt, wonach

$$A_0 + B_0 + C_0 = A + B + C + Gl_5 . \tag{2}$$

Es wird daher bei der Ausgleichung einer einfachen Dreieckskette ohne Reduktion der Azimute dasselbe System von Verbesserungen erhalten, wie in dem Falle, daſs die Azimute und Horizontalwinkel korrigiert sind.

Die vernachlässigten Reduktionen $\alpha - a$ bleiben aber den einzelnen Richtungen als Fehler rein anhaften, und es läſst sich deren Einfluſs auf die Seitenberechnung und Azimutübertragung somit für eine geradgestreckte Kette von der Form der Fig. 13 S. 198 leicht ersehen.

Da $\alpha - a$ von $\sin 2a$ abhängt, so werden Winkel mit bezw. entgegengesetzt gerichteten und gleich langen Schenkeln gleichviel fehlerhaft, mithin ist der Einfluſs der Vernachlässigungen auf die Berechnung der Seiten a', a'', a''' u. s. f. (welche man sich in Fig. 13 an Stelle der Sehnen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'''$ u. s. f. eingesetzt zu denken hat) um so mehr verschwindend, je genauer sich die Dreiecke paarweise zu Parallelogrammen gruppieren (vergl. die Betrachtung S. 198 u.). Dagegen werden alle Seiten c und d um ungefähr gleiche Beträge irrig erhalten und somit auch die Gesamtlänge etwas fehlerhaft. Jedoch wächst der Fehler nur einfach proportional der Länge, weil in den Seiten a', a'' u. s. f., wie bemerkt, keine Fehleranhäufung eintritt.

Bedenkt man nun noch, daſs die gestreckten Winkel an den Langseiten der Kette von den $\alpha - a$ nicht erheblich beeinfluſst werden, so bleibt als Gesamteinfluſs nur eine geringe Drehung der ganzen Kette infolge des Fehlers im Azimut der Seiten c und d, sowie eine geringe Änderung der Gesamtlänge der Kette.

Erstere wird 0,"01 nicht wesentlich übersteigen und letztere bei

wohlgeformten Dreiecken erst in der 8. Decimalstelle des Logarithmus merkbar, wie man leicht durch Bildung des $\log \frac{c}{a}$ mittelst der um etwa 0,01″ fehlerhaft angenommenen Gegenwinkel findet.

Man kann noch bemerken, dafs auch diejenigen Seitengleichungen, welche einer doppelten Verbindung von je zwei der Seiten a, a', a'' ·· entsprechen, von der Vernachlässigung der Azimutkorrektionen wenig oder gar nicht beeinflufst werden. Sind nämlich z. B. a und a', Fig. 13 S. 198, durch ein Viereck mit beiden Diagonalen verbunden und denkt man sich das Verhältnis $\frac{a}{a'}$ mit Hilfe beider Diagonalen hergestellt und damit die Seitengleichung gebildet, so geht natürlich in diese ebensowenig jene Vernachlässigung ein, wie in die beiden Werte des Verhältnisses $\frac{a}{a'}$. Es ist klar, dafs auch jede andere Art der Aufstellung der Seitengleichung in jenem Viereck frei von der Vernachlässigung sein wird, wenn die obige es ist, weil man aus dieser und den Dreieckswinkelgleichungen, die auch frei von der Vernachlässigung sind, jede andere Form der Seitengleichung herstellen kann.

Wenn nach dem Vorhergehenden die Vernachlässigung der Reduktionen der gemessenen astronomischen Azimute und Azimutalunterschiede auf geodätische unter günstigen Umständen nur geringe Fehler giebt, so ist doch immerhin bei der grofsen Leichtigkeit, diese Reduktionen anzubringen, nicht recht einzusehen, warum sie vernachlässigt werden, zumal in Fällen, wo einzelne lange Diagonalen vorkommen, der Einflufs der Vernachlässigungen ohne Zweifel beträchtlich das oben angegebene Mafs überschreiten kann.

Vielleicht würde man dieser Reduktion mehr Aufmerksamkeit schenken, wenn sie in den Excessen merkbar würde, oder wenn bei der Berechnung geographischer Breiten und Längen mittelst der Ergebnisse der Triangulierung aus ihrer Vernachlässigung Widersprüche zwischen den Rechnungsresultaten, welche auf verschiedenen Wegen durch das trigonometrische Netz hindurch erhalten werden, entstünden.

Dieses letztere ist aber ebenso wenig der Fall wie das erstere. Indem man die astronomischen Azimutaldifferenzen für geodätische nimmt, begeht man nämlich Fehler, die wie Beobachtungsfehler nur bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen merkbar werden können (hier jedoch auch oft nicht merkbar werden, wie oben gezeigt), die aber jedenfalls *nach* erfolgter Ausgleichung nicht mehr zu Widersprüchen führen.

Dieses Verhalten ist wesentlich verschieden von dem bei der Rechnung mit Sehnen. Vernachlässigt man hier die entsprechenden Glieder 4. Ordnung, so giebt das einen Fehler der mathematischen

Bedingung, d. h. es wird nicht korrekt ausgeglichen, und es mufs daher bei der Berechnung geographischer Positionen entlang verschiedener Seitenzüge sich in den Ergebnissen für gemeinsame Punkte eine angemessene kleine Differenz zeigen.

Ch. H. Kummell hat 1877 in den *Astronom. Nachr.* Bd. 89 Nr. 2116 S. 49 die übliche Berechnung der Dreiecksnetze nach dem einfachen *Legendre*schen Satze einer Kritik unterzogen. Er wendet dazu die Hypothese an, dafs man jedes Sehnendreieck des Ellipsoids wie ein Sehnendreieck einer Kugel, deren Radius dem mittleren Krümmungsmafs der 3 Ecken entspricht, berechnen könne. Unsere Untersuchungen zeigen aber die Unzulässigkeit dieser Hypothese.

§ 19. Fortsetzung. Sphärische Berechnung einer Kette. Wird anstatt des speziellen Krümmungsmafses K für jedes einzelne Dreieck ein gemeinsamer Wert $K_m = K + \delta K$ im ganzen Netz angewandt, so vergröfsert sich ε um $\delta\varepsilon$ nach Mafsgabe der Gleichung:

$$\delta\varepsilon = \varepsilon \frac{\delta K}{K}, \tag{1}$$

wie die Differentiation der Gleichung für ε S. 359 zeigt. Entspricht nun K der geographischen Breite B und $K_m = K + \delta K$ der mittleren Breite des Netzes $B_m = B + \delta B$, so wird, weil allgemein $K = (1 - e^2 \sin^2 B)^2 : (1 - e^2)$ ist:

$$\frac{\delta K}{K_m} = - \frac{2e^2 \sin 2B_m}{1 - e^2 \sin^2 B_m} \delta B. \tag{2}$$

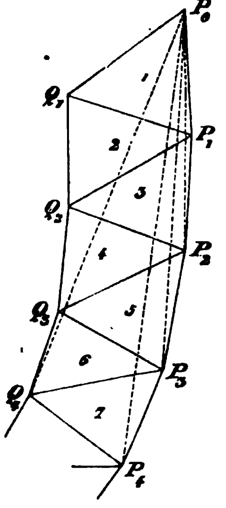


Fig. 36.

Hierbei ist δB als klein vorausgesetzt, wie es der Fall sein wird, wenn K_m *ein mittleres Krümmungsmafs des Netzes* ist. Man kann nun offenbar in hinreichender Annäherung setzen:

$$\delta\varepsilon = - \varepsilon \,.\, 2e^2 \sin 2B_m \delta B + \cdots. \tag{3}$$

Für $\delta B = 0{,}05$ (als Arcus genommen, wie Formel (3) verlangt) und für eine mittlere Breite $B_m = 45^0$ sowie für $\varepsilon = 10''$ wird $\delta\varepsilon$ gleich $0'',007$. Jener Betrag von ε gehört im Maximum zu einer mittleren Seitenlänge $m = 0{,}01 a_0$ ca.; $\delta B = 0{,}05$ aber tritt erst an den äufsersten Enden einer meridional gestreckten 637^{km} langen Kette auf. Man erkennt hieraus, dafs es in der Regel recht wohl zulässig sein wird, mit einem mittleren Krümmungsmafs des Netzes zu rechnen.

Ist jedoch $K_m = 1$, *wie bei Bessels Berechnung der ostpreufsischen Gradmessung,* so wird $\delta K = K_m - K = 1 - K$ und in hinreichender Annäherung

$$\delta\varepsilon = - \varepsilon \,.\, e^2 \cos 2B + \cdots. \tag{4}$$

Für B gleich null giebt dies bei $\varepsilon = 10''$ für $\delta\varepsilon$ den beträchtlichen Wert 0,07″. Nur zufällig ist für die Dreiecke der ostpreufsischen Gradmessung $\delta\varepsilon$ weit kleiner, da hier B im Mittel 55°, also $\cos 2B$ gleich $-0{,}34$ ist. Immerhin wird hier $\delta\varepsilon = +\varepsilon : 450$, also für $\varepsilon = 10''$ doch schon $+0{,}022''$.

Die $\delta\varepsilon$ werden nun bei der Ausgleichung wie Beobachtungsfehler verteilt. Die Art der Verteilung ist dabei je nach der Gruppierung der Dreiecke und den Gewichten der verschiedenen Beobachtungen verschieden. Sehr übersichtlich ist die Sache bei einer einfachen Dreieckskette ohne Diagonalen, deren Winkel gleich genau beobachtet sind. Hier wird durch den üblichen Rechnungsgang $\delta\varepsilon$ in jedem Dreieck gleichmäfsig auf die 3 Winkel verteilt und jeder Winkel um $\frac{\delta\varepsilon}{3}$ vergröfsert. Dies hat jedoch auf die Seitenberechnung keinen Einflufs, denn A^*, B^*, C^* werden offenbar dieselben wie für den richtigen Betrag des Excesses, weil bei ihrer Bildung wieder $\frac{1}{3}\,\delta\varepsilon$ subtrahiert wird, indem man $\frac{1}{3}$ des Excesses von den ausgeglichenen Winkeln abzieht.

Die Seiten und namentlich die Gesamtlänge P_0P_n einer geradgestreckten Dreieckskette, Fig. 36, werden also richtig erhalten.

Nicht jedoch die Azimute. Die Winkel bei P_1, P_2, P_3 u. s. f. sind nämlich zu grofs um $\frac{1}{3}$ der Summe der ε der daselbst zusammenstofsenden Dreiecke. Speziell für Fig. 36 ist der Winkel bei P_1 zu grofs um $\frac{1}{3}\,(\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3)$ d. i. angenähert $\delta\varepsilon_2$. Ebenso hat man für P_2 angenähert $\delta\varepsilon_4$ zu viel, u. s. f. Bei der Übertragung der Azimute von P_0P_1 auf P_1P_2, P_2P_3 u. s. f. entstehen daher Fehler im Betrage von $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_4$, $\delta\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_4 + \delta\varepsilon_6$, u. s. f.

Diese Beträge können bedeutend werden, sobald wie bei der ostpreufsischen Gradmessung die $\delta\varepsilon$ alle einerlei Zeichen haben, weil die ε mit dem Äquatorialradius a_0 berechnet worden sind.

Wenn dagegen ein mittleres Krümmungsmafs des Netzes gewählt ist, so wird offenbar nicht nur der Betrag der einzelnen $\delta\varepsilon$ kleiner, sondern es treten in nördlich und südlich von der Mitte gelegenen Netzteilen die $\delta\varepsilon$ mit verschiedenen Vorzeichen auf, wodurch einer zu grofsen Anhäufung vorgebeugt ist.

Setzen wir $P_0P_n = 0{,}1\,a_0$ und $n = 10$, so wird im 1. Fall (*Bessels* Methode) der Azimutfehler der Seite P_9P_{10} gleich $9e^2 \cos 2B_m \,.\, \varepsilon$ und da unter Voraussetzung gleichseitiger Dreiecke $\varepsilon = 10$ Sek. ist, so folgt dafür rund $0{,}6'' \cos 2B_m$, ein Wert, der im allgemeinen zu grofs ist, um vernachlässigt werden zu können.

Im 2. Falle (Anwendung eines mittleren Krümmungsmafses) entsteht überhaupt nur dann ein Fehler, wenn die Kette nicht die ostwestliche Richtung hat. Nehmen wir meridionale Richtung, so wird auch hierbei der Azimutfehler von P_9P_{10} gleich null. Derjenige der andern Seiten ist aber nicht null und zwar wird der Azimutfehler der Seite P_4P_5 ein Maximum. Er beträgt jedoch unter sonst denselben Voraussetzungen wie vorher nur $0{,}013'' \sin 2B_m$.

Im wesentlichen ebenso *geringfügig* dürften sich bei Anwendung eines mittleren Krümmungsmafses des Netzes die Fehler für jede geradgestreckte Dreieckskette von derselben Länge gestalten, wenn auch die Verteilung der $\delta\varepsilon$ auf die Winkel bei ungleicher Genauigkeit derselben sowie bei Existenz von Seitengleichungen ungleichmäfsig sein wird und der Einflufs von $\delta\varepsilon$ auf die Seiten dann nicht ganz verschwindend ist.

Dagegen mufs die Anwendung des Wertes $K = 1$ (welcher der Breite $B =$ ca. 45^0 entspricht) als unzulässig bezeichnet werden.

Es mögen hier noch die Fragen beantwortet werden, wie ε sich durch einen *Fehler in* e^2 und einen *Fehler in* a_0 verändert. Man findet leicht bezw.

$$\delta\varepsilon = + \varepsilon \, . \cos 2B \, \delta e^2 + \cdots \tag{5}$$

$$\delta\varepsilon = - 2\varepsilon \frac{\delta a_0}{a_0} \tag{6}$$

und ersieht hieraus, dafs selbst so beträchtliche Werte wie $\delta e^2 = 0{,}0003$ und $\frac{\delta a_0}{a_0} = 0{,}0001$ nur die Tausendstelsekunden in ε beeinflussen.

§ 20. Fortsetzung. Sphärische Berechnung von Polarkoordinaten. Sind im Anschlufs an Fig. 36 für P_1, P_2, P_3 u. s. f. Polarkoordinaten in Bezug auf P_0 als Zentrum zu berechnen, so kommen mehr und mehr Dreiecke mit langen Seiten in betracht und man wird daran denken, die strengen Formeln (1) S. 362 anzuwenden. Ist jedoch wie in Fig 36 die Kette so geradgestreckt, dafs nur sehr kleine Excesse für jene Dreiecke entstehen, so kann wieder das einfache *Legendre*sche Theorem in Bezug auf die, dem mittleren Krümmungsmafs des Netzes entsprechende Kugel Anwendung finden. Nur bei Dreiecksnetzen mit grofser Ausdehnung nach 2 Dimensionen sind die strengen Formeln nötig, denn hier entsteht wegen grofser ε auch eine wesentliche Ungleichheit der Reduktionen $A - A^*$, $B - B^*$, $C - C^*$ in den zur Berechnung der Polarkoordinaten erforderlichen Dreiecken.

Im Falle der Fig. 36 werden durch die sphärische Berechnung, wie bereits nachgewiesen, nur die Azimute der Seiten, nicht aber ihre

Längen beeinflufst. Infolge dessen werden auch nur die Azimute, nicht aber die Längen von P_0P_1, P_0P_2, $P_0P_3 \ldots$ fehlerhaft.

Man erhält als Fehler der Azimute im Punkte P_0, wie die Betrachtung der Figur zeigt, wenn für die gestreckten Winkel in P_1, P_2 u. s. f. die Fehler bezw. gleich $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_4$ u. s. f. gesetzt werden,

$$\begin{array}{ll} \text{für } P_0P_2: & \frac{1}{2}\delta\varepsilon_2 \\ \text{„ } P_0P_3: & \frac{2}{3}\delta\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\delta\varepsilon_4 \\ \text{„ } P_0P_4: & \frac{3}{4}\delta\varepsilon_2 + \frac{2}{4}\delta\varepsilon_4 + \frac{1}{4}\delta\varepsilon_6 \\ \ldots & \ldots \\ \text{„ } P_0P_{10}: & \frac{9}{10}\delta\varepsilon_2 + \frac{8}{10}\delta\varepsilon_4 + \cdots \frac{2}{10}\delta\varepsilon_{16} + \frac{1}{10}\delta\varepsilon_{18}. \end{array}$$

Rechnet man nun mit $K = 1$, sodafs alle $\delta\varepsilon$ nahezu den gleichen Betrag (4) S. 403 erhalten, so macht dies $5\delta\varepsilon$ d. i. $5e^2 \cos 2B_m \,.\, \varepsilon$ oder rund $0{,}3'' \cos 2B$. Dieser Azimutfehler kann in der 2. Decimalstelle der Sekunden der von P_0 nach P_{10} übertragenen geographischen Breite und Länge merkbar werden.

Rechnet man aber mit K_m und nimmt (als ungünstigsten Fall) eine meridionale Erstreckung der Kette an, so ist näherungsweise:

$$\delta\varepsilon_2 = -\delta\varepsilon_{18} = -0{,}005'' \sin 2B_m \quad \Big| \quad \delta\varepsilon_4 = -\delta\varepsilon_{16} = -0{,}004'' \sin 2B_m$$
$$\delta\varepsilon_6 = -\delta\varepsilon_{14} = -0{,}003 \;\; \sin 2B_m \quad \Big| \quad \delta\varepsilon_8 = -\delta\varepsilon_{12} = -0{,}001 \;\; \sin 2B_m$$

und daher der Azimutfehler für P_0P_{10} nur gleich $-0{,}008'' \sin 2B_m$, was wohl meist als geringfügig angesehen werden wird.

Etwas gröfser wird jedoch im allgemeinen der Fehler für P_0Q_{10}, weil bei der Berechnung der Polarkoordinaten für Q_{10}, von P_{10} aus, das zwar auch noch schmale, doch immerhin nicht kleine Dreieck $P_0P_{10}Q_{10}$ eingeht. Mit Rücksicht auf das oben Gegebene findet man leicht mittelst der Formeln (1) S. 362, dafs hier die Berechnung nach *Legendres* Satz mittelst K_m zu dem oben berechneten Azimutfehler für P_0P_{10} beim Übergang zu P_0Q_{10} noch 0,01 bis 0,02″ hinzufügen kann, sodafs eben diese sphärische Rechnung nur für schmale geradgestreckte Ketten zulässig ist.

9. Kapitel.

Rechtwinklige geodätische Koordinaten und Übertragung geographischer Koordinaten mittelst derselben.

§ 1. **Fundamentalsatz.** Ein System rechtwinkliger Koordinaten können wir uns mittelst geodätischer Linien in der Weise gebildet denken, daſs die Abscissen auf einer geodätischen Linie gezählt werden und daſs die Ordinaten geodätische Linien normal zu jener sind; Fig. 37.

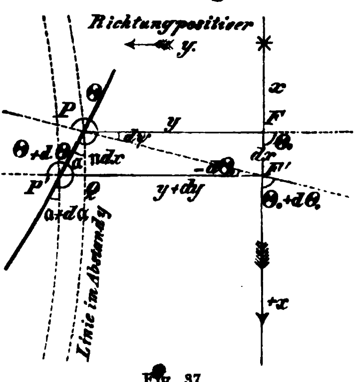


Fig. 37.

Bewegt man eine Ordinate y im Sinne wachsender x, so beschreibt ihr Endpunkt P eine Linie konstanten Abstandes von der x-Axe. Ist die Verschiebung des Fuſspunkts F unendlich klein und gleich dx, so wird man diejenige von P gleich $\mathfrak{n}dx$ setzen können, wobei $\mathfrak{n}$ eine Funktion der Lage und Länge der Ordinate sein wird:

$$PQ = \mathfrak{n}dx. \tag{1}$$

Um $\mathfrak{n}$ kennen zu lernen, führen wir PF dadurch in die Lage QF' über, daſs wir PF zuerst um den Punkt P drehen und dann PF' durch Drehung um den Punkt F' in die Lage QF' bringen. Da FF' normal zu PF steht, so muſs PF' bis auf eine unendlich kleine Strecke 2. Ordnung mit y, also auch mit QF' übereinstimmen, sodaſs PQ als normal zu der Ordinate QF' betrachtet werden kann. (Die Abweichung von der normalen Stellung ist von derselben Art wie beim geodätischen Kreis, vergl. § 3 S. 271.)

Formel (4) S. 347 giebt nun mit Rücksicht auf die Figuren 28 und 37 sofort mit leicht ersichtlicher Übertragung der Bezeichnung:

$$d\Theta_0 = -\frac{\sin \Theta_0}{\mathfrak{m}_y}\left(\frac{\partial \mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF} dx,$$

wobei der Index PF an $\frac{\partial \mathfrak{m}_y}{\partial y}$ bedeutet, daſs y in der Richtung PF verlängert gedacht werden muſs. Da $\Theta_0 = 90^0$ ist, so folgt hieraus:

$$-\frac{\mathfrak{m}_y d\Theta_0}{dx} = \left(\frac{\partial \mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF}. \tag{2}$$

Das linker Hand auftretende Produkt $-\mathfrak{m}_y d\Theta_0$ ist aber gleich PQ, wie man mit Rücksicht auf Fig. 37 und aus dem Umstande

erkennt, dafs PQ nicht wesentlich von dem geodätischen Kreis abweicht, den die Linie QF' bei Drehung um F' beschreibt. Da also $-\mathfrak{m}_y d\Theta_0 = PQ$ und nach (1) gleich $\mathfrak{n}dx$ ist, so folgt aus (2):

$$\mathfrak{n} = \left(\frac{\partial \mathfrak{m}_y}{\partial y}\right)_{PF}. \tag{3}$$

Diese Formel bildet in Verbindung mit dem oben erhaltenen Satz, dafs die Parallelen zur x-Axe, also die Linien konstanten Wertes y, normal zu den Ordinaten stehen, das Fundament für die Theorie der rechtwinkligen geodätischen Koordinaten. Die in Formel (3) verlangte Differentiation ist indessen etwas unbequem auszuführen, und wir wandeln (3) daher um. Zunächst schreiben wir anstatt (3) für den Augenblick besser:

$$\mathfrak{n} = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}. \tag{3*}$$

Hierin ist erstens anstatt des Zeichens der partiellen Differentiation dasjenige der vollständigen eingeführt, weil eine Azimutänderung von y nicht in betracht kommen, also keine Verwechslung stattfinden kann. Zweitens ist anstatt dy im Nenner kurz dF gesetzt, um damit zugleich den Index PF zu bezeichnen.

Nach Gleichung (6) S. 275 ist aber unter Anwendung der oben eingeführten Schreibweise:

$$\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dP^2} + \mathfrak{m}_y \frac{K}{a_0^2} = 0. \tag{4}$$

Hierin bezeichnet $K:a_0^2$ das Krümmungsmafs für Punkt P. Differenzieren wir diese Gleichung nach y, wobei aber letzteres über F hinaus verlängert zu denken ist, so folgt:

$$\frac{d^3\mathfrak{m}_y}{dP^2 dF} + \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{K}{a_0^2} = 0 \tag{5}$$

d. i. mit Rücksicht auf den Wert von $\mathfrak{n}$ nach (3*):

$$\frac{d^2\mathfrak{n}}{dP^2} + \mathfrak{n}\frac{K}{a_0^2} = 0.$$

Für $\frac{d\mathfrak{n}}{dP}$ schreiben wir nunmehr wieder $\frac{d\mathfrak{n}}{dy}$. Bei dieser Schreibweise erscheint es selbstverständlich, dafs y im Sinne wachsender Ordinaten über P hinaus verlängert gedacht werden mufs. Man erhält also:

$$\frac{d^2\mathfrak{n}}{dy^2} + \mathfrak{n}\frac{K}{a_0^2} = 0. \tag{6}$$

Diese Formel stellt sich der entsprechenden Formel (6) S. 275 für $\mathfrak{m}$ an die Seite.

Gaufs hat a. a. O. Art. 19 in der That beide Differentialgleichungen gleichzeitig in Form einer noch allgemeiner gültigen Gleichung bewiesen. Die Formeln (3) und (6) gelten nämlich auch noch, wenn die Abscissenaxe keine geodätische, sondern eine *beliebige* Linie ist.

§ 2. Differentialformel für den Richtungswinkel.

Obgleich wir im Folgenden diese Formel *nicht* anwenden, soll sie doch der Vollständigkeit wegen hier entwickelt werden.

Eine durch P gezogene geodätische Linie PP', Fig. 37, bildet in P mit der Parallelen zur x-Axe den Richtungswinkel $\mathfrak{a}$, in dem unendlich benachbarten Punkt P' aber, wenn man sie sich über P' hinaus fortgesetzt denkt, den Richtungswinkel $\mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$.

Beziehen wir nun diese Geodätische zunächst auf die Linien $F'P$ und $F'P'$, indem wir diese als Radienvectoren betrachten, so kann man nach S. 347 (4) angeben, um wieviel der Winkel Θ, gezählt vom wachsenden Radiusvector bis zur wachsenden Linie PP', zunimmt beim Übergang von P nach P'. Bezeichnen wir PP' mit ds, so wird:

$$d\Theta = -\frac{\sin\Theta}{\mathfrak{m}_y}\left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial\,y}\right)_{FP} ds.$$

Nun ist aber, wie die Figur zeigt, PQ einerseits gleich $-\sin\Theta ds$ und andrerseits gleich $-\mathfrak{m}_y d\Theta_0$. Man hat daher auch

$$d\Theta = -\left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial\,y}\right)_{FP} d\Theta_0\,.$$

Nach S. 407 (2) ist ferner:

$$d\Theta_0 = -\left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial\,y}\right)_{PF} \frac{d\,x}{\mathfrak{m}_y}\,.$$

Setzen wir diesen Wert für $d\Theta_0$ in die vorige Gleichung ein und berücksichtigen dabei nach Fig. 37 die Relation $dx = \mathfrak{m}_y d\psi$, so folgt:

$$d\Theta = \left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial\,y}\right)_{FP} \cdot \left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial\,y}\right)_{PF} d\psi. \tag{1}$$

Aus $d\Theta$ erhält man $d\mathfrak{a}$, wenn man beachtet, dafs wie die Figur zeigt:

$$\Theta + d\psi = 270^0 + \mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \Theta + d\Theta = 270^0 + \mathfrak{a} + d\mathfrak{a},$$

mithin $d\Theta - d\psi = d\mathfrak{a}$ ist. Es wird nämlich hieraus durch Einführung von (1):

$$d\mathfrak{a} = \left(\left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial\,y}\right)_{FP} \cdot \left(\frac{\partial\,\mathfrak{m}_y}{\partial\,y}\right)_{PF} - 1\right) d\psi.$$

Restituieren wir hierin den Wert von $d\psi$ mittelst der schon erwähnten Relation $dx = \mathfrak{m}_y d\psi$, so folgt:

$$d\mathfrak{a} = \frac{\left(\frac{d\,\mathfrak{m}_y}{d\,y}\right)_{PF} \cdot \left(\frac{d\,\mathfrak{m}_y}{d\,y}\right)_{FP} - 1}{\mathfrak{m}_y}\, dx. \tag{2}$$

In dieser Formel ist in den Differentialquotienten für $\mathfrak{m}_y$ das Zeichen der vollständigen Differentiation eingeführt, weil der Gegensatz zu Änderungen von $\mathfrak{m}_y$ mit dem Azimut weggefallen ist.

(2) läfst sich aber weit einfacher schreiben. Um dies zu erkennen, erinnern wir an die S. 408 vorkommenden beiden Gleichungen (4) und (5):

$$\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dP^2} + \mathfrak{m}_y \frac{K}{a_0^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^3\mathfrak{m}_y}{dP^2dF} + \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{K}{a_0^2} = 0.$$

Eliminiert man K hieraus, so folgt unter gleichzeitiger Addition eines und desselben Gliedes $\frac{d\mathfrak{m}_y}{dP}\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dPdF}$ beiderseits:

$$\mathfrak{m}_y \frac{d^3\mathfrak{m}_y}{dP^2dF} + \frac{d\mathfrak{m}_y}{dP}\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dPdF} = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dP^2} + \frac{d\mathfrak{m}_y}{dP}\frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dPdF}.$$

Dieses läfst sich links und rechts sofort integrieren. Man erhält:

$$\mathfrak{m}_y \frac{d^2\mathfrak{m}_y}{dPdF} = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{d\mathfrak{m}_y}{dP} + \text{Konst.}$$

Weil aber für $y = 0$ auch $\mathfrak{m}_y = 0$ und $\frac{d\mathfrak{m}_y}{dF} = 1 = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dP}$ ist, was mit Rücksicht auf die Beziehungen in der Ebene ohne weiteres einleuchtet, so ist die Konstante offenbar -1. Aufserdem ist nach (3) S. 408 $\frac{d\mathfrak{m}_y}{dF} = \mathfrak{n}$ und daher:

$$\mathfrak{m}_y \frac{d\mathfrak{n}}{dP} = \frac{d\mathfrak{m}_y}{dF}\frac{d\mathfrak{m}_y}{dP} - 1$$

oder

$$\left(\frac{d\mathfrak{m}_y}{dy}\right)_{PF}\left(\frac{d\mathfrak{m}_y}{dy}\right)_{FP} - 1 = \mathfrak{m}_y\left(\frac{d\mathfrak{n}}{dy}\right)_P.$$

Wird dieses in Gleichung (2) eingeführt und der nunmehr überflüssige Index P rechter Hand weggelassen, so ergiebt sich:

$$d\mathfrak{a} = \frac{d\mathfrak{n}}{dy}\,dx. \tag{3}$$

Vorstehende Formel giebt *Gaufs* a. a. O. Art. 19. Sie gilt auch dann, wenn die Abscissenaxe keine Geodätische ist.

Die Differentialformeln für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}$ können auch dadurch gewonnen werden, dafs man die Ordinaten y in F und F' bis zu ihrem Durchschnitt A verlängert und AQF' auffafst als eine durch Drehung entstandene Lage von APF, sodafs PQ und FF' Elemente geodätischer Kreise sind. Mit Benutzung der für 3 Punkte einer geodätischen Linie von *Christoffel* a. a. O. S. 148 u. 149 aufgestellten Relationen (insbesondere Nr. 3) gelangt man leicht zum Ziele.

§ 3. **Bestimmung von $\mathfrak{n}$.** Zur Bestimmung von $\mathfrak{n}$ ist K für Punkt P aus S. 276 (5) zu entnehmen. K_1, $\alpha_{1.2}$, β_1 beziehen sich darin auf den Fufspunkt der Ordinate y, welche an Stelle von s tritt und werden besser mit K_F, α_F, β_F bezeichnet. Man hat zunächst offenbar, wenn die x-Axe in den *Meridian* gelegt wird:

$$\alpha_F = 90^0, \quad \cos\alpha_F = 0 \tag{1}$$

und ersieht, dafs infolge dessen zahlreiche Glieder in K verschwinden. Der Ausdruck (5) geht nämlich über in:

$$K = K_F\left(1 + 2e^2 \sin^2\beta_F \sin^2\frac{y}{a_0} + \cdots\right).$$

Werden nun e und $y:a_0$ als Gröfsen 1. Ordnung genommen, so ist

$$K = K_F + Gl_4. \tag{2}$$

Substituieren wir diesen Ausdruck für K in die Gleichung (6) S. 408, so folgt:

$$\frac{d^2\mathfrak{n}}{dy^2} + \mathfrak{n}\,\frac{K_F}{a_0^{\,2}}(1 + Gl_4) = 0. \tag{3}$$

Abgesehen von dem Rest Gl_4 ist dies aber die Differentialgleichung für $\mathfrak{n}$ in Bezug auf eine Kugel vom Krümmungsmafs $K_F : a_0^{\,2}$. In der That ist (3) erfüllt durch

$$\mathfrak{n} = \cos\left(\frac{y}{a_0}\sqrt{K_F}\right) + Gl_6, \tag{4}$$

wie man leicht verificiert.

Für den nachfolgenden Gebrauch ist es nun erforderlich, das Krümmungsmafs eines festen Punktes der x-Axe einzuführen. Wir denken uns diesen Punkt als *Koordinatenanfang* genommen und K sowie β für denselben mit dem Index null versehen. In der Formel (5) S. 276 ist jetzt $\alpha_{1.2} = 0$ und $\cos\alpha_{1.2} = 1$, $\beta_1 = \beta_0$, $K_1 = K_0$, $s = x$ zu setzen. Man erhält damit:

$$K_F = K_0 + 2K_0 e^2 \sin 2\beta_0\,\frac{x}{a_0} + Gl_4. \tag{5}$$

Denkt man sich nunmehr $\cos\left(\frac{y}{a_0}\sqrt{K_F}\right)$ in eine Reihe entwickelt, so ersieht man sogleich, dafs

$$\cos\left(\frac{y}{a_0}\sqrt{K_F}\right) = \cos\left(\frac{y}{a_0}\sqrt{K_0}\right) - K_0 e^2 \sin 2\beta_0\,\frac{xy^2}{a_0^{\,3}} + Gl_6. \tag{6}$$

Dieses ist zugleich der Ausdruck für $\mathfrak{n}$. Setzen wir nun noch zur Vereinfachung:

$$\frac{1}{6}e^2 \sin 2\beta_0 = E_0$$

$$\frac{x}{a_0}\sqrt{K_0} = \xi \qquad \frac{y}{a_0}\sqrt{K_0} = \eta, \tag{7}$$

und fügen dem 2. Gliede in (6) den Faktor $\sqrt{K_0}$ bei, was nur einen Fehler höherer Ordnung erzeugt, so geht (4) mit Rücksicht auf (6) über in:

$$\mathfrak{n} = \cos \eta - 6E_0\xi\eta^2 + Gl_6, \tag{8}$$

welche Formel zur weiteren Anwendung geeignet ist. Nach (8) ist es insbesondere zulässig zu setzen:

$$\frac{1}{\mathfrak{n}} = \sec \eta + 6E_0\xi\eta^2 + Gl_6. \tag{9}$$

§ 4. **Gang der weiteren Entwicklung.** Im Anschlufs an eine von *Gaufs* in den *Disqu. c. sup. c.* Art. 19 (*G.* Werke Bd. 4 S. 251) für die Theorie der geodätischen Dreiecke gegebene Entwicklung stellen wir zunächst eine Differentialgleichung für die Kürzeste zwischen 2 durch ihre Koordinaten gegebene Punkte auf, Fig. 38.

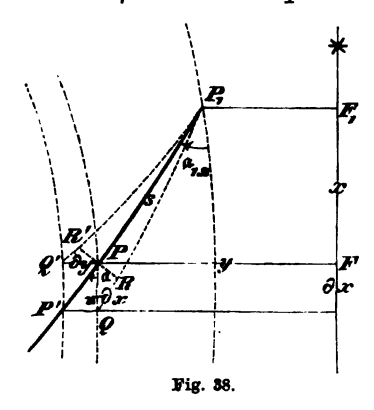


Fig. 38.

Im Richtungswinkel $\mathfrak{a}_{1.2}$ gehe von P_1 eine geodätische Linie aus, deren Länge bis zu einem beliebigen Punkte P gleich s sei. Wächst nun bei konstantem y die Abscisse x um ∂x, so verschiebt sich die Linie P_1P in die Lage P_1Q. Zieht man PR normal zu P_1Q, so ist:

$$QR = PQ \cos \mathfrak{a}.$$

Nun ist aber QR zu betrachten als partieller Zuwachs von s bei konstantem y und veränderlichem x. Es ist also $\partial s = \mathfrak{n}\partial x . \cos \mathfrak{a}$ und

$$\frac{\partial s}{\mathfrak{n}\partial x} = \cos \mathfrak{a}. \tag{1}$$

Bei konstantem x und einem um ∂y wachsenden y entsteht ein Zuwachs $\partial s = Q'R'$ und da $Q'R' = \partial y \sin \mathfrak{a}$ ist, so wird

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \sin \mathfrak{a}. \tag{2}$$

Die Elimination von $\mathfrak{a}$ aus (1) und (2) mittelst der Gleichung

$$\cos^2 \mathfrak{a} + \sin^2 \mathfrak{a} = 1$$

führt zu der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial s}{\mathfrak{n}\,\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Multipliziert man beiderseits mit $4s^2$, führt anstatt x und y, um den einfachen Ausdruck (8) für $\mathfrak{n}$ anwenden zu können, ξ und η mittelst der Relationen (7) auf voriger Seite ein und setzt ferner

$$\sigma = \frac{s}{a_0}\sqrt{K_0}, \tag{3}$$

so ergiebt sich endlich:

$$\left(\frac{d\,(\sigma^2)}{\mathfrak{n}\,d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\,(\sigma^2)}{d\eta}\right)^2 = 4\sigma^2. \tag{4}$$

Diese Gleichung ist zu integrieren. Geschieht dieses nach der Methode der unbestimmten Koefficienten, so wird σ^2 als Potenzreihe erhalten. Ist aber σ^2 als Funktion von ξ und η bekannt geworden, so geben (1) und (2) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sigma\cos\mathfrak{a} &= \frac{1}{2\mathfrak{n}}\,\frac{d\,(\sigma^2)}{d\xi}\\ \sigma\sin\mathfrak{a} &= \frac{1}{2}\,\frac{d\,(\sigma^2)}{d\eta}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

zur Bestimmung von $\mathfrak{a}$.

Die Vertauschung der Punkte in den Gleichungen (5) liefert Formeln für den Richtungswinkel $\mathfrak{a}_{1.2}$ und offenbar damit auch ein Mittel zur Bestimmung von $\mathfrak{a}_{1.2} - \mathfrak{a}$.

Auf dem hier vorgezeichneten Weg werden wir σ^2 und $\mathfrak{a}$, sowie $\mathfrak{a}_{1.2} - \mathfrak{a}$ bestimmen. Er erscheint deswegen bequem, weil die in betracht kommenden Ausdrücke für den Fall der Kugel schon entwickelt sind und nur kleine Verbesserungen zu erhalten haben.

§ 5. **Fortsetzung. Bestimmung von σ^2.** Wenn wir in Gleichung (4) des vorigen Paragraphen für $1:\mathfrak{n}$ einfach $\sec\eta$ setzen, so ergiebt sich diejenige Beziehung von σ^2 zu den Koordinaten der Punkte P_1 und P, welche für die Kugel mit dem Radius $a_0:\sqrt{K_0}$ gilt und aus S. 122 entnommen werden kann. Der genauere Wert von $1:\mathfrak{n}$ giebt einen kleinen Zusatz zu jenem σ^2, welches wir σ_0^2 nennen wollen. Heifst die Verbesserung V, so ist also:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + V. \tag{1}$$

Hiermit geht die oben erwähnte Gleichung (4) über in:

$$\left(\frac{\partial\,(\sigma_0^2)}{\partial\xi} + \frac{\partial V}{\partial\xi}\right)^2 (\sec\eta + 6E_0\,\xi\eta^2 + Gl_6)^2$$
$$+ \left(\frac{\partial\,(\sigma_0^2)}{\partial\eta} + \frac{\partial V}{\partial\eta}\right)^2 = 4\sigma_0^2 + 4V. \tag{2}$$

Dieses vereinfacht sich einesteils dadurch, dafs

$$\left(\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}\right)^2 \sec^2\eta + \left(\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\eta}\right)^2 = 4\sigma_0^2$$

ist, andernteils durch die Bemerkung, dafs man die 2. Potenzen der Differentialquotienten von V gegen die 1. Potenzen derselben vernachlässigen kann. Denn indem V nur durch das Glied 5. Ordnung $6E_0\eta^2\xi$ entsteht, ist es nach (2) selbst von der Ordnung des Produkts dieses Gliedes in $\left(\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}\right)^2$, d. i. von der 7. Ordnung. Die Differentialquotienten von V haben dann die 6. Ordnung, ihre Quadrate also die 12. Ordnung. Da ferner die Differentialquotienten von σ_0^2 die 1. Ordnung besitzen, so sind ihre Produkte mit den Differentialquotienten von V Gröfsen 7. Ordnung.

Vernachlässigt man alle Gröfsen, welche die 7. Ordnung der Voraussetzung nach überschreiten, so folgt aus (2):

$$\frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi} + \frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\eta} + 6E_0\xi\eta^2\left(\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}\right)^2 + Gl_8 = 2V. \qquad (3)$$

Da nach S. 122 $\sigma_0^2 = \varDelta\xi^2 + \varDelta\eta^2 + Gl_4$ ist, wenn gesetzt werden:

$$\varDelta\xi = \xi - \xi_1 \qquad \varDelta\eta = \eta - \eta_1, \qquad (4)$$

so hat man für die Differentialquotienten von σ_0^2:

$$\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi} = 2\varDelta\xi + Gl_3 \qquad \frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\eta} = 2\varDelta\eta + Gl_3. \qquad (5)$$

Für V haben wir, wie bemerkt, eine Funktion 7. Ordnung einzuführen, d. h., weil e^2 als Faktor auftritt: eine Funktion 5. Grades in Bezug auf die Koordinaten der Punkte P_1 und P. Offenbar ist aber σ^2 und also auch V eine solche Funktion, welche in Bezug auf die Koordinaten der beiden Punkte P und P_1 vollständig symmetrisch gebaut ist.

Man kann sich diese Funktion zunächst nach Potenzen von $\varDelta\xi$ geordnet denken, denn $\varDelta\xi$ mufs Faktor derselben sein, indem für $\varDelta\xi = 0$ $\sigma^2 = \varDelta\eta^2$ wird, also V verschwindet. Indessen bleiben nur $\varDelta\xi^2$ und $\varDelta\xi^4$ zu berücksichtigen, da das Vorhandensein ungerader Potenzen von $\varDelta\xi$ der eben erwähnten Symmetrie widersprechen würde. Wir begnügen uns aber mit Vernachlässigung von $\varDelta\xi^4$ zu setzen:

$$V = E_0\varDelta\xi^2\left(\xi(a\eta^2 + b\eta_1^2 + c\eta\eta_1) + \xi_1(b\eta^2 + a\eta_1^2 + c\eta\eta_1)\right) + Gl_8, \quad (6)$$

worin a, b, c zu bestimmende Koefficienten bezeichnen. Der Erfolg wird diese Annahme bestätigen.

Mit Weglassung des gemeinsamen Faktors $E_0 \Delta \xi^2$ ergiebt die Substitution des Ausdrucks (6) in (3) zur Bestimmung von a, b, c die (noch nicht weiter zusammengezogene) Gleichung:

$$2\{\xi(a\eta^2 + b\eta_1^2 + c\eta\eta_1) + \xi_1(b\eta^2 + a\eta_1^2 + c\eta\eta_1)\}$$
$$+(\xi-\xi_1)(a\eta^2+b\eta_1^2+c\eta\eta_1)+(\eta-\eta_1)\{\xi(2a\eta+c\eta_1)+\xi_1(2b\eta+c\eta_1)\}$$
$$+ 12\eta^2\xi = \xi(a\eta^2 + b\eta_1^2 + c\eta\eta_1) + \xi_1(b\eta^2 + a\eta_1^2 + c\eta\eta_1) + Gl_6,$$

welche nach gehöriger Ordnung folgende Form annimmt:

$$\left.\begin{array}{l} \xi\left\{4\eta^2(a+3) + \eta\eta_1(3c-2a) + \eta_1^2(2b-c)\right\} \\ +\xi_1\left\{\eta^2(3b-a) + \eta\eta_1(c-2b) + \eta_1^2(a-b-c)\right\} + Gl_6 \end{array}\right\} = 0\,.$$

Dieselbe mufs identisch verschwinden, was nur möglich ist für nachstehende Werte von a, b, c:

$$a = -3 \qquad b = -1 \qquad c = -2\,.$$

Setzt man dies in (6) ein und fügt alsdann V zu σ_0^2 hinzu, so folgt:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 - E_0 \Delta \xi^2 \left\{\begin{array}{c} \xi\,(3\eta^2 + \eta_1^2 + 2\eta\eta_1) \\ +\, \xi_1(\eta^2 + 3\eta_1^2 + 2\eta\eta_1) \end{array}\right\} + Gl_8\,. \qquad (7)$$

Im Anschlufs an die Formeln (5) des vorigen Paragraphen bilden wir nun die Differentialquotienten von σ^2 und erhalten zuerst:

$$\sigma\cos\mathfrak{a} = (\sec\eta + 6E_0\,\xi\eta^2 + Gl_6)\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}\right.$$
$$\left.-E_0\Delta\xi\left[\xi\left(\frac{9}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\eta_1^2 + 3\eta\eta_1\right) + \xi_1\left(-\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{5}{2}\eta_1^2 + \eta\eta_1\right)\right] + Gl_7.\right)$$

Hieraus folgt, wenn wir $\sec\eta \,.\, \frac{1}{2}\,\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}$ mit $(\sigma\cos\mathfrak{a})_0$ als dem für die Kugel gültigen Ausdruck bezeichnen und den oben angegebenen Näherungswert von $\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\sigma_0^2)}{\partial\xi}$ berücksichtigen:

$$\sigma\cos\mathfrak{a} = (\sigma\cos\mathfrak{a})_0 + E_0\Delta\xi\left\{\begin{array}{c} \xi\left(\frac{3}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}\eta_1^2 - 3\eta\eta_1\right) \\ +\,\xi_1\left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{5}{2}\eta_1^2 - \eta\eta_1\right) \end{array}\right\} + Gl_7\,. \quad (8)$$

Die Differentiation von σ^2 nach η giebt ferner sofort:

$$\sigma\sin\mathfrak{a} = (\sigma\sin\mathfrak{a})_0 - E_0\Delta\xi^2\left\{\xi(3\eta + \eta_1) + \xi_1(\eta + \eta_1)\right\} + Gl_7\,. \quad (9)$$

§ 6. Bestimmung von Distanz und Richtungswinkeln aus den Koordinaten. Die Formeln (7), (8) und (9) des vorigen Paragraphen denken wir uns nunmehr angewandt auf 2 Punkte P_1 und P_2. Es ist alsdann an die Symbole ξ und η ohne Index der Index 2 anzuhängen. Ferner ist $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}_{2.1} + 180^0$ zu vertauschen.

Führen wir aufserdem die linearen Koordinaten selbst wieder ein und beachten die für die Kugel geltenden Formeln (3), (4) und (5) S. 122, dann wird nach einigen Reduktionen erhalten:

$$s^2 = \left\{ \begin{array}{c} \Delta x^2 + \Delta y^2 - \left(\frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{12\varrho^2}\right) \Delta x^2 \\ + \left(\frac{y^4}{3\varrho^4} - \frac{y^2 \Delta y^2}{6\varrho^4} - \frac{\Delta y^4}{720\varrho^4}\right) \Delta x^2 - \left(\frac{y^2}{12\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{720\varrho^2}\right) \frac{\Delta x^4}{\varrho^2} \\ - \left\{ \left(\frac{2y^2}{\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{6\varrho^2}\right) \frac{x}{\varrho} + \frac{y\,\Delta x\,\Delta y}{3\varrho^3} \right\} \Delta x^2\, e^2 \sin 2B_0 + \varrho^2\, Gl_8. \end{array} \right\} \tag{1}$$

Hierin ist gesetzt:

$$\left. \begin{array}{c} x = \frac{x_2 + x_1}{2} \qquad y = \frac{y_2 + y_1}{2} \\ \Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta y = y_2 - y_1 \\ \varrho^2 = \frac{a_0^{\,2}}{K_0} = \frac{b_0^{\,2}}{W_0^{\,4}} \text{ mit } W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}, \end{array} \right\} \tag{2}$$

letzteres nach S. 59 § 15 (3), wobei B_0 die geographische Breite des Koordinatenanfangs bezeichnet.

Bei Herstellung der Ausdrücke $s \cos \mathfrak{a}_{2.1}$ und $s \sin \mathfrak{a}_{2.1}$ mittelst (3) und (4) S. 122 ist in diesen Formeln eine Vertauschung der Indices 1 und 2 auszuführen. Es findet sich:

$$s \cos \mathfrak{a}_{2.1} = -\Delta x \left\{ \begin{array}{c} 1 - \left(\frac{y_1^{\,2}}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{6\varrho^2}\right) \\ + \left(\frac{y_1^{\,4}}{24\varrho^4} - \frac{y_1^{\,2}\Delta y^2}{12\varrho^4} + \frac{7\Delta y^4}{360\varrho^4}\right) - \left(\frac{y_1 y_2}{2\varrho^2} + \frac{2\Delta y^2}{15\varrho^2}\right) \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} \\ - \left[\left(\frac{y_1^{\,2}}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{12\varrho^2}\right)\frac{x_1}{\varrho} + \left(\frac{y_1^{\,2}}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{4\varrho^2}\right)\frac{x_2}{\varrho}\right] e^2 \sin 2B_0 \end{array} \right\} + \varrho Gl_7; \tag{3}$$

$$s \sin \mathfrak{a}_{2.1} = \left\{ \begin{array}{c} -\Delta y + \left(y_2 - \frac{1}{3}\Delta y\right) \frac{\Delta x^2}{2\varrho^2} \\ - \left\{ \left(y_2 - 2\Delta y\right)\frac{y_2^{\,2}}{\varrho^2} + \left(y_2 - \frac{2}{15}\Delta y\right) \frac{\Delta y^2}{\varrho^2} \right\} \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} + \left(y_2 - \frac{7}{15}\Delta y\right) \frac{\Delta x^4}{24\varrho^4} \\ + \left[y \frac{x_1}{3\varrho} + (4y + \Delta y) \frac{x_2}{6\varrho} \right] \frac{\Delta x^2}{\varrho^2}\, e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7. \end{array} \right\} \tag{4}$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 folgt hieraus:

$$s \cos \mathfrak{A}_{1.2} = \Delta x \left\{ \begin{array}{c} 1 - \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{6\varrho^2}\right) \\ + \left(\frac{y_2^4}{24\varrho^4} - \frac{y_2^2 \Delta y^2}{12\varrho^4} + \frac{7\Delta y^4}{360\varrho^4}\right) - \left(\frac{y_1 y_2}{2\varrho^2} + \frac{2\Delta y^2}{15\varrho^2}\right) \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} \\ - \left[\left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{4\varrho^2}\right)\frac{x_1}{\varrho} + \left(\frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{\Delta y^2}{12\varrho^2}\right)\frac{x_2}{\varrho}\right] e^2 \sin 2B_0 \end{array} \right\} + \varrho\, Gl_7; \quad (5)$$

$$s \sin \mathfrak{A}_{1.2} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta y + \left(y_1 + \frac{1}{3}\Delta y\right) \frac{\Delta x^2}{2\varrho^2} \\ - \left\{\left(y_1 + 2\Delta y\right) \frac{y_1^2}{\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{2}{15}\Delta y\right) \frac{\Delta y^2}{\varrho^2}\right\} \frac{\Delta x^2}{3\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{7}{15}\Delta y\right) \frac{\Delta x^4}{24\varrho^4} \\ + \left[(4y - \Delta y)\frac{x_1}{6\varrho} + y\frac{x_2}{3\varrho}\right] \frac{\Delta x^2}{\varrho^2} e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7 \,. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Zur Prüfung dieser Formeln dienen die Relationen:

$$s^2 = s^2 \cos^2 \mathfrak{A}_{2.1} + s^2 \sin^2 \mathfrak{A}_{2.1} = s^2 \cos^2 \mathfrak{A}_{1.2} + s^2 \sin^2 \mathfrak{A}_{1.2} \,.$$

Bei der numerischen Auswertung ergiebt sich ebenfalls eine Kontrolle durch doppelte Berechnung von s aus den Systemen (3), (4) und (5), (6).

Eine andere Kontrolle kann mittelst einer Formel erhalten werden, welche direkt die Differenz

$$\mathfrak{A}_{2.1} - \mathfrak{A}_{1.2} - 180^0 = \Delta \mathfrak{A} \qquad (7)$$

angiebt. Soweit die Kugel in betracht kommt, ist diese Differenz schon bekannt. Es handelt sich also auch jetzt nur wieder um die Bestimmung des Korrektionsgliedes.

Durch Addition der Gleichungen (4) und (6) ergiebt sich mit Rücksicht auf (7):

$$s\Big(\sin \mathfrak{A}_{1.2} - \sin (\mathfrak{A}_{1.2} + \Delta \mathfrak{A})\Big) = \Big\{s\Big(\sin \mathfrak{A}_{1.2} - \sin (\mathfrak{A}_{1.2} + \Delta \mathfrak{A})\Big)\Big\}_0$$

$$+ \left\{\left(y - \frac{1}{6}\Delta y\right)\frac{x_1}{\varrho} + \left(y + \frac{1}{6}\Delta y\right)\frac{x_2}{\varrho}\right\} \frac{\Delta x^2}{\varrho^2} e^2 \sin 2B_0 + \varrho Gl_7, \quad (8)$$

worin das 1. Glied rechts sich wieder auf die Kugel bezieht. Wird nun $\sin(\mathfrak{A}_{1.2} + \Delta\mathfrak{A})$ aufgelöst, so folgt aus (8) unter gleichzeitiger Umformung des in e^2 multiplizierten Gliedes:

$$- s \cos \mathfrak{A}_{1.2} \,.\, \Delta\mathfrak{A} + \cdots = - (s \cos \mathfrak{A}_{1.2} \,.\, \Delta\mathfrak{A})_0 + \cdots$$

$$+ \left\{2y\frac{x}{\varrho} + \Delta y \frac{\Delta x}{6\varrho}\right\} \frac{\Delta x^2}{\varrho^2} e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7 .$$

Beachtet man jetzt Formel (5), nach welcher Δx im allgemeinen nur um einen kleinen Bruchteil 2. Ordnung seines Wertes von $s \cos \mathfrak{A}_{1.2}$ verschieden ist, so erhält man durch Division mit Δx (vorbehältlich weiterer Untersuchung der Gültigkeit):

$$\Delta\mathfrak{A} = (\Delta\mathfrak{A})_0 - \left(2\frac{xy}{\varrho^2} + \frac{\Delta x \Delta y}{6\varrho^2}\right)\frac{\Delta x}{\varrho} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 .$$

Der Wert von $(\Delta\mathfrak{A})_0$ ergiebt sich aus Formel (4) S. 119, wobei in den Gliedern 4. Ordnung für u und v bezw. Δx und Δy genommen werden dürfen.

Damit folgt endlich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{A}} = -\varrho'' \frac{\Delta x}{\varrho}\left\{\begin{array}{c} \frac{y}{\varrho}\left(1 - \frac{y^2}{6\varrho^2} + \frac{\Delta x^2}{12\varrho^2} + \frac{\Delta y^2}{8\varrho^2}\right) \\ + \left(2\frac{xy}{\varrho^2} + \frac{\Delta x \Delta y}{6\varrho^2}\right) e^2 \sin 2B_0 + Gl_5 . \end{array}\right\} \tag{9}$$

Um mit Sicherheit zu erkennen, dafs diese Entwicklung zulässig ist, mufs man sich (8) in die Form gebracht denken:

$$s \sin(\mathfrak{A}_{1.2} + \Delta\mathfrak{A}) = s \sin \mathfrak{A}_{1.2} + h . \tag{8*}$$

Wie S. 31 gezeigt, findet man nun, dafs die Entwicklung von $\Delta\mathfrak{A}$ nach Potenzen von h gilt, sobald $h : s \cos^2\mathfrak{A}_{1.2}$ eine kleine Gröfse ist, deren Potenzen von einer gewissen Stelle ab vernachlässigt werden können. Insoweit aber die der Kugel entsprechenden Glieder allein in betracht kommen, ist die Formel (9) schon früher als für kleine Werte der Koordinaten brauchbar erwiesen. Man sieht jetzt, dafs die Brauchbarkeit auch für das Ellipsoid bestehen bleibt, denn die Glieder in h, welche durch e^2 erzeugt werden, haben jedenfalls sämtlich den Faktor Δx^2, weil dieser Faktor notwendig allen höheren Gliedern des Ausdrucks für s^2 S. 416 (1) anhaftet, wie die Entwicklung S. 414 zeigt. Dieser Faktor bleibt für $s \sin \mathfrak{A}_{1.2}$ bestehen, und es läfst sich also h durch $s^2 \cos^2\mathfrak{A}_{2.1}$ dividieren, welches von Δx^2 nur um einen, von 1 nicht erheblich abweichenden Faktor unterschieden ist.

Hiermit ist aber leicht zu ersehen, dafs $h : s \cos^2\mathfrak{A}_{2.1}$ für solche Werte der Koordinaten, die im Verhältnis zu a_0 Gröfsen 1. Ordnung sind, jedenfalls eine *kleine* Gröfse 2. Ordnung ist, deren Potenzen also der Reihe nach immer kleiner werden.

Für die *numerische Genauigkeit* der vorstehenden Formeln ist es vorteilhaft, den Anfangspunkt der Abscissen, für welchen K_0 gilt, so zu verschieben, dafs die Abscissen selbst möglichst klein werden.

Im allgemeinen ist es am besten, K_0 *für die Mitte zwischen den Fufspunkten der Ordinaten* y_1 *und* y_2 zu nehmen. Dann wird $x = 0$ und $x_1 = -x_2$, wodurch sich die Werte der von e^2 abhängenden Glieder stark reduzieren.

Bei Werten der Entfernungen s und Ordinaten $y < 0{,}1\,a_0$ beträgt unter dieser Voraussetzung der Einflufs der von e^2 abhängenden

Glieder im Maximum für log s höchstens mehrere Einheiten der 8. Decimale. Der Einflufs auf $\varDelta\mathfrak{a}$ beträgt gleichzeitig etwa ebensoviele Einheiten der 2. Decimalstelle der Sekunden.

Um eine Vorstellung von der Genauigkeit der Formeln dieses Paragraphen zu gewinnen, braucht man sich dieselben nur mittelst derjenigen für das geodätische Dreieck S. 359 entwickelt zu denken, was in der That möglich ist, indem man das Viereck $P_1 P_2 F_2 F_1$ (Fig. 38 S. 412) in 2 Dreiecke zerlegt. Aus Tafel (27) S. 388 und Formel (3) S. 403 schliefst man, dafs bei passender Wahl von K_0 in $\varDelta\mathfrak{a}$ im Maximum Fehler von einigen Hundertstelsekunden entstehen können, wenn die in frage kommenden Dimensionen den Betrag von $0{,}1\,a_0$ erreichen. Ferner ist hieraus und aus § 14 S. 388 u. ff. zu ersehen, dafs log s in diesem Falle in der 8. Decimalstelle unsicher werden kann.

§ 7. Bestimmung der Koordinatendifferenz und der Differenz der Richtungswinkel aus der Entfernung $P_1 P_2$, dem Richtungswinkel in P_1 und den Koordinaten von P_1. Hierzu ist es nur nötig, die Formeln (5) und (6) des vorigen Paragraphen nach $\varDelta x$ und $\varDelta y$ aufzulösen. Dies wird aber dadurch sehr erleichtert, dafs, insoweit die für die Kugel gültigen Glieder in betracht kommen, die Formeln schon früher auf S. 118 gegeben sind. Aufserdem genügt es in den mit e^2 multiplizierten Gliedern zu setzen:

$$x_2 = x_1 + u + Gl_3 \qquad y_2 = y_1 + v + Gl_3,$$

und so wird erhalten:

$$\left.\begin{array}{c} v = s \sin \mathfrak{a}_{1.2} \qquad u = s \cos \mathfrak{a}_{1.2} \\ \varrho^2 = \dfrac{a_0^{\,2}}{K_0} = \dfrac{b_0^{\,2}}{W_0^{\,4}} \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$y_2 - y_1 = \left\{\begin{array}{l} v - \left(y_1 + \frac{1}{3} v\right) \frac{u^2}{2\varrho^2} + \left(y_1 + \frac{1}{5} v\right)\left(\frac{u^4}{24\varrho^4} - \frac{u^2 v^2}{3\varrho^4}\right) - (y_1 + 3v)\frac{u^2 y_1^{\,2}}{6\varrho^4} \\ \quad - \left[\left(y_1 + \frac{1}{3} v\right)\frac{x_1}{\varrho} + \left(\frac{1}{3} y_1 + \frac{1}{6} v\right)\frac{u}{\varrho}\right]\frac{u^2}{\varrho^2} e^2 \sin 2B_0 + \varrho\, Gl_7 \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$x_2 - x_1 = u\left\{\begin{array}{l} 1 + \left(\frac{y_2^{\,2}}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2}\right) + \left(\frac{y_2^{\,2}}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{5\varrho^2}\right)\frac{u^2}{3\varrho^2} + \frac{5}{6}\left(\frac{y_2^{\,2}}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{10\varrho^2}\right)^2 \\ \quad + \left[\left(\frac{y_2^{\,2}}{\varrho^2} - \frac{v^2}{3\varrho^2}\right)\frac{x_1}{\varrho} + \left(\frac{y_2^{\,2}}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{12\varrho^2}\right)\frac{u}{\varrho}\right] e^2 \sin 2B_0 \end{array}\right\} + \varrho Gl_7. \tag{3}$$

Zur Berechnung von $\varDelta\mathfrak{a}$ kann man entweder die Formel (9) des vorigen Paragraphen anwenden oder mit Rücksicht auf Formel (5) S. 119 setzen:

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\mathfrak{a}} = -\varrho'' \dfrac{u}{\varrho}\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{y_1}{\varrho} + \frac{v}{2\varrho}\right) + \left(\frac{y_1}{\varrho} + \frac{v}{4\varrho}\right)\frac{5v^2 - u^2}{6\varrho^2} + \left(\frac{y_1}{3\varrho} + \frac{v}{\varrho}\right)\frac{y_1^{\,2}}{\varrho^2} \\ \quad + \left(\frac{2xy}{\varrho^2} + \frac{uv}{6\varrho^2}\right) e^2 \sin 2B_0 + Gl_5 \end{array}\right\} \\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \qquad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ \mathfrak{a}_{2.1} = \mathfrak{a}_{1.2} + 180^0 + \varDelta\mathfrak{a}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Über die Genauigkeit dieser Formeln gelten wesentlich dieselben Bemerkungen wie im vorigen Paragraphen. Insbesondere ist es im allgemeinen vorteilhaft, den *Koordinatenanfang*, auf welchen K_0 sich bezieht, auch hier inmitten der Fufspunkte der Ordinaten anzunehmen, wozu es ausreicht, $x_1 = -\frac{1}{2}u$ zu setzen.

Man kann indessen um so mehr hiervon abweichen, je kleiner die in betracht kommenden Dimensionen sind. Ohne Zweifel ist es unbequem, bei der successiven Berechnung der Koordinaten der Punkte einer Haupttriangulierung stets ein neues K_0 für jede neue Dreiecksseite zu nehmen, wenigstens dann, wenn man K_0 bezw. W_0 aus den Tafeln genau interpolieren mufs. Es genügt jedoch immer, den *nächstgelegenen Tafelwert* zu nehmen, unter der Voraussetzung, dafs die Tafelwerte von 10 zu 10′ voranschreiten (selbst 20′ Intervall würde noch genügen).

Indem man also ϱ immer fortschreitend verbessert, erlangt man den Vorteil, dafs die in e^2 multiplizierten Glieder sehr klein und meistens so klein werden, dafs sie ganz wegbleiben können.

Man wird dann oftmals die Formeln (2) bis (4) auf die im Druck hervorgehobenen Glieder der beiden niedersten Ordnungen reduzieren können.

Ein sehr ausgedehntes Dreiecksnetz kann nach diesen einfachen Formeln aber nur dann behandelt werden, wenn man mehrere Abscissenaxen anwendet, deren ostwestlicher Abstand etwa nur 150^{km} beträgt. Punkte von mittlerer Lage werden auf beide benachbarte Axen bezogen. (Vergl. S. 120.)

Um die genau meridionale Richtung dieser Abscissenaxen zu sichern, mufs man von der ersten, durch astronomische Messungen festgelegten Axe aus mittelst der *strengeren* Formeln rechnen bis zu denjenigen Netzpunkten, durch welche die beiden benachbarten Axen gelegt werden. Von diesen aus lassen sich dann wieder die benachbarten Axen bestimmen, u. s. f.

In Preufsen benutzt man hierbei ein anderes Verfahren: Man rechnet direkt geographische Koordinaten (die man für kartographische Zwecke ohnehin nicht entbehren kann) für die Punkte des Hauptdreiecksnetzes und geht dann nach Bedürfnis zu lokalen rechtwinkligen Koordinaten über.

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dafs man mit Leichtigkeit die Abscissenaxen in ganze Längengrade Abstand von einander bringen und überhaupt ohne weiteres irgendwo ein System lokaler rechtwinkliger Koordinaten etablieren kann.

§ 8. Übertragung geographischer Koordinaten. Schon bei Behandlung dieses Problems für kleine Distanzen auf der Kugel S. 123 zeigte es sich vorteilhaft, zunächst rechtwinklige Koordinaten für den Endpunkt P_2 der Linie s in Bezug auf den Meridian des Anfangspunktes P_1 zu berechnen. Im Anschlufs an Fig. 39 denken wir uns also die Koordinaten x und y für P_2 berechnet, alsdann aber mittelst des Meridiansbogens x von der geographischen Breite B_1 des Punktes P_1 übergegangen zur Breite F des Punktes F, dem Ordinatenfufspunkt. Es bleibt nun hauptsächlich noch die Aufgabe, von F aus mittelst y den geographischen Längenunterschied und die geographische Breite für P_2 zu ermitteln.

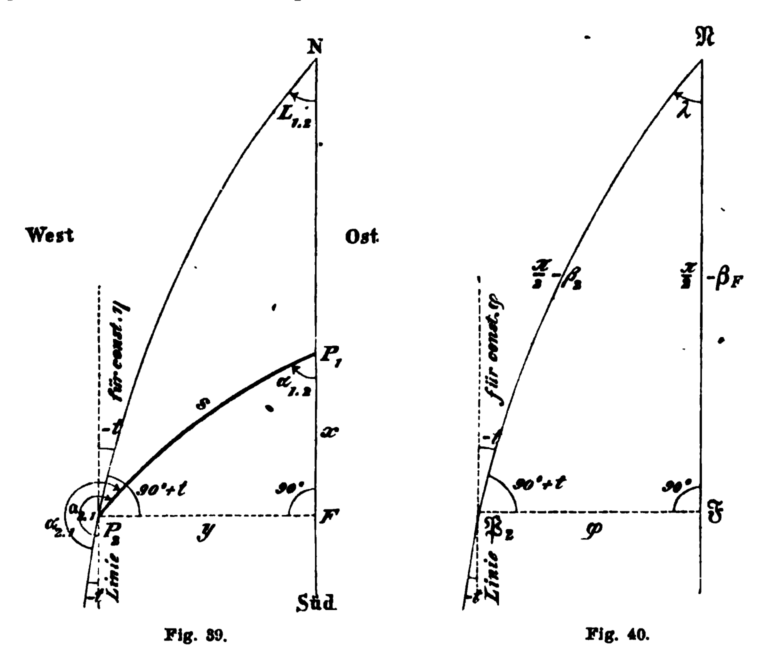


Fig. 39. Fig. 40.

Bei sehr kleinen Distanzen mufs es ausreichen, die Figur NFP_2 auf dem Ellipsoid wie ein sphärisches Dreieck, auf einer Kugel mit dem Querkrümmungsradius ϱ_n im Punkte F als Radius, zu berechnen. Denn die Normalen des Ellipsoids für die Punkte P_2 und F schneiden sich bei geringen Entfernungen sehr nahe in einem und demselben Punkt K'_F der Rotationsaxe, welcher Punkt von F um ϱ_n absteht (Fig. 1, S. 40). Die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks, das auf der um K'_F mit ϱ_n beschriebenen Kugel zwischen den Durchschnittspunkten der Linien $K'_F F$, $K'_F P_2$ und $K'_F N$ mit der Kugelfläche liegt, entsprechen nur insofern nicht genau den Winkeln der Normalen mit der Erdaxe, sowie den Winkeln 90^0, $L_{1.2}$ und $90^0 + t$

des Dreiecks NFP_2 auf dem Ellipsoid, als $K_F'P_2$ nicht genau Normale des Ellipsoids ist.

Die sphärische Rechnung bedarf daher der Korrektion, welche nun ausgemittelt werden soll. Wir setzen:

$$\frac{y}{\varrho_n} = \eta\,, \quad \varrho_n \text{ für die geographische Breite } F. \tag{1}$$

Im Anschlufs an die Formeln des 5. Kapitels, S. 218 u. ff. ordnen wir ferner der Fig. 39 eine sphärische Figur zu, Fig. 40, welche die Azimute und Komplemente der reduzierten Breiten unmittelbar enthält.

Nach Formel (9) S. 221 ist:

$$dy = a_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-k^2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}\; d\varphi$$

$$k = e \sin F.$$

Da nun $\varrho_n = a_0 : \sqrt{1 - e^2 \sin^2 F}$ ist, so hat man auch $\varrho_n = a_0 : \sqrt{1-k^2}$ und also

$$d\eta = \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}\; d\varphi. \tag{2}$$

Setzen wir aber η als Gröfse 1. Ordnung voraus, so wird durch Reihenentwicklung:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \left(\varphi^2 - \frac{1}{3}\varphi^4\right) + Gl_8\,.$$

Wird dies in dem Ausdrucke (2) eingeführt und dann von $\varphi = 0$ bis φ integriert, so wird erhalten:

$$\eta = \varphi \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{1}{6} k^2 \varphi^2 + \frac{1}{30} k^2 \varphi^4 + Gl_8\right). \tag{3}$$

Hierzu gehört die nachfolgende Umkehrung, wie leicht zu verificieren:

$$\varphi = \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}} \left(1 + \frac{1}{6} k^2 (1 + e^2)\, \eta^2 - \frac{1}{30} k^2 \eta^4 + Gl_8\right). \tag{4}$$

Man hat ferner aus Formel (14) S. 231, wenn $k_1 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{8} k^4 + \cdots$ und $n = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \cdots$ gesetzt, sowie beachtet wird, dafs $\cos\beta_F = \cos F : \sqrt{1-k^2}$ ist:

$$L_{1.2} = \lambda - \frac{e^2}{2} \frac{\cos F}{\sqrt{1-k^2}} \left\{ \begin{array}{c} \left(1 + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8}k^2 + \frac{1}{8}e^4 - \frac{5}{64}k^4\right)\varphi - \left(\frac{1}{16}k^2 + \frac{1}{32}k^4\right)\sin 2\varphi \\ + \frac{1}{256}k^4 \sin 4\varphi + Gl_7 \end{array} \right\}.$$

Den Index von $L_{1.2}$ werden wir im Folgenden der Kürze wegen unterdrücken. Substituiert man nun die Reihen $\sin 2\varphi = 2\varphi - \frac{4}{3}\varphi^3 + \cdots$, $\sin 4\varphi = 4\varphi + \cdots$ und $1 : \sqrt{1-k^2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{8}k^4 + \cdots$, so folgt:

$$L = \lambda - \frac{1}{2}e^2 \cos F\left\{\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}k^4 + \frac{1}{8}e^2k^2 + \frac{1}{8}e^4\right)\varphi + \frac{1}{12}k^2\varphi^3 + Gl_7\right\},$$

und wenn man endlich für φ mittelst (4) η einführt:

$$L = \lambda - \frac{1}{2}e^2 \cos F\left\{\begin{array}{l}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}k^4 + \frac{5}{8}e^4 + \frac{1}{4}e^2k^2\right)\eta \\ \qquad + \frac{1}{4}k^2\eta^3 + Gl_7.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Mittelst sphärischer Trigonometrie hat man weiter:

$$\tan\lambda = \tan\varphi \sec\beta_F = \sqrt{1-k^2}\tan\varphi\sec F,$$

wozu wir aus (5) den Wert von λ und aus (4) den Wert von φ entnehmen. Es ergiebt sich hieraus, indem nachstehende Entwicklung nach *Taylors* Satz:

$$\tan(u+\delta) = \tan u + \delta\sec^2 u + \delta^2\sec^2 u\tan u + \delta^3\sec^2 u\left(\tan^2 u + \frac{1}{3}\right) + \cdots, \tag{6}$$

unter Vorbehalt der Beurteilung der Zulässigkeit, auf $u = L$ mit $\delta = \lambda - L$, sowie auf $u = \eta$ mit $\delta = \varphi - \eta$ angewandt wird:

$$\begin{array}{c}\tan L + (\lambda - L)\sec^2 L + (\lambda - L)^2\sec^2 L\tan L + Gl_9 \\ = \sqrt{1-k^2}\sec F\left\{\tan\eta + (\varphi-\eta)\sec^2\eta + (\varphi-\eta)^2\sec^2\eta\tan\eta + Gl_9\right\}.\end{array} \tag{7}$$

Durch Entwicklung von $1 : \sqrt{1-e^2}$ in Formel (4) wird aber erhalten:

$$\varphi - \eta = \eta\left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{1}{6}k^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\eta^2 - \frac{1}{30}k^2\eta^4 + Gl_8\right). \tag{8}$$

Die Substitution dieses Ausdrucks, sowie desjenigen für $\lambda - L$ aus (5) in (7) giebt nun mit Benutzung der Relation $\sec^2 = 1 + \tan^2$:

$$\left.\begin{array}{l}\tan L + \frac{1}{2}e^2\eta\cos F\left\{\begin{array}{l}1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{5}{8}e^4 + \frac{1}{8}k^4 + \frac{1}{4}e^2k^2 \\ + \frac{1}{4}k^2\eta^2 + \tan^2 L\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}e^2\right)\end{array}\right\} \\ \qquad + \frac{1}{4}e^4\eta^2\cos^2 F\tan L + Gl_9\end{array}\right\} = \tag{9}$$

$$=\sqrt{1-k^2}\sec F\left\{\begin{array}{c}\tan\eta+\eta\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6\right)\\ +\frac{1}{6}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)k^2\eta^3-\frac{1}{30}k^2\eta^5\\ +\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{1}{6}k^2\eta^2\right)\eta\tan^2\eta+\frac{1}{4}e^4\eta^2\tan\eta+Gl_9\end{array}\right\}.$$

Die *rechte* Seite dieser Gleichung geht durch Entwicklung von $\sqrt{1-k^2}$ in die Reihe $1-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{8}k^4-\frac{1}{16}k^6-\cdots$ und durch teilweise Substitution von $\tan\eta=\eta+\frac{1}{3}\eta^3+\frac{2}{15}\eta^5+\cdots$ über in folgenden Ausdruck:

$$\sec F\left\{\begin{array}{l}\tan\eta+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{8}e^4-\frac{1}{8}k^4-\frac{1}{4}e^2k^2\\ +\frac{5}{16}e^6-\frac{1}{16}k^6-\frac{3}{16}e^4k^2-\frac{1}{16}e^2k^4\end{array}\right\}\eta\\ +\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{5}{8}e^4-\frac{1}{8}k^4\right)\eta^3\\ +\left(\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{15}k^2\right)\eta^5+Gl_9.\end{array}\right\} \quad (10)$$

Man erkennt nun zunächst durch Vergleichung mit der linken Seite von (9), dafs

$$\tan L=\sec F\tan\eta+\eta\sec F\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}e^2\cos^2F\right)+Gl_5,$$

d. h., da wegen $k^2=e^2\sin^2F$ die Parenthese verschwindet, dafs

$$\tan L=\sec F\tan\eta+Gl_5. \quad (11)$$

Mit dieser Relation eliminieren wir in den kleinen Gliedern von (9) $\tan^2L$ und $\tan L$. Die linke Seite von (9) geht damit über in:

$$\tan L+\eta\cos F\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{1}{8}e^2k^2+\frac{1}{16}e^2k^4+\frac{1}{8}e^4k^2+\frac{5}{16}e^6\right)$$
$$+\eta^3\cos F\left(\frac{1}{4}e^4+\frac{1}{8}e^2k^2\right)+\eta^3\sec F\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{1}{8}e^2k^2\right)$$
$$+\eta^5\sec F\cdot\frac{1}{3}e^2+Gl_9.$$

Setzt man hier noch in dem 2. und 3. Gliede für $e^2\cos F$ den Wert $e^2\cos^2F.\sec F$, d. i. $(e^2-k^2)\sec F$, so erhält man für die *linke* Seite von (9) den Ausdruck:

$$\tan L+\sec F\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{8}e^4-\frac{1}{8}k^4-\frac{1}{4}e^2k^2\\ +\frac{5}{16}e^6-\frac{1}{16}k^6-\frac{3}{16}e^4k^2-\frac{1}{16}e^2k^4\end{array}\right\}\eta\\ +\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{5}{8}e^4-\frac{1}{8}k^4\right)\eta^3+\frac{1}{3}e^2\eta^5+Gl_9.\end{array}\right\} \quad (12)$$

Vergleicht man dies endlich noch mit dem Ausdruck (10) für die rechte Seite von (9), so erhält man die einfache Formel:

$$\tan L_{1.2} = \tan \eta \sec F \left(1 + \frac{1}{15} k^2 \eta^4 + Gl_8\right). \tag{13}$$

Geht man nur bis zur 7. Ordnung, so reicht es sogar aus, $\tan L = \tan \eta \sec F$ zu setzen. Selbst für $\eta = 0{,}1$ beeinflufst das Glied $k^2\eta^4$ der Parenthese rechter Hand die 8. Decimale des $\log \tan L$ höchstens mit 2 Einheiten.

In Bezug auf die Konvergenz der in der Parenthese rechter Hand von (13) auftretenden Reihe ist nun noch nachträglich zu erörtern, inwieweit die Anwendung der Reihe (6) zulässig ist. Es können dabei indes nur Zweifel für die Anwendung auf $u = L$ entstehen und zwar hier, weil trotz der Voraussetzung über η als einer Gröfse 1. Ordnung doch L in der Nähe des Pols sehr grofs werden kann. Diese Anwendung setzt aber, wenn wir entsprechend einer Multiplikation von (13) mit $\cos F$ sogleich diesen Faktor anbringen:

$$\tan\lambda\cos F = \tan L\cos F + (\lambda - L)\cos F\sec^2 L + (\lambda - L)^2\cos F\sec^2 L\tan L$$
$$+ (\lambda - L)^3\cos F\sec^2 L\left(\tan^2 L + \frac{1}{3}\right) + \cdots \tag{13*}$$

Bleibt man, wie geschehen, bei $(\lambda - L)^2$ stehen, so ist der Rest gleich

$$(\lambda - L)^3 \cos F \sec^2 L' \left(\tan^2 L' + \frac{1}{3}\right), \tag{14}$$

wobei L' ein nicht näher bekannter, zwischen L und λ gelegener Wert ist (S. 25). Für $(\lambda - L)$ können wir in ausreichender Annäherung hierin $\frac{1}{2} e^2 \eta \cos F$ setzen; nehmen wir aufserdem für $\sec^2 L'$ den Wert $1 + \tan^2 L'$, so reduziert sich die Frage, ob der Rest auch in der Nähe des Pols vernachlässigt werden kann, auf die Untersuchung des Ausdrucks:

$$\frac{1}{8} e^6 \eta^3 (\tan L' \cos F)^4. \tag{14*}$$

Hierin setzen wir $L' = \lambda - \frac{1}{2} \varkappa e^2 \eta \cos F$, wobei $\varkappa$ keinesfalls die 1 wesentlich überschreitet. Daher ist

$$\tan L' \cos F = \frac{\tan \lambda \cos F - \tan\left(\frac{1}{2} \varkappa e^2 \eta \cos F\right) \cos F}{1 + \tan \lambda \tan\left(\frac{1}{2} \varkappa e^2 \eta \cos F\right)},$$

Obige Entwicklungen zeigen aber, dafs $\tan \lambda \cos F = \sqrt{1 - k^2} \tan \varphi$, also sehr nahe gleich $\tan \eta$ ist. Mithin ist nicht nur der Nenner im

vorstehenden Ausdruck rechter Hand für kleine Werte von η stets nahezu gleich 1, sondern man sieht auch leicht, dafs allgemein $\tan L' \cos F$ nahezu gleich $\tan \eta$, also eine Gröfse 1. Ordnung ist.

Hierdurch ist gezeigt, dafs das oben besonders hervorgehobene Restglied (14*) und damit ebenso der ganze Rest (14) auch am Pol eine *kleine* Gröfse innerhalb der vernachlässigten Ordnungen bleibt.

Die Formel (13) ist demnach für kleine Werte η auch in der Nähe des Poles brauchbar.

§ 9. **Fortsetzung: Meridiankonvergenz.** Das sphärische Hilfsdreieck giebt zur Berechnung der Meridiankonvergenz t die Formel:

$$\tan t = -\sin \varphi \tan \beta_F. \tag{1}$$

Hierin setzen wir

$$\tan \beta_F = \sqrt{1-e^2} \tan F \tag{2}$$

und

$$\sin\varphi = \sin\big(\eta + (\varphi-\eta)\big) = \sin\eta + (\varphi-\eta)\cos\eta - \frac{1}{2}(\varphi-\eta)^2 \sin\eta + Gl_9.$$

Mit Rücksicht auf den Wert von $(\varphi - \eta)$ nach Formel (8) S. 423 läfst sich hieraus nach und nach ableiten:

$$\sqrt{1-e^2}\sin\varphi = \left\{\begin{array}{c} \sin\eta\left(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4-\frac{1}{16}e^6\right) \\ +(\varphi-\eta)\left(1-\frac{1}{2}\eta^2+\frac{1}{24}\eta^4\right)\left(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{8}e^4\right) \\ -\frac{1}{2}\eta(\varphi-\eta)^2+Gl_9 \end{array}\right\}$$

oder

$$\sqrt{1-e^2}\sin\varphi = \sin\eta + \frac{1}{6}\eta^3(k^2-e^2)(1+e^2) + \frac{1}{60}\eta^5(e^2-7k^2) + Gl_9. \tag{3}$$

Damit ergiebt sich aus (1), wenn man noch auf die Formel $k^2 = e^2 \sin^2 F$ Rücksicht nimmt:

$$\tan t = -\tan F\left(\sin\eta - \frac{1}{6}\eta^3 e^2(1+e^2)\cos^2 F + \frac{1}{60}\eta^5 e^2(1-7\sin^2 F) + Gl_9\right).$$

Zieht man hier endlich $\sin\eta$ als Faktor, wobei zu beachten, dafs $\eta : \sin\eta = 1 + \frac{1}{6}\eta^2 + Gl_4$ ist, so folgt:

$$\tan t = -\sin\eta\tan F\left\{1-\frac{1}{6}\eta^2\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2F + \frac{1}{90}\eta^4 e^2(8\cos^2F-9) + Gl_8\right\}. \tag{4}$$

Die Gültigkeit dieser Formel ist für kleine Werte von η unzweifelhaft.

§ 10. **Fortsetzung: Breitendifferenz.** Aus dem Formelsystem (9) S. 126 entnehmen wir die im sphärischen Hilfsdreieck stattfindende Gleichung:

$$\sin(\beta_F - \beta_2) = -\tan t \cos\beta_F \tan\frac{\lambda}{2}. \tag{1}$$

Um linker Hand die Differenz der geographischen Breiten zu erhalten, benutzen wir die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_F &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-k^2}}\sin F & \cos\beta_F &= \frac{\cos F}{\sqrt{1-k^2}} \\ \sin\beta_2 &= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B_2}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}} & \cos\beta_2 &= \frac{\cos B_2}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus folgt durch Bildung von $\sin\beta_F\cos\beta_2 - \cos\beta_F\sin\beta_2$ sofort:

$$\sin(\beta_F - \beta_2) = \sin(F - B_2)\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}.$$

Es ist daher:

$$\sin(F - B_2) = -\tan t\cos F\tan\frac{\lambda}{2}\,\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{3}$$

in welche Formel nunmehr für λ noch L einzuführen ist.

Es ist aber, weil identisch $\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}(\lambda - L)$, mittelst der Entwicklung (6) S. 423:

$$\cos F\tan\frac{\lambda}{2} = \cos F\left\{\tan\frac{L}{2} + \frac{\lambda - L}{2}\sec^2\frac{L}{2} + \left(\frac{\lambda - L}{2}\right)^2\sec^2\frac{L}{2}\tan\frac{L}{2} + \cdots\right\}, \tag{4}$$

worin nach (5) S. 423 zu setzen ist:

$$\frac{\lambda - L}{2} = \frac{1}{4}e^2\eta\cos F\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}e^2\right) + Gl_7.$$

Man hat nun zu beachten, dafs zufolge Formel (13) S. 425 L absolut genommen 90° nicht übersteigen kann, $\tan\frac{L}{2}$ also höchstens gleich 1 wird. (Diese Grenzwerte treten ein, wenn Punkt F in den Pol fällt.) Damit ist ersichtlich, dafs die Entwicklung (4) auch am Pole konvergiert, denn ihre Glieder sind sämtlich kleiner als die entsprechenden Glieder der Entwicklung (13*) S. 425. Es ist insbesondere auch $\cos F\tan\frac{L}{2}$ bis zum Pole eine kleine Gröfse 1. Ordnung, weil der gröfsere Wert $\cos F\tan L$ dieses Verhalten hat.

Wir erhalten jetzt aus (4) durch Substitution des Wertes von $\frac{1}{2}(\lambda - L)$:

$$\cos F \tan \frac{\lambda}{2} = \cos F \left\{ \begin{array}{c} \tan \frac{L}{2} + \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{16} e^2 k^2 + \frac{3}{16} e^4\right) \eta \cos F \\ + \frac{1}{4} e^2 \eta \cos F \tan^2 \frac{L}{2} + Gl_7 \end{array} \right\},$$

womit der Ausdruck (3) für $\sin (F - B_2)$ übergeht in:

$$\sin (F - B_2) = -\tan t \cos F \left\{ \tan \frac{L}{2} + \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{16} e^2 k^2 + \frac{3}{16} e^4\right) \eta \cos F \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} e^2 \eta \cos F \tan^2 \frac{L}{2} + Gl_7 \right\} \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (5)$$

Die Entwicklung des letzten Faktors rechter Hand giebt, wie leicht zu ersehen ist:

$$\frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}{\sqrt{1 - e^2}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_2 + e^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \sin^2 B_2 - \frac{1}{8} \sin^4 B_2\right) + Gl_6, \quad (6)$$

worin wir zunächst für B_2 die Breite F einführen. Die vorhergehende Gleichung zeigt, dafs man mit Rücksicht auf Formel (4) S. 426 setzen kann:

$$B_2 - F = -\eta \sin F \tan \frac{L}{2} (1 + Gl_2).$$

Substituiert man dies in die hier stets gültige Reihenentwicklung:

$$\cos^2 B_2 = \cos^2 F - (B_2 - F) \sin 2F - (B_2 - F)^2 \cos 2F$$
$$+ \frac{2}{3} (B_2 - F)^3 \sin 2F + \cdots,$$

so wird mit Benutzung der Formel $\cos 2F = 2 \cos^2 F - 1$ ohne Schwierigkeit erhalten:

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 B_2 = \cos^2 F + \eta \sin F \sin 2F \tan \frac{L}{2} + \eta^2 \sin^2 F \tan^2 \frac{L}{2} + Gl_4 \\ \sin^2 B_2 = \sin^2 F + Gl_2 . \end{array} \right\} \quad (7)$$

Hiermit läfst sich (6) auf nachstehende Form bringen:

$$\frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}}{\sqrt{1 - e^2}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 F + e^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \sin^2 F - \frac{1}{8} \sin^4 F\right)$$
$$+ e^2 \eta \sin^2 F \cos F \tan \frac{L}{2} + \frac{1}{2} e^2 \eta^2 \sin^2 F \tan^2 \frac{L}{2} + Gl_6 .$$

Dies vereinfacht sich noch, wenn wir die Relation

$$\tan \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \tan L \left(1 - \tan^2 \frac{L}{2}\right)$$

benutzen und mit Rücksicht auf (13) S. 425 setzen:

$$\cos F \tan \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\eta\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{6}\eta^3\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right) + Gl_5. \qquad (8)$$

Man erhält dann ohne Mühe:

$$\frac{\sqrt{1 - e^2\sin^2 B_2}}{\sqrt{1 - e^2}} = \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}e^2\cos^2 F + e^4\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sin^2 F - \frac{1}{8}\sin^4 F\right) \\ \qquad + \frac{1}{2}e^2\eta^2\sin^2 F + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Indem wir dies in dem Ausdruck (5) substituieren, setzen wir zugleich daselbst im 2. Gliede der grofsen Parenthese:

$$\eta = \eta\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right) + \eta\tan^2\frac{L}{2} = 2\cos F\tan\frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\eta^2\right) + \eta\tan^2\frac{L}{2} + Gl_5$$

und erhalten zunächst für die grofse Parenthese von (5) den Ausdruck:

$$\tan\frac{L}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^2k^2 + \frac{3}{8}e^4 - \frac{1}{6}e^2\eta^2\right)\cos^2 F + \frac{1}{2}e^2\eta\cos F\tan\frac{L}{2} + Gl_6\right\}.$$

Hierin setzen wir endlich noch im letzten Gliede für $\cos F\tan\frac{L}{2}$ den gleichen Wert $\frac{1}{2}\eta\left(1 - \tan^2\frac{L}{2}\right) + Gl_3$ und gelangen sodann nach einfachen Reduktionen mit Rücksicht auf die Beziehung $k = e\sin F$ zu der Formel:

$$\sin(F - B_2) = -\tan t\cos F\tan\frac{L}{2}\left\{\begin{array}{c} 1 + (e^2 + e^4)\cos^2 F + Gl_6 \\ + e^2\eta^2\left(\frac{3}{4}\sin^2 F + \frac{1}{12}\cos^2 F - \frac{1}{4}\tan^2\frac{L}{2}\right) \end{array}\right\}. \quad (10)$$

Setzt man hierin für $\tan t$ seinen Wert nach (4) S. 426, so folgt auch:

$$\sin(F - B_2) = \sin\eta\sin F\tan\frac{L}{2}\left\{\begin{array}{c} 1 + (e^2 + e^4)\cos^2 F + Gl_6 \\ + e^2\eta^2\left(\frac{3}{4}\sin^2 F - \frac{1}{12}\cos^2 F - \frac{1}{4}\tan^2\frac{L}{2}\right) \end{array}\right\}. \quad (11)$$

Diese Formeln lassen sich noch vereinfachen, wenn man für eine vorläufig nicht näher bestimmte Breite zwischen B_2 und F das Verhältnis $\varrho_n : \varrho_m$ einführt. Sei die Breite $F + \varkappa(B_2 - F)$, so ist:

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m} = \frac{1 - e^2\sin^2(F + \varkappa(B_2 - F))}{1 - e^2} = 1 + (e^2 + e^4)\cos^2\left(F + \varkappa(B_2 - F)\right) + Gl_6.$$

Man hat aber, wobei die ähnliche Reihenentwicklung für $\cos^2 B_2$ auf Seite 428 zu beachten ist:

$$\cos^2\left(F+\varkappa(B_2-F)\right)=\cos^2F-\varkappa(B_2-F)\sin 2F-\varkappa^2(B_2-F)^2\cos 2F+Gl_4$$
$$=\cos^2 F+2\varkappa\eta\sin^2 F\cos F\tan\frac{L}{2}$$
$$+\varkappa^2\eta^2\sin^2 F\tan^2\frac{L}{2}+Gl_4$$
$$=\cos^2 F+\varkappa\eta^2\sin^2 F\left(1-(1-\varkappa)\tan^2\frac{L}{2}\right)+Gl_4.$$

Es ist daher für die Breite $F+\varkappa(B_2-F)$:

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m}=1+(e^2+e^4)\cos^2 F+\varkappa e^2\eta^2\sin^2 F\left(1-(1-\varkappa)\tan^2\frac{L}{2}\right)+Gl_6. \quad (12)$$

Die Vergleichung mit (10) und (11) zeigt, dafs es vorteilhaft ist, $\varkappa=\frac{3}{4}$ zu nehmen. Dann wird:

$$\sin(F-B_2)=\left\{\begin{aligned}&=-\tan t\cos F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m}\\&\times\left\{1+e^2\eta^2\left(+\frac{1}{12}\cos^2F+\left[\frac{3}{16}\sin^2F-\frac{1}{4}\right]\tan^2\frac{L_{1.2}}{2}\right)+Gl_6\right\}\\&=+\sin\eta\sin F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m}\\&\times\left\{1+e^2\eta^2\left(-\frac{1}{12}\cos^2F+\left[\frac{3}{16}\sin^2F-\frac{1}{4}\right]\tan^2\frac{L_{1.2}}{2}\right)+Gl_6\right\}\end{aligned}\right.$$
$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m}=\frac{W^2}{1-e^2}\ \text{für die geogr. Breite}\ F+\frac{3}{4}(B_2-F). \quad (13)$$

Die Anwendung dieser Formeln setzt aber eine indirekte Rechnung voraus. Zieht man direkte Rechnung vor, so ist $\varkappa=$ null zu setzen. Damit findet sich:

$$\sin(F-B_2)=\left\{\begin{aligned}&=-\tan t\cos F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m}\\&\times\left(1+e^2\eta^2\left[\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\cos^2F-\frac{1}{4}\tan^2\frac{L_{1.2}}{2}\right]+Gl_6\right)\\&=+\sin\eta\sin F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{\varrho_n}{\varrho_m}\\&\times\left(1+e^2\eta^2\left[-\frac{1}{12}+\frac{5}{6}\sin^2F-\frac{1}{4}\tan^2\frac{L_{1.2}}{2}\right]+Gl_6\right)\end{aligned}\right.$$
$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m}=\frac{W^2}{1-e^2}\ \text{für die geographische Breite}\ F. \quad (14)$$

In den Formeln (13) und (14) wird man $e^2 \eta^2 \tan^2 \frac{L}{2}$ vernachlässigen können, sobald man nicht dem Pole nahe ist, weil alsdann dieses Glied nur die 6. Ordnung hat.

§ 11. Fortsetzung: Zusammenstellung. Für die nachfolgende Zusammenstellung wählten wir die Formeln mit teilweise indirekter Rechnung und brachten sie in logarithmische Form. Die Formel für $B_1 - F$ ist dieselbe wie S. 51 (6).

Gegeben: Die rechtwinkligen Koordinaten x und y von P_2 bezogen auf den Meridian von P_1, gegeben ferner die geographische Breite B_1 von P_1.

Gesucht: B_2, $L_{1.2}$ und die Meridiankonvergenz t.

$$\left.\begin{array}{l}
\log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) - \beta_4 \left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 - \beta_6 \left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^4 + Gl_8 \\
\frac{\varrho''}{\varrho_m} = \frac{\varrho'' W_m^3}{a_0(1-e^2)} = [8{,}5126900.290 - 10]\, W_m^3, \quad W_m \text{ zum Argument } \frac{1}{2}(B_1 + F) \\
\beta_4 = \frac{Mn}{2\varrho''^2}\left(\cos(B_1+F) - 7n\cos^2(B_1+F) + 5n\right) \qquad \beta_6 = -\frac{1}{20\varrho''^2}\beta_4 \\
\left.\begin{array}{l}
\beta_4 = [2{,}93171 - 10]\left(\cos(B_1+F) - [8{,}069 - 10]\cos^2(B_1+F) + 0{,}00803\right) \\
\beta_6 = -[8{,}070 - 20]\,\beta_4
\end{array}\right\} \text{für Einh. der 7. Dec.}
\end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{c}
\underset{\text{in Sek.}}{\eta} = \varrho'' \frac{y}{\varrho_n} = y W_F \frac{\varrho''}{a_0} = y W_F [8{,}5097816.695 - 10] \\
W_F \text{ zum Argument } F. \text{ (Man notiere die Änderung für 1').}
\end{array}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{array}{c}
\log \tan L_{1.2} = \log(\tan\eta \sec F) + \frac{Me^2}{15\varrho''^4}\eta^4 \sin^2 F + Gl_8 \\
\log \frac{Me^2}{15\varrho''^4} = 2{,}0284 - 20 \text{ für Einh. der 7. Dec.}
\end{array}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\log\tan t = \log(-\sin\eta\tan F) - \frac{Me^2}{6(1-e^2)\varrho''^2}\eta^2\cos^2 F + \frac{Me^2}{90\varrho''^4}\eta^4(8\cos^2 F - 9) + Gl_8 \\
\log\frac{Me^2}{6(1-e^2)\varrho''^2} = 3{,}05810 - 10 \quad \log\frac{Me^2}{90\varrho''^4} = 1{,}250 - 20; \text{ beide für Einh. der 7. Dec.}
\end{array}\right\} (4)$$

$$\left.\begin{array}{c}
\log\sin(F - B_2) = \left\{\begin{array}{c}
\log\left(\sin\eta\sin F\tan\frac{L_{1.2}}{2}\cdot\frac{W^2}{1-e^2}\right) \\
-\frac{1}{2}\cdot\frac{Me^2}{6(1-e^2)\varrho''^2}\eta^2\cos^2 F - \frac{Me^2}{16\varrho''^2}\eta^2(1 + 3\cos^2 F)\tan^2\frac{L}{2} + Gl_6
\end{array}\right\} \\
W \text{ zum Argument } F - \frac{3}{4}(F - B_2); \text{ ist aus } W_F \text{ abzuleiten.} \\
-\log(1 - e^2) = 0{,}0029083.595 \\
\log\frac{Me^2}{16\varrho''^2} = 2{,}629 - 10 \text{ für Einh. der 7. Dec.}
\end{array}\right\} (5)$$

In den kleinen Gliedern ist η immer in Sekunden zu verstehen.

Vorstehende Formeln besitzen noch für Distanzen gleich $0{,}1\,a_0$ eine so beträchtliche Schärfe, dafs zu deren Ausnutzung 9ziffrige Logarithmen erforderlich sind. Überdies sind unsrerseits die höchsten Glieder nur zur Untersuchung der Genauigkeit abgekürzter Formeln angesetzt.

§ 12. **Fortsetzung: Berechnung von x, y und $\alpha_{2.1}$ aus s und $\alpha_{1.2}$.** In den Formeln S. 419 setzen wir $y_1 =$ null und beziehen K_0 auf einen Punkt, der um $\frac{2}{3}\,P_1F$ von P_1 nach F zu liegt, (vergl. Fig. 39 S. 421) der also die Breite $B_0 = B_1 - \frac{2}{3}\,(B_1 - F)$ hat. Da P_1F näherungsweise gleich u ist, so hat man demgemäfs zu substituieren:

$$y = \frac{1}{2}\,v \qquad x_1 = -\frac{2}{3}\,u \qquad x = -\frac{1}{6}\,u\,.$$

Beachtet man nun, dafs jetzt $\mathfrak{a}_{1.2}$ und $\alpha_{1.2}$ identisch werden, dafs aufserdem nach Fig. 39 S. 421 $\alpha_{2.1} = \mathfrak{a}_{2.1} + t$ ist, so ergiebt sich aus den Formeln (1) bis (4) S. 419:

$$u = s \cos \alpha_{1.2} \qquad v = s \sin \alpha_{1.2}$$

$$x = u\left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{1}{15}\,\frac{u^2v^2}{\varrho^4} + \frac{2}{15}\,\frac{v^4}{\varrho^4} - \frac{1}{36}\,e^2\,\frac{uv^2}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6\right\}$$

$$y = v\left\{1 - \frac{1}{6}\,\frac{u^2}{\varrho^2} - \frac{1}{15}\,\frac{u^2v^2}{\varrho^4} + \frac{1}{120}\,\frac{u^4}{\varrho^4} + \frac{1}{18}\,e^2\,\frac{u^3}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6\right\}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = -\varrho''\,\frac{uv}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{5}{12}\,\frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{1}{12}\,\frac{u^2}{\varrho^2} + Gl_4\right)$$

x, y und $\Delta\mathfrak{a}$ verschwinden bezw. mit u, v und uv, weshalb, wie angegeben, diese letzteren Gröfsen sich als Faktoren der betreffenden Ausdrücke ziehen lassen. Dadurch aber entsteht die Möglichkeit, dieselben in logarithmische Gestalt bringen zu können, worin sie lauten:

$$u = s \cos \alpha_{1.2} \qquad v = s \sin \alpha_{1.2} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \varrho = \dfrac{a_0}{\sqrt{K_0}} = \dfrac{b_0}{W_0^{\,2}} = \dfrac{[6{,}8031893]}{W_0^{\,2}} \\ W_0 \text{ zum Arg. } B_0 = B_1 + \frac{2}{3}\,(F - B_1), \text{ wobei } (F - B_1) \text{ in Min.} = [6{,}735n - 10]\; u\,W_0^{\,3}; \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\log x = \log u + \frac{1}{3}\,M\,\frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{1}{15}\,M\,\frac{u^2v^2}{\varrho^4} + \frac{7}{90}\,M\,\frac{v^4}{\varrho^4} - \frac{1}{36}\,Me^2\,\frac{uv^2}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6 \tag{3}$$

$$\log y = \log v - \frac{1}{6}\,M\,\frac{u^2}{\varrho^2} - \frac{1}{15}\,M\,\frac{u^2v^2}{\varrho^4} - \frac{1}{180}\,M\,\frac{u^4}{\varrho^4} + \frac{1}{18}\,Me^2\,\frac{u^3}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6 \tag{4}$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta \mathfrak{a}} = \log \left(- \frac{1}{2} \varrho'' \frac{uv}{\varrho^2}\right) + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} M \frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} M \frac{u^2}{\varrho^2} + Gl_4 \qquad (5)$$

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \varDelta \mathfrak{a} + t.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \log\left(\frac{1}{3} M\right) = 6{,}1606630 & \log\left(\frac{1}{15} M\right) = 5{,}4617 & \log\left(\frac{7}{90} M\right) = 5{,}5286 \\ \log\left(\frac{1}{6} M\right) = 5{,}8596330 & \log\left(\frac{1}{180} M\right) = 4{,}383 & \log\left(\frac{1}{18} Me^2\right) = 3{,}207 \\ \log\left(\frac{1}{2} \varrho''\right) = 5{,}0133951 & \log\left(\frac{1}{36} Me^2\right) = 2{,}906 & \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Für}\\ \text{Einh.}\\ \text{der}\\ \text{7. Dec.}\end{array}$$

Diese Formeln besitzen eine etwas geringere Genauigkeit als die des vorigen Paragraphen. Um eine entsprechende Genauigkeit zu erzielen, müfste man noch 2. Ordnungen weiter entwickeln.

Man kann indessen das rechtwinklige Dreieck $P_1 F P_2$ auch mittelst des erweiterten *Legendre*schen Theorems auflösen. Dieses Verfahren giebt allerdings eine durchaus indirekte Auflösung. Von den in betracht kommenden Formeln entsprechen die (1) S. 362 den obigen und man kann dieselben aus jenen durch Reihenentwicklung herstellen (wie auch zur Prüfung geschehen ist). Wendet man die genaueren Formeln des § 10 S. 370 u. ff. an, so dürfte (11) S. 374 zur Berechnung des Excesses besonders passend erscheinen, wenn b und c bezw. als x und y genommen werden.

Dabei ist zu beachten, dafs, wie Fig. 39 S. 421 unmittelbar zeigt, bei gehöriger Berücksichtigung des Vorzeichens ε nichts anderes ist, als $- \varDelta \mathfrak{a}$. Das Vorzeichen von ε ist wie dasjenige von xy zu nehmen.

Für $(A - A^*)$ u. s. f. genügt es auch jetzt noch, wie aus § 14 S. 388 u. ff. zu ersehen ist, die einfachen Relationen (1) S. 362 beizubehalten.

§ 13. **Zahlenbeispiel I.** Wir wenden die Formeln der beiden vorigen Paragraphen auf das Beispiel S. 244 u. ff. an und benutzen dabei 7ziffrige Logarithmen unter Ansatz der 8. Stelle aus den Proportionalteilen.

Gegeben:

$$B_1 = 52^0\ 30'\ 16{,}7'' \qquad \alpha_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}68921''$$
$$s = 529979{,}5784^m.$$

Die *Formeln* des § 12 S. 432 führen nun zu folgenden Zahlen:

$$\left.\begin{array}{r} \log s = 5{,}7242591.6 \\ \log \cos \alpha_{1.2} = 9{,}7048223.3_n - 10 \\ \log \sin \alpha_{1.2} = 9{,}9355442.5_n - 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \log u = 5{,}4290814.9_n \\ \log v = 5{,}6598034.1_n \end{array}$$

$$B_0 = 52^0\,30',3 + \frac{2}{3}\,[6{,}735_n - 10 + 5{,}429_n + 9{,}997 - 10]$$

$$= 52^0\,30',3 + \frac{2}{3}\cdot 145' = 54^0\,7',0$$

$\log W_0 = 9{,}9990465 - 10 \qquad \log \varrho = 6{,}8050963$

$\log \frac{u}{\varrho} = 8{,}6239852_n - 10 \qquad \log \frac{v}{\varrho} = 8{,}8547071_n - 10$

$$\log \sin 2B_0 = 9{,}978 - 10.$$

Formel (3):	Formel (4):	Formel (5):
5,4290814.9ₙ	5,6598034.1ₙ	2,4920874ₙ
+ 7414.4	− 1281.2	+ 7414
− 2.6	− 2.6	+ 1854
+ 8.9	− 0.1	− 641
+ 0.2	− 0.1	$\log \varDelta\mathfrak{a}$ (in Sek.) $= 2{,}4929501_n$
$\log x = 5{,}4298235.8_n$	$\log y = 5{,}6596750.1_n$	$\varDelta\mathfrak{a} = -5'11{,}136''$.

Die *Formeln* des § 11 S. 431 führen jetzt zu den Werten:

$\log x = 5{,}4298235.8_n$
$8{,}5126900.3 - 10$

Argument für W_m:

1. Annäherung: $52^0\,30',3 + \frac{1}{2}\cdot 145' = 53^0\,42',8$

Summa $= 3{,}9425136.1_n$
$3 \log W_m = 9{,}9971689 - 10$

$\frac{\varrho'' x}{\varrho_m} = -8703{,}2'' = -2^0\,25',053$

$\log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = 3{,}9396825_n$

2. Annäherung: $52^0\,30{,}278' + 1^0\,12{,}527' = 53^0\,42{,}805'$

$3 \log W_m = 9{,}9971688.1 - 10$

$B_1 + F = 107^0\,25{,}6'$

$\log\cos(B_1 + F) = 9{,}476_n - 10$

$\log \beta_4 = 2{,}408_n - 10$

$\log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = 3{,}9396824.2_n$

$-\beta_4\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 = +\ 1.9$

$\log (B_1 - F)$ (in Sek.) $= 3{,}9396826.1_n$

$$B_1 - F = -2^0\,25'\,3{,}2722'' \qquad F = 54^0\,55'\,19{,}9722''.$$

$\log y = 5{,}6596750.1_n$
$8{,}5097816.7 - 10$

Änderung von $\log W_F$ für 1' gleich − 3.98

$\log W_F = 9{,}9990271.7 - 10$

$\eta = -4^0\,5'\,39{,}537'' \qquad \log \eta$ (in Sek.) $= 4{,}1684838.5_n$

$$\begin{cases} \log\tan\eta = 8{,}8547988.0_n - 10 \\ \log\sec F = 0{,}2405679.2 \end{cases}$$

$$\log\tan L_{1.2} = 9{,}0953667.2_n - 10$$

$$L_{1.2} = -\,7^0\,6'\,0{,}001''$$

$$\alpha_{2.1} = 65^0\,16'\,9{,}368''$$

$$\begin{cases} \log\sin\eta = 8{,}8536889.9_n - 10 \\ \log\tan F = 0{,}1535189.7 \\ -[3{,}058-10]\eta^2\cos^2 F = \quad -8.2 \end{cases}$$

$$\log\tan t = 9{,}0072071.4 - 10$$

$$t = +\,5^0\,48'\,19{,}815''.$$

$$\begin{cases} \log\sin\eta = 8{,}8536890_n - 10 \\ \log\sin F = 9{,}9129511 - 10 \\ \log\tan\frac{L_{1.2}}{2} = 8{,}7926620_n - 10 \\ 2\log W_F = 9{,}9980543 - 10 \\ -\log(1-e^2) = 0{,}0029084 \\ -\frac{1}{2}\,8.2\ (\text{s. o.}) = \quad -\ 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log\sin(F-B_2) = 7{,}5602644 - 10 \\ S = 4{,}6855739 - 10 \end{cases}$$

$$\log(F-B_2)_{\text{in Sek.}} = 2{,}8746905$$

Der nebenan zuerst berechnete Wert von $\log(F-B_2)$ giebt $F - B_2 = 12'\,29{,}36''$. Damit folgt als Argument von W: $F - 9{,}37'$ und $2\log W = 2\log W_F + 75$ Einh. d. 7. Dec. Addiert man diese 75 zu dem bisher berechneten Werte von $\log(F-B_2)$, so folgt genauer:

$$\log(F-B_2)_{\text{in Sek.}} = 2{,}8746980$$

$$F - B_2 = \quad 12'\,29{,}3729''$$

$$B_2 = 54^0\,42'\,50{,}599''.$$

Resultate:					nach S. 247.
$B_2 =$	54^0	$42'$	$50{,}599''$		$50{,}600''$
$L_{1.2} =$	7	6	0,001	östlich	0,000
$\alpha_{2.1} =$	65	16	9,368		9,365.

§ 14. **Fortsetzung.** Auf das Dreieck P_1FP_2 wenden wir die *Formeln* des § 10 S. 370 u. ff. an, um x, y und $\Delta\mathfrak{a}$ genauer kennen zu lernen. Nach den Angaben S. 244 u. ff., sowie nach der im vorigen Paragraphen angestellten Rechnung ist, wenn wir die Punkte P_1FP_2 vorübergehend mit CAB bezeichnen:

$C = 59^0\,33'\ \ 0{,}68921''$	$\log c = 5{,}6596750.1$	$B_3 = 52^0\,30'\,16{,}7''$
$A = 90^0$	$\log a = 5{,}7242591.353$	$B_1 = 54\ \ 55\ \ 20{,}0$
$B = 30\ \ 32\ \ 10{,}447$	$\log b = 5{,}4298235.8$	$B_2 = 54\ \ 42\ \ 50{,}6$
$\varepsilon = \quad 5'\,11{,}136''$		

Hierzu hat man zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} K_3 = 0{,}9982777 \\ K_1 = 0{,}9977392 \\ K_2 = 0{,}9977849 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Mittel:} \\ K = 0{,}99793393 \\ \log K = 9{,}9991017.9 - 10. \end{array}$$

Ferner ergiebt sich als Inhalt F^* des ebenen Dreiecks in ausreichender Annäherung nach der Formel $F^* = \frac{1}{2} bc \sin\left(90^0 - \frac{1}{3}\varepsilon\right)$, da $\log\sin\left(90^0 - \frac{1}{3}\varepsilon\right) = 9{,}9999999.4 - 10$ ist:

$$\log F^* = 10{,}7884685.3\,.$$

Zum Zwecke des Übergangs auf $\log F$ ist jetzt weiter:

$$\begin{array}{l|l|l}
\log \frac{c}{a_0} = 8{,}85504 & \frac{c^2}{a_0^2} = 0{,}0051296 & \frac{c^4}{a_0^4} = 0{,}0000263 \\
\log \frac{a}{a_0} = 8{,}91962 & \frac{a^2}{a_0^2} = 0{,}0069062 & \frac{a^4}{a_0^4} = 0{,}0000476 \\
\log \frac{b}{a_0} = 8{,}62518 & \frac{b^2}{a_0^2} = 0{,}0017797 & \frac{b^4}{a_0^4} = 0{,}0000032 \\
\hline
 & \frac{m^2}{a_0^2} = 0{,}0046052 & \frac{n^4}{a_0^4} = 0{,}0000257 \\
 & \quad = [7{,}66325-10] & \quad = [5{,}410-10]\,.
\end{array}$$

Formel (16) S. 367 giebt hiermit:

$$\left\{\begin{array}{rl}
\log F^* = & 10{,}7884685.3 \\
\frac{1}{8} M \frac{m^2 K}{a_0^2} = & + \quad 2494.8 \\
M \frac{8n^4 + 9m^4}{1920\, a_0^4} = & + \quad 1.0 \\
\hline
\log F = & 10{,}7887181.1
\end{array}\right.$$

$\log \frac{1}{8} M = 5{,}73469$ f. Einh. der 7. Dec.

$$\left\{\begin{array}{rl}
\log F = & 10{,}7887181.1 \\
\log \frac{\varrho''}{a_0^2} = & 1{,}7051382.0 - 10 \\
\hline
\log\left(\varrho'' \frac{F}{a_0^2}\right) = & 2{,}4938563.1
\end{array}\right.$$

Zu Formel (1) S. 371 hat man nunmehr:

$$\sin B_3 = 0{,}79340$$
$$\sin B_1 = 0{,}81837$$
$$\sin B_2 = 0{,}81628$$

$$(\sin B_1 - \sin B_2)^2 + (\sin B_2 - \sin B_3)^2 + (\sin B_3 - \sin B_1)^2 = 0{,}0011512$$

$$\frac{b^2 + c^2}{a_0^2} \sin^2 B_1 + \frac{a^2 + c^2}{a_0^2} \sin^2 B_2 + \frac{a^2 + b^2}{a_0^2} \sin^2 B_3 = 0{,}01808$$

$$\left\{\begin{array}{rl}
\varrho'' \frac{F}{a_0^2} K = & [2{,}4929581.0] \text{ Sek.} = 5'\ 11{,}14161'' \\
\varrho'' \frac{F}{a_0^2}\left(0{,}0011512 \frac{e^2}{6} - 0{,}01808 \frac{e^2}{12}\right) = & [7{,}4369_n - 10] = -\ 0{,}00273''
\end{array}\right.$$

$$\varepsilon = 5'\ 11{,}13888''.$$

Wendet man dagegen Formel (11) S. 374 an, so hat man:

$$\varepsilon = \varrho'' \frac{F}{a_0^2} K + \varrho'' \frac{F}{a_0^2} \left\{ \begin{matrix} -\frac{m^4}{2a_0^2} e^2 \sin^2 B_1 + \frac{b^2}{3a_0^2} e^2 \cos^2 B_1 \\ + \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{12 a_0^3} b e^2 \sin 2 B_1 \end{matrix} \right\} + \cdots$$

und findet für die 3 kleinen Glieder $- 0{,}00321'' + 0{,}00041'' + 0{,}00002''$ also zusammen $- 0{,}00278''$, d. i. wesentlich dasselbe als vorher. Den zuerst gefundenen Wert behalten wir als den vermutlich genaueren bei (S. 382).

Zur Berechnung von $A - A^*$ u. s. f. genügen die Formeln (1) S. 362, da die höheren Glieder erst in der 5. Decimalstelle der Sekunden von Einflufs werden, wie Formel (2) S. 389 zeigt. Es folgt:

$$C - C^* = 103{,}71296'' \left(1 - \frac{1}{20} 0{,}000524\, K + \frac{1}{4K} 0{,}0003437\right)$$

$$A - A^* = 103{,}71296 \left(1 - \frac{1}{20} 0{,}002301\, K - \frac{1}{4K} 0{,}0001947\right)$$

$$B - B^* = 103{,}71296 \left(1 + \frac{1}{20} 0{,}002825\, K - \frac{1}{4K} 0{,}0001490\right)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} C - C^* &= 103{,}71296'' + 0{,}00621'' = 1'\ 43{,}71917'' \\ A - A^* &= 103{,}71296 - 0{,}01697 = 1\ \ 43{,}69599 \\ B - B^* &= 103{,}71296 + 0{,}01076 = 1\ \ 43{,}72372 \end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon = 5'\ 11{,}13888''$$

und im ebenen Dreieck:

$C^* =$	59° 31′ 16,97004″	log sin = 9,9354158.096 — 10	log c = 5,6596749.999
$A^* =$	89 58 16,30401	9,9999999.450 — 10	log a = 5,7242591.353
$B^* =$	30 30 26,72595	9,7055643.912 — 10	log b = 5,4298235.815
Summa =	180 0 0,00000		

Hiernach ist:

$$\log x = 5{,}4298235.815_n \qquad \log y = 5{,}6596749.999_n\,.$$

Dazu tritt noch mittelst des oben erhaltenen Wertes ε, der sich durch Anwendung der eben gefundenen Werte von x und y nicht merklich ändern würde:

$$\Delta \alpha = - 5'\ 11{,}13888''.$$

Die Reihen des § 12 S. 432 geben bei der Berechnung von x u. y:

$$\left\{\begin{array}{lr} & 5{,}4290814.956_n \\ + & 7414.427 \\ - & 2.625 \\ + & 8.859 \\ + & 0.165 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lr} & 5{,}6598033.984_n \\ - & 1281.161 \\ - & 2.625 \\ - & 0.076 \\ - & 0.114 \end{array}\right.$$

$$\log x = 5{,}4298235.782_n \qquad \log y = 5{,}6596750.008_n$$

Die *Formeln* des § 11 S. 431 führen nunmehr zu folgenden Zahlen:

$$B_1 + F = 107^0\ 25'\ 36{,}672''$$

Arg. für $W_m = 53^0\ 42{,}8056'$

$$\left.\begin{array}{rl} \cos(B_1+F) = & -\ 0{,}29949 \\ -\ [8{,}069-10]\cos^2(B_1+F) = & -\ \quad 105 \\ & +\ \quad 803 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Summa:} \\ -\ 0{,}29251 = \\ {[9{,}46614_n-10]} \end{array}$$

$$\log \beta_4 = 2{,}39785_n - 10 \qquad \log \beta_6 = 0{,}47 - 20$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log x = & 5{,}4298235.815_n \\ & 8{,}5126900.290\ -10 \\ 3\log W_m = & 9{,}9971687.926\ -10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = & 3{,}9396824.031_n \\ -\ \beta_4\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 = & +\ \quad 1.893 \\ -\ \beta_6\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^4 = & \quad 0 \end{array}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = 3{,}9396825.924_n$$

$$B_1 - F = -\ 2^0\ 25'\ 3{,}27273'' \qquad F = 54^0\ 55'\ 19{,}97273''.$$

Arg. für $W_F = 54^0\ 55{,}33288'$

$$\left.\begin{array}{rl} \log y = & 5{,}6596749.999_n \\ & 8{,}5097816.695\ -10 \\ W_F = & 9{,}9990271.646\ -10 \end{array}\right\}$$

$$\eta = -\ 4^0\ 5'\ 39{,}536740'' \qquad \underset{\text{in Sek.}}{\log \eta} = 4{,}1684838.340_n$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\tan\eta = & 8{,}8547988.144_n - 10 \\ \log\sec F = & 0{,}2405678.736 \\ {[2{,}028-20]}\ \eta^4 \sin^2 F = & +\ \quad 0.034 \end{array}\right.$$

$$\log\tan L_{1.2} = 9{,}0953666.914_n - 10$$

$$L_{1.2} = -\ 7^0\ 6'\ 0{,}00006''$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\sin\eta & = 8{,}8536890.221_n - 10 \\ \log\tan F & = 0{,}1535189.519 \\ -[3{,}05810-10]\,\eta^2\cos^2 F & = \quad - \quad 8.202 \\ +[1{,}250-20]\,\eta^4(8\cos^2 F - 9) & = \quad - \quad 0.037 \end{array}\right.$$

$$\log\tan t = 9{,}0072071.501 - 10$$

$$\alpha_{2.1} = 65^0\,16'\,9{,}36537'' \left\{\begin{array}{rl} t & = 5^0\,48'\,19{,}81504'' \\ \Delta\mathfrak{L} & = -\quad 5\;\;11{,}13888 \\ \alpha_{1.2} - 180^0 & = 59\;\;33\;\;0{,}68921 \end{array}\right.$$

Argument für W $= 54^0\,45{,}9657'$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\sin\eta & = 8{,}8536890.22_n - 10 \\ \log\sin F & = 9{,}9129510.78 - 10 \\ \log\tan\frac{L_{1.2}}{2} & = 8{,}7926619.64_n - 10 \\ 2\log W & = 9{,}9980617.99 - 10 \\ -\log(1-e^2) & = 0{,}0029083.60 \\ -\frac{1}{2}\,8.202\ (\text{s. o.}) & = \quad - \quad 4.10 \\ -[2{,}629-10]\,\eta^2(1+3\cos^2 F)\tan^2\frac{L_{1.2}}{2} & = \quad - \quad 0.07 \end{array}\right.$$

$$\log\sin(F - B_2) = 7{,}5602718.06 - 10$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \log\left(\varrho''\sin(F - B_2)\right) + \frac{1}{6}M\sin^2(F - B_2) + \cdots$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \left\{\begin{array}{l} 7{,}5602718.06-10 \\ 5{,}3144251.33 \\ \quad + \quad 9.55 \end{array}\right\} = 2{,}8746978.94$$

$$F - B_2 = +\,12'\,29{,}37275'' \qquad B_2 = 54^0\,42'\,50{,}59998''.$$

Die vorstehenden Rechnungen geben mithin folgende

Resultate:		nach S. 244 u. ff.:	nach S. 256 u. ff.:
$B_2 = 54^0\,42'\,50{,}59998''$		60000	59998
$L_{1.2} = 7\;\;6\;\;0{,}00006$	östlich	00002	00002
$\alpha_{2.1} = 65\;\;16\;\;9{,}36537$		36534	36530

Man erkennt hieraus die grofse Genauigkeit der Formeln des § 11 S. 431. Mehr zu zeigen, ist nicht die Absicht der letzten Rechnungen, denn es läfst sich nicht verkennen, dafs die Anwendung der

Formeln in solchen Fällen wie demjenigen des vorliegenden Paragraphen durch die Notwendigkeit der Auflösung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks eine mühsame wird.

§ 15. **Rechtwinklige Koordinaten, Entfernung und Azimute aus geographischen Positionen.** Wir gehen am bequemsten hierbei von den Formeln des § 11 S. 431 aus, die mit Beachtung der Formeln für die Kugel S. 129 umzuformen sind. Während wir aber die Formeln des § 11 unter der Voraussetzung, dafs $s : a_0$ eine Gröfse 1. Ordnung ist, als bis zum Pole gültig nachgewiesen haben, setzen wir der Einfachheit halber jetzt nicht nur $s : a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ als eine Gröfse 1. Ordnung voraus, sodafs am Pole $\eta \sec F$ die 1. Ordnung hat und die Ordinate η eine kleine Gröfse höherer Ordnung sein mufs.

Nach S. 425 (13) ist:

$$\tan \eta = \tan L_{1.2} \cos F \left(1 - \frac{1}{15} k^2 \eta^4 + Gl_8\right), \tag{1}$$

woraus wir, da für die Kugel $\sin \eta = \sin L \cos B_2$ ist, zunächst herleiten:

$$\sin \eta = \sin L \cos F \,.\, \cos \eta \sec L \left(1 - \frac{1}{15} k^2 \eta^4 + Gl_8\right).$$

Setzt man hierin für $\cos \eta$ und $\sec L$ die Reihenentwicklungen, so ergiebt sich:

$$\sin \eta = \sin L \cos F \left(1 + \frac{1}{2} L^2 + \frac{5}{24} L^4 + \frac{61}{720} L^6 + Gl_8\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{24} \eta^4 - \frac{1}{720} \eta^6 - \frac{1}{15} k^2 \eta^4 + Gl_8\right). \tag{2}$$

Nun ist ferner nach S. 429 (11):

$$\sin (F - B_2) = \sin \eta \tan \frac{L}{2} \sin F \left(1 + e^2 \cos^2 F + e^4 \cos^2 F \right.$$
$$\left. - \frac{1}{12} e^2 \eta^2 + \frac{5}{6} e^2 \eta^2 \sin^2 F + Gl_6\right),$$

was wir im Hinblick auf die für die Kugel gültige Formel $\sin (F - B_2) = \sin^2 \frac{L}{2} \sin 2 B_2 \sec \eta$ mittelst Substitution des Ausdrucks (2) überführen in:

$$\sin (F - B_2) = \sin^2 \frac{L}{2} \sin 2F \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{L^2 - \eta^2}{2} + e^2 \cos^2 F \\ + e^4 \cos^2 F + \frac{\eta^4 + 5L^4}{24} \\ - \frac{1}{4} \eta^2 L^2 - \frac{1}{12} e^2 \eta^2 + \frac{5}{6} e^2 \eta^2 \sin^2 F \\ + \frac{L^2 - \eta^2}{2} e^2 \cos^2 F + Gl_6 . \end{array} \right\} \tag{3}$$

Entwickelt man ferner aus (1) η nach Potenzen von L, so folgt:

$$\eta = L\cos F\left(1 + \frac{1}{3} L^2 \sin^2 F + \frac{1}{15} L^4 \sin^2 F\,[3\sin^2 F - 1] + Gl_6\right). \quad (4)$$

Hiernach ist:

$$\eta^2 = L^2\cos^2 F\left(1 + \frac{2}{3} L^2 \sin^2 F + \frac{1}{45} L^4 \sin^2 F[23\sin^2 F - 6] + Gl_6\right). \quad (5)$$

Damit gehen (2) und (3) bezw. über in:

$$\sin\eta = \sin L\cos F\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2} L^2 \sin^2 F + \frac{1}{24} L^4 (5 - 9\cos^2 F)\sin^2 F \\ + \frac{1}{720} L^6 \sin^2 F (61 - 270\cos^2 F + 225\cos^4 F) \\ - \frac{1}{15} e^2 L^4 \sin^2 F \cos^4 F + Gl_8 \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\sin(F - B_2) = \sin^2\frac{L}{2}\sin 2F\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2} L^2 \sin^2 F + e^2\cos^2 F + e^4\cos^2 F \\ - \frac{1}{12} e^2 L^2 \cos^2 F + \frac{4}{3} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \\ + \frac{1}{24} L^4 \sin^2 F (5 - 9\cos^2 F) + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Um rechter Hand in diesen Formeln F zu eliminieren, bilden wir zuerst in leicht ersichtlicher Weise:

$$\cos B_2 = \cos\left(F - (F - B_2)\right) = \cos F\cos(F - B_2) + \sin F\sin(F - B_2)$$

$$= \cos F\left(1 + \sin(F - B_2)\tan F - \frac{1}{2}\sin^2(F - B_2) + Gl_8\right),$$

wobei zu beachten, dafs $\sin(F - B_2)$ eine Gröfse 2. Ordnung ist. Es folgt:

$$\cos F = \cos B_2\left\{\begin{array}{c} 1 - \sin(F - B_2)\tan F + \sin^2(F - B_2)\left(\frac{1}{2} + \tan^2 F\right) \\ - \sin^3(F - B_2)\tan F\sec^2 F + Gl_8. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Mittelst (7) erhält man hieraus, wenn man zugleich für $\sin^2\frac{L}{2}$ die Reihe $\frac{1}{4} L^2\left(1 - \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{360} L^4 + Gl_6\right)$ anwendet:

$$\sin(F - B_2) = \frac{1}{4} L^2 \sin 2F\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{12} L^2 + \frac{1}{2} L^2 \sin^2 F + e^2\cos^2 F + e^4\cos^2 F \\ - \frac{1}{6} e^2 L^2 \cos^2 F + \frac{4}{3} e^2 L^2 \cos^2 F \sin^2 F \\ + \frac{1}{360} L^4 (61 - 195\cos^2 F + 135\cos^4 F) + Gl_6. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Setzt man dies in (8) ein, so findet sich:

$$\cos F = \cos B_2 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} L^2 \sin^2 F + \frac{1}{24} L^4 \sin^2 F (4 - 3 \sin^2 F) \\ - \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F - \frac{1}{2} e^4 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \\ + \frac{1}{12} e^2 L^4 \sin^2 F \cos^2 F (4 - 5 \sin^2 F) \\ + \frac{1}{720} L^6 \sin^2 F (-1 + 30 \cos^2 F - 45 \cos^4 F) + Gl_8 \end{array} \right\} \quad (10)$$

und hiermit giebt (6):

$$\sin \eta = \sin L \cos B_2 \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \\ - \frac{1}{15} e^2 L^4 \sin^2 F \cos^2 F (5 - 9 \cos^2 F) \\ - \frac{1}{2} e^4 L^2 \sin^2 F \cos^2 F + Gl_8. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Die Gröfse η, welche linker Hand vorkommt, setzt zur Erlangung ihrer Kenntnis F voraus. Um B_2 einzuführen, entwickeln wir:

$$\sin \eta = \sin \left(\frac{y}{a_0} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 F} \right) = \sin \left(\frac{y}{a_0} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 F}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} \right). \quad (12)$$

Man hat nun mittelst *Taylors* Satz:

$$1 - e^2 \sin^2 B_2 = 1 - e^2 \sin^2 F - e^2 \left(\sin 2F (B_2 - F) + \cos 2F (B_2 - F)^2 + Gl_6 \right)$$

und hieraus mit Benutzung von (9):

$$1 - e^2 \sin^2 B_2 = 1 - e^2 \sin^2 F + e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \left(1 - \frac{1}{3} L^2 + L^2 \sin^2 F \right) + Gl_8.$$

Es ist daher:

$$\frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 F}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F - \frac{1}{2} e^4 L^2 \sin^2 F \cos^2 F$$
$$+ \frac{1}{2} e^2 L^4 \sin^2 F \cos^2 F \left(\frac{1}{3} - \sin^2 F \right) + Gl_8. \quad (13)$$

Wir bezeichnen nun

$$\frac{y}{a_0} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2} = \frac{y}{a_0} W_2 = \frac{y}{\varrho_n} \text{ mit } \eta'; \; W_2 \text{ bezw. } \varrho_n \text{ fürs Arg. } B_2, \quad (14)$$

und setzen für den Augenblick den Wurzelquotienten (13) gleich $1 + \zeta$, wobei ζ eine Gröfse der 4. Ordnung ist. Man hat dann nach (12):

$$\sin \eta = \sin (\eta' + \zeta \eta') = \sin \eta' \cos \zeta \eta' + \cos \eta' \sin \zeta \eta'$$
$$= \sin \eta' \left(1 + \zeta \left[1 - \frac{1}{3} \eta'^2 \right] + Gl_8 \right),$$

und unter Substitution des Wertes von ζ:

$$\sin\eta = \sin\eta' \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F - \frac{1}{2} e^4 L^2 \sin^2 F \cos^2 F \\ + e^2 L^4 \sin^2 F \cos^2 F \left(\frac{2}{3} \cos^2 F - \frac{1}{3}\right) + Gl_8. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Führt man dies linker Hand in (11) ein, reduziert alsdann auf $\sin\eta'$ und ersetzt in den Gliedern höchster Ordnung F einfach durch B_2, so folgt:

$$\sin\eta' = \sin L_{1.2} \cos B_2 \left(1 - \frac{1}{15} e^2 L^4 \sin^2 B_2 \cos^4 B_2 + Gl_8\right). \quad (16)$$

Über die Konvergenz vorstehender Entwicklung ist kein Zweifel, sobald, wie vorausgesetzt, nicht nur $s : a_0$, sondern auch $L_{1.2}$ eine kleine Gröfse 1. Ordnung ist. Die Formel scheint sogar auch am Pole ohne das Bestehen letzterer Bedingung zu genügen, da L in $\cos B_2$ multipliziert auftritt, aber dies ist nicht der Fall. Läfst man nämlich P_1 in den Pol fallen, nimmt also $B_1 = 90^0$, so wird y offenbar gleich dem Meridianbogen von B_2 bis 90^0 und es wird ferner $L = 90^0$. Man hat dann aber $\sin\eta'$ nicht gleich $\cos B_2 (1 - Gl_6)$, sondern gleich $\cos B_2 (1 - Gl_4)$, wie man aus den Formeln für einen Meridianbogen, S. 50 (3), ersehen kann.

Um nun auch in Formel (7) rechter Hand B_2 einzuführen, setzen wir nach *Taylors* Satz:

$$\sin 2B_2 = \sin 2F \left(1 + 2(B_2 - F)\cot 2F - 2(B_2 - F)^2 + Gl_6\right).$$

Die Einführung von (9) giebt, wenn man schliefslich auf $\sin 2F$ reduziert:

$$\sin 2F = \sin 2B_2 \left(1 + \frac{1}{2} L^2 \cos 2F + \frac{1}{2} e^2 L^2 \cos^2 F \cos 2F - \frac{1}{4} L^4 \left(\frac{1}{3} \sin^2 F - \frac{5}{12}\right) + Gl_6\right). \quad (17)$$

Hiermit geht (7) über in:

$$\sin(F - B_2) = \sin^2 \frac{L}{2} \sin 2B_2 \left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2} L^2 \cos^2 F + \frac{1}{24} L^4 \cos^2 F (8 - 3\cos^2 F) \\ + e^2 \cos^2 F + e^4 \cos^2 F \\ + e^2 L^2 \cos^2 F \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cos^2 F\right) + Gl_6 \end{array} \right\}. \quad (18)$$

Da aber bei der entsprechenden Gleichung für die Kugel rechter Hand $\sec\eta'$ als Faktor auftritt, führen wir auch hier denselben ein. Es ist, da $\sin\eta$ und $\sin\eta'$ bis auf Glieder 5. Ordnung übereinstimmen:

$$\sec \eta' = \sqrt{1 + \tan^2 \eta} + Gl_6 = \sqrt{1 + \tan^2 L \cos^2 F} + Gl_6$$

also:

$$\sec \eta' = 1 + \frac{1}{2} L^2 \cos^2 F + \frac{1}{24} L^4 \cos^2 F (8 - 3 \cos^2 F) + Gl_6. \quad (19)$$

Hiermit kann man (18) umformen in die Gestalt:

$$\sin(F - B_2) = \sin^2 \frac{L}{2} \sin 2B_2 \sec \eta' \left\{ \begin{array}{c} 1 + (e^2 + e^4) \cos^2 F \\ + e^2 L^2 \cos^2 F \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cos^2 F\right) + Gl_6 \end{array} \right\} \cdot (20)$$

In den Faktor rechter Hand wird am zweckmäfsigsten $\frac{\varrho_n}{\varrho_m}$ fürs Argument B_2 eingeführt. Nach S. 430 (12) ist, wenn daselbst $\varkappa = 1$ genommen wird:

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m} = 1 + (e^2 + e^4) \cos^2 F + e^2 L^2 \sin^2 F \cos^2 F + Gl_6; \quad \text{Arg. } B_2.$$

Dieses in (20) eingesetzt, findet sich:

$$\left. \begin{array}{l} \sin(F - B_2) = \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \frac{L}{2} \sin 2B_2 \sec \eta' \cdot \frac{\varrho_n}{\varrho_m} \\ \times \left(1 + e^2 L^2 \cos^2 B_2 \left[-\frac{3}{4} + \frac{7}{6} \cos^2 B_2\right] + Gl_6\right) \end{array} \right\} \\ \frac{\varrho_n}{\varrho_m} = \frac{W_2^2}{1 - e^2}; \quad \text{Arg. } B_2. \end{array} \right\} (21)$$

§ 16. **Fortsetzung: Meridiankonvergenz u. s. f.** Im Anschlufs an die Entwicklung S. 422 u. ff. setzen wir zunächst im sphärischen Hilfsdreieck:

$$\tan t = -\tan \lambda \sin \beta_2.$$

Nach S. 423 ist aber $\tan \lambda$ gleich der linken Seite von Gleichung (9) S. 423, also:

$$\tan \lambda = \tan L \left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2} e^2 \frac{\eta}{\tan L} \cos F \left[1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{5}{8} e^4 + \frac{1}{8} k^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} e^2 k^2 + \frac{1}{4} k^2 \eta^2 + L^2 \left(1 + \frac{2}{3} L^2 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{4} e^2\right)\right] \\ + \frac{1}{4} e^4 \eta^2 \cos^2 F + Gl_8. \end{array} \right\} (1)$$

Nach (1) und (5) S. 440 u. 441 hat man ferner:

$$\frac{\eta}{\tan L} = \cos F \left(1 - \frac{1}{3} \eta^2 - \frac{1}{45} \eta^4 + Gl_6\right)$$

und

$$\eta^2 = L^2 \cos^2 F \left(1 + \frac{2}{3} L^2 \sin^2 F + Gl_4\right).$$

Dieses in (1) behufs Elimination von η substituiert, findet sich:

$$\tan\lambda = \tan L \left\{ 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 F \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{4} e^2 (3 + \sin^2 F) + L^2 \left(1 - \frac{1}{3} \cos^2 F\right) \\ + e^2 L^2 \left(1 + \frac{1}{6} \sin^2 F \cos^2 F\right) \\ + \frac{1}{45} L^4 (30 - 10 \sin^2 F \cos^2 F - \cos^4 F) \\ + \frac{1}{8} e^4 (5 + 2 \sin^2 F + \sin^4 F) \end{array} \right] + Gl_8 \right\}. \quad (2)$$

Wir haben nun ferner:

$$\sin\beta_2 = \sin B_2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}} = \sin B_2 \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 B_2 \Big[1 + \frac{1}{4} e^2 (1 + 3 \sin^2 B_2) \\ \quad + \frac{1}{8} e^4 (1 + 2 \sin^2 B_2 + 5 \sin^4 B_2) \Big] + Gl_8 \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Rechter Hand eliminieren wir in der Parenthese B_2 mittelst F. Dazu giebt S. 428 (7) die Relation:

$$\cos^2 B_2 = \cos^2 F + L\eta \sin^2 F \cos F \left(1 + \frac{1}{12} L^2\right) + \frac{1}{4} \eta^2 L^2 \sin^2 F + Gl_6,$$

welche mittelst der Formel (4) S. 441, nämlich mittelst

$$\eta = L \cos F \left(1 + \frac{1}{3} L^2 \sin^2 F\right) + Gl_5,$$

übergeht in:

$$\cos^2 B_2 = \cos^2 F \left\{1 + L^2 \sin^2 F + \frac{1}{3} L^4 \sin^2 F + \frac{1}{3} L^4 \sin^4 F + Gl_6\right\}. \quad (4)$$

Aufserdem ist hiernach:

$$\sin^2 B_2 = \sin^2 F \{1 - L^2 \cos^2 F\} + Gl_4. \quad (5)$$

Mit Benutzung dieser Substitutionen für $\cos^2 B_2$ und $\sin^2 B_2$ geht (3) über in die Gestalt:

$$\sin\beta_2 = \sin B_2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 F \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{4} e^2 (1 + 3 \sin^2 F) + L^2 \sin^2 F \\ + \frac{1}{2} e^2 L^2 \sin^2 F (-1 + 3 \sin^2 F) \\ + \frac{1}{3} L^4 \sin^2 F + \frac{1}{3} L^4 \sin^4 F \\ + \frac{1}{8} e^4 (1 + 2 \sin^2 F + 5 \sin^4 F) \end{array} \right] + Gl_8 \right\}. \quad (6)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit (2) Seite für Seite, so ergiebt sich linker Hand $\tan\lambda \sin\beta_2$ d. i. zufolge der eingangs des Paragraphen angegebenen Gleichung gleich $-\tan t$. Wir erhalten daher:

$$\tan t = -\tan L \sin B_2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} e^2 L^2 \cos^4 F \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} e^2 (5 - 3\cos^2 F) \\ + L^2 \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{5} \cos^2 F \right) \end{array} \right] + Gl_8 \right\}.$$

Hier führen wir rechter Hand mittelst (4) endlich noch B_2 ein, und gelangen so zu der Formel:

$$\tan t = -\tan L_{1.2} \sin B_2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} e^2 L^2 \cos^4 B_2 \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} e^2 (5 - 3\cos^2 B_2) \\ - L^2 \left(\frac{5}{6} - \frac{9}{5} \cos^2 B_2 \right) \end{array} \right] + Gl_8 \right\}. (7)$$

Sind mit Hilfe der Formeln (16) und (21) des vorigen Paragraphen, sowie der letzten Formel (7) die Gröfsen η', F und t berechnet, so ist zunächst aus η' y zu ermitteln und aus $F - B_1$ x. Ersteres erfolgt nach Formel (14) S. 442 und letzteres nach Formel (3) S. 50. Aus x und y sind dann mit Hilfe der Formeln des § 6 S. 416 Entfernung und Azimute zu bestimmen.

Man hat darin $\mathfrak{a}_{1.2} = \alpha_{1.2}$, y_1 gleich null und also $\Delta y = y_2 = y$ sowie $y = \frac{1}{2} y$, ferner $\Delta x = x$ und am zweckmäfsigsten in den von e^2 abhängigen Gliedern $x_1 = -\frac{2}{3} x$, $x_2 = +\frac{1}{3} x$ und $x = -\frac{1}{6} x$ zu substituieren. Hierdurch wird K_0 bezogen auf die geographische Breite $F + \frac{1}{2}(B_1 - F)$. Man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} s \cos \alpha_{1.2} = x \left\{ 1 - \frac{1}{3} \frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{1}{45} \frac{y^4}{\varrho^4} - \frac{2}{45} \frac{x^2 y^2}{\varrho^4} + \frac{1}{36} \frac{x y^2}{\varrho^3} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \right\} \\ s \sin \alpha_{1.2} = y \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{7}{360} \frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{2}{45} \frac{x^2 y^2}{\varrho^4} - \frac{1}{18} \frac{x^3}{\varrho^3} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \right\}, \end{array}\right\} (8)$$

welche Formeln sich, da x bezw. y Faktor aller Glieder ist, ohne weiteres in logarithmische Gestalt bringen lassen. Es ist aber in mehreren Beziehungen vorteilhafter, zunächst zu $s \cos \left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2} \Delta \mathfrak{a}\right)$ und $s \sin \left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2} \Delta \mathfrak{a}\right)$ mittelst nachfolgender Entwicklungen überzugehen:

$$s \cos \left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2} \Delta \mathfrak{a}\right) = s \cos \alpha_{1.2} \left(1 - \frac{1}{8} \Delta \mathfrak{a}^2 + Gl_8\right) - \frac{1}{2} \Delta \mathfrak{a}\, s \sin \alpha_{1.2} (1 + Gl_6)$$

$$s \sin \left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2} \Delta \mathfrak{a}\right) = s \sin \alpha_{1.2} \left(1 - \frac{1}{8} \Delta \mathfrak{a}^2 + Gl_8\right) + \frac{1}{2} \Delta \mathfrak{a}\, s \cos \alpha_{1.2} (1 + Gl_6).$$

Nun ist

$$\Delta \mathfrak{a} = -\frac{xy}{2\varrho^2}\left(1 + \frac{x^2+y^2}{12\varrho^2} + Gl_4\right) \tag{9}$$

und hiermit:

$$\left.\begin{aligned} s\cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right) &= x\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{1}{12}\frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{1}{720}\frac{y^4}{\varrho^4} - \frac{19}{1440}\frac{x^2y^2}{\varrho^4} \\ &+ \frac{1}{36}\frac{xy^2}{\varrho^3}e^2\sin 2B_0 + Gl_6 \end{aligned}\right\} \\ s\sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right) &= y\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{1}{12}\frac{x^2}{\varrho^2} - \frac{1}{720}\frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{19}{1440}\frac{x^2y^2}{\varrho^4} \\ &- \frac{1}{18}\frac{x^3}{\varrho^3}e^2\sin 2B_0 + Gl_6 \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

§ 17. **Zusammenstellung.** Gegeben: B_1, B_2 und $L_{1.2}$.

Gesucht: x, y für P_2 in Bezug auf den Meridian von P_1; gesucht ferner s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$.

Die in den vorhergehenden beiden Paragraphen entwickelten Formeln bringen wir sogleich in die logarithmische Form. L und $B_1 - F$ sind in den kleinen Gliedern stets in Sekunden zu verstehen.

$$\left.\begin{aligned} &\log\sin\eta' = \log(\sin L_{1.2}\cos B_2) - \frac{Me^2}{15\varrho''^4}L^4\sin^2 B_2\cos^4 B_2 + Gl_8 \\ &\qquad \log\frac{Me^2}{15\varrho''^4} = 2{,}0284 - 20 \text{ f. Einh. der 7. Dec.} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &y = \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{W_2}\cdot\frac{a_0}{\varrho''} = \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{W_2}[1{,}4902183.305] \\ &\qquad W_2 \text{ zum Argument } B_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \log\sin(F - B_2) &= \log\left(\sin^2\frac{L_{1.2}}{2}\sin B_2\cos B_2\sec\eta'\cdot\frac{2W_2^2}{1-e^2}\right) \\ &\quad + \frac{Me^2}{\varrho''^2}L^2\cos^2 B_2\left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{6}\cos^2 B_2\right) + Gl_6 \\ \log\frac{2}{1-e^2} &= 0{,}3039383.552;\quad \log\frac{Me^2}{\varrho''^2} = 3{,}83334 - 10 \text{ f. Einh. der 7. Dec.} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\log x = \log\left(\frac{\varrho_m (B_1 - F) \text{ in Sek.}}{\varrho''}\right) + \beta_4 (B_1 - F)^2 + \beta_6 (B_1 - F)^4 + Gl_8 \\ &\frac{\varrho_m}{\varrho''} = \frac{a_0(1-e^2)}{\varrho'' W_m^3} = \frac{[1{,}4873099.710]}{W_m^3},\quad W_m \text{ zum Arg. } \frac{1}{2}(B_1 + F) \\ &\beta_4 = \frac{Mn}{2\varrho''^2}\left(\cos(B_1+F) - 7n\cos^2(B_1+F) + 5n\right) \quad \beta_6 = -\frac{1}{20\varrho''^2}\beta_4 \\ &\left.\begin{aligned} &\beta_4 = [2{,}93171 - 10]\left(\cos(B_1+F) - [8{,}069 - 10]\cos^2(B_1+F) + 0{,}00803\right) \\ &\beta_6 = -[8{,}070 - 20]\,\beta_4 \end{aligned}\right\} \text{f. Einh. d. 7. Dec.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\log\tan t = \log(-\tan L_{1.2}\sin B_2) + \frac{Me^2}{3\varrho''^2}L^2\cos^4 B_2 + \frac{Me^4}{6\varrho''^2}L^2\cos^4 B_2\,(5-3\cos^2 B_2)\\ -\frac{Me^2}{3\varrho''^4}L^4\cos^4 B_2\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{5}\cos^2 B_2\right)+Gl_8\\ \left.\begin{aligned}\log\frac{Me^2}{3\varrho''^2} = 3{,}35622-10\\ \log\frac{Me^4}{6\varrho''^2}=0{,}880-10 \qquad \log\frac{Me^2}{3\varrho''^4}=2{,}727-20\end{aligned}\right\}\text{für Einh. der 7. Dec.}\end{aligned}\right\}(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\varrho = \frac{a_0}{\sqrt{K_0}} = \frac{b_0}{W_0^2} = \frac{[6{,}8031893]}{W_0^2}\\ W_0 \text{ zum Arg. } B_0 = F + \frac{1}{3}(B_1 - F)\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\log\left\{s\cos\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\} = \log x - \frac{1}{12}M\frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{7}{1440}M\frac{y^4}{\varrho^4} - \frac{19}{1440}M\frac{x^2y^2}{\varrho^4}\\ +\frac{1}{36}Me^2\frac{xy^2}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6\end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\log\left\{s\sin\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\} = \log y - \frac{1}{12}M\frac{x^2}{\varrho^2} - \frac{7}{1440}M\frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{19}{1440}M\frac{x^2y^2}{\varrho^4}\\ -\frac{1}{18}Me^2\frac{x^3}{\varrho^3}\sin 2B_0 + Gl_6\end{aligned}\right\}(8)$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = \log\left\{-\frac{1}{2}\varrho''\frac{xy}{\varrho^2}\right\} + \frac{1}{12}M\frac{x^2+y^2}{\varrho^2} + Gl_4 \qquad (9)$$

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta\mathfrak{a} + t; \qquad (10)$$

$$\log\left(\frac{1}{12}M\right) = 5{,}5586030\left\{\begin{matrix}\log\frac{7M}{1440} = 4{,}825 & \log\frac{19M}{1440} = 4{,}758\\ \log\left(\frac{1}{36}Me^2\right) = 2{,}906 & \log\left(\frac{1}{18}Me^2\right) = 3{,}207\end{matrix}\right\}\text{für Einh. der 7. Dec.}$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\varrho''\right) = 5{,}0133951.$$

§ 18. **Zahlenbeispiel I.** $B_1 = 52^0\,30'\,16{,}7''$ $B_2 = 54^0\,42'\,50{,}6''$

$$L_{1.2} = 7^0\,6'\,0''_{\text{östlich}} = -25560''.$$

Die *Formeln* des § 17 geben der Reihe nach:

$$\begin{array}{rrr} \log\sin L_{1.2} = & 9{,}0920236.596_n & -10\\ \log\cos B_2 = & 9{,}7616703.379 & -10\\ -[2{,}028-20]\,L^4\sin^2 B_2\cos^4 B_2 = & -\quad 0.034 & \\ \hline \log\sin\eta' = & 8{,}8536939.941_n & -10\end{array}$$

$$\eta' = -4^0\,5'\,39{,}705771'' = -14739{,}705771''.$$

$$\left\{\begin{aligned} \log \underset{\text{in Sek.}}{\eta'} &= 4{,}1684888.149_n \\ &\ 1{,}4902183.305 \\ -\log W_2 &= 0{,}0009678.539 \end{aligned}\right.$$

$$\log y = 5{,}6596749.993_n.$$

Argument für $W_2 = 54^\circ\, 42{,}8433'$

$$\left\{\begin{aligned} 2\log\sin\frac{L_{1.2}}{2} &= 7{,}5836556.26 - 10 \\ \log\cos B_2 &= 9{,}7616703.38 - 10 \\ \log\sin B_2 &= 9{,}9118387.96 - 10 \\ \log\sec\eta' &= 0{,}0011098.18 \\ 2\log W_2 &= 9{,}9980642.92 - 10 \\ &\ 0{,}3039383.55 \\ [3{,}83334-10]\, L^2\cos^2 B_2\left(-\frac{3}{4}+\frac{7}{6}\cos^2 B_2\right) &= -\quad 53.57 \end{aligned}\right.$$

$$\log\sin(F - B_2) = 7{,}5602718.68 - 10$$

$$F = 54^\circ\, 55'\, 19{,}97285'' \qquad F - B_2 = +\ 12'\, 29{,}37285''$$

$$B_1 - F = -\ 2^\circ\, 25'\ \ 3{,}27285'' \qquad B_1 - F = -\ 8703{,}27285''$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} &= 3{,}9396825.990_n \\ &\ 1{,}4873099.710 \\ -3\log W_m &= 0{,}0028312.074 \\ \text{vergl. hierzu S. 438.}\quad &-\quad 1.893 \end{aligned}\right.$$

$$\log x = 5{,}4298235.881_n.$$

$$\left\{\begin{aligned} \log\tan L_{1.2} &= 9{,}0953666.904_n - 10 \\ \log\sin B_2 &= 9{,}9118387.956 - 10 \\ +\,[3{,}35622-10]\, L^2\cos^4 B_2 &= +\quad 16.520 \\ +\,[0{,}880-10]\, L^2\cos^4 B_2\,(5 - 3\cos^2 B_2) &= +\quad 0.221 \\ -\,[2{,}727-20]\, L^4\cos^4 B_2\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{5}\cos^2 B_2\right) &= -\quad 0.059 \end{aligned}\right.$$

$$\log\tan t = 9{,}0072071.542 - 10$$

$$t = +\ 5^\circ\, 48'\, 19{,}8152''.$$

Der hier gefundene Wert von $\log x$ zeigt mit demjenigen, welcher S. 437 ermittelt wurde, eine nicht unerhebliche Differenz. Augenscheinlich hat dies seinen Grund darin, dafs in der Formel (3) für $F - B_2$ die vernachlässigten höheren Glieder merklich werden. Gerade

diese Formel hat nicht die Schärfe, wie die entsprechende Formel (5) S. 431; darauf weist schon die relative Gröfse der Glieder 4. Ordnung beider Formeln hin. Immerhin reicht die Schärfe von (3) aus, sobald für die weitere Rechnung die folgenden Formeln des vorigen Paragraphen zur Anwendung gelangen.

Es ist nach

Formel (7):	Formel (8):	Formel (9):
$5{,}4298235.88_n$	$5{,}6596749.99_n$	$2{,}4927011_n$
$-\ 1852.51$	$-\ 642.77$	$+\ 1853$
$-\ 0.55$	$-\ 0.07$	$+\ 643$
$-\ 0.52$	$-\ 0.52$	$2{,}4929507_n$
$-\ 0.17$	$+\ 0.11$	$= \log \Delta\mathfrak{a}$ in Sek.
$5{,}4296382.13_n$	$5{,}6596106.74_n$	
$= \log\left\{s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\}$	$= \log\left\{s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\}$	$\Delta\mathfrak{a} = -\ 5' 11{,}1363''$
		$t = 5^0 48' 19{,}8152''$
		$\alpha_{1.2} = 239^0 33'\ 0{,}6868''$
		$\alpha_{2.1} = 65^0 16'\ 9{,}3657''$

$$\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{a} = 239^0\ 30'\ 25{,}1186''$$

$$\log s = 5{,}7242591.37$$

nach S. 261:

$$\text{Resultat:} \begin{cases} \log s = 5{,}7242591.37 & .353 \\ \alpha_{1.2} = 239^0\ 33'\ 0{,}6868'' & 0{,}6889'' \\ \alpha_{2.1} = 65\ 16\ 9{,}3657 & 9{,}3650 \end{cases}$$

Um eine schärfere Rechnung zu erzielen, könnte man sich der Formel (10) S. 429 bedienen, in welche nach (12) S. 430 der Wert von $\frac{\varrho_n}{\varrho_m}$ für $\varkappa = 1$ einzuführen wäre. Die Formel lautet nach einfacher Reduktion:

$$\log\sin(F - B_2) = \left\{ \begin{array}{c} \log\left(-\tan t \cos F \tan \frac{L_{1.2}}{2} \cdot \frac{W_2^2}{1 - e^2}\right) \\ + \frac{M e^2}{\varrho''^2} L^2 \cos^2 B_2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cos^2 B_2 - \frac{1}{4}\tan^2\frac{L}{2}\right) + Gl_6. \end{array} \right\}$$

Sie giebt unter Einführung der oben berechneten Werte von t und F:

$$\log\sin(F - B_2) = 7{,}5602718.20 - 10 \qquad F - B_2 = 12'\ 29{,}37277''.$$

Mit diesem Werte nimmt der $\log x$ um 40 Einheiten der 10. Decimalstelle ab und man erhält eine weit bessere Übereinstimmung als vorher, vorausgesetzt, dafs namentlich noch $\varepsilon = -\Delta\mathfrak{a}$ nach einer der strengen Formeln des § 10 S. 370 u. ff. aus den Seiten x und y sowie dem Zwischenwinkel 90^0 berechnet wird.

§ 19. Übertragung geographischer Koordinaten durch Dreiecksseiten. Sobald wir annehmen, dafs $s \leq 0{,}02\,a_0$ d. i. 127^{km}, so vereinfachen sich selbst für die schärfste Rechnung die Formeln sehr. Zunächst kürzen wir die Formeln für x, y und $\Delta\mathfrak{a}$ in § 12 S. 432 wie folgt ab:

$$\log x = \log u + \frac{1}{3}\frac{M}{b_0^2} v^2 W_0^2 + \cdots \tag{1}$$

$$\log y = \log v - \frac{1}{6}\frac{M}{b_0^2} u^2 W_0^2 + \cdots \tag{2}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho''}{b_0^2} xy W_0^2 + \cdots. \tag{3}$$

Die beträchtlichsten Vernachlässigungen der 1. Formel haben auf x einen Einflufs gleich

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{1}{90}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \sin^2\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2}\,(7\sin^2\alpha_{1.2} - 6\cos^2\alpha_{1.2}) \\ &\qquad -\frac{1}{36}\varrho'' e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \sin^2\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{1.2}\sin 2B_0, \end{aligned}\right\}\text{ zu (1)}$$

ausgedrückt in Äquatorsekunden d. h. als Zentriwinkel für eine Kugel vom Radius a_0, den Fehler in x als Bogen gröfsten Kreises betrachtet. Diese Ausdrücke geben im Maximum rund

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \pm 3900''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \text{für} \tan\alpha_{1.2} = \pm 2{,}5 & \alpha_{1.2} \text{ im 1. Qu.} = 68\frac{1}{3}^\circ & B_0 \text{ beliebig} \\ \pm\ \ 9{,}5''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \text{für} \tan\alpha_{1.2} = \pm 1 & \alpha_{1.2} \text{ im 1. Qu.} = 45^\circ & B_0 = \pm 45^\circ. \end{array}\right\}\text{zu (1)}$$

Für y werden die hauptsächlichsten Fehlerglieder, ebenfalls auf Äquatorsekunden reduziert, gleich

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{15}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \sin^3\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{1.2} \\ &+\frac{1}{18}\varrho'' e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \sin\alpha_{1.2}\cos^3\alpha_{1.2}\sin 2B_0, \end{aligned}\right\}\text{ zu (2)}$$

d. i. im Maximum rund

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \pm 2600''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \text{für} \tan\alpha_{1.2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} & \alpha_{1.2} \text{ im 1. Qu.} = 50\frac{2}{3}^\circ & B_0 \text{ beliebig} \\ \pm\ \ 25''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \text{für} \tan\alpha_{1.2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} & \alpha_{1.2} \text{ im 1. Qu.} = 30^\circ & B_0 = \pm 45^\circ. \end{array}\right\}\text{zu (2)}$$

Ferner giebt die Vergleichung von (3) mit (9) S. 448 als Fehler des mittelst (3) berechneten $\Delta\mathfrak{a}$:

$$\left.\begin{array}{l} \qquad -\frac{1}{24}\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2} \\ \text{d. i. im Maximum rund} \\ \pm 4300''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \text{für } \tan\alpha_{1.2} = \pm 1;\ \alpha_{1.2} \text{ im 1. Qu.} = 45^0. \end{array}\right\} \text{zu (3)}$$

Für $s = 0{,}02 a_0$ werden daher x und y bis auf 0,000012 bezw. 0,000008 Äquatorsekunden genau erhalten, die Gröfse $\Delta\alpha$ aber bis auf 0,0007″.

Für $s = 0{,}05 a_0$ sind die Fehler im Maximum bezw. 0,0012″, 0,0008″ und 0,027″; sie halten sich also auch hier innerhalb von Beträgen, die wenigstens für manche Zwecke vernachlässigt werden dürfen.

Es ist noch zu erwähnen, dafs es zur Berechnung des Arguments B_0 für W_0 ausreicht, sich der Formeln

$$B_0 = B_1 + \frac{2}{3}(F - B_1), \qquad \underset{\text{in Min.}}{F - B_1} = [6{,}732_n - 10]\,u \tag{4}$$

zu bedienen. In den entsprechenden Formeln (2) S. 432 ist einfach $W_0 = 9{,}9993 - 10$, also gleich einem Mittelwert eingeführt, wodurch in $F - B_1$ nur Bruchteile Minuten Fehler entstehen können. Die Tafel der $\log W$ zeigt unmittelbar deren Geringfügigkeit.

§ 20. **Fortsetzung.** An Stelle der Formeln des § 11 S. 431 setzen wir die einfacheren:

$$\log (\underset{\text{in Sek.}}{B_1 - F}) = \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) - \frac{M e^2}{8\varrho''^2}\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 \cos(B_1 + F) + \cdots \tag{1}$$

$$\tan L_{1.2} = + \tan\eta \sec F + \cdots \tag{2}$$

$$\tan t \quad = - \sin\eta \tan F + \cdots \tag{3}$$

$$\sin(F - B_2) = \sin\eta \sin F \tan\frac{L_{1.2}}{2} \cdot \frac{W^2}{1 - e^2} + \cdots. \tag{4}$$

Die Fehler, welche bei Anwendung dieser Formeln begangen werden, hängen aufser von F und $L_{1.2}$ nur von x *oder* y ab. Indem wir für diese letzteren Gröfsen sogleich s setzen, ergeben sich als maximale Werte der beträchtlichsten Fehlereinflüsse nachstehende Ausdrücke:

$$\text{in } B_1 - F:\ + \frac{1}{8}\varrho'' e^4 \left(\frac{s}{a_0}\right)^3 \left(6 \sin^2\frac{B_1 + F}{2} - 7 \sin^4\frac{B_1 + F}{2}\right)$$

$$\text{in } L_{1.2}:\ + \frac{1}{15}\varrho'' e^2 \left(\frac{s}{a_0}\right)^5 \tan F \sin F \cos^2 L$$

$$\text{in } t:\ + \frac{1}{6}\varrho'' e^2 \left(\frac{s}{a_0}\right)^3 \sin F \cos F \cos^2 t$$

$$\text{in}\, F - B_2: \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{12}\varrho'' e^2 \left(\frac{s}{a_0}\right)^3 \sin F \cos^2 F \tan \frac{L}{2} \\ -\frac{1}{16}\varrho'' e^2 \left(\frac{s}{a_0}\right)^3 (1 + 3\cos^2 F) \sin F \tan^3 \frac{L}{2} \end{array} \right\},$$

wobei für die Fehler in $L_{1.2}$ und t berücksichtigt wurde, dafs einem Fehler δ in $\tan u$ ein Fehler $\delta \cos^2 u$ in u selbst entspricht.

Zu diesen Fehlern treten strenggenommen noch diejenigen wegen unrichtiger Berechnung von x und y aus § 19. Indem wir aber annehmen, dafs die Abkürzungen der Formeln, welche dort eingeführt wurde, zulässig sind, dürfen wir jetzt von Fehlern in x und y absehen.

Der Fehler in $B_1 - F$ wird ein Maximum für $\frac{1}{2}(B_1 + F)$ gleich rund $\pm 41^0$ d. h. also für eine mittlere Breite von rund $\pm 41^0$; und zwar ist *das Maximum des Fehlers in* $B_1 - F$ gleich

$$+ 1{,}5'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^3, \qquad \text{zu (1)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ nur $0{,}000012''$, für $s = 0{,}05 a_0$ aber auch erst $0{,}0002''$ ergiebt.

Um ferner das Maximum des Faktors $\tan F \sin F \cos^2 L$ in dem Fehlerausdruck für $L_{1.2}$ zu ermitteln, beachten wir, dafs nach S. 425 (13) $\eta \sec F$ jedenfalls ein Näherungswert für $\tan L$ ist.

Hiermit erhalten wir in einer für alle Fälle zur Schätzung des Fehlerbetrags ausreichenden Annäherung:

$$\tan F \sin F \cos^2 L = \frac{\tan F \sin F}{1 + \eta^2 \sec^2 F} = \frac{\sin^2 F \cos F}{\cos^2 F + \eta^2}.$$

Die Differentiation giebt als Bedingung des Maximums des letzten Ausdrucks:

$$\cos^4 F + (1 + 3\eta^2) \cos^2 F = \eta^2$$

und hieraus folgt, abgesehen von höheren Gliedern, $\cos^2 F = \eta^2$. Der Maximalwert jenes Faktors ist also in hinreichender Annäherung gleich $1 : 2\eta$, wobei für η nun, wie überhaupt in dem betreffenden Fehlerglied, $s : a_0$ zu setzen ist. Es folgt daher *der Maximalfehler in* $L_{1.2}$ gleich

$$\pm 46'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^4, \qquad \text{zu (2)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ rund $0{,}000006''$, für $s = 0{,}05 a_0$ rund $0{,}0003''$ beträgt. Schliefst man aber die Nähe des Poles aus, so ist der Fehler noch weit kleiner.

Um das Maximum des Faktors $\sin F \cos F \cos^2 t$ zu bestimmen, beachten wir, dafs nach S. 426 $-\eta \tan F$ jedenfalls ein hier brauch-

barer Näherungswert von $\tan t$ ist. Wir haben daher ausreichend genau:

$$\sin F \cos F \cos^2 t = \frac{\sin F \cos F}{1 + \eta^2 \tan^2 F}.$$

Man erkennt, dafs wegen des Faktors $\cos F$ der Nenner von unwesentlichem Einflusse auf die Lage des Maximums ist; dasselbe findet daher (wie auch die Differentiation zeigt) statt bei F gleich rund $\pm 45^0$ und es folgt der *Maximalfehler in t* gleich

$$\pm 115'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^3, \qquad \text{zu (3)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ $0{,}0009''$ beträgt und mithin vernachlässigt werden darf. Für $s = 0{,}05 a_0$ wird der Maximalfehler gleich $0{,}014''$, also in manchen Fällen wohl auch noch genügend klein.

Jedenfalls entspricht der Fehler vollständig der Genauigkeit, mit welcher $\Delta \mathfrak{a}$ berechnet wird.

Im 1. Gliede des Fehlerausdrucks für $F - B_2$ setzen wir

$$\cos F \tan \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \eta,$$

denn da nach S. 429 (8) $\cos F \tan \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \eta \left(1 - \tan^2 \frac{L}{2}\right)$ ist und $\tan^2 \frac{L}{2}$ höchstens 1 werden kann, so entspricht diese Annahme einem Maximum. Wir erhalten also, für η zugleich $\frac{s}{a_0}$ substituierend und berücksichtigend, dafs $\sin F \cos F$ sein Maximum $\frac{1}{2}$ bei $F = 45^0$ hat, als *Maximalwert des Fehlers von $F - B_2$*, abgesehen von der Nähe des Pols:

$$\pm 57'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^4, \qquad \text{zu (4)}$$

was für $s = 0{,}02 a_0$ $0{,}000009''$ beträgt, für $s = 0{,}05 a_0$ aber noch nicht ganz $0{,}0004''$.

Hierbei ist in (4) als Argument für W angenommen $F + \frac{3}{4}(B_2 - F)$, denn der Fehler wird für F als Argument bereits für $s = 0{,}02 a_0$ in der 4. Decimalstelle der Sekunden von erheblichem Einflufs.

Das 2. Glied im Fehlerausdruck für $F - B_2$ erlangt nur in der nächsten Nähe des Poles Bedeutung. Während der Faktor $(1 + 3\cos^2 F) \sin F$ bei wachsendem F nahe dem Pole langsam abnimmt, wächst $\tan^3 \frac{L}{2}$ sehr rasch. Denn für $F = 90^0 - \eta$ ist $L = 45^0$

rund und für $F = 90^0$ ist $L = 90^0$. Das Maximum dieses Gliedes tritt also ein für $F = 90^0$ und beträgt

$$\pm 86'' \left(\frac{s}{a_0}\right)^3, \qquad \text{zu (4)}$$

was für $s = 0{,}02\,a_0$ 0,0007″ giebt. Von praktischer Bedeutung aber ist dieser Fehler nicht, denn schon für $F = 90^0 - \eta$ sinkt er auf 0,00005″ herab, u. s. f. Auch für $s = 0{,}05\,a_0$ ist er nur in nächster Nähe des Poles von einiger Bedeutung.

§ 21. **Reihenentwicklungen für $L_{1.2}$, t und $F - B_2$.** Wenn man voraussetzt, dafs nicht nur η, sondern auch $L_{1.2}$ oder, was dasselbe, $\eta \sec F$ eine kleine Gröfse ist, so lassen sich anstatt der Formeln des vorhergehenden Paragraphen unter Umständen mit Vorteil die Reihen anwenden, welche schon § 8 S. 126 u. ff. angegeben worden sind.

Man erhält sofort:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = \left\{\begin{aligned} &\log(\varrho''\eta \sec F) - \frac{1}{3} M\eta^2 \tan^2 F \\ &+ \frac{1}{90} M\eta^4 \tan^2 F\,[13 \tan^2 F + 6] + Gl_6 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = \left\{\begin{aligned} &\log(-\varrho''\eta \tan F) - \frac{1}{6} M\eta^2\,[2\tan^2 F + 1] \\ &+ \frac{1}{180} M\eta^4\,[26 \tan^4 F + 20 \tan^2 F - 1] + Gl_6 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \left\{\begin{aligned} &\log\left(\frac{1}{2}\varrho''\eta^2 \tan F \cdot \frac{W^2}{1-e^2}\right) - \frac{1}{12} M\eta^2\,[3\tan^2 F + 1] \\ &+ \frac{1}{1440} M\eta^4\,[135 \tan^4 F + 90 \tan^2 F - 1] + Gl_6. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

In die Formeln (2) und (3) führen wir rechter Hand im 2. Gliede, woselbst sich $\tan^2 F + 1$ zu $\sec^2 F$ vereinigen läfst, die aus (1) und (2) leicht abzuleitenden Relationen ein:

$$\eta^2 \sec^2 F = L^2 + \frac{2}{3}\eta^4 \tan^2 F (\tan^2 F + 1) + Gl_6$$

$$\eta^2 \tan^2 F = t^2 + \frac{1}{3}\eta^4 \tan^2 F (2 \tan^2 F + 1) + Gl_6.$$

Hiermit nehmen die genannten Formeln die nachstehende vorteilhaftere Gestalt an:

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = \left\{\begin{aligned} &\log(-\varrho''\eta \tan F) - \frac{1}{6} M\,[\eta^2 \tan^2 F + L^2] \\ &\quad + \frac{1}{180} M\eta^4\,[6 \tan^4 F - 1] + Gl_6 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F-B_2)} = \left\{\begin{array}{l} \log\left(\frac{1}{2}\varrho''\eta^2 \tan F \cdot \frac{W^2}{1-e^2}\right) - \frac{1}{12} M[2t^2+\eta^2 \sec^2 F] \\ -\frac{1}{1440} M\eta^4 [25\tan^4 F - 10\tan^2 F + 1] + Gl_6 . \end{array}\right\} (5)^*$$

Für $\eta = 0{,}02$ und $F = 65^0$ mit $\tan = 2{,}14$ $\tan^2 = 4{,}6$ $\sec = 2{,}37$ ist der Einfluſs der in η^4 multiplizierten Glieder der Formeln (1), (4) und (5)

auf $L_{1.2}$	gleich:	0,0054″
„ t	„ :	0,0010″
„ $F-B_2$	„ :	0,000004″.

Während hiernach für $s \leqq 0{,}02 a_0$ und $F \leqq 65^0$ die Glieder 4. Ordnung der Formeln (4) und (5) jedenfalls vernachlässigt werden dürfen, müssen sie für Formel (1) noch Berücksichtigung finden. Erst für $\eta \sec F < 0{,}012$ wird der Einfluſs des Gliedes 4. Ordnung auch in dieser Formel sicher kleiner als 0,00001″. (Dies erkennt man leicht, wenn man für dasselbe den gröſseren Wert $\frac{1}{90} M\eta^4 \sec^2 F . 13 \sec^2 F$ setzt u. s. f.) Andrerseits läſst sich unschwer nachweisen, daſs für die angegebenen Grenzwerte von η und F die in (1) vernachlässigten Glieder 6. Ordnung keinen nennenswerten Einfluſs auf die 5 ersten Decimalstellen der Sekunden in $L_{1.2}$ erlangen können.

§ 22. **Zusammenstellung.** Gegeben: B_1, s und $\alpha_{1.2}$ bezw. x und y für P_2 in Bezug auf den Meridian von P_1.

Gesucht: B_2, $L_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$.

$$\left.\begin{array}{l|l} u = s\cos\alpha_{1.2} & \log x = \log u + \frac{1}{3}\frac{M}{b_0^2} v^2 W_0^4 + \cdots \\ v = s\sin\alpha_{1.2} & \log y = \log v - \frac{1}{6}\frac{M}{b_0^2} u^2 W_0^4 + \cdots \\ & \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho''}{b_0^2} xy W_0^4 + \cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\frac{M}{b_0^2}\right) = 2{,}55428-10 \quad \log\left(\frac{1}{6}\frac{M}{b_0^2}\right) = 2{,}25325-10,$$

beide für Einh. der 7. Dec.;

$$\log\left(-\frac{1}{2}\frac{\varrho''}{b_0^2}\right) = 1{,}407017_n - 10$$

W_0 zum Arg. $B_0 = B_1 + \frac{2}{3}(F-B_1)$, wobei $(F-B_1)$ in Min. $= [6{,}732n-10]\, u$.

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) - \frac{Me^2}{8\varrho''^2}\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 \cos(B_1+F) + \cdots \quad (2)$$

$$\frac{\varrho''}{\varrho_m} = \frac{\varrho'' W_m^3}{a_0(1-e^2)} = [8{,}5126900.29-10]\, W_m^3$$

W_m zum Arg. $\frac{1}{2}(B_1+F)$, welches in 1. Annäherung aus obigem Wert $F-B_1$ abzuleiten ist.

(Die Änderung für 1 Min. ist zu notieren.)

$$\log \frac{Me^2}{8\varrho''^2} = 2{,}980-10 \text{ f. Einh. der 7. Dec.}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\eta} = \varrho'' \frac{y}{\varrho_n} = y\, W_F \frac{\varrho''}{a_0} = y\, W_F\, [8{,}5097816.70-10] \tag{3}$$

W_F zum Arg. F. (Man notiere die Änderung für 1 Min.)

$$\left.\begin{aligned} \tan L_{1.2} &= +\tan\eta \sec F + \cdots \\ \tan t &= -\sin\eta \tan F + \cdots \\ \sin(F-B_2) &= \sin\eta \sin F \tan \frac{L_{1.2}}{2} \cdot \frac{W^2}{1-e^2} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

W zum Arg. $F - \frac{3}{4}(F-B_2)$; ist aus W_F abzuleiten.

$$-\log(1-e^2) = 0{,}0029083.6\,.$$

Ist der absolute Wert der Breite $< 65^0$, so können anstatt der (4) nachfolgende Formeln Anwendung finden:

$$\left.\begin{aligned} L_0 &= \sec F\, (\eta \text{ in Sek.}) \qquad t_0 = -\tan F\, (\eta \text{ in Sek.}) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\log L_{1.2}} &= \log L_0 - \frac{M}{3\varrho''^2} t_0^2 + \left| \frac{7M}{90\varrho''^4} t_0^4 + \frac{M}{15\varrho''^4} t_0^2 L_0^2 + \cdots \right| \ \text{(bleibt weg für } \log L_0 < 3{,}40\text{)} \\ \underset{\text{in Sek.}}{\log t} &= \log t_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{3\varrho''^2} t_0^2 - \frac{M}{6\varrho''^2} L_{1.2}^2 + \cdots \\ \log \underset{\text{in Sek.}}{(B_2 - F)} &= \log \frac{\eta t_0 W^2}{2(1-e^2)\varrho''} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{3\varrho''^2} t^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{6\varrho''^2} L_0^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4*}$$

W zum Argument $F + \frac{3}{4}(B_2 - F)$

$$\left.\begin{aligned} \log \frac{M}{3\varrho''^2} &= 5{,}531813-10 \qquad \log \frac{7M}{90\varrho''^4} = 4{,}271-20 \\ \log \frac{M}{6\varrho''^2} &= 5{,}23078\ -10 \qquad \log \frac{M}{15\varrho''^4} = 4{,}204-20 \end{aligned}\right\} \text{f. Einh. der 7. Dec.}$$

$$\log \frac{1}{2(1-e^2)\varrho''} = 4{,}3874532.3-10\,.$$

Schliefslich hat man

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \varDelta\mathfrak{a} + t\,. \tag{5}$$

Diese Formeln geben für $s = 0{,}02\, a_0$ B_2 und $L_{1.2}$ auf 1 bis 2 Einheiten der 5. Decimalstelle und $\alpha_{2.1}$ auf ebensoviel der 3. Decimal-

stelle der Sekunden genau. Spezieller sind über die Genauigkeit die beiden letzten Paragraphen zu vergleichen.

Wünscht man die an zwei Stellen unserer Formeln erforderliche, übrigens bei Anwendung logarithmischer Differenzen nicht mühsame indirekte Rechnung zu vermeiden, so ist das durch einige einfache Reihenentwicklungen leicht zu erreichen. In dieser Beziehung erinnern wir insbesondere auch an die Reihen S. 298. Setzt man hierin $\alpha_{1.2} = 90^0$, so ergeben sich Formeln zur Übertragung der Breite, Länge und des Azimuts mittelst einer Ordinate.

Formeln dieser Art waren bei der bayerischen Landesvermessung im Gebrauche nach Entwicklungen von *Soldner* bezw. *Orff.*

Für die preufsische Landesvermessung veröffentlichte neuerdings (nachdem wir bereits zu unseren Formeln gelangt waren) *O. Schreiber* Formeln, die von den Formeln (1), (2), (3) und (4*) sich hauptsächlich dadurch unterscheiden, dafs jede indirekte Rechnung vermieden ist. Man vergl. die *Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Koordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Berlin 1878. Zu beziehen durch die Königl. Hofbuchhandlung von E. S. Mittler & Sohn.* (Es sind besondere Formeln für Dreiecke 1., 2. und 3. Ordnung.)

Unsere Formeln dürften nicht unbequemer als die *Schreiber*schen sein. Sie bieten vielleicht dadurch einen Vorteil, dafs weniger Korrektionen zu berechnen sind, wenn die geographischen Breiten bereits näherungsweise bekannt sind.

Die Anwendbarkeit der Formeln (4) bis zu Distanzen von einigen Äquatorgraden zeigte neuerdings wiederholt *Andrae* im 3. Bd. der *Dänischen Gradmessung* (Umarbeitung von Formeln aus *Astronom. Nachr.* Bd. 50 Nr. 1187 S. 161 und Bd. 53 Nr. 1272 S. 369 1859/60). Von der interessanten und ganz eigenartigen, z. T. geometrischen Methode der Entwicklung giebt Nr. 1272 der *Astronom. Nachr.* sowie *Zachariae* a. a. O. S. 198 (nur für Dreiecksseiten bis 65° Breite) am besten eine klare Vorstellung. Unsere wesentlich verschiedenen Entwicklungen führten S. 431 § 11 zu Formeln von noch gröfserer Schärfe. Aufserdem haben wir für Dreiecksseiten die indirekte Berechnung von x und y mittelst *Legendres* Satz, welche *Andrae* anwendet, vermieden und durch Herbeiziehung höherer Glieder bewirkt, dafs die Formeln (4*) genauer sind als die entsprechenden bei *Zachariae* und daher eine ausgedehntere Anwendbarkeit gestatten.

Eine Vergleichung mit *Astronom. Nachr.* Bd. 71 1868 Nr. 1690 S. 147 zeigt, dafs ebensolche Formeln wie letzterer die trigonometrische Abteilung des preufsischen Generalstabes seit *v. Müffling*, welcher 1820 deren Chef wurde († 1851), bis vor kurzem angewandt hat.

Ebenso wie *Andrae* berechnet *Börsch* x und y mittelst *Legendres* Satz in seiner *Anleitung zur Berechnung rechtwinkliger sphärischer Koordinaten* (Kassel 1868) und benutzt sonst die Formeln (4), bei der 3. derselben aber Argument F. Man vergl. auch seine *Tafeln für geodätische Berechnungen zwischen den geographischen Breiten von 35 bis 71°, nach Bessels Elementen.* (Anlage zum Programm der höheren Gewerbeschule in Kassel. 1869.)

Jordan rechnet Bd. 2 seines *Handbuches* S. 280 u. ff. nach *Bohnenberger* (1826) im allgemeinen wie *Zachariae*, nur in Bezug auf x und y

mittelst Reihen, die im wesentlichen unseren Formeln (1) entsprechen, überhaupt aber ohne die Formeln in die logarithmische Gestalt zu bringen.

Hansens Formeln unterscheiden sich von den unseren insofern, als sie noch die reduzierte Breite enthalten, dagegen benutzen sie ebenfalls die Zerlegung mittelst rechtwinkliger Koordinaten. Vergl. *Geodätische Untersuchungen* S. 38 § 31.

Die Methode der Zerlegung in rechtwinklige Koordinaten bei der Übertragung geographischer Koordinaten dürfte in erster Linie auf *Legendre* zurückzuführen sein. Nachdem er in den Memoiren der franz. Akademie der Wissenschaften von 1787 auseinandergesetzt, wie er sich die Berechnung einer Breitengradmessung denkt, giebt er in *Delambre*, *Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien. 1799* S. 1 u. ff. einige Zusätze. Insbesondere bestimmt er S. 14 u. ff. Breite, Länge und Azimut für den Endpunkt eines Perpendikels zum Meridian, für dessen Fußpunkt die Breite bereits bekannt ist. Die Entwicklung der Formeln, Reihen bis s^3 incl., ist eine sphärische mit K_1' (Fig. 8 S. 134) als Zentrum der Kugel. Daß *Legendre* hierbei nicht untersucht hat, welchen Einfluß die Abweichung der Kugel vom Ellipsoid und die Voraussetzung kürzester Linien auf letzterem haben, erwähnt schon *Soldner* (*Baeyer. Landesvermessung* S. 533). Wenn dieser aber in gleicher Hinsicht auch *Delambre* nennt, so ist das ein Irrtum, weil der letztere mit Sehnen rechnet, wo selbst bei strenger Rechnung die kürzeste Verbindung auf der Oberfläche gar nicht in frage kommt (vergl. S. 211). Auch ist bezüglich *Legendres* auf die Abhandlung von 1806 zu verweisen (vergl. S. 300).

Wesentlich anderer Art sind die von *Gauß* 1847 im 2. Teile der *Geodätischen Untersuchungen* S. 26 u. ff. gegebenen Formeln (vergl. S. 312). Bei denselben ist die Zerlegung nach rechtwinkligen Koordinaten nicht angewandt, dagegen wird eine indirekte Rechnung benutzt, indem in die Formeln die arithmetischen Mittel der Breiten und Azimute eingeführt sind.

Dieser Umstand muß von vornherein der Konvergenz der Reihen günstig erscheinen, allein die Reihen für L und t enthalten außer den, den Formeln (4*) entsprechenden Gliedern noch andere, wodurch zum Teil der Vorteil wieder aufgehoben wird. (Vergl. weiterhin das Beispiel VII.) Die Koefficienten der Reihenglieder haben außerdem eine nicht so einfache Form, wie oben, sodaß man mit *einer* Tafel, wie wir mit derjenigen für $\log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$, nicht auskommt.

Jordan giebt S. 421 Bd. 2 seines Handbuches *Gauß*' Formeln (jedoch nicht mittelst *G.*' direkter Ableitung, sondern mittelst einer andern ebenfalls von *G.* herrührenden indirekten). Zu den Tafeln giebt er noch Hilfstafeln für veränderliche Excentricität.

§ 23. **Rechtwinklige Koordinaten, Distanz und Azimute aus geographischen Koordinaten für Entfernungen von der Ordnung der Dreiecksseiten.** Setzen wir im Anschluß an § 17 S. 447 an Stelle der Formeln (1), (3) und (5) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \sin \eta' &= \sin L_{1.2} \cos B_2 + \cdots \\ \sin (F - B_2) &= \sin^2 \frac{L_{1.2}}{2} \sin B_2 \cos B_2 \cdot \frac{2 W_2^2}{1 - e^2} + \cdots \\ \tan t &= - \tan L_{1.2} \sin B_2 + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

so sind die begangenen Fehler, wenn L als Arcus verstanden wird, im wesentlichen durch die nachstehenden Ausdrücke gegeben:

$$\text{für } \eta' : \quad -\frac{1}{15}\varrho'' e^2 L^5 \sin^2 B_2 \cos^5 B_2$$

$$\text{für } F - B_2 : \quad +\frac{1}{2}\varrho'' e^2 L^4 \sin B_2 \cos^3 B_2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{6}\cos^2 B_2\right)$$

$$\text{für } t : \quad -\frac{1}{3}\varrho'' e^2 L^3 \sin B_2 \cos^4 B_2 .$$

Es ist wie früher S. 447 vorausgesetzt, dafs L eine kleine Gröfse sei, womit auch t auf kleine Werte beschränkt ist. In Bezug auf B_2 erhält man als Maximalwerte:

für η' :	$- \; 11'' L^5$ bei $\sin^2 B_2 = \frac{2}{7}$	$B_2 = \pm 32\frac{1}{2}^0$
für $F - B_2$:	$\pm \; 55'' L^4$ bei $\sin^2 B_2 = 0{,}093$	$B_2 = \pm 17\frac{3}{4}$
für t :	$\pm \; 130'' L^3$ bei $\sin^2 B_2 = \frac{1}{5}$	$B_2 = \pm 26\frac{1}{2}$.

Für $L = 0{,}02$ entsteht in $F - B_2$ 0,000009″, in t 0,0010″ Fehler; dagegen wird der Fehler in η' verschwindend klein. $L = 0{,}05$ giebt in η', $F - B_2$ und t bezw. 0,000003″, 0,00034″ und 0,016″.

Wir setzen nun ferner nach S. 447 (4):

$$\log x = \log\left(\frac{a_0(1-e^2)(B_1 - F)\text{ in Sek.}}{\varrho'' W_m^{\,3}}\right) + \frac{Me^2}{8\varrho''^2}\left(\div\right)^2 \cos(B_1 + F) + \cdots \quad (2)$$

Der hiermit in x begangene Fehler beurteilt sich wie S. 453 und zwar beträgt er im Maximum in Äquatorsekunden

$$\text{für } x : \; - 1{,}5''(B_1 - F)^3, \text{ wobei } \frac{1}{2}(B_1 + F) = \pm 41^0$$

und $B_1 - F$ als Arcus verstanden ist. Für $B_1 - F = 0{,}02$ giebt dies $-$ 0,000012″. Für $B_1 - F = 0{,}05$ wird der Fehler $-$ 0,0002″.

Nach S. 130 (4) haben wir nun sofort zu den (1) folgende Reihenentwicklungen, in denen L als Arcus zu verstehen ist:

$$\left.\begin{aligned}
\log \underset{\text{in Sek.}}{\eta'} &= \left\{\begin{aligned} &\log(\varrho'' L \cos B_2) - \frac{1}{6} ML^2 \sin^2 B_2 \\ &- \frac{1}{120} ML^4 \sin^2 B_2 [12 - 11 \sin^2 B_2] + Gl_6 \end{aligned}\right\} \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} &= \left\{\begin{aligned} &\log\left(\frac{\varrho''}{2(1-e^2)} L^2 \sin B_2 \cos B_2 \cdot W_2^{\,2}\right) + \frac{1}{12} ML^2 [5 - 6\sin^2 B_2] \\ &+ \frac{1}{1440} ML^4 [119 - 420 \sin^2 B_2 + 300 \sin^4 B_2] + Gl_6 \end{aligned}\right\} \\
\log \underset{\text{in Sek.}}{t} &= \left\{\begin{aligned} &\log(-\varrho'' L \sin B_2) + \frac{1}{3} ML^2 \cos^2 B_2 \\ &+ \frac{1}{90} ML^4 \cos^2 B_2 [7 - 13 \sin^2 B_2] + Gl_6 . \end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} (3)$$

Vernachlässigt man die in L^4 multiplizierten Glieder, so ergeben sich im Maximum für η', $F - B_2$ und t nachstehende Fehlerbeträge:

$$\begin{array}{rl|l} \text{in } \eta': & -4000'' L^5 \text{ für } \sin^2 B_2 = 0{,}42 & B_2 = \pm 41^0 \\ \text{in } F - B_2: & \pm 1700'' L^6 \text{ für } \sin^2 B_2 = 0{,}10 & B_2 = \pm 18^0 \\ \text{in } t: & \pm 3000'' L^5 \text{ für } \sin^2 B_2 = 0{,}14 & B_2 = \pm 21^0. \end{array}$$

Ist $L = 0{,}02$, so wird im Maximum nur η' merklich fehlerhaft, nämlich um $-0{,}000013''$. Für $L = 0{,}05$ sind die Maximalfehler in η', $F - B_2$ und t bezw. $-0{,}0013''$, $\pm 0{,}000025''$ und $\pm 0{,}0009''$.

Man erkennt hiermit leicht, dafs für die Formeln (1) immer die Formeln (3) unter Vernachlässigung der in L^4 multiplizierten Glieder gesetzt werden können, so lange L den Betrag von etwa 0,02 d. i. rund $1{,}2^0$ nicht überschreitet. Bei gröfseren Werten von L werden nicht nur die eben erwähnten Glieder der Formeln (3) merklich, sondern auch die den Formeln (1) anhaftenden Vernachlässigungen. Man wird daher im allgemeinen zu den Formeln des § 17 S. 447 zurückgreifen müssen, sobald der absolute Werte von $L > 0{,}02$ ist.

§ 24. **Fortsetzung.** Um bequeme Formeln zur Berechnung von s und $\alpha_{1.2}$ zu gewinnen, knüpfen wir jetzt nicht an die (10) S. 447 an, denn diese sind nicht mehr bequem, wenn $\Delta\mathfrak{a}$ nach der abgekürzten Formel $-\varrho'' xy : 2\varrho^2$ berechnet wird.

Wir bilden dagegen zunächst mittelst der Formeln (8) und (9) S. 446 u. 447 indem wir sie nämlich in die Entwicklungen

$$s\cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right) = s\cos\alpha_{1.2}\left(1 - \frac{1}{18}\Delta\mathfrak{a}^2 + Gl_8\right) - \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\, s\sin\alpha_{1.2}\,(1 + Gl_6)$$

$$s\sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right) = s\sin\alpha_{1.2}\left(1 - \frac{1}{18}\Delta\mathfrak{a}^2 + Gl_8\right) + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\, s\cos\alpha_{1.2}\,(1 + Gl_6)$$

einführen, nachstehende Formeln:

$$s\cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right) = x\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{6}\frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{1}{120}\frac{y^4}{\varrho^4} - \frac{1}{60}\frac{x^2y^2}{\varrho^4} \\ + \frac{1}{36}\frac{xy^2}{\varrho^3} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \end{array}\right\}$$

$$s\sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right) = y\left\{\begin{array}{c} 1 + \frac{1}{180}\frac{x^4}{\varrho^4} - \frac{1}{60}\frac{x^2y^2}{\varrho^4} \\ - \frac{1}{18}\frac{x^3}{\varrho^3} e^2 \sin 2B_0 + Gl_6 \end{array}\right\}$$

oder logarithmisch:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(s\cos\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\,\varDelta\mathfrak{a}\right)\right) &= \left\{\begin{aligned}&\log x-\frac{1}{6}\,M\frac{y^2}{\varrho^2}-\frac{1}{45}\,M\frac{y^4}{\varrho^4}-\frac{1}{60}\,M\frac{x^2y^2}{\varrho^4}\\ &\qquad+\frac{1}{36}\,Me^2\frac{xy^2}{\varrho^3}\sin 2B_0+Gl_6\end{aligned}\right\}\\ \log\left(s\sin\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\,\varDelta\mathfrak{a}\right)\right) &= \left\{\begin{aligned}&\log y+\frac{1}{180}\,M\frac{x^4}{\varrho^4}-\frac{1}{60}\,M\frac{x^2y^2}{\varrho^4}\\ &\qquad-\frac{1}{18}\,Me^2\frac{x^3}{\varrho^3}\sin 2B_0+Gl_6\,.\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Dabei ist:

$$\varrho^2 = b_0^2 : W_0^4 \qquad (2)$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\mathfrak{a}} = \log\left(-\frac{1}{2}\,\varrho''\,\frac{xy}{\varrho^2}\right)+\frac{1}{12}\,M\,\frac{s^2}{\varrho^2}+Gl_4\,. \qquad (3)$$

Läfst man nun in vorstehenden Formeln die klein gedruckten Glieder weg, so sind die begangenen Fehler für $s\cos\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\,\varDelta\mathfrak{a}\right)$ und $s\sin\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\,\varDelta\mathfrak{a}\right)$ in Äquatorsekunden (vergl. S. 451), sowie für $\varDelta\mathfrak{a}$ in Sekunden bezw. gleich

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{180}\,\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5\sin^2\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2}\,(4\sin^2\alpha_{1.2}+3\cos^2\alpha_{1.2})\\ &\qquad+\frac{1}{36}\,\varrho''\,e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^4\sin^2\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{1.2}\sin 2B_0\,;\\ &+\frac{1}{180}\,\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5\sin\alpha_{1.2}\cos^2\alpha_{1.2}\,(\cos^2\alpha_{1.2}-3\sin^2\alpha_{1.2})\\ &\qquad-\frac{1}{18}\,\varrho''\,e^2\left(\frac{s}{a_0}\right)^4\sin\alpha_{1.2}\cos^3\alpha_{1.2}\sin 2B_0\,;\end{aligned}\right\}\text{ zu (1)}$$

$$-\frac{1}{24}\,\varrho''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{1.2}\,. \qquad \text{zu (3)}$$

Die Maximalwerte dieser Ausdrücke sind zum Teil schon S. 451 angegeben. Man erhält als Maximalwerte der von e^2 unabhängigen Glieder:

$\pm\,1600''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5$ für $\sin^2\alpha_{1.2}=0{,}7$	$\alpha_{1.2}$ im 1. Qu. $=57^0$		zu (1)
$\pm\;\;520''\left(\frac{s}{a_0}\right)^5$ „ $\sin^2\alpha_{1.2}=0{,}7$	„ 57^0		zu (1)
$\pm\,4300''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4$ „ $\tan\alpha_{1.2}=\pm 1$	„ 45^0,		zu (3)

dagegen für die von e^2 abhängigen Glieder:

$\pm\,9{,}5''\left(\frac{s}{a_0}\right)^4$ für $\tan\alpha_{1.2}=\pm 1$	$\alpha_{1.2}$ im 1. Qu. $=45^0$	B_0 beliebig	zu (1)
$\pm\,25\;\left(\frac{s}{a_0}\right)^4$ „ $\tan\alpha_{1.2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	„ 30	$B_0=\pm 45^0$.	zu (1)

Hiernach werden die Maximalfehler für $s : a_0 = 0{,}02$ in den Werten von $s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3} \varDelta \mathfrak{a}\right)$, $s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3} \varDelta \mathfrak{a}\right)$ und $\varDelta \mathfrak{a}$ höchstens bezw.:

$$\pm 0{,}000006'', \ \pm 0{,}000005'' \text{ und } \pm 0{,}0007'';$$

für $s : a_0 = 0{,}05$ dagegen $\pm 0{,}0005''$, $\pm 0{,}0002''$ und $\pm 0{,}027''$.

§ 25. **Zusammenstellung.** Gegeben: B_1, B_2 und $L_{1.2}$.

Gesucht: s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$ bezw. x und y für P_2 in Bezug auf den Meridian von P_1.

$$\left.\begin{array}{l}
\eta'_0 = + \cos B_2 \,.\, \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} \qquad \underset{\text{in Sek.}}{\log \eta'} = \log \eta'_0 - \dfrac{M}{6\varrho''^2} t_0^2 + \cdots \\[2ex]
t_0 = - \sin B_2 \,.\, \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} \qquad \underset{\text{in Sek.}}{\log t} = \log t_0 + \dfrac{M}{3\varrho''^2} \eta_0'^2 + \cdots \\[2ex]
\log \dfrac{M}{6\varrho''^2} = 5{,}230783 - 10 \quad \log \dfrac{M}{3\varrho''^2} = 5{,}531813 - 10, \\
\text{beide für Einh. der 7. Dec.;} \\[2ex]
\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = \log \dfrac{-\eta'_0 t_0 W_2^2}{2(1-e^2)\varrho''} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{M}{6\varrho''^2} t_0^2 + \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{M}{3\varrho''^2} \eta_0'^2 + \cdots \\
W_2 \text{ zum Argument } B_2 \\[2ex]
\log \dfrac{-1}{2(1-e^2)\varrho''} = 4{,}3874532.3_n - 10
\end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\log x = \log \left(\dfrac{\varrho_m (B_1 - F) \text{ in Sek.}}{\varrho''}\right) + \dfrac{Me^2}{8\varrho''^2} \left(\dfrac{\cdot}{\cdot}\right)^2 \cos (B_1 + F) + \cdots \\[2ex]
\dfrac{\varrho_m}{\varrho''} = \dfrac{a_0 (1 - e^2)}{\varrho'' W_m^3} = [1{,}4873099.71]\, W_m^3; \quad W_m \text{ Arg. } \frac{1}{2}(B_1 + F) \\[2ex]
\log \dfrac{Me^2}{8\varrho''^2} = 2{,}930 - 10 \text{ für Einh. der 7. Dec.}
\end{array}\right\} (2)$$

$$y = \varrho_n \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{\varrho''} = \frac{a_0}{\varrho''} \cdot \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{W_2} = \frac{\eta' \text{ in Sek.}}{W_2} [1{,}4902183.30] \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\log \left\{s \cos \left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3} \varDelta \mathfrak{a}\right)\right\} = \log x - \dfrac{1}{6} \dfrac{M}{b_0^2} y^2 W_0^4 + \cdots \\[2ex]
\log \left\{s \sin \left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3} \varDelta \mathfrak{a}\right)\right\} = \log y + \cdots \\[2ex]
\underset{\text{in Sek.}}{\varDelta \mathfrak{a}} = - \dfrac{1}{2} \dfrac{\varrho''}{b_0^2} xy W_0^4 + \cdots \\[2ex]
\log \left(-\dfrac{1}{2} \dfrac{\varrho''}{b_0^2}\right) = 1{,}407017_n - 10 \qquad W_0 \text{ zum Argument } F + \frac{1}{3}(B_1 - F) \\[2ex]
\log \left(\dfrac{1}{6} \dfrac{M}{b_0^2}\right) = 2{,}25325 \quad - 10 \qquad \text{für Einh. der 7. Dec.}
\end{array}\right\} (4)$$

$$\alpha_{2.1} = \alpha_{1.2} + 180^0 + \Delta \mathfrak{a} + t. \qquad (5)$$

Diese Formeln reichen zur schärfsten Rechnung aus, so lange $s : a_0 \leqq 0{,}02$ und zugleich $L_{1.2} \leqq 1{,}2^0$ ist. Für Spezielleres in Bezug auf die Genauigkeit sind die beiden letzten Paragraphen zu vergleichen.

Kreis der Anwendung der Formeln. Aufser vereinzelten Anwendungen erlangen z. B. bei der preufsischen Landesvermessung die Formeln dieses Paragraphen (oder doch ähnliche) eine gröfsere Verwendung, sobald es gilt, einen kleineren Landesteil auf ein besonderes rechtwinkliges Koordinatensystem zu beziehen. Einer der Punkte, etwa P_1 mit B_1 als geographische Breite, wird dann als Koordinatenanfang genommen und aus der relativen geographischen Lage der anderen Punkte zu P_1 auf ihre Koordinaten geschlossen. (Vergl. S. 420.)

Die Aufgabe dieses Paragraphen und des § 17 S. 447 ist auf wesentlich andere Art mit Hilfe des vertikalen Schnittes namentlich von *Hansen* gelöst worden (vergl. die Bem. S. 265). Die betreffenden Formeln finden sich in § 53 und zum Teil in § 52 S. 70 u. ff. seiner *Geodätischen Untersuchungen.* Es scheint uns nun nicht zweifelhaft, namentlich auf Grund einer Berechnung des von *Hansen* § 70 S. 91 gegebenen Zahlenbeispiels, dafs die oben entwickelten Formeln den *Hansen*schen vorzuziehen sind. Zur eventuellen Vergleichung berechnen auch wir in den folgenden Paragraphen dieses Beispiel.

Oudemans bespricht in *Astronom. Nachr.* Bd. 81 Nr. 1940 S. 305 u. ff. zahlreiche ältere und unzureichende Formeln zur Lösung der Aufgabe, aus geographischen Koordinaten Entfernung und Azimute zu bestimmen. Schliefslich bleibt er bei einer Umformung der obenerwähnten *Hansen*schen Formeln stehen, welche Umformung aber die Reihenentwicklung gröfstenteils unter Anwendung der auch von uns S. 32 erwähnten Berechnungsformeln der sin und tan kleiner Winkel mittelst arc und sec vermeidet. Diese Formeln scheinen in der That recht bequem zu sein, nur ist ihr Genauigkeitsgrad vom Verfasser nicht völlig festgestellt und es besteht der Übelstand, dafs eine der Formeln (es ist diejenige für die Entfernung) für kleine Azimute versagt (wegen des Nenners sin *Azimut*), sodafs der Formelapparat hier vor der Anwendung einer Verbesserung bedarf.

Wenn es sich aber nur um Entfernung und Azimute handelt, möchten wir jedenfalls die Formeln S. 313 allen anderen vorziehen.

Modifikationen obiger Formeln für noch kleinere Distanzen siehe bei *Zachariae* a. a. O. S. 218 und *Jordan* a. a. O. Bd. 2 S. 291 u. ff.

§ 26. **Zahlenbeispiel VI.** Vergl. *Hansen*, Geodätische Untersuchungen S. 47 und 91 (§ 37 u. 70).

$$\text{Gegeben: } B_1 = 20^0 \quad s = \frac{2^0}{\varrho^0} a_0 \quad \alpha_{1.2} = 30^0.$$

Wir wenden die Formeln von S. 456 an und benutzen 7ziffrige Logarithmen mit Ansatz der 8. Stelle aus den Proportionalteilen,

sodafs die Genauigkeit jener Formeln, obgleich s verhältnismäfsig grofs ist, völlig genügt. (Es würden in dieser Hinsicht auch noch 8 genaue Ziffern angewandt werden können.)

Man hat zunächst für die Umwandlung von s in Metern, sowie für u und v nach den *Formeln* (1) S. 456:

$$\begin{cases}\log 2a_0 = 7{,}1056734.6\\ \log \varrho^0 \;= 1{,}7581226.3\end{cases}$$
$$\log s = 5{,}3475508.3$$

$$\log \sin \alpha_{1.2} = 9{,}6989700 - 10$$
$$\log \cos \alpha_{1.2} = 9{,}9375306 - 10$$

$$\log u = 5{,}2850814.3 \qquad \log v = 5{,}0465208.3\,.$$

In 1. Annäherung ist hiermit

$$F - B_1 = [6{,}732_n + 5{,}285 - 10] = -\,104{,}0',$$

sodafs sich findet $B_0 = 20^0 - 1^0\,9' = 18^0\,51'$ mit $\log W_0 = 9{,}999849 - 10$ und $\log W_0^4 = 9{,}99940 - 10$. Man hat jetzt:

$$\begin{cases}\log u = 5{,}2850814.3\\ +\,[2{,}55428 - 10]\,v^2 W_0^4 = +\quad 443.3\end{cases}$$
$$\log x = 5{,}2851257.6$$

$$\begin{cases}\log v = 5{,}0465208.3\\ -\,[2{,}25325 - 10]\,u^2 W_0^4 = -\quad 665.0\end{cases}$$
$$\log y = 5{,}0464543.3$$

$$\begin{cases}1{,}40702_n - 10\\ \log (xy) = 10{,}33158\\ \log W_0^4 = \;9{,}99940 - 10\end{cases}$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta \mathfrak{a}} = 1{,}73800_n;\; \varDelta \mathfrak{a} = -\,54{,}702''.$$

Formel (2) S. 456 giebt nunmehr:

In 1. Annäherung ist das Argument für W_m gleich $20^0 - 52' = 19^0 8'$, womit $3 \log W_m$ gebildet ist, dessen Zuwachs für $1' - 7.86$ beträgt.

$$\begin{cases}\log x = 5{,}2851257.6\\ \qquad 8{,}5126900.3 - 10\\ 3 \log W_m = 9{,}9995327.3 - 10\end{cases}$$

$\frac{1}{2}(B_1 - F)$ wird genauer gleich $\frac{1}{2}$ [3,79735] Sek. oder 52,26′ und also der Zuwachs zu $3 \log W_m$ gleich $+ 7.86 \times 0{,}26$. $B_1 + F = 38^0\,15'$.

$$\begin{cases}\log \left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = 3{,}7973485.2\\ -[2{,}930 - 10]\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2 \cos(B_1 + F) = \qquad -\,2.6\\ \text{Zuwachs zu } 3 \log W_m = \qquad +\,2.0\end{cases}$$
$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = 3{,}7973484.6$$

$$B_1 - F = 1^0\,44'\,31{,}168'' \qquad F = 18^0\,15'\,28{,}832''.$$

Die *Formeln* (3) und (4*) S. 457 geben:

$$\left\{\begin{aligned} & 8{,}5097816.7 - 10 \\ \log y &= 5{,}0464543.3 \\ \log W_F &= 9{,}9998577.0 - 10 \end{aligned}\right.$$

Änderung von log W_F für 1′ gleich — 2.51.

$$\left\{\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\log \eta} &= 3{,}5560937.0 \\ \log \cos F &= 9{,}9775660.2 - 10 \\ \log \tan F &= 9{,}5183896.5 - 10 \end{aligned}\right.$$

$$\log L_0 = 3{,}5785276.8$$
$$\log t_0 = 3{,}0744833.5_n$$

$$\left\{\begin{aligned} \log L_0 &= 3{,}5785276.8 \\ -[5{,}53181 - 10]\, t_0^2 &= - \quad 48.0 \\ +[4{,}271 - 20]\, t_0^4 &= \quad 0.0 \\ +[4{,}204 - 20]\, t_0^2 L_0^2 &= \quad 0.0 \end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log L_{1.2}} = 3{,}5785228.8$$

$$L_{1.2} = 1^0\, 3'\, 8{,}985''$$

$$\left\{\begin{aligned} \log t_0 &= 3{,}0744833.5_n \\ -\tfrac{1}{2} \times 48{,}0 &= - \quad 24.0 \\ -[5{,}23078 - 10]\, L_{1.2}^2 &= - \quad 244.3 \end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log t} = 3{,}0744565.2_n$$

$$\left\{\begin{aligned} t &= - \quad 19'\, 47{,}016'' \\ \varDelta \mathfrak{a} &= - \quad 54{,}702 \\ \alpha_{2.1} &= 30 \quad 0 \quad 0 \end{aligned}\right.$$

$$\alpha_{2.1} = 209^0\, 39'\, 18{,}282''.$$

Anstatt W_F ist eigentlich das Argument $F + \frac{3}{4}(B_2 - F)$ anzuwenden. Die Änderung von 2 log W für — 0,13′ ist aber verschwindend.

$$\left\{\begin{aligned} & 4{,}38745 - 10 \\ \log \eta &= 3{,}55609 \\ \log t_0 &= 3{,}07448_n \\ 2 \log W_F &= 9{,}99972 - 10 \\ -\tfrac{1}{2} \times 48.0 &= \quad 0 \\ -\tfrac{1}{2} \times 244.3 &= \quad -1 \end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log (B_2 - F)} = 1{,}01773_n$$

$$B_2 - F = -\, 10{,}417'' \qquad B_2 = 18^0\, 15'\, 18{,}415''.$$

Resultate:						*Hansen* a. a. O. S. 48:
	$B_2 =$	18^0	$15'$	$18{,}415''$		$18{,}417''$
	$L_{1.2} =$	1	3	8,985		8,983
	$\alpha_{2.1} =$	209	39	18,282		18,279.

§ 27. Zahlenbeispiel VI. Umkehrung der Aufgabe des vorigen Paragraphen.

Gegeben: $B_1 = 20^0 \quad B_2 = 18^0\,15'\,18{,}415'' \quad L_{1.2} = 1^0\,13'\,8{,}985''$.

Die *Formeln* des § 25 S. 463 geben nach und nach die folgenden Werte, indem $L_{1.2} = 3788{,}985''$ ist:

$$\begin{cases} \log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = 3{,}5785228.8 \\ \log \cos B_2 = 9{,}9775732.9 - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log \eta'_0 = 3{,}5560961.7 \\ -[5{,}23078 - 10]\, t_0^2 = - \quad 24.0 \end{cases}$$

Argument für $\log W_2 = 18^0\,15{,}307'$

$$\begin{cases} \log \underset{\text{in Sek.}}{\eta'} = 3{,}5560937.7 \\ -\log W_2 = 0{,}0001422.6 \\ \qquad 1{,}4902183.3 \end{cases}$$

$$\log y = 5{,}0464543.6$$

$$\begin{cases} \log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} \quad 3{,}5785228.8 \\ \log \sin B_2 = 9{,}4958890.8 - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log t_0 = 3{,}0744119.6_n \\ +[5{,}53181 - 10]\, \eta_0'^2 = + \quad 440.6 \end{cases}$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = 3{,}0744560.2_n$$

$$t = -\,19'\,47{,}015''.$$

$$\begin{cases} \qquad 4{,}38745_n - 10 \\ \log \eta'_0 = 3{,}55610 \\ \log t_0 = 3{,}07441 \\ 2 \log W_2 = 9{,}99972 - 10 \\ -\frac{1}{2} \times 24.0 = \quad 0 \\ +\frac{5}{4} \times 440.6 = + \quad 6 \end{cases}$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = 1{,}01774.$$

$$F - B_2 = \quad + \quad 10{,}417''$$
$$F = 18^0\,15' \quad 28{,}832''$$
$$B_1 - F = 1^0\,44' \quad 31{,}168''$$
$$= \quad 6271{,}168''$$

Die Formel (2) S. 463 giebt:

$$\begin{cases} \qquad 1{,}4873099.7 \\ \log \underset{\text{in Sek.}}{(B_1 - F)} = 3{,}7973484.6 \\ -3 \log W_m = 0{,}0004670.7 \\ +[2{,}930 - 10](B_1 - F)^2 \cos (B_1 + F) = + \quad 2.6 \end{cases}$$

Argument $\frac{1}{2}(B_1 + F)$ für $\log W_m = 19^0\,7{,}740'$. $B_1 + F = 38^0\,15$.

$$\log x = 5{,}2851257.6$$

Die Formeln (4) u. (5) S. 463 u. 464 geben mit $\log W_0 = 9{,}999849 - 10$, dieses entsprechend dem Argument $B_0 = 18^0\ 51'$:

$$\begin{cases} & \log x = 5{,}2851257.6 \\ -[2{,}25325 - 10]\, y^2 W_0^4 = - & 221.6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log\left\{s \cos\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\} = 5{,}2851036.0 \\ \log\left\{s \sin\left(\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a}\right)\right\} = 5{,}0464543.6 \end{cases}$$

$$\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\Delta\mathfrak{a} = 29^0 59' 41{,}780''$$

$$\log s = 5{,}3475508.3$$

$$\begin{cases} & 1{,}40702_n - 10 \\ \log(xy) = & 10{,}33158 \\ 4 \log W_0 = & 9{,}99940 \quad -10 \end{cases}$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = 1{,}73800$$

$$\begin{cases} \Delta\mathfrak{a} = - & 54{,}702'' \\ t = - & 19' 47{,}015'' \\ \alpha_{1.2} = & 30^0\ 0'\ 0{,}014'' \end{cases}$$

$$\alpha_{2.1} = 209^0 39' 18{,}297''.$$

Resultate:		nach vorigem Paragraphen:	nach *Hansen* S. 92 a. a. O.:
	$\log x = 5{,}2851257.6$	7.6	s / a_0 um 0,004' gröfser
	$\log y = 5{,}0464543.6$	3.3	als 2°, macht
	$\log s = 5{,}3475508.3$	8.3	2.5 im Logar. mehr.
	$\alpha_{1.2} = 30^0\ 0'\ 0{,}014''$	0,000"	— 0,020"
	$\alpha_{2.1} = 209\ 39\ 18{,}297''$	18,282	18,256.

§ 28. **Zahlenbeispiel VII.** $B_1 = 51^0\ 48'\ 1{,}9294''$

$$\log s = 5{,}0252128.6 \qquad \alpha_{1.2} = 5^0\ 42'\ 21{,}7699''$$

für die Dreiecksseite Brocken-Inselsberg der hannoverischen Vermessung nach *Gaufs, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 2. Abth.*, S. 33.

Zu den *Formeln* (1) und (2) S. 456 hat man bei Anwendung 7ziffriger Logarithmen:

$$\log \sin \alpha_{1.2} = 8{,}9974945.7 - 10 \qquad \log \cos \alpha_{1.2} = 9{,}9978427.5 - 10$$

$$\log v = 4{,}0227074.3 \qquad \log u = 5{,}0230556.1$$

$$F - B_1 = [6{,}732_n - 10 + 5{,}023] = -56{,}8'$$

$\log W_0$ wird mit dem Argument $B_0 = 51^0\ 48' - \frac{2}{3} \cdot 57'$ d. i. $51^0\ 10'$ gleich $9{,}999119 - 10$ und $\log W_0^4 = 9{,}99648 - 10$.

Hiermit folgt:

$$\begin{cases} & \log u = 5{,}0230556.1 \\ +[2{,}5543 - 10]\, v^2 W_0^4 = + & 4.0 \end{cases}$$

$$\log x = 5{,}0230560.1$$

$$\begin{cases} & \log v = 4{,}0227074.3 \\ -[2{,}2533]\, u^2 W_0^4 = - & 197.6 \end{cases}$$

$$\log y = 4{,}0226876.7$$

$$\left\{\begin{array}{rl} & 1{,}40702_n - 10 \\ \log(xy) &= 9{,}04574 \\ 4\log W_0 &= 9{,}99648 \ - 10 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log \Delta\mathfrak{a}} = 0{,}44924_n;\ \Delta\mathfrak{a} = -2{,}8135''.$$

Formel (2) S. 456 giebt nunmehr:

In 1. Annäherung ist das Argument für W_m gleich

$51^0\,48{,}03' - 28' = 51^0\,20'$

womit $3\log W_m$ gebildet wurde dessen Zuwachs für $1' = -12.39$ ist.

$\frac{1}{2}(B_1 - F)$ wird genauer gleich $\frac{1}{2}$ [3,53309] Sek. d. i. 28,44', also das Argument gleich 51° 19,59'.

$B_1 + F = 102^0\,39'$.

$$\left\{\begin{array}{rl} \log x &= 5{,}0230560.1 \\ & 8{,}5126900.3-10 \\ 3\log W_m &= 9{,}9973438.9-10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) &= 3{,}5330899.3 \\ -[2{,}930-10]\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2\cos(B_1+F) &= + \quad 0.2 \\ \text{Zuwachs zu } 3\log W_m \text{ für } -0{,}41' &= + \quad 5.1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log(B_1 - F)} = 3{,}5330904.6$$

$$B_1 - F = 56'\,52{,}6398'' \qquad F = 50^0\,51'\,9{,}2896''.$$

Die *Formeln* (3) und (4*) S. 457 geben:

$$\left\{\begin{array}{rl} & 8{,}5097816.7 - 10 \\ \log y &= 4{,}0226876.7 \\ \log W_F &= 9{,}9991265.7 - 10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \underset{\text{in Sek.}}{\log \eta} &= 2{,}5315959.1 \\ \log\cos F &= 9{,}8002480.4 - 10 \\ \log\tan F &= 0{,}0893472.5 - 10 \end{array}\right.$$

Änderung von $\log W_F$ für 1' gleich $-$ 4.0

$$\log L_0 = 2{,}7313478.7$$
$$\log t_0 = 2{,}6209431.6_n$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log L_0 &= 2{,}7313478.7 \\ -[5{,}532-10]\,t_0^2 &= - \quad 5.9 \\ \text{höhere Glieder} &= \quad 0.0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log L_{1.2}} = 2{,}7313472.8$$

$$L_{1.2} = 8'\,58{,}7003''$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log t_0 &= 2{,}6209431.6_n \\ -\frac{1}{2}\times 5.9 &= - \quad 3.0 \\ -[5{,}231-10]L_{1.2}^2 &= - \quad 4.9 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\log t} = 2{,}6209423.7_n$$

$$\left.\begin{array}{rl} t = & -\ 6'\ 57{,}7749'' \\ \Delta\mathfrak{a} = & -\qquad 2{,}8135 \\ \alpha_{1.2} = & 5^0 42\ 21{,}7699 \end{array}\right\}\ \alpha_{2.1} = 185^0 35' 21{,}1815''$$

Da $B_2 - F$ nur Bruchteile Sek. beträgt, so reicht W_F unmittelbar zur Berechnung aus.

$$\left\{\begin{array}{rl} & 4{,}38745\ -10 \\ \log\eta = & 2{,}53160 \\ \log t_0 = & 2{,}62094_n \\ 2\log W_F = & 9{,}99825\ -10 \\ \text{höhere Glieder} = & 0 \end{array}\right.$$

$$\log(B_2 - F)_{\text{in Sek.}} = 9{,}53824_n - 10$$

$$B_2 - F = -\ 0{,}3453'' \qquad B_2 = 50^0\ 51'\ 8{,}9443''.$$

		nach *Gauſs:*
Resultate:	$B_2 = 50^0\ 51'\ 8{,}9443''$	8,9444''
	$L_{1.2} = 0\quad 8\quad 58{,}7003$	58,7002
	$\alpha_{2.1} = 185\quad 35\quad 21{,}1815$	21,1815.

§ 29. **Zahlenbeispiel II.** Beispiel 7 in *Formeln und Tafeln etc. (für Dreiecksseiten 1. Ordnung)* von *O. Schreiber.*

Gegeben: $B_1 = 57^0 \quad s = 120^{km} \quad \alpha_{1.2} = 315^0.$

Wir wenden hier Logarithmen bis zu 9 genauen Decimalstellen an.

Die *Formeln* (1) S. 456 geben:

$$\left\{\begin{array}{rl} \log s = & 5{,}0791812.46 \\ \log\sin\alpha_{1.2} = & 9{,}8494850.02_n - 10 \\ \log\cos\alpha_{1.2} = & 9{,}8494850.02\ \ -10 \end{array}\right. \quad \begin{array}{rl} \log v = & 4{,}9286662.48_n \\ \log u = & 4{,}9286662.48 \end{array}$$

$$F - B_1 = [6{,}732_n - 10 + 4{,}929] = -\ 45{,}8',$$

daher ist

$$B_0 = 57^0 - 30{,}6' = 56^0\ 29{,}4',$$

$$\log W_0 = 9{,}998990 - 10 \text{ und } 4\log W_0 = 9{,}995960 - 10.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log u = & 4{,}9286662.48 \\ +\ [2{,}55428 - 10]\ v^2 W_0^4 = & +\qquad 255.61 \end{array}\right.$$
$$\log x = 4{,}9286918.09$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log v = & 4{,}9286662.48_n \\ -\ [2{,}25325 - 10]\ u^2 W_0^4 = & -\qquad 127.80 \end{array}\right.$$
$$\log y = 4{,}9286534.68_n$$

$$\left\{\begin{array}{r} 1{,}407017_n \\ \log(xy) = 9{,}857345_n \\ 4\log W_0 = 9{,}995960 \quad -10 \end{array}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\mathfrak{a}} = 1{,}260322;\ \Delta\mathfrak{a} = 18{,}2105''.$$

Formel (2) S. 456 giebt nunmehr:

In 1. Annäherung ist das Argument für W_m gleich 57° — 23' = 56° 37', womit 3 log W_m gebildet ist. Zuwachs desselben für 1' gleich — 11.67.

$\frac{1}{2}(B_1 - F)$ wird genauer gleich $\frac{1}{2}$ [3,43834] Sek. d. i. 22,865' und daher der Zuwachs für 3 log W_m gleich — 0,135 × 11,67.

$B_1 + F = 113° 14'$.

$$\left\{\begin{array}{r} \log x = 4{,}9286918.09 \\ 8{,}5126900.29-10 \\ 3\log W_m = 9{,}9969613.57-10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rr} \log\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right) = & 3{,}4383431.95 \\ -[2{,}930-10]\left(\frac{\varrho'' x}{\varrho_m}\right)^2\cos(B_1+F) = + & 0.25 \\ \text{Zuwachs für } 3\log W_m - 0{,}135 \times 11{,}67 = - & 1.57 \end{array}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_1)} = 3{,}4383430.63$$

$$F - B_1 = 45'\ 43{,}74068'' \qquad F = 56^0\ 14'\ 16{,}25932''$$

Die *Formeln* (3) und (4*) S. 457 geben:

$$\left\{\begin{array}{r} 8{,}5097816.70 \quad -10 \\ \log y = 4{,}9286534.68_n \\ \log W_F = 9{,}9989959.90 \quad -10 \end{array}\right.$$

Änderung von log W_F für 1' gleich — 3,92.

$$\left\{\begin{array}{r} \log \underset{\text{in Sek.}}{\eta} = 3{,}4374311.28_n \\ \log\cos F = 9{,}7448767.69 \quad -10 \\ \log\tan F = 0{,}1749080.61 \end{array}\right.$$

$$\log L_0 = 3{,}6925543.59_n$$
$$\log t_0 = 3{,}6123391.89$$

$$\left\{\begin{array}{rr} \log L_0 = & 3{,}6925543.59_n \\ -[5{,}531813-10]\,t_0^2 = - & 570.80 \\ +[4{,}271-20]\,t_0^4 = + & 0.05 \\ +[4{,}204-20]\,t_0^2 L_0^2 = + & 0.07 \end{array}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{L_{1.2}} = 3{,}6924972.91_n$$

$$L_{1.2} = -1^0\ 22'\ 6{,}03270''$$

$$\left\{\begin{array}{rr} \log t_0 = & 3{,}6123391.89 \\ -\frac{1}{2}\times 570.80 = - & 285.40 \\ -[5{,}23078-10]\,L_{1.2}^2 = - & 412.84 \end{array}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = 3{,}6122693.65$$

$$\left\{\begin{array}{rl} t = & 1^0\,8'\,15{,}1458'' \\ \Delta\mathfrak{a} = & 18{,}2105 \\ \alpha_{1.2} = & 315\;\;0\;\;0 \end{array}\right.$$

$$\alpha_{2.1} = 136\;\;8\;\;33{,}3563''$$

$$\left\{\begin{array}{rl} & 4{,}3874532.3 - 10 \\ \log\eta = & 3{,}4374311.3_n \\ \log t_0 = & 3{,}6123391.9 \\ 2\log W_F = & 9{,}9979919.8 - 10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log(B_2 - F) \text{ in 1. Ann.} = & 1{,}4352155.3_n \\ \text{Zuwachs für } 2\log W = + & 2.7 \\ -[5{,}23078-10]\,t^2 = - & 285.4 \\ -\frac{1}{2}[5{,}23078-10]\,L_0^2 = - & 206.5 \end{array}\right.$$

$$\log\underset{\text{in Sek.}}{(B_2 - F)} = 1{,}4351666.1_n$$

$B_2 - F = -27{,}24 = -0{,}454$ daher ist $\frac{3}{4}(B_2 - F) = -0{,}34$, womit sich als Zuwachs von $2\log W_F$ ergiebt

$$2 \times 0{,}34 \times 3{,}92.$$

$$B_2 - F = -27{,}23746''$$

$$B_2 = 56^0\,13'\,49{,}02186''.$$

Resultate:		nach S. 304	nach *Schreiber*, a. a. O. S. 12.
$B_2 =$	$56^0\;13'\;49{,}02186''$	49,02182''	49,0218''
$L_{1.2} =$	$1\;\;22\;\;6{,}03270$ östlich	6,03263	6,0327
$\alpha_{2.1} =$	$136\;\;8\;\;33{,}3563$	33,3566	33,355.

Die Resultate von S. 304 sind in der 5. Decimale nicht mehr sicher.

§ 30. **Fortsetzung des Zahlenbeispiels II.** Umkehrung der vorigen Aufgabe.

Gegeben:

$B_1 = 57^0 \qquad B_2 = 56^0\,13'\,49{,}02186'' \qquad L_{1.2} = 1^0\,22'\,6{,}03270''$ östlich.

Die *Formeln* (1) und (3) S. 463 geben, indem $L_{1.2} = -4926{,}03270''$ ist:

$$\left\{\begin{array}{rl} \log L_{1.2} = & 3{,}6924972.91_n \\ \log\cos B_2 = & 9{,}7449625.47 - 10 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\eta'_0 = & 3{,}4374598.38_n \\ -[5{,}230783 - 10]\,t_0^2 = - & 285.28 \end{array}\right.$$

Argument für $W_2 = 56^0\,13{,}8170'$

$$\left\{\begin{array}{rl} \log\underset{\text{in Sek.}}{\eta'} = & 3{,}4374313.10_n \\ -\log W_2 = & 0{,}0010038.30 \\ & 1{,}4902183.30 \end{array}\right.$$

$$\log y = 4{,}9286534.70_n$$

$$\left\{\begin{array}{l}\log L_{1.2} = 3{,}6924972.91_n \\ \log \sin B_2 = 9{,}9197464.88 - 10\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r}\log t_0 = 3{,}6122437.79 \\ +\,[5{,}531813-10]\,\eta_0'^2 = +\quad 255.51\end{array}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{t} = 3{,}6122693.30$$

$$t = 1^0\ 8'\ 15{,}1454''$$

$$\left\{\begin{array}{r}\log \eta_0' = 3{,}4374598.4_n \\ \log t_0 = 3{,}6122437.8 \\ 2\log W_2 = 9{,}9979923.4 - 10 \\ 4{,}3874532.3_n - 10 \\ -\frac{1}{2} \times 285.28 = -\quad 142.6 \\ +\frac{5}{4}\times 255.51 = +\quad 319.4\end{array}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{(F - B_2)} = 1{,}4351668.7$$

$$F - B_2 = +\quad 27{,}23748''$$

$$F = 56^0\ 14'\ 16{,}25934''$$

$$B_1 - F = +\ 45'\ 43{,}74066''$$

$$= +\ 2743{,}74066''.$$

Die *Formel* (2) S. 463 giebt ferner:

$$\left\{\begin{array}{r}1{,}4873099.71 \\ \log(B_1 - F) = 3{,}4383430.59 \\ -\,3\log W_m = 0{,}0030388.00 \\ +\,[2{,}930-10](B_1-F)^2\cos(B_1+F) = -\quad 0.25\end{array}\right.$$

$$\log x = 4{,}9286918.05$$

Argument $\frac{1}{2}(B_1+F)$ für $\log W_m$ $= 56^0\ 37{,}1355'$.

$B_1 + F = 113^0\ 14'$.

Die *Formeln* (4) und (5) S. 463 u. 464 geben endlich mit

$$\log W_0 \doteq 9{,}998990 - 10,$$

dieses entsprechend dem Argument $B_0 = 56^0\ 29{,}5'$:

$$\log x = 4{,}9286918.05$$

$$-\,[2{,}25325 - 10]\,y^2 W_0^4 = -\quad 127.80$$

$$\log\left\{s\cos\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)\right\} = 4{,}9286790.25$$

$$\log\left\{s\sin\left(\alpha_{1.2}+\frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a}\right)\right\} = 4{,}9286534.70_n$$

$$\alpha_{1.2} + \frac{1}{3}\varDelta\mathfrak{a} = 315^0\ 0'\ 6{,}0686''$$

$$\log s = 5{,}0791812.46$$

$$\left\{\begin{array}{r}1{,}407017_n - 10 \\ \log(xy) = 9{,}857345_n \\ 4\log W_0 = 9{,}995960 - 10\end{array}\right.$$

$$\log \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\mathfrak{a}} = 1{,}260322$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varDelta\mathfrak{a} = \qquad 18{,}2105'' \\ t = \quad 1^0\ \ 8'\ 15{,}1454'' \\ \alpha_{1.2} = 314\ \ 59\ \ 59{,}9984\end{array}\right.$$

$$\alpha_{2.1} = 136^0\ \ 8'\ 33{,}3543''$$

		nach vorigem Paragraphen:
Resultate:	$\log x = 4{,}9286918.05$	.09
	$\log y = 4{,}9286534.70_n$	.68 n
	$\log s = 5{,}0791812.46$	.46
	$\alpha_{1.2} = 314^0\,59'\,59{,}9984''$	60,0000''
	$\alpha_{2.1} = 136\quad 8\ 33{,}3543\,.$	33,3563.

---

10. Kapitel.

Berechnung kleiner Figuren auf dem Rotationsellipsoid mittelst Projektion auf eine Ebene.

§ 1. Verschiedene Umformungen der Formeln für rechtwinklige sphärische Koordinaten. Schon S. 420 ist angedeutet worden, dafs man bei der Vermessung eines ausgedehnten Landes, wie z. B. Preufsens, genötigt ist, auf eine gröfsere Anzahl besonderer Abscissenaxen überzugehen, um mit bequemen Formeln rechnen zu können. Insoweit es sich um die Berechnung von Koordinaten aus Entfernungen und Richtungswinkeln handelt, ist das Formelsystem

$$\left.\begin{array}{l|l} v = s \sin \alpha_{1.2} & y_2 - y_1 = v - \left(y_1 + \frac{v}{3}\right)\frac{u^2}{2\varrho^2} + \varrho\, Gl_5 \\ u = s \cos \alpha_{1.2} & x_2 - x_1 = u\left(1 + \frac{y_2^{\,2}}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2} + Gl_4\right) \\ \multicolumn{2}{c}{\varrho^2 = \frac{a_1^{\,2}}{K_0} = \frac{b_0^{\,2}}{W_0^{\,4}}} \end{array}\right\} \quad (1)$$

völlig zureichend, so lange die Entfernungen und Ordinaten kleiner als 100^{km} bleiben und derjenige Punkt der Abscissenaxe, für welchen ϱ genommen wird, innerhalb 10 Minuten in geographischer Breite oder 20^{km} dem Argument $x_1 + \frac{1}{2}u$ entspricht. Denn alsdann ist der Einflufs der vernachlässigten Glieder noch nicht 1^{mm}.

In der 2. Formel (1) ist u als Faktor gezogen, um die nachfolgende Verwendung zu erleichtern. Da $x_2 - x_1$ mit u verschwindet, ist dieses Verfahren zulässig. (Dasselbe zeigt sich S. 414 u. ff. bei der Entwicklung der allgemeinen Formeln.)

Eine Modifikation der Formeln (1), welche *Zachariae* und andere benutzen, ist S. 121 bereits erwähnt. Sie berücksichtigt die Glieder

3. Ordnung zum Teil durch kleine Reduktionen an $\mathfrak{a}_{1.2}$ und s, die aber in beiden Formeln *verschieden* sind:

$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= s \sin\left(\mathfrak{a}_{1.2} - (E + \varepsilon)\right) + \varrho\, Gl_5 \\ x_2 - x_1 &= s \cos\left(\mathfrak{a}_{1.2} - 2\,(E + \varepsilon)\right).\left(1 + \frac{y_1^2}{2\varrho^2}\right) + \varrho\, Gl_5 \\ E &= \frac{1}{2}\varrho'' \frac{u y_1}{\varrho^2} \qquad \varepsilon = \frac{1}{6}\varrho'' \frac{uv}{\varrho^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Diese Modifikation verdankt ihren Ursprung wohl mehr der Art der Herleitung als der Absicht, die Unbequemlichkeiten der Formeln (1) zu vermindern.

Diese Absicht kann einer ersten Idee nach vielleicht eher erreicht werden, indem man setzt:

$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (s + \delta_s) \sin (\mathfrak{a}_{1.2} + \delta_\mathfrak{a}) + \cdots \\ x_2 - x_1 &= (s + \delta_s) \cos (\mathfrak{a}_{1.2} + \delta_\mathfrak{a}) + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

mithin s und $\mathfrak{a}_{1.2}$ um gleiche Beträge in beiden Formeln ändert. $s + \delta_s$ ist nichts anderes, als die Entfernung zweier Punkte in einer Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2; $\mathfrak{a}_{1.2} + \delta_\mathfrak{a}$ ist der zugehörige Richtungswinkel. Ohne Zweifel sind δ_s und $\delta_\mathfrak{a}$ Funktionen der Koordinaten der Punkte.

Wenn diese Funktionen einfach genug sind, würde sich nun nicht blofs der Vorteil ergeben, nach den Formeln (3), also mittelst ebener Polygonometrie die genauen Werte der Koordinatendifferenzen rechnen zu können, sondern überhaupt auch alle Figuren zwischen den Netzpunkten, insbesondere bei der Einschaltung von Netzpunkten in das Hauptnetz, einfach nach den Formeln der ebenen Geometrie behandeln zu können, nachdem die Horizontalwinkel angemessen korrigiert sind. Da jeder Richtungswinkel $\mathfrak{a}$ die Verbesserung $\delta_\mathfrak{a}$ erhalten mufs, so ist diejenige eines Horizontalwinkels die Differenz der $\delta_\mathfrak{a}$ für beide Richtungen seiner Schenkel: $\delta_\mathfrak{a}$ rechts — $\delta_\mathfrak{a}$ links. δ_s kommt nur insoweit in frage, als eine *ebene* Entfernung $s + \delta_s$ mit der wahren zu vergleichen ist — nicht aber bei der Koordinatenberechnung, da diese sich auf die *ebene* Dreiecksberechnung, welche mittelst der reduzierten Winkel die $s + \delta_s$ unmittelbar giebt, stützen wird.

Die Anwendung der Formeln (3) selbst ist jedoch nicht zweckmäfsig, weil δ_s und $\delta_\mathfrak{a}$ unbequeme Ausdrücke erhalten. Man kann aber alle geschilderten Vorteile erreichen und diese Ausdrücke vereinfachen, wenn man eine der Koordinaten x oder y mit einem passenden Faktor multipliziert, ehe man sie als ebene Koordinaten betrachtet. Es ist leicht zu sehen, dafs es gut ist, x als im Meridian liegend, un-

geändert zu lassen. Der schickliche Faktor von y wird nun voraussichtlich von 1 nur um eine Gröfse 2. Ordnung abweichen. Wir setzen ihn versuchsweise gleich

$$1 + \frac{cy^2}{\varrho^2}, \tag{4}$$

wo c eine vorläufig unbekannte Konstante bedeutet. Bezeichnen wir ferner mit s' die ebene Entfernung $s + \delta_s$

„ $\mathfrak{a}'_{1.2}$ den ebenen Richtungswinkel $\mathfrak{a}_{1.2} + \delta_\mathfrak{a}$ (5)

„ x' und y' die ebenen Koordinaten,

so ist

$$\left.\begin{aligned} y'_2 - y'_1 &= y_2\left(1 + \frac{cy_2^2}{\varrho^2}\right) - y_1\left(1 + \frac{cy_1^2}{\varrho^2}\right) = s' \sin \mathfrak{a}'_{1.2} \\ x'_2 - x'_1 &= x_2 - x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = s' \cos \mathfrak{a}'_{1.2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf die Formeln (1) folgt hieraus ohne Schwierigkeit:

$$s' \sin \mathfrak{a}'_{1.2} = v\left(1 + c\,\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{\varrho^2}\right) - \left(y_1 + \frac{v}{3}\right)\frac{u^2}{2\varrho^2} + \varrho\, Gl_5$$

$$s' \cos \mathfrak{a}'_{1.2} = u\left(1 + \frac{y_2^2}{2\varrho^2} - \frac{v^2}{6\varrho^2} + Gl_4\right).$$

Die Division der linken und rechten Seiten giebt, wenn man rechts für den in den Nenner tretenden Faktor von u im Zähler den Faktor

$$1 - \frac{y_2^2}{2\varrho^2} + \frac{v^2}{6\varrho^2} + Gl_4$$

einführt und zugleich auch $u^2 = s^2 - v^2 + Gl_4$ und $v^2 = (y_2 - y_1)^2 + Gl_4$ setzt:

$$\tan \mathfrak{a}'_{1.2} = \frac{1}{u}\left\{v\left[1 + \left(c - \frac{1}{6}\right)\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{\varrho^2}\right] - \frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{1}{3}v\right)\frac{s^2}{\varrho^2} + \varrho\, Gl_5\right\}.$$

Dies wird besonders einfach für die Annahme

$$c = \frac{1}{6}. \tag{7}$$

Unter dieser Voraussetzung ist mit Rücksicht auf die Relation

$$v : u = \tan \mathfrak{a}_{1.2}$$

sofort:

$$\tan \mathfrak{a}'_{1.2} = \tan \mathfrak{a}_{1.2} - \frac{1}{u}\left\{\frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{1}{3}v\right)\frac{s^2}{\varrho^2} + \varrho\, Gl_5\right\}.$$

Denkt man sich für die Tangenten die Cotangenten der Komplementwinkel geschrieben, so läfst sich unmittelbar die Entwicklung nach *Taylors* Satz S. 30 u. 31 anwenden. Sie giebt:

$$\mathfrak{a}'_{1.2} = \mathfrak{a}_{1.2} - \left\{ \frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{1}{3}v\right)\frac{s^2}{\varrho^2} + \varrho\, Gl_5 \right\} \frac{\cos^2 \mathfrak{a}_{1.2}}{u} \tag{8}$$

und zwar ist diese Entwicklung brauchbar, so lange die 2. Potenz von $\{\,\}\cos \mathfrak{a}_{1.2} : u$ vernachlässigt werden kann. Da $u = s \cos \mathfrak{a}_{1.2}$, so ist dieser Ausdruck eine *kleine* Gröfse 2. Ordnung, deren Quadrat gerade dieselbe Ordnung hat wie die anderen Vernachlässigungen in (8).

Die Formel (8) giebt nach einiger Reduktion, insbesondere Substitution von $u = s \cos \mathfrak{a}_{1.2}$, allgemein gültig innerhalb der eingangs gezogenen Grenzen:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{a}'_{1.2} - \mathfrak{a}_{1.2}} = -\frac{1}{2}\varrho'' \frac{(x_2 - x_1)\left(y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - y_1)\right)}{\varrho^2} + Gl_4, \tag{9}$$

wobei rechter Hand auch die ebenen Koordinaten substituiert werden dürfen. Beachten wir ferner (4), (7) und (6), so findet sich:

$$x' = x \qquad y' = y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho^2}\right) \tag{10}$$

und

$$s'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3\varrho^2} + Gl_4\right). \tag{11}$$

Dagegen ist entsprechend den Formeln (1) nach (1) S. 416:

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2\left(1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3\varrho^2} + Gl_4\right) + (y_2 - y_1)^2. \tag{12}$$

Hieraus folgt durch Subtraktion und in naheliegender Zusammenfassung:

$$s'^2 = s^2\left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3\varrho^2} + Gl_4\right),$$

wobei die vernachlässigten Glieder in die Parenthese genommen werden durften, weil ihre Faktoren $(y_2 - y_1)^2$ und $(x_2 - x_1)^2$ in (8) und (11) echte Bruchteile von s^2 sind. Man kann nun sofort setzen:

$$s' = s\left(1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\varrho^2} + Gl_4\right). \tag{13}$$

Hiermit sind die Relationen entwickelt, welche zwischen den Stücken eines von einer kürzesten Linie, den Ordinaten ihrer Endpunkte und der Abscissenaxe begrenzten Trapezes auf dem Ellipsoid und denjenigen seiner ebenen Übertragung stattfinden.

§ 2. **Ebene Projektionen.** Denkt man sich einen Punkt als Endpunkt verschiedener Linien, so würde nach (10) die ebene Ordinate y' streng genommen je nach der ins Auge gefafsten Linie einen anderen Wert erhalten, weil ϱ^2 sich stets annäherungsweise auf einen inmitten

der Endordinatenfuſspunkte gelegenen Punkt der Abscissenaxe beziehen soll. Indessen wird der Fehler nicht erheblich, wenn man y' nach der Formel

$$y' = y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho_F^2}\right) \tag{1}$$

aus y ermittelt, wobei sich ϱ_F auf den Fuſspunkt der Ordinate y selbst bezieht. Der Fehler ist gleich

$$\frac{1}{6} y^3 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho_F^2}\right) \tag{2}$$

und da $\varrho^2 = b_0^2 : W^4$ ist, hat man hierin zu substituieren:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho_F^2} = \frac{1}{b_0^2}\left((1 - e^2 \sin^2 B_0)^2 - (1 - e^2 \sin^2 B_F)^2\right),$$

wenn B_F die geographische Breite für den Fuſspunkt der Ordinate y ist und B_0 diejenige geographische Breite bezeichnet, welche Formel (10) S. 477 als Argument voraussetzt. Betrachtet man $B_F - B_0$ als ein Differential, so erhält man als einen genügenden Näherungs wert für den letzten Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho_F^2} = \frac{2}{b_0^2} e^2 \sin 2B_0 \,.\, (B_F - B_0),$$

womit der Fehler (2) der Ordinate y' die nachstehende Form annimmt:

$$\frac{1}{3} e^2 \frac{y^3}{b_0^2} \sin 2B_0 \,.\, (B_F - B_0)\,. \tag{3}$$

Setzen wir Seiten und Ordinaten im Maximum gleich 100^{km}, so kann $B_F - B_0$ den Betrag $50 : b_0^{km}$ nicht übersteigen, und es stellt sich als Maximalwert des Ordinatenfehlers nur rund $\frac{1}{2}$ Millimeter heraus.

Dieser unerhebliche lineare Fehler hat auch auf die Azimute einen ganz geringfügigen Einfluſs. Zufolge (3) ist nämlich der Fehler in $y'_2 - y'_1$ gleich

$$\frac{1}{3} e^2 \sin 2B_0 \left(\frac{y_2^3}{b_0^2}(B_2 - B_0) - \frac{y_1^3}{b_0^2}(B_1 - B_0)\right),$$

worin B_2 und B_1 die geographischen Breiten der Fuſspunkte der Ordinaten y_2 und y_1 bezeichnen. Da man aber $B_0 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ zu setzen hat, so reduziert sich vorstehender Ausdruck auf

$$\frac{1}{3} e^2 \sin 2B_0 \frac{y_1^3 + y_2^3}{2b_0^2}(B_2 - B_1)\,.$$

Der Fehler in $\tan \mathfrak{a}'_{1.2}$ ergiebt sich hieraus, indem man für $B_2 - B_1$ den nahezu gleichen Ausdruck $(x_2 - x_1) : b_0$ einführt, gleich

$$\frac{1}{3} e^2 \sin 2B_0 \frac{y_1^3 + y_2^3}{2b_0^3} \tag{4}$$

und dies ist zugleich das Maximum des Fehlers in $\mathfrak{a}_{1.2}$ selbst, als Arcus. Multipliziert mit ϱ'' und $B_0 = 45^0$, $y_1 = y_2 = 100^{km}$ genommen, ergiebt sich als äufserster Fehlerbetrag in Sekunden ausgedrückt noch nicht 0,002″.

Indem wir nun die ebenen Koordinaten zu den geodätischen mittelst der Relationen

$$x' = x \qquad y' = y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho_F^2}\right) \tag{5}$$

in Bezug bringen, erlangen wir eine *ebene Abbildung* (oder Projektion) eines Teiles des Rotationsellipsoids.

Denn man kann sich denken, dafs zu beiden Seiten eines Meridianes alle Punkte bis zu 100^{km} Abstand übertragen werden, ohne Rücksicht auf die besonderen Figuren, zu denen sie vereinigt sind.

Diese ebene Projektion ist innerhalb der angesetzten und zur Anwendung gelangenden Glieder identisch mit der von *Gaufs* zur Berechnung der hannoverischen Landesvermessung (richtiger: Gradmessung, vergl. *O. Schreiber, Theorie der Projektionsmethode der hannoverischen Landesvermessung.* 1866, S. 91) angewandten *conformen* Projektionsmethode. Ebenso wie diese Methode bietet sie nur dann Vorteile, wenn die zu behandelnde Messung sich blofs bis zu geringen Abständen von einem mittleren Meridian (der Abscissenaxe) entfernt, während sie entlang desselben ganz beliebig ausgedehnt sein darf.

Eine Abbildung aber heifst conform, wenn sie dem Original in dem kleinsten Teilen ähnlich ist. Unendlich kleine Rechtecke des Originals müssen daher in der Abbildung nicht nur wieder Rechtecke, sondern auch zum Original ähnliche Rechtecke sein. Wenn wir wie im vorigen Paragraphen uns zuerst die Ordinaten y einfach rechtwinklig zur Abscissenaxe in der Ebene aufgetragen denken, so giebt diese Abbildung unendlich kleine, mit einer Seite an y angrenzende Rechtecke wieder als Rechtecke, aber nicht als ähnliche Rechtecke. Nach S. 407 überstreicht nämlich die unendlich kleine Strecke dy, wenn sich der Fufspunkt der Ordinate y um dx verschiebt, ein Rechteck mit den Seiten $\mathfrak{n}dx$ und dy. In derjenigen ebenen Darstellung jedoch, welche die y einfach überträgt, ist das Bild des Rechtecks ein Rechteck mit den Seiten dx und dy.

Dagegen hat in der oben ausführlich behandelten ebenen Darstellung, welche als Ordinate $y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho_F^2}\right)$ annimmt, das Bild sehr nahe die Form eines Rechteckes mit den Seiten dx und $dy\left(1 + \frac{y^2}{2\varrho_F^2}\right)$, also dem Seitenverhältnis $\mathfrak{n}dx : dy$.

Die Abweichung von der rechteckigen Gestalt erkennt man daraus, dafs einem konstanten y bei veränderlichem x ein schwachveränderliches y' entspricht, weil ϱ^2 Funktion von x ist. Sie beträgt in Sekunden

$$\frac{1}{3}\,\varrho'' e^2 \sin 2B\,\frac{y^3}{b_0^{\,3}}, \tag{6}$$

wie eine, mit der auf S. 478 geführten Rechnung ziemlich identische Rechnung zeigt [vergl. insbesondere Formel (4)]. B bezieht sich hierbei auf den Ordinatenfufspunkt. Das Maximum des Ausdrucks (6) beträgt noch nicht 0,002″, die Abweichung ist daher unerheblich.

Ebenso unerheblich ist die Abweichung des Seitenverhältnisses in der Ebene von demjenigen auf dem Ellipsoid. Man hat als Seitenverhältnis

$$\left.\begin{array}{ll} \text{in der Ebene:} & dx : dy\left(1 + \frac{y^2}{2\varrho_F^{\,2}}\right) \\ \text{auf dem Ellipsoid:} & \mathfrak{n}\,dx : dy \ \text{ oder } \ dx : \frac{1}{\mathfrak{n}}\,dy \end{array}\right\} \tag{7}$$

Nach S. 411 (4) ist aber $\mathfrak{n} = \cos\frac{y}{\varrho_F} + Gl_6$ und daher

$$\frac{1}{\mathfrak{n}} = 1 + \frac{y^2}{2\varrho_F^{\,2}} + \frac{5y^4}{24\varrho_F^{\,4}} + \cdots. \tag{8}$$

Die Seitenverhältnisse (7) sind also bis auf den Bruchteil $5y^4 : 24\varrho_F^{\,4}$ identisch. Die Differenz erscheint noch geringer in ihrer Wirkung auf y'. Integriert man nämlich die Differentiale $\frac{1}{\mathfrak{n}}\,dy$ von null bis y, so erhält man diejenige Länge der Ordinate, welche dem ellipsoidischen Seitenverhältnis entspricht. Sie ist um $y^5 : 24\varrho_F^{\,4}$ gröfser, als Formel (5) sie giebt. Das macht im Maximum $\frac{1}{4}$ Millimeter.

Wir erwähnen noch, dafs *Gaufs* für Formel (9) S. 477 als Argument zu ϱ^2 nicht $x_1 + \frac{1}{2}u$ sondern $x_1 + \frac{1}{3}u$ vorschreibt. Allein die Differenz beider Argumente fällt für Seiten $< 100^{km}$ stets innerhalb der zulässigen Variation des Arguments.

§ 3. **Zusammenstellung der Formeln für die ebene Projektion.** Voraussetzungen: Seiten und Ordinaten nicht über 100^{km} lang; Abscissen beliebig lang.

Zur Reduktion vom Rotationsellipsoid auf die Ebene ist nach (5) des vorigen Paregraphen:

$$\left.\begin{aligned} x' = x \quad y' &= y\left(1 + \frac{y^2}{6\varrho^2}\right) \\ \log y' &= \log y + \frac{M}{6}\,\frac{y^2}{\varrho^2} + Gl_4 \\ \varrho^2 &= \frac{a_0{}^2}{K} = \frac{b_0{}^2}{W^4}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Argument für K u. W: Die geographische Breite des Ordinatenfufspunktes.

Die logarithmische Formel führt kleine Vernachlässigungen ein, die linear noch nicht $0{,}1^{mm}$ und im Logarithmus erst höchstens 4 Einheiten der 10. Decimalstelle betragen.

Zur Reduktion der linearen Längen auf die Ebene ist nach (13) S. 477:

$$\left.\begin{aligned} s' &= s\left(1 + \frac{y_1{}^2 + y_1 y_2 + y_2{}^2}{6\varrho^2} + Gl_4\right) \\ \log s' &= \log s + \frac{M}{2}\left(\frac{y_2 + y_1}{2\varrho}\right)^2 + \frac{M}{24}\left(\frac{y_2 - y_1}{\varrho}\right)^2 + Gl_4, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei in der 2. Formel für $y_1{}^2 + y_1 y_2 + y_2{}^2$ zu gröfserer Bequemlichkeit der Rechnung $\frac{3}{4}(y_2 + y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)^2$ gesetzt wurde. Die durch Einführung der logarithmischen Form entstehenden Fehler erreichen noch nicht 1^{mm}.

Für ϱ ist in (2) ein Argument anzuwenden, das mit dem arithmetischen Mittel der geographischen Breiten der Ordinatenfufspunkte etwa bis auf 10′ übereinstimmt.

Zur Reduktion der Richtungswinkel auf die Ebene ist nach (9) S. 477, wenn ϱ wie vorher gebildet wird:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{A}'_{1.2} - \mathfrak{A}_{1.2}} = -\frac{1}{2}\varrho''\,\frac{(x_2 - x_1)\left(\frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{y_2 - y_1}{6}\right)}{\varrho^2} + Gl_4. \quad (3)$$

Für einzelne Horizontalwinkel tritt als Reduktion die Differenz der Reduktionen für beide Schenkel auf. Insoweit es sich hierbei um Objekte handelt, deren Koordinaten noch unbekannt sind, müssen zuerst genäherte Werte derselben ermittelt werden. Alsdann ist es überhaupt zweckmäfsig in die Formel (3) rechter Hand die ebenen Ordinaten einzuführen, was keinen nennenswerten Fehler giebt.

Zur Reduktion von der Ebene aufs Ellipsoid findet sich, wie aus den vorigen Formeln leicht abzuleiten ist:

$$\left.\begin{aligned} \log y &= \log y' - \frac{M}{6}\,\frac{y'^2}{\varrho^2} + Gl_4 \\ \log s &= \log s' - \frac{M}{2}\left(\frac{y'_2 + y'_1}{2\varrho}\right)^2 - \frac{M}{24}\left(\frac{y'_2 - y'_1}{\varrho}\right)^2 + Gl_4 \\ \mathfrak{A}_{1.2} - \mathfrak{A}'_{1.2} &= +\frac{1}{2}\varrho''\,\frac{(x_2 - x_1)\left(\frac{y'_2 + y'_1}{2} - \frac{y'_2 - y'_1}{6}\right)}{\varrho^2} + Gl_4, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wobei in der ersten dieser Formeln ϱ dem Ordinatenfufspunkt, in den beiden anderen aber der Mitte zwischen beiden Fufspunkten bis auf 10′ in geographischer Breite zu entsprechen hat.

Genauigkeit. Die Genauigkeit der obigen Formeln entspricht vollkommen derjenigen des Formelsystems (1) S. 474. Zum Teil ist dies schon nachgewiesen, noch nicht aber bezüglich der Formeln (9) und (13) S. 477. Man kann aber einen summarischen Nachweis dadurch führen, dafs man zeigt, dafs bei gegebenem y_1, s und $\mathfrak{A}_{1.2}$ die ersteren sowie die letzteren Formeln bis auf nicht in betracht kommende Gröfsen für $y_2 - y_1$ und $x_2 - x_1$ dasselbe geben. Setzt man abkürzungsweise

$$\log s' = \log s + M\delta_1 ,$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\mathfrak{A}'_{1.2} - \mathfrak{A}_{1.2}} = \varrho'' \delta_2 ,$$

so ist zunächst $s' = s\left(1 + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1^2 + \cdot\cdot\right)$ und weiter mittelst Bildung der Ausdrücke für $s' \cos \mathfrak{A}'_{1.2}$ und $s' \sin \mathfrak{A}'_{1.2}$, wenn $s \cos \mathfrak{A}_{1.2}$ mit u und $s \sin \mathfrak{A}_{1.2}$ mit v bezeichnet wird:

$$x_2 - x_1 = u + u\delta_1 - v\delta_2 + \frac{1}{2} u (\delta_1^2 - \delta_2^2) - v\delta_1\delta_2 + \cdot\cdot$$

$$y'_2 - y'_1 = v + v\delta_1 + u\delta_2 + \frac{1}{2} v (\delta_1^2 - \delta_2^2) + u\delta_1\delta_2 + \cdots. \quad (5)$$

Beachtet man noch, dafs nach S. 476 und 477 gesetzt werden kann:

$$y'_2 - y'_1 = (y_2 - y_1)\left(1 + \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1^2 + \cdot\cdot\right)$$

oder

$$y_2 - y_1 = (y'_2 - y'_1)\left(1 - \delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1^2 + \cdot\cdot\right),$$

so folgt mittelst des obigen Ausdrucks für $y'_2 - y'_1$:

$$y_2 - y_1 = v + u\delta_2 - \frac{1}{2} v\, \delta_2^2 + \cdots. \quad (6)$$

Vernachlässigt man in den Formeln (5) und (6) die höchsten Glieder und setzt einfach

$$x_2 - x_1 = u + u\delta_1 - v\delta_2 + \cdot\cdot \quad (5^*)$$

$$y_2 - y_1 = v + u\delta_2 , \quad (6^*)$$

so begeht man im Maximum nur Fehler von noch nicht 1^{mm}, wie die Untersuchung der Maxima der vernachlässigten Glieder ergiebt, in welchen man

$$\delta_1 = \frac{y_2(y_2 - v) + \frac{1}{3}v^2}{2\varrho^2}$$

und

$$\delta_2 = -\frac{u\left(y_2 - \frac{2}{3}v\right)}{2\varrho^2}$$

nehmen darf. Um nun (5*) und (6*) mit den Formeln (1) S. 474 zu vergleichen, hat man für (5*) und (6*) die genauen Werte

$$\delta_1 = \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6\varrho^2}$$

$$\delta_2 = -\frac{(x_2 - x_1)\left(\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2\right)}{2\varrho^2}$$

anzuwenden und rechter Hand anstatt y_2, y_1 und $x_2 - x_1$ die Gröfsen y_2, y_1, v und u nach Mafsgabe jener Formeln (1) einzuführen, was durch Anwendung der (5*) und (6*) selbst leicht geschehen kann. Als Unterschiede mit den (1) S. 474 stellen sich dann abermals kleine Glieder heraus, deren Maximalbetrag 1^{mm} nicht erheblich überschreitet. Da nun diese Formeln (1) selbst nur auf 1^{mm} genau sind, so kann man in der That die Formeln (1) bis (3) der ebenen Übertragung als gleich genau mit jenen bezeichnen.

Was endlich die Formeln (4) anlangt, so zeigt der Umstand, dafs y und y' nur um höchstens $\frac{1}{60000}$ ihres Betrags von einander abweichen, mit Rücksicht auf die Maximalwerte der Glieder 2. Ordnung jener Formeln sofort, dafs sie mit den Formeln (1) bis (3) bezw. nur um ganz geringfügige Beträge differieren.

§ 4. Berechnung der ebenen Koordinaten aus geographischen Positionen und umgekehrt.

Wenn aufser der geographischen Lage des Koordinatenanfanges P_1 noch diejenige eines Punktes P_2 gegeben ist, dessen ebene Koordinaten x und y' zu ermitteln sind — eine Aufgabe, die bei dem Übergang zu den Detailkoordinatensystemen auftritt —, so kann man ohne weiteres die Formeln (1) bis (3) des § 25 S. 463 anwenden, mit der Änderung, dafs zu Formel (3) noch die Formel

$$\log y' = \log y + \frac{M}{6b_0^2}y^2 W_F^4 \qquad (1)$$

beigefügt wird, um die ebene Ordinate y' zu erhalten. Der numerische Betrag des Koefficienten $M : 6b_0^2$ ist S. 463 angegeben; für W_F aber wird man einfach W_2, welches bereits anderweit erforderlich ist, einführen dürfen. Es entspricht dieses den anderen Vernachlässigungen

des Formelsystems auf S. 463 und giebt in y' nur Bruchteile Millimeter.

Auch für die umgekehrte Aufgabe (welche auftritt, wenn ein Dreiecksnetz in der ebenen Projektion berechnet ist), bleiben wir bei den früheren Formeln für geodätische Koordinaten, nämlich den Formeln des § 22 S. 456 stehen und denken uns nur zuerst die ebene Ordinate auf das Ellipsoid reduziert mittelst der Formel

$$\log y = \log y' - \frac{M}{6 b_0^2} y'^2 W_F^4 + \cdots . \tag{2}$$

Als gegebener Punkt P_1 wird der Koordinatenanfang vorausgesetzt und die weitere Rechnung knüpft an die Formeln (2), (3) und (4*) a. a. O. an. Die Berechnung von t unterbleibt ebenso wie überhaupt die Berechnung von s, $\alpha_{1.2}$ und $\alpha_{2.1}$, welche Gröfsen zunächst nicht in frage kommen. Wünscht man aber die Richtung des Meridians in P_2 kennen zu lernen, so ist auch t zu ermitteln. Da nun nach S. 479 u. 480 die Parallelen zur Abscissenaxe auf dem Ellipsoid sich sehr nahe als solche in der Ebene abbilden und die Abbildung im wesentlichen conform ist, so schliefst auch in dieser der Meridian mit der Parallelen zur Abscissenaxe den Winkel t ein (Fig. 39 S. 421).

§ 5. **Allgemeine Bemerkungen zur Methode der ebenen Projektion.** Eine ausführliche Theorie der *Gaufs*ischen Projektionsmethode gab *O. Schreiber* a. a. O.

Für die von uns allein für vorteilhaft gehaltene Anwendung der Methode auf schmale meridionale Bezirke behufs der Detailvermessung dürfte die oben gegebene Modifikation ausreichen, welche in weniger strenger Darstellung Verfasser bereits in der *Zeitschr. f. Verm.-Wesen* 1876 S. 238 entwickelt hat, woselbst auch ein leicht zu erstellendes logarithmisches Diagramm zur näherungsweisen (oft ausreichenden) Reduktion der Richtungswinkel auf die Ebene angegeben ist und praktische Vorzüge der Anwendung der Koordinaten in der ebenen Projektion vor der Benutzung der Koordinaten auf dem Ellipsoid namhaft gemacht sind. (In dieser Beziehung vergleiche auch bei *Jordan, Handbuch* Bd. 2, S. 293 u. ff. eine gegenteilige Ansicht.)

Der Hauptvorzug der ebenen Projektion scheint uns darin zu liegen, dafs nach erfolgter Reduktion der Richtungen auf die Ebene alle weiteren Rechnungen nur nach den Regeln der ebenen Geometrie erfolgen, also die Berücksichtigung der ellipsoidischen Gestalt der Erde in eine sehr bequeme und *anschauliche* Form gebracht ist. Die Berücksichtigung der kleinen Glieder bei den Berechnungen der Detailtriangulierungen auf dem Ellipsoid selbst ist sehr störend, so klein wie diese Glieder auch sind.

Da bei Beschränkung auf absolute Werte der Ordinaten $y \leq 0{,}01\, a_0$, d. i. 64^{km}, das Vergröfserungsverhältnis der Dimensionen:

$$1 + \frac{y^2}{2\varrho^2} \tag{1}$$

am Rande des Vermessungsgebietes nur bis zu $\frac{1}{10000}$ die Einheit überschreitet, so können in diesem Falle für die Zwecke der Detailvermessung die ebenen Dimensionen sogar ohne weiteres als wahre Dimensionen angesehen und mit direkt gemessenen Längen bei Aufnahme von Polygonzügen verbunden werden.

Gaufs selbst hat über die conforme ebene Projektion der hannoverischen Landesvermessung nichts publiziert; was man kennt, ist aus dem Briefwechsel mit *Schumacher* entlehnt. Er hat aber in seinen *Geodätischen Untersuchungen* eine andere vorzügliche conforme Projektionsmethode entwickelt, nämlich diejenige auf die Kugel. Dieselbe ist für sehr weit ausgedehnte Vermessungen brauchbar und erfordert nur ganz kleine Reduktionen der gemessenen Richtungen. Wir verweisen bezüglich dieser Methode auf die Originalarbeit, sowie auf die von *Jordan* in seinem *Handbuch der Vermessungskunde* gegebene Bearbeitung und bemerken hier nur so viel, dafs bei dieser Methode gegenüber der direkten Rechnung auf dem Ellipsoid der Vorteil einfach sphärischer Berechnung der geographischen Positionen besteht, mit nachfolgender bequemer Übertragung der geographischen Breiten mittelst einer Hilfstafel und der geographischen Längenunterschiede mittelst Multiplikation durch eine Konstante, aufs Ellipsoid. Die direkte Rechnung auf dem Ellipsoid hat andrerseits den Vorteil, dafs es leichter ist, mit verschiedenen Elementen desselben die Rechnung zu führen — auch ist, wenigstens für kurze Distanzen, der Zusammenhang zwischen den geodätischen Ergebnissen und geographischen Koordinaten ein durchsichtigerer.

Endlich kann man vielleicht als Nachteil jener Methode erwähnen, dafs bei der Übertragung der gemessenen Winkel auf die Kugel leicht geringfügig erscheinende Korrektionen wegbleiben, welche dennoch für weit ausgedehnte Gebiete sich zu merklichen Beträgen *anhäufen*.

---

11. Kapitel.

Die Berechnungsarbeiten für eine Landesvermessung.*)

§ 1. Die Bedeutung geographischer Koordinaten. Für eine Landesvermessung wird es selbst bei bedeutender Ausdehnung immer ausreichen, die Annahme zu machen, als erfolge sie auf einem Rotationsellipsoid mit geradlinigen Lotlinien, S. 134. Zwar ist dieses

*) Von der Additamenten- und der Sehnenmethode sehen wir hier ab; für diese ist das Erforderliche schon früher an den betreffenden Stellen bemerkt.



nicht streng, aber der Einflufs auf die gegenseitige Lage der Punkte ist, wie spätere Untersuchungen zeigen werden, unerheblich. Die Elemente dieses Ellipsoids kommen dabei auch nur in geringem Mafse in betracht, insoweit es sich eben um die Entfernungen (und Flächen) handelt; vergl. S. 405. Sie haben allerdings einen wesentlichen Einflufs auf die geographischen Positionen. Die berechneten Werte derselben können aufserdem wegen der Lotabweichungen mit den wirklichen Werten recht erhebliche Differenzen zeigen, allein in erster Linie sind die geographischen Koordinaten bei grofsen Landesvermessungen nur als Mittel zur Bezeichnung der gegenseitigen Lage der Punkte aufzufassen; sie sind in dieser Beziehung viel bequemer als rechtwinklige Koordinaten, die zwar von den Elementen des Ellipsoids weit weniger abhängen, deren Anwendung praktisch aber an kleine Bezirke gebunden ist, S. 474. Der Grund der erwähnten Bequemlichkeit ist der, dafs bei der successiven Übertragung geographischer Koordinaten von Punkt zu Punkt stets nur die einfachen Formeln von § 22 S. 456 in betracht kommen, während bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten bei einiger Ausdehnung des Gebiets infolge der Abhängigkeit der Formeln vom Abstand der Punkte von der Abscissenaxe sofort die keineswegs einfachen Formeln von S. 419 und event. noch kompliziertere erforderlich werden.

Wegen jener Bedeutung der berechneten geographischen Positionen ist es durchaus korrekt, sie auf 1 Einheit der 3., 4. oder selbst 5. Decimale der Sekunden anzugeben, da sie eben der Schärfe geodätischer und nicht astronomischer Messungen zu entsprechen haben und da man die Rechnungsschärfe gern 1 bis 2 Stellen weiter als die Messungsschärfe treibt.*)

§ 2. **Vorläufige Berechnungen.** Um die genaue Berechnung zu ermöglichen, ist von der vorläufig auf das Niveau des Meeres reduzierten Basislänge aus (s. § 3) eine *vorläufige Seitenberechnung* auszuführen. Man bedient sich dabei des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie unter Abgleichung der Winkelsummen auf 180°, wobei zugleich ohne weiteres *Legendres* Satz mit berücksichtigt ist.

---

*) Es ist immerhin wünschenswert, dafs auch die berechneten geographischen Positionen den wahren möglichst entsprechen. Man wird daher thunlichst als astronomischen Ausgangspunkt einen von Störungen des Lotes durch sichtbare Massenunregelmäfsigkeiten freien Punkt wählen. Noch besser wäre es, den designierten Ausgangspunkt vor definitiver Annahme mit benachbarten Dreieckspunkten auf Lotablenkung zu vergleichen, um auch lokale Lotstörungen durch unsichtbare Massenunregelmäfsigkeiten zu erkennen.

Dieses Verfahren ist auch der Messungsfehler wegen für ausgedehnte Vermessungsgebiete zu empfehlen.

Demnächst folgt eine *beiläufige Ermittlung der geographischen Breiten* von dem nach Breite astronomisch genau festgelegten Anfangspunkt aus mit Hilfe des astronomisch bestimmten Azimutes einer von hier ausgehenden Dreiecksseite (des sogenannten ersten Azimutes), falls nicht eine ältere Karte vorliegt.

Diese Ermittlung hat nur den Zweck, für die Berechnung der Dreiecksexcesse die Krümmungsmaſse des Ellipsoids genügend scharf finden zu können. Da die in betracht kommenden Excesse meist nur einige Sekunden betragen, würde in der Regel sogar ein Breitenfehler von $\frac{1}{4}$ Grad noch nicht 0,001″ Exceſsfehler geben, wie die Differentialformel (3) S. 403 und die daselbst angestellten Rechnungen zeigen. Selbst bei 10″ Exceſs genügt stets noch eine Genauigkeit bis auf 10′ in Breite.

Hiernach (und eventuell eingehender nach der eben erwähnten Formel) kann man ermessen, wann eine ältere Karte oder eine flüchtige Berechnung der geographischen Breiten nach den Formeln S. 456 u. 457 mit Vernachlässigung der höheren Glieder und unter Annahme eines konstanten Wertes W zu genanntem Zwecke ausreicht.

§ 3. **Reduktion der Basis auf einen Normalhorizont.** Wenn bei der in § 2 vorausgesetzten Reduktion die geographische Lage der Basis nicht genügend bekannt war, so ist eine erneute *Reduktion auf das Meeresniveau* auszuführen, nachdem durch die vorläufige Berechnung ihre geographische Lage nach Breite und Azimut genügend bekannt worden ist. (Eine näherungsweise direkte Beobachtung beider Elemente reicht auch aus.) Die Reduktion erfolgt bei der Kürze der Strecke ohne Zweifel ganz ausreichend nach der Annahme, daſs die unmittelbar gemessene horizontale Entfernung als *ein* Kreisbogen in der *mittleren* Meereshöhe der Basis aufgefaſst wird. Ebenso wird die Projektion als Kreisbogen anzusehen sein. Der Krümmungsradius für letzteren ist der spezielle Krümmungsradius des Ellipsoids in der mittleren geographischen Breite der Basis und in ihrem mittleren Azimut; für ersteren ist er um die mittlere Meereshöhe gröſser.

Der Kalkul kann als im Princip schon auf S. 6 gegeben übergegangen werden, um so mehr als seine Behandlung keinerlei Schwierigkeit bietet.

Die Reduktion der Basis auf einen sogenannten *mittleren Landeshorizont* ist nur für kleine Länder, wo unmittelbar von der Haupttriangulation zu einem System rechtwinkliger Koordinaten übergegangen werden kann, zu empfehlen. Für die Berechnung geographischer Positionen führt aber dieser Vorgang zu Weiterungen (wie einer der folgenden Paragraphen zeigen wird), während es andrerseits für die

Detailarbeiten und wirthschaftlichen Zwecke der Vermessungen ganz gleichgültig ist, wenn die Entfernungen von denen im mittleren Niveau einer Gegend gemessenen um Bruchteile der Ordnung $\frac{h}{\varrho}$ abweichen, da dies meist weniger als $\frac{1}{10000}$ sein wird. Eventuell ist auch eine entsprechende Reduktion leicht auszuführen.

Wir setzen daher im Folgenden zunächst die Reduktion auf einen Meereshorizont voraus.

§ 4. **Reduktion der gemessenen Winkel und Richtungen.** Die auf den Netzpunkten (Stationen) beobachteten Winkel und Richtungen können zuerst stationsweise ausgeglichen werden. Das Resultat der Stationsausgleichung wird eine Reihe Zahlen sein, deren Differenzen die Winkel darstellen, die im einzelnen aber Richtungswerte heifsen und von den Azimuten um eine Konstante verschieden sind. Diese Werte sind vor der Netzausgleichung zu verbessern in folgender Weise:

1. Nach S. 190 (6) beträgt für ein südwestliches astronomisches Azimut, das nach einem Objekt in der Meereshöhe H genommen ist, die Reduktion, um das astronomische Azimut der Projektion dieses Objekts auf das Rotationsellipsoid zu erhalten, in Sekunden:

$$+\frac{1}{2}\varrho'' e^2 \frac{H}{a_0} \cos^2 B \sin 2a + \cdots \tag{1}$$

und also mit *Bessels* Dimensionen des Ellipsoids hiernach:

$$+ 0{,}108'' \cos^2 B \sin 2a \; (H \text{ in Kilometern}) + \cdots. \tag{1*}$$

2. Ferner beträgt die Reduktion vom astronomischen aufs geodätische Azimut nach S. 332 (11) in Sekunden:

$$-\frac{1}{12}\varrho'' e^2 \frac{s^2}{a_0^2} \cos^2 B \sin 2a + \cdots, \tag{2}$$

oder

$$\doteq 0{,}028'' \cos^2 B \sin 2a \left(\frac{s \text{ in Kilometern}}{100}\right)^2 + \cdots \tag{2*}$$

Hierin bezeichnen a das gemessene Azimut, B die Polhöhe des Standpunktes und s die horizontale Entfernung des Objekts.

Nach diesen Formeln ist streng genommen jedes beobachtete Azimut und jede beobachtete bezw. auf der Station ausgeglichene Richtung des Dreiecksnetzes zu korrigieren. Für die Winkel ergiebt sich die Korrektion als Differenz der Korrektionen der Richtungen beider Schenkel von selbst.

Sind die Entfernungen sehr grofs, so können die S. 190 und 332 angegebenen höheren Glieder merklich werden; in der Regel aber reichen vorstehende Ausdrücke aus.

Was die Fehler anbelangt, die durch Unterlassung der Reduktionen (2) begangen werden, so ist darüber schon S. 400 u. ff. gehandelt worden.

Für den thatsächlichen Zustand der Erde sind vorstehende Korrektionen noch nicht genügend; indessen repräsentieren sie das Wichtigste und in erster Linie zu Berücksichtigende. Wir wollen hier die anderen weiterhin zu besprechenden Korrektionen vorläufig namhaft machen. Es sind:

3. Die Korrektion wegen Lotabweichung, welche dadurch entsteht, daſs die Lotrichtungen nicht genau Normalen eines Ellipsoids sind.

4. Die Korrektion wegen des Abstandes der Geoidfläche von der Fläche eines Rotationsellipsoids.

5. Die Korrektion wegen der Lateralrefraktion der Lichtstrahlen, d. h. wegen der Ausweichung des Lichtstrahles aus der Vertikalebene vom Standpunkt nach dem Objekt infolge ellipsoidischer Form der Niveauflächen der Luft.

In *Grunerts Archiv* von 1869, Teil 51, S. 20 u. ff., behandelt *Sonderhof* die sämtlichen Reduktionen der Horizontalwinkel unter Voraussetzung einer rotationsellipsoidischen Gestalt der mathematischen Erdoberfläche. *Villarceau* bespricht die Reduktion wegen Meereshöhe in den *Comptes rendus* von 1866, Bd. 63, S. 850. *Andrae* führt 1867 die Formeln mit teilweiser Entwicklung an in Bd. 1 der *Dänischen Gradmessung*, vergl. das Referat in der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1878, Bd. 13, S. 72 u. ff.

Daſs *Gauſs* und *Bessel* diese Reduktionen bereits kannten, ist nicht zu bezweifeln, wenngleich von ersterem eine bezügliche Entwicklung nicht vorliegt und *Bessel* nur die Reduktion vom astronomischen aufs geodätische Azimut entwickelt. In Bezug hierauf vergl. man eine Mitteilung von *Peters* in den *Astronom. Nachr.* von 1856, Bd. 43, Nr. 1022, S. 209.

§ 5. Berechnung der sphärischen Excesse der Dreiecke.

Zum Zwecke der üblichen Ausgleichung des Netzes nach bedingten Beobachtungen ist zunächst die Berechnung der sphärischen Excesse derjenigen Dreiecke nötig, deren sämtliche Winkel beobachtet worden sind. Dazu bedarf man der Inhalte der Dreiecksflächen, welche am bequemsten aus 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkeln berechnet werden. Die Logarithmen der Seiten giebt die vorläufige Rechnung.

Die Genauigkeit dieser Angaben für die Seiten kann immer als ausreichend für die Exceſsberechnung betrachtet werden, denn wenn jene auch nur bis auf $\frac{1}{10000}$ ginge, würde der Exceſs bei 10″ Betrag doch nur um 0,001″ fehlerhaft. Diese Genauigkeit haben aber die Angaben der vorläufigen Rechnung selbst in grösserer Entfernung von der Basis, da man die aus den Stationsausgleichungen hervorgehenden Winkel auf mindestens $\pm$ 1″ mittleren Fehler genau voraus-

setzen darf. Andrerseits aber ist es überflüssig, mehr als drei Decimalen bei der Ausgleichung der Dreieckswinkel beizubehalten.

Was die Excefsberechnung anlangt, so ist schon S. 403 u. ff. die Zulässigkeit einer rein sphärischen Berechnung für eine mäfsig ausgedehnte Kette erörtert. Indessen ist es leicht, mittelst der Tafel auf S. 213 in *Albrechts* Tafelsammlung das spezielle mittlere Krümmungsmafs der einzelnen Dreiecke oder kleiner Komplexe solcher zu berücksichtigen. Von der nun in der Regel in betracht kommenden Formel (1) für $\log \varepsilon$ S. 362 genügt nach S. 99 in den meisten Fällen das 1. Glied, sodafs

$$\varepsilon = \varrho'' \frac{bc \sin A}{2 a_0^2} K + \cdots$$

gesetzt werden darf. In der 3. Decimalstelle kann sich ein Einflufs erst geltend machen bei Seitenlängen von mehr als 120^{km}, wie S. 99 ausführlich erörtert worden ist. Eventuell ist dann Formel (3) S. 100 zu benutzen, welche die höheren Glieder in bequemer Weise zu berücksichtigen gestattet.

§ 6. **Ausgleichung.** Um die Ausgleichung der Beobachtungsfehler bewältigen zu können, müssen die, ein möglichst weitmaschiges Netz bildenden, gröfsten Dreiecke (die Dreiecke 1. Ordnung) für sich ausgeglichen werden, um als unveränderliche Grundlage für kleinere Dreiecke zu dienen, die in Systemen 2., 3. und 4. Ordnung nach und nach eingehangen werden. Dem entsprechend erhalten die Dreiecke 1. Ordnung eine maximale Genauigkeit der Winkelmessung. [Über die beste Methode hierzu vergl. *O. Schreiber*, *Anordnung der Horizontalwinkelmessungen etc.*, Zeitschr. f. Vermessungswesen 1878, Bd. 7, S. 209 u. ff.; sowie von demselben *Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen*, ebenda Bd. 8, S. 97 u. ff.]

Sogar die Netze 1. Ordnung erlangen bei grofsen Ländern eine solche Ausdehnung, dafs schon aus dem Grunde, mit der Detailbearbeitung nicht bis zur Aufnahme und Ausgleichung des ganzen Netzes warten zu müssen, auch für sie eine zeitlich schrittweise vorgehende Ausgleichung in Teilen nötig wird.

Es müssen dann immer die Resultate der vorangehenden Ausgleichungen beibehalten werden, was allerdings den folgenden Netzteilen einen Zwang auferlegt, der aber so lange ziemlich unschädlich ist, als in jeder der, dem Anschlufs entsprechenden Bedingungsgleichungen der mittlere Wert des Aggregats der darin enthaltenen Verbesserungen der Winkel des anzuschliefsenden Netzteiles gröfser ist, als derjenige des Aggregats der darin unterdrückten Verbesserungen der Stücke des unverändert beizubehaltenden Netzteiles, oder mit

andern Worten: so lange die Figur zwischen denjenigen Punkten, welche beiden Teilen gemeinsam sind, durch den neuen Netzteil weniger gut bestimmt ist, als durch den bereits abgeschlossenen Teil.

Andernfalls kann ein erheblicher Zwang eintreten wie z. B. bei Einschaltung eines stegartigen Netzes aus wenigen Dreiecken in einen fertig ausgeglichenen Dreieckskranz.

In England, wo die Haupttriangulation seit 3 Decennien beendet ist, bedeckt das Netz 1. Ordnung gleichmäſsig das ganze Land und ist in an einander gereihten Teilen ausgeglichen.

In Preuſsen aber, dessen Triangulation 1. Ordnung noch im Gange ist, wird dagegen zunächst ein weitmaschiges Netz aus Dreiecksketten gebildet. Nach Ausgleichung dieses Kettensystems, die stückweise erfolgen muſs, füllt man die freien Maschen aus, wobei aber stets ein beträchtlicher Zwang bleibt. Wenn dieses nun auch für Landesvermessungszwecke unbedenklich ist, so läſst es doch immerhin eine Benutzung der berechneten, geodätisch übertragenen Azimute für Gradmessungszwecke unthunlich erscheinen, da dieselben ohne Zweifel oftmals mehrere Sekunden fehlerhaft sind (vergl. u. A. das mährisch-schlesische Netz S. 253 u. ff. und das posensche Netz S. 88 u. ff. des Bds. 3 der *Hauptdreiecke*).

Das ebenfalls aus Dreiecksketten gebildete Netz der englischen Vermessung in Ostindien hat Rostform. (Vergl. das Referat in der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1873, Bd. 8, S. 14 u. ff.)

Für die gleichzeitige Verwertung von Dreiecksnetzen zu Landesvermessungs- und Gradmessungszwecken würde es vorteilhaft sein, das übliche Ausgleichungsverfahren nach bedingten Beobachtungen aufzugeben und ein solches nach vermittelnden Beobachtungen anzuwenden, wie es für sekundäre Dreiecksnetze schon seit längerer Zeit wiederholt angewandt ist. Jenes Verfahren ist allerdings wenigstens bei einfachen Ketten kürzer als das letztere (vergl. die *Ausgleichungsrechnung* S. 329), wenn es sich aber schlieſslich um die Gesamtausgleichung groſser Netzkomplexe handelt, verliert es an Übersichtlichkeit, während die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen sich stets übersichtlich anordnen läſst. Wir werden dieselbe in den letzten Paragraphen dieses Kapitels behandeln, setzen aber im Folgenden zunächst die übliche Methode voraus.

Zu dieser mag hier nur noch erwähnt werden, daſs bei Aufstellungen der Seitengleichungen mittelst des Sinussatzes immer das einfache *Legendre*sche Theorem genügt, wie in § 5 S. 361 bewiesen worden ist.

Die Ausgleichung der Dreiecksnetze nach bedingten Beobachtungen ist in der *Dänischen Gradmessung* Bd. 1 von *Andrae* und mit einer inter-

essanten Modifikation unter Anwendung eines auch von *Hansen* angewandten Kunstgriffs in Bd. 2 S. 303 u. ff. der *Hauptdreiecke der preufs. Landestriangulation* ausführlich behandelt. Das Verfahren *Andraes* ist eine Vervollständigung des *Bessel*schen *Ausgleichungsverfahrens*. Das vom Verf. in seiner *Ausgleichungsrechnung* S. 240 durch ein Beispiel erläuterte Verfahren stimmt mit demselben namentlich darin überein, dafs die Netzausgleichung als zu bestimmende Unbekannte Winkelverbesserungen benutzt, während die erwähnte Modifikation durch Einführung von Richtungsverbesserungen als zu bestimmender Unbekannten sich von beiden unterscheidet.

Die *Andrae*schen Formeln hat Verf. übersichtlich entwickelt und zusammengestellt in Bd. 12 der *Vierteljahrschrift der Astronom. Ges.* 1877 S. 192 u. ff.

Um die Ausgleichung zu erleichtern, ist es wünschenswert, die Beobachtungen so anzuordnen, dafs man auf jeder Station das Ausgleichungsergebnis genau oder doch ohne grofsen Fehler als einen einzigen, vollständigen (mit grofser Genauigkeit angestellten) Satz Richtungsbeobachtungen betrachten kann (*Ausgleichungsrechnung* S. 332). Dann vereinfacht sich das Ausgleichungsverfahren im Netze sehr und nimmt die Gestalt an, welche *Gaufs* erläutert und bei der hannoverischen Gradmessung angewandt hat (vergl. sein auch auf S. 185 der *Ausgleichungsrechnung* behandeltes Beispiel). *O. Schreiber* hat hiermit bei den neueren Ketten der preufs. Landestriangulation grofse Rechnungsersparnisse erzielt (Vergl. seine oben erwähnten Mitteilungen.)

§ 7. **Berechnung geographischer Koordinaten.** Nach beendeter Ausgleichung erfolgt die definitive Seitenberechnung mittelst des Sinussatzes unter Anwendung des einfachen *Legendre*schen Theorems (§ 5 S. 361) und alsdann die Berechnung der Koordinaten. Zu dem in § 1 Bemerkten ist nur hinzuzufügen, dafs zur Ausführung der Rechnung für kurze Distanzen die Formeln von S. 456 u. 457 oder die S. 458 erwähnten, nicht wesentlich verschiedenen Formeln *O. Schreibers*, zu welchen, wie bereits bemerkt, für 47° bis 57° geogr. Breite Hilfstafeln berechnet sind, sich am besten eignen.

Kontrollen der Rechnung ergeben sich durch doppelte Berechnung für diejenigen Punkte, in denen die Seitenzüge, entlang welcher die Übertragung der Positionen ausgeführt wird, zusammenstofsen.

§ 8. **Einschaltung von Punkten in das Netz 1. Ordnung.** Die Ausgleichung erfährt hierbei leicht dadurch eine beträchtliche Komplikation, dafs eine grofse Anzahl von Bedingungsgleichungen entsteht, selbst in dem Falle, wo man successive immer nur je einen Punkt einschaltet. Deshalb ist es hier längst als vorteilhaft erkannt worden, nach vermittelnden Beobachtungen auszugleichen, denn dann erscheinen für jeden einzuschaltenden Punkt immer nur seine 2 Koordinaten oder überhaupt 2 Bestimmungsstücke als Unbekannte. So lange

die Distanzen der benachbarten Punkte noch mehrere Meilen betragen (wie im Netz 2. Ordnung), dürfte die Wahl derselben Unbekannten, wie für das Netz 1. Ordnung nicht unpassend sein. Für die Ausgleichung kann § 10 als Erläuterung dienen; denn es ändert sich das Verfahren nur insofern, als die Koordinaten der Punkte des bereits ausgeglichenen Netzes streng beibehalten werden müssen.

Für noch geringere Abstände, aber auch unter Umständen für jene ersten Einschaltungen, empfiehlt sich die Anwendung rechtwinkliger ebener Koordinaten nach den Formeln, welche im vorigen Kapitel S. 476 u. ff. entwickelt wurden. Selbst dann, wenn man für die Detailaufnahme Systeme rechtwinkliger geodätischer Koordinaten einführt, ist es zur Berücksichtigung der ellipsoidischen Gestalt der Projektionsfläche am bequemsten, für die Zwecke der Ausgleichung den Übergang zu ebenen rechtwinkligen Koordinaten vorzunehmen und nach beendeter Ausgleichung zu geodätischen rechtwinkligen Koordinaten zurückzukehren.

In Bezug auf das Detail der Ausgleichung verweisen wir auf *Ausgleichungsrechnung* S. 158 u. ff. Man wird hieraus leicht entnehmen, wie überhaupt die Einschaltung nicht nur einzelner Punkte, sondern auch ganzer Netze auszuführen ist, wenn die Beobachtungen auf den Stationen einfach als vollständige Sätze aufgefafst werden können. Für beliebige Beobachtungen hat *Andrae* im 2. Bd. der *Dänischen Gradmessung* die Formeln entwickelt (vergl. eventuell das Ref. in Bd. 13 der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1878, S. 65 u. ff.); abgesehen von den speziellen Koefficienten der Fehlergleichungen kann man hier überdies unmittelbar das in § 10 zu gebende, im wesentlichen identische Verfahren anwenden.

Man vergl. auch in Bezug auf den Gang der Einschaltungen und das Ausgleichungsverfahren die Abhandlung von *Mauck* über das Vermessungswesen in Mecklenburg-Schwerin in der *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1879 Bd. 8.

Was die Lage der als spezielle Abscissenaxen dienenden Meridiane anlangt, so kann man entweder, wie in Preufsen bei der Katastervermessung, sie beliebig nach lokalem Bedürfnis legen, oder systematisch auf runde Werte von geographischen Längenunterschieden, etwa von Grad zu Grad, wobei es gleichgültig ist, ob irgend ein Punkt des Hauptnetzes mit denselben zusammenfällt oder nicht. (Vergl. auch über die Anlage einer Landesvermessung *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1877, Bd. 6 S. 607 u. ff.)

§ 9. **Landeshorizont.** Wenn die Basis nicht auf die Meeresfläche reduziert wird, sondern auf eine mehr in mittlerer Höhe des Landes gelegene Niveaufläche, den mittleren Landeshorizont, so mufs man bei der Berechnung der sphärischen Excesse und der geographischen Positionen dieses berücksichtigen.

Die sphärischen Excesse werden von den Dimensionen des Ellipsoids sehr wenig beeinflufst; man kann entweder mit denen des Erdellipsoids rechnen, oder a_0 einfach um die Meereshöhe des Landeshorizonts vermehren, falls man einen Einflufs vermutet. Was nun die geographischen Positionen anlangt, so ist es praktisch am bequemsten, zu ermitteln, um wieviel sich der Logarithmus der Grundlinie durch die Reduktion auf die Meeresfläche ändert, diese Änderung den Logarithmen aller Seiten beizufügen und sodann geographische Positionen mit denjenigen Dimensionen des Erdellipsoids zu rechnen, für welche Tafeln existieren. Dieses Verfahren entspricht der Annahme, dafs der Landeshorizont und das Geoïd als ähnliche Ellipsoide aufgefafst werden können. Selbstverständlich ist dies nicht streng, denn der Voraussetzung eines Rotationsellipsoids als Geoid und geradliniger (oder auch selbst den thatsächlichen Verhältnissen entsprechend gekrümmter) Lotlinien entsprechen Niveauflächen, die nicht genau mehr die Form eines Rotationsellipsoids haben.

Strenger würde es sein, zwar die Form eines solchen zu adoptieren, aber die Halbaxen a_0 und b_0 beide um die Meereshöhe des Landeshorizonts zu vermehren (also e^2 nicht beizubehalten). Oder noch besser: Werte von a_0 und e^2 für das Ellipsoid des Landeshorizonts aus den um die Meereshöhe desselben vermehrten Werten der beiden, dem Erdellipsoid in der mittleren geographischen Breite des Landes entsprechenden Werte von ϱ_m und ϱ_n zu bestimmen.

Allein hierbei entbehrt man der Bequemlichkeit der Benutzung vorhandener Tafeln und erzielt schliefslich nur die Berücksichtigung kleiner Einflüsse, die man bei anderer Gelegenheit meist vernachlässigt. Wenn man nämlich die Reduktion wegen der Höhe der Objekte über dem Meere (bezw. dem Landeshorizont) bei den gemessenen Winkeln unterläfst, so hat man auch das Recht, die Projektionen des Netzes auf den Landeshorizont und auf den Meereshorizont als ähnliche Figuren anzusehen, was nur eine konsequente Vernachlässigung giebt, und damit rechtfertigt sich dann das praktisch bequeme Verfahren.

Allen Bedenken bezüglich konsequenter mathematischer Behandlung geht man aber aus dem Wege durch sofortige Projektion der Grundlinien auf den Meereshorizont, wie es auch bei ausgedehnten Vermessungen üblich ist. Man kann ja schliefslich für Detail-

vermessungen nach der hierbei sicher ausreichenden Kugelhypothese zu höher gelegenen Horizonten übergehen, wenn es einmal erwünscht sein sollte.

§ 10. Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. Als Unbekannte führt man am besten bei gröfseren Ländern die geographischen Breiten und Längenunterschiede (gegen einen beliebigen 1. Meridian) ein, bei kleineren Ländern direkt geodätische oder ebene, rechtwinklige Koordinaten. Wir behandeln aber nur den ersteren Fall.

In diesem ist es nun erforderlich, auf Grund der vorläufigen Seitenberechnung eine vorläufige Berechnung der Breiten und Längen von dem astronomischen Anfangspunkte aus in möglichster Schärfe durchzuführen, damit die Ausgleichung nur sehr kleine Verbesserungen ergeben kann, deren Quadrate zu vernachlässigen sind, sodafs auch einfache Differentialformeln zur Berechnung der Änderungen der Azimute aus den Änderungen der geographischen Positionen ausreichen.

Diese Differentialformeln sind schon abgeleitet. Die 2. oder 3. Formel (4) S. 282 geben sofort die Änderung $d\alpha_{ik}$ des Azimuts im Punkte P_i nach dem Punkte P_k, welche zu den Änderungen dB_i und dB_k der geographischen Breiten und zu den Änderungen dL_i und dL_k der geographischen Längen der beiden Punkte P_i und P_k gehöret, und zwar hat man:

$$d\alpha_{ik} = \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} \sin\alpha_{ik}\, dB_i - \frac{1-e^2}{W_k^3} \sin\alpha_{ki}\, dB_k \\ + (dL_i - dL_k)\frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Die Berechnung der Gröfsen $\mathfrak{m}$ und ihrer Differentialquotienten ist bereits S. 283 u. ff. erledigt.

Denken wir uns also in aller Schärfe zu vorläufigen Werten $\bar{B}$ und $\bar{L}$ der geographischen Positionen die Azimute derjenigen geodätischen Linien berechnet, welche den Seiten des Dreiecksnetzes entsprechen, und ist $\bar{\alpha}_{ik}$ eines dieser berechneten Azimute, α_{ik} der beobachtete (und gehörig nach § 4 S. 488 reduzierte) Wert, sowie λ_{ik} eine seinem Beobachtungsfehler entsprechende plausible Verbesserung, so wird man dB_i, dB_k, dL_i und dL_k dergestalt wählen, dafs nach Mafsgabe obiger Gleichung $d\alpha_{ik}$ dem Wert

$$\alpha_{ik} + \lambda_{ik} - \bar{\alpha}_{ik} \quad (2)$$

gleich ist.*) Die Beobachtung des Azimutes α_{ik} würde also die Fehlergleichung geben:

$$\lambda_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha_{ik} + \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\,\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} \sin\alpha_{ik}\, dB_i - \frac{1-e^2}{W_k^3} \sin\alpha_{ki}\, dB_k \\ + (dL_i - dL_k)\frac{\cos B}{W_k} \cos\alpha_{ki} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Hierbei genügt es natürlich die Koefficienten rechts mit den Näherungswerten von α und B zu berechnen.

Es wird aber im allgemeinen nicht das Azimut gemessen, sondern ein Satz von 2 oder mehr Richtungen. Durch Beifügung eines angemessenen Wertes wird man zwar (und wir setzen es voraus) diese Angaben eines Satzes annähernd auf Azimute bringen; es wird aber immer noch eine unbekannte Korrektion $-u$ bleiben (u Orientierungsfehler des Satzes), die wir allen Angaben α eines Satzes beigefügt zu denken haben (*Ausgleichungsrechnung* S. 160).

Rechter Hand zu obiger Gleichung tritt also nun noch die Unbekannte $+u$, die allen Gleichungen *eines* Satzes von Richtungen gemeinsam ist, für jeden neuen Satz aber sich ändert. Die *Fehlergleichungen* für einen Satz, der alle vorkommenden Richtungen enthält, erlangen somit die Form:

$$\left.\begin{array}{lr} \lambda_1 = -l_1 + u + a_1x + b_1y + c_1z + \cdots & \text{Gew.}\ g_1 \\ \lambda_2 = -l_2 + u + a_2x + b_2y + c_2z + \cdots & \text{„}\ \ g_2 \\ \lambda_3 = -l_3 + u + a_3x + b_3y + c_3z + \cdots & \text{„}\ \ g_3 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot \end{array}\right\}, \quad (4)$$

worin nach Mafsgabe von Gleichung (3) l die Differenz *beob. Azimut — ber. Azimut* bedeutet und $x, y, z\cdots$ die unbekannten (differentialen) Verbesserungen der geographischen Koordinaten aller Punkte, $a, b, c\cdots$ aber ihre Koefficienten in abgekürzter Bezeichnung vorstellen. Die Gewichte g setzen wir gleich 1, so lange wirklich die Richtungen beobachtet sind, dagegen gleich null, sobald sie nicht beobachtet sind.

Ein 2. Satz auf demselben Standpunkt giebt ein System derselben Form, etwa:

$$\left.\begin{array}{lr} \lambda_1' = -l_1' + u' + a_1x + b_1y + c_1z + \cdots & \text{Gew.}\ g_1' \\ \lambda_2' = -l_2' + u' + a_2x + b_2y + c_2z + \cdots & \text{„}\ \ g_2' \\ \lambda_3' = -l_3' + u' + a_3x + b_3y + c_3z + \cdots & \text{„}\ \ g_3' \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot \end{array}\right\}, \quad (5)$$

---

*) Zur Berechnung der $\bar{\alpha}$ können die Formeln des § 23, S. 313, dienen. Auch die Formeln des § 11, S. 157, dürften sich eignen, und es fallen hier natürlich die Reduktionen vom astronomischen aufs geodätische Azimut weg.

ebenso jeder andere Satz auf demselben Standpunkt und schliefslich auch auf anderen Standpunkten.

Nur *der* Unterschied besteht für verschiedene Standpunkte, dafs immer neue Aggregate von je 4 Unbekannten auftreten, während bei den Gleichungsystemen *eines* Standes die Aggregate $ax + by + cz + \cdots$ in den Gleichungen mit demselben unteren Index (die also zu derselben Richtung gehören) identisch sind.

Aufserdem tritt eine Modifikation ein auf der 1. Station, der astronomischen Station. Für diese sind dB und dL gleich null. Ferner ist hier *ein* Azimut wirklich gegeben.

Wir sehen indessen vorläufig davon, dafs ein Azimut gemessen ist, ab und geben erst weiterhin gleichzeitig mit der Berücksichtigung der Grundlinie an, wie es einzuführen ist. Ganz von selbst wird man zu der Erkenntnis gelangen, dafs die Rechnung dieselbe bleibt, falls Breite und Azimut nicht auf ein und derselben Station gemessen sind.

Um nun die Quadratsumme aller $\lambda\lambda g$ zu einem Minimum zu machen, hat man nur das gewöhnliche Verfahren der Bildung der Normalgleichungen zu beachten (*Ausgleichungsrechnung* S. 116). In Bezug auf die Unbekannten ergiebt sich dabei ein Unterschied, weil die u, u' .. immer nur in *einem* System Fehlergleichungen auftreten, x, y, z .. aber in verschiedenen Systemen. Jene lokalen Unbekannten wird man vor allem eliminieren, ehe noch die vollständigen Normalgleichungen für x, y, z .. gebildet sind. Man kann überhaupt, da die einzelne Station x, y, z .. *nicht* einzeln bestimmt, sondern nur Aggregate derselben, diese Aggregate zunächst als Unbekannte einführen.

Nennen wir also diese unbekannten Aggregate auf derjenigen Station, für welche obige Gleichungen angeschrieben sind, A, B, $C \ldots$, so lauten die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll|ll|l}
\lambda_1 = -l_1 + u + A & \text{Gew. } g_1 & \lambda_1' = -l_1' + u' + A & \text{Gew. } g_1' & \cdots \\
\lambda_2 = -l_2 + u + B & \;\;\text{,,}\;\; g_2 & \lambda_2' = -l_2' + u' + B & \;\;\text{,,}\;\; g_2' & \cdots \\
\lambda_3 = -l_3 + u + C & \;\;\text{,,}\;\; g_3 & \lambda_3' = -l_3' + u' + C & \;\;\text{,,}\;\; g_3' & \cdots \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdots
\end{array}\right\} (6)$$

Hierzu gehören die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
0 = -[gl] + [g]\,u + Ag_1 + Bg_2 + Cg_3 + \cdots & \text{für } u \\
0 = -[g'l'] + [g']\,u' + Ag_1' + Bg_2' + Cg_3' + \cdots & \;\;\text{,,}\;\; u' \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot
\end{array}\right\} \qquad (7)$$

und:

$$\left.\begin{array}{llr} 0 = -[g_1 l_1] + u g_1 + u' g_1' + \cdots + A\,[g_1] & \text{für} & A \\ 0 = -[g_2 l_2] + u g_2 + u' g_2' + \cdots + B\,[g_2] & „ & B \\ 0 = -[g_3 l_3] + u g_3 + u' g_3' + \cdots + C\,[g_3] & „ & C \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Eliminiert man aus letzteren die Unbekannten u, u' ... mittelst der ersteren, so nehmen sie die nachstehende Form an:

$$\left.\begin{array}{llr} 0 = -(\mathfrak{a}\mathfrak{l}) + A(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) + B(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + C(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) + \cdots & \text{für} & A \\ 0 = -(\mathfrak{b}\mathfrak{l}) + A(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + B(\mathfrak{b}\mathfrak{b}) + C(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) + \cdots & „ & B \\ 0 = -(\mathfrak{c}\mathfrak{l}) + A(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) + B(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) + C(\mathfrak{c}\mathfrak{c}) + \cdots & „ & C \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Um nun zu erkennen, wie man diese Ergebnisse für die einzelnen Stationen weiter zu behandeln hat, denken wir uns die Normalgleichung für x gebildet. Hierzu giebt die Station, deren Fehlergleichungen (4) und (5) speziell notiert sind, einen *Beitrag* rechter Hand, den man mit Benutzung der Abkürzungen A, B, C ... wie folgt schreiben kann:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \left\{-[g_1 l_1] + u g_1 + u' g_1' + \cdots + A[g_1]\right\} \\ + a_2 \left\{-[g_2 l_2] + u g_2 + u' g_2' + \cdots + B[g_2]\right\} \\ + a_3 \left\{-[g_3 l_3] + u g_3 + u' g_3' + \cdots + C[g_3]\right\} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right\} \tag{10}$$

oder auch:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \left\{ \text{rechte Seite der Normalgl. (8) für } A \right\} \\ + a_2 \left\{ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad B \right\} \\ + a_3 \left\{ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad C \right\} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right\} \tag{11}$$

Da die Normalgleichungen (7) für u, u' ... dieselben bleiben, man mag A, B, C.. als Unbekannte betrachten, oder direkt auf x, y, z.. operieren (in welchem Falle A, B, C.. eben nur vorübergehende Abkürzungen bezeichnen), so darf man im Ausdruck (11) die Normalgleichungen (8) für A, B, C.. gleich in der von u, u' ... befreiten Form (9) nehmen.

Man erhält also den Beitrag einer Station zur Normalgleichung für x, wenn man nach Maſsgabe von (11) die rechten Seiten der Stationsnormalgleichungen (9) der Reihe nach mit dem Koefficienten

von x in A, B, C.. multipliziert und addiert — und schliefslich für A, B, C.. noch die Ausdrücke in x, y, z.. einsetzt.

Dies dürfte das Ausgleichungsgeschäft genügend erläutern. Man sieht, dafs jede Station für sich wie üblich bis zur Bildung der Normalgleichungen zu behandeln ist, dafs eine stationsweise Auflösung der letzteren aber nicht nötig wird.

§ 11. **Gleichungen für Azimut- und Basismessungen.** Jede solche Messung giebt eine Gleichung zwischen den 4 Verbesserungen der Koordinaten der Endpunkte der betreffenden Linien.

Der *Azimutmessung* entspricht als Bedingungsgleichung die Gleichung (3) S. 496, wenn λ_{ik} = null gesetzt wird.

Der *Basismessung* entspricht die Bedingungsgleichung $s_{ik} = \bar{s}_{ik} + ds_{ik}$, wobei s_{ik} die gemessene Länge, $\bar{s}_{ik}$ die aus den genäherten Koordinatenwerten scharf berechnete Basislänge und ds_{ik} den Zuwachs von $\bar{s}_{ik}$ durch Änderung der geographischen Koordinaten der Endpunkte bedeutet.

Nach der 1. Gleichung (4) S. 282 ist daher diese Bedingungsgleichung die folgende:

$$0 = \bar{s}_{ik} - s_{ik} + a_0 \left\{ \begin{array}{c} \frac{1-e^2}{W_i^3} \cos \alpha_{ik}\, dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3} \cos \alpha_{ki}\, dB_k \\ + (dL_i - dL_k) \frac{\cos B_k}{W_k} \sin \alpha_{ki} \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Sind mehrere Grundlinien gemessen, so stellt man für jede eine solche Bedingungsgleichung her, befriedigt also jede Basismessung streng. Verbesserungen anzubringen erscheint schon darum überflüssig, weil das Verhältnis zweier benachbarter Basislängen aus ihren direkten Messungen weit schärfer hervorgeht als aus den Winkelmessungen des zwischenliegenden Netzteiles. Einen anderen, wichtigeren Grund, der die Behandlung der (1) als Fehlergleichungen geradezu als fehlerhaft erscheinen läfst, werden wir in § 18 des folgenden Kapitels erkennen (vergl. auch die Anm. unten daselbst).

Um die Bedingungsgleichungen für das Azimut und die Grundlinien zu berücksichtigen, hat man (nach *Ausgleichungsrechnung* S. 195, Verfahren I) mittelst derselben je eine Unbekannte *vor* Bildung der allgemeinen Normalgleichungen zu eliminieren. Diese Elimination erfolgt, wie man unmittelbar erkennt, einfach in den Ausdrücken für A, B, C.., sodafs (wie auch von vornherein klar) die Bildung der Stationsnormalgleichungen (9) S. 498 davon gar nicht berührt wird.

Hat man aber bereits die allgemeinen Normalgleichungen aus den Beiträgen (11) S. 498 ermittelt, ohne jene Bedingungen zu berücksichtigen, so geschieht dieses nachträglich mittelst der Koefficienten jener Normalgleichungen in der Weise, wie es nachfolgendes Beispiel angiebt.

Seien x und y zwei zur Elimination bestimmte Unbekannte, dann kann man die Bedingungsgleichungen auf die Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} x &= i_0 + i_3 z + i_4 t + \cdots \\ y &= k_0 + k_3 z + k_4 t + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Irgend eine Fehlergleichung, deren ursprüngliche Form

$$\lambda = -l + ax + by + cz + dt + \cdots \quad \text{Gew. } g \tag{3}$$

ist, würde nun durch Elimination von x und y die neue Form erhalten haben:

$$\lambda = -(l - ai_0 - bk_0) + (c + ai_3 + bk_3)z + (d + ai_4 + bk_4)t + \cdots \text{Gew.} g. \tag{4}$$

In unentwickelter Form [*Ausgleichungsrechnung* S. 80 (6)] sind die Normalgleichungen in Bezug auf (3):

$$\underset{\text{für } x}{[a\lambda g] = 0} \qquad \underset{\text{für } y}{[b\lambda g] = 0} \qquad \underset{\text{für } z}{[c\lambda g] = 0} \quad \ldots; \tag{5}$$

dagegen ist in Bezug auf (4) die Normalgleichung für z in unentwickelter Form:

$$[(c + ai_3 + bk_3)\lambda g] = 0. \tag{6}$$

Hieraus erkennt man, dafs die Normalgleichung für z sich mittelst der, in Bezug auf die Fehlergleichungen (3) gebildeten Normalgleichungen (5) wie folgt zusammensetzt:

$$(Z) + (X)i_3 + (Y)k_3 = 0, \tag{7}$$

wenn (X), (Y) und (Z) diese letzteren Normalgleichungen der Reihe nach in entwickelter Form bezeichnen, in welchen Gleichungen man sich natürlich x und y mittelst der (2) durch $z, t \ldots$ dargestellt zu denken hat.

An Stelle der (5) treten im allgemeinen die (9) S. 498.

Wendet man das Verfahren II von S. 196 der *Ausgleichungsrechnung* auf vorstehendes Beispiel an, so werden bei der successiven Elimination der Unbekannten aus den Normalgleichungen nach *Gaufs'* Algorithmus zuletzt einige quadratische Koefficienten von Unbekannten null werden, weil sich ohne Azimut- und Basismessung nicht alle bestimmen lassen. Nichtsdestoweniger läfst sich die Rechnung ganz ohne Schwierigkeit fortsetzen, wenn man, sobald keine Unbekannten mit quadratischen Koefficienten mehr vorkommen, vorerst die folgenden Normalgleichungen für die Korrelaten k zu deren Elimination verwendet. (Vergl. auch *Ausgleichungsrechnung* S. 212 *D*.)

§ 12. **Von Einzelheiten** mag erwähnt werden, dafs es überflüssig ist, schon vor der Stationsausgleichung die Reduktionen des § 4 S. 488 anzubringen, wie auch daselbst bereits bemerkt wurde. Da immer dieselben Reduktionen auftreten, wo A oder B oder C... vorkommt, kann man sie sich zu diesen Gröfsen einstweilen geschlagen denken und mufs bei Bildung der allgemeinen Normalgleichungen schliefslich setzen (§ 10 S. 496 u. 497):

$$\left.\begin{array}{l} A = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - \text{Reduktion für das Azimut der 1. Richtung} \\ B = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \; 2. \quad " \\ C = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots - \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \; 3. \quad " \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}, \quad (1)$$

indem die Reduktion das Vorzeichen des beobachteten Azimuts α in den Fehlergleichungen hat.

In ganz gleicher Weise kann man bei Bildung der Fehlergleichungen zunächst für $\bar{\alpha}$ irgend einen andern vorläufigen Wert $\bar{\alpha}'$ setzen und hat nur zum Schlufs bei Substitution der Ausdrücke für A, B, C... zu vorstehenden Ausdrücken rechter Hand noch beizufügen bezw.:

$$\left.\begin{array}{l} -\bar{\alpha}_1' + \bar{\alpha}_1 \text{ für die 1. Richtung} \\ -\bar{\alpha}_2' + \bar{\alpha}_2 \quad " \quad " \; 2. \quad " \\ -\bar{\alpha}_3' + \bar{\alpha}_3 \quad " \quad " \; 3. \quad " \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}. \quad (2)$$

Kommen *lokale Richtungen* vor, d. h. solche, die nach Punkten gehen, die nicht in die Netzausgleichung Eingang finden, so fallen vorstehende Substitutionen fort, da die Netzausgleichung für diese Richtungen nur dazu dient, sie selbst noch weiter zu verbessern. Ist also die 3. Richtung z. B. eine solche, so führt man einfach das Symbol C in der allgemeinen Ausgleichung weiter.

Man wird aber leicht bemerken, dafs es zulässig und vorteilhaft ist, vor Bildung der allgemeinen Normalgleichungen dieses C aus den Stationsnormalgleichungen zu eliminieren. Die Normalgleichung für C, in welche nachträglich die Substitutionen für A, B, D,.. zu machen sind, dient nach Beendigung der allgemeinen Ausgleichung nur noch dazu, C zu finden und aufserdem bei der summarischen Bildung von $[\lambda\lambda g]$ einen Beitrag zu liefern (*Ausgleichungsrechnung* S. 107).

Wünscht man die Resultate der Stationsausgleichungen gesondert kennen zu lernen, so mufs man eine der Gröfsen A, B, C.. (entsprechend *Bessels* Verfahren) null setzen oder irgend wie annehmen

und die Normalgleichung derselben weglassen; denn die einzelne Station bestimmt selbstverständlich diese Gröfsen nicht völlig, sondern nur ihre Differenzen. Man erkennt dies überdies daran, dafs stets die Summe der Stationsnormalgleichungen (9) S. 498 identisch null ist. Die Resultate der Stationsausgleichungen sind im allgemeinen von der Form

$$\bar{\alpha}'_1 + A_0, \quad \bar{\alpha}'_2 + B_0, \quad \bar{\alpha}'_3 + C_0, \ldots, \tag{3}$$

wo A_0, B_0, $C_0 \ldots$ die für diese Symbole erhaltenen bezw. angenommenen Zahlwerte bedeuten.

Setzen wir umgedreht voraus, dafs *die Stationsausgleichungen nach Besselschem oder verwandtem Verfahren beendet* vorliegen, so sind die Normalgleichungen so umzuwandeln, dafs sie die hier vorausgesetzte Form (9) S. 498 erhalten. Denkt man sich aber in diesem System der Normalgleichungen entsprechend dem *Bessel*schen Verfahren etwa A und die 1. Gleichung weg, so ist es eine sehr einfache Sache, die Ergänzung zu bewirken, da die Summe der Koefficienten derselben Unbekannten in dem System (9) S. 498 immer null ist. Man braucht also für die Unbekannten B', $C' \ldots$ in den *Bessel*schen Normalgleichungen nur $B - A$, $C - A, \ldots$ zu setzen, die Glieder mit A in jeder Gleichung zu vereinigen und dann die negative Summengleichung zu bilden, in welcher man die Normalgleichung für A vor sich hat. Das gesamte Gleichungssystem ist das System (9) S. 498. Bei dieser Umformung fallen, indem man die Resultate der Stationsausgleichung acceptiert, die $(\mathfrak{al})$, $(\mathfrak{bl})$, $(\mathfrak{cl}) \ldots$ weg; man mufs aber nun in den, den Ausdrücken für $A, B, C \ldots$ beizufügenden Gliedern $\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}$ [siehe oben das System (2)] den $\bar{\alpha}'$ solche Werte geben, dafs die Differenzen derselben den Ergebnissen der Stationsausgleichungen entsprechen.

Bei dem Verfahren der preufsischen Landestriangulation werden in einem gewissen Fall von haus aus, wie wir es oben vorausgesetzt haben, für *alle* Richtungen einer Station Unbekannte $A, B, C \ldots$ eingeführt. Die entstehenden Normalgleichungen sind ohne weiteres beizubehalten und zwar in der ursprünglichen Form. Denn die, wie dort üblich, durch Beifügung einer Bedingungsgleichung zwischen den $A, B, C \ldots$ modificierte Form ist jetzt für die Gesamtausgleichung unbrauchbar und sie dient im vorliegenden Falle nur noch dazu, um rasch die Stationsergebnisse allein zu erhalten. Zum Zwecke der Erläuterung betrachten wir den Fall, dafs alle Winkel (Kombinationen von je 2 Richtungen) gleich oft gemessen seien (*Schreibers* Beobachtungsverfahren, s. o.). Es ist dies zugleich der einzige Fall, in welchem die Landestriangulation das erwähnte Verfahren benutzt,

sonst wendet sie das *Bessel*sche an. Dann also erhalten die Stationsnormalgleichungen die Form:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -(\mathfrak{a}\mathfrak{l}) + (\mathfrak{a}\mathfrak{a})A + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})B + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})C + \cdots \\ 0 = -(\mathfrak{b}\mathfrak{l}) + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})A + (\mathfrak{a}\mathfrak{a})B + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})C + \cdots \\ 0 = -(\mathfrak{c}\mathfrak{l}) + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})A + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})B + (\mathfrak{a}\mathfrak{a})C + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{4}$$

d. h. alle quadratischen Koefficienten sind einander gleich, ebenso alle nichtquadratischen; dabei ist für n Richtungen wegen des identischen Verschwindens der Summe aller Gleichungen

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) = -(n-1)(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \tag{5}$$

Die Landestriangulation fügt nun die Bedingungsgleichung

$$0 = A + B + C + \cdots \tag{6}$$

bei. Wird dieselbe mit $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ multipliziert und von den (4) abgezogen, so erhält man das modificierte System:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -(\mathfrak{a}\mathfrak{l}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a})A \\ 0 = -(\mathfrak{b}\mathfrak{l}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a})B \\ 0 = -(\mathfrak{c}\mathfrak{l}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a})C \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Ein ganz direkter Versuch führt aber leicht zu der Überzeugung, dafs bei der Gesamtausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen dieses System zur Bildung der Normalgleichungen *nicht* benutzt werden darf.

Man kann dies auch wie folgt erkennen, womit zugleich eine anschauliche Darstellung jenes Verfahrens gewonnen wird (die in anderen komplizierteren Fällen ebenfalls angewandt werden kann).

Wir ziehen im ursprünglichen System (4) den Ausdruck

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})(A + B + C + \cdots)$$

in $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,nu$ zusammen und schreiben also mit Rücksicht auf (5):

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -(\mathfrak{a}\mathfrak{l}) - u \cdot \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a})A \\ 0 = -(\mathfrak{b}\mathfrak{l}) - u \cdot \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a})B \\ 0 = -(\mathfrak{c}\mathfrak{l}) - u \cdot \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) + \frac{n}{n-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{a})C \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u = \frac{1}{n}(A + B + C + \cdots). \end{array}\right\} \tag{8}$$

Stellt man sich aber vor, dafs nur *ein* vollständiger Satz aller Richtungen mit dem Gewicht $\frac{n}{n-1}$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{a})$ beobachtet sei, so erhält man direkt ganz dieselbe *Form* der Gleichungen, wie der übliche Rechnungsgang zeigt [S. 497 u. 498 (6) bis (9)]. Man kann also den Komplex der Winkelbeobachtungen wie einen vollständigen Satz auffassen mit dem Gewicht $\frac{n}{n-1}$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{a})$: *äquivalenter Satz* (vergl. *Ausgleichungsrechnung* S. 164).

Da nun die Stationsnormalgleichungen die Form (8) annehmen und bei dem Verfahren des § 10 die Annahme (6) unzulässig ist, so müssen wir (8) d. h. nach Restitution des Ausdrucks für u: das System (4) und nicht (7) für die Netzausgleichung beibehalten.

Die modificierte Form (7) giebt jedoch die Winkel bei der Stationsausgleichung (und nur um diese handelt es sich in dem Falle) ganz korrekt, da $A, B, C \ldots$ nach (7) und (8) nur um eine Konstante, u selbst, verschieden erhalten werden.

Man sieht nun auch, beiläufig bemerkt, weshalb es zulässig ist, bei der Ausgleichung des Netzes nach *bedingten* Beobachtungen mit den Gleichungen (7) zu rechnen, ohne die Bedingungsgleichung $0 = A + B + C + \cdots$, weiter aufzuführen, wie es bei der Landestriangulation in der That üblich ist. Denn denkt man sich im vorliegenden Falle den (8) entsprechend anstatt $A, B, C \cdots$ $A - u, B - u, C - u \cdots$ geschrieben, so fällt doch u stets aus den Bedingungsgleichungen heraus, da die Gröfsen $A - u$, $B - u, C - u, \cdots$ nicht einzeln, sondern immer paarweise auftreten.

§ 13. Summarische Berechnung von $[\lambda\lambda g]$. Die allgemeinen Normalgleichungen für $x, y, z \ldots$ nehmen die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -(al) + (aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + \cdots \\ 0 = -(bl) + (ab)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + \cdots \\ 0 = -(cl) + (ac)\,x + (bc)\,y + (cc)\,z + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}, \tag{1}$$

wobei es ganz gleichgültig sein mufs, ob man hierzu durch die Stationsnormalgleichungen gelangt, oder direkt. Jedenfalls sind die $u, u' \ldots$ eliminiert zu denken.

Man hat nun nach allgemeinen Formeln in *Gauss*ischer Ausdrucksweise [*Ausgleichungsrechnung* S. 107 (9) bezw. S. 121 (8)]:

$$[\lambda\lambda g] = \mathrm{I} - \mathrm{II} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I} = \left\{[llg] - \frac{[gl]^2}{[g]} - \frac{[g'l']^2}{[g']} - \cdots\right\} \\ \mathrm{II} = \left\{\frac{(al)^2}{(aa)} + \frac{(bl\,.\,1)^2}{(bb\,.\,1)} + \frac{(cl\,.\,2)^2}{(cc\,.\,2)} - \cdots\right\} \end{array}\right\}, \tag{3}$$

wobei in $[\lambda\lambda g]$ und $[llg]$ die Summierung über untere und obere Indices und über alle Stationen erstreckt ist, bei den andern eckigen Klammern aber nur über untere Indices, d. h. über jeden einzelnen Satz.

Während Teil II vorstehenden Ausdruckes für $[\lambda\lambda g]$ sich mittelst der allgemeinen Normalgleichungen (1) berechnen läfst und auch in die Gestalt:

$$\mathrm{II} = \{(al)\,x + (bl)\,y + (cl)\,z + \cdots\} \tag{4}$$

gebracht werden kann, ist es für den ersten nötig, weiter zurückzugehen. Es werden aber bereits bei den Stationsausgleichungen die Summen zur Berechnung des Beitrags jeder Station für den Teil I ermittelt (vgl. die (7) S. 497), vorausgesetzt, dafs man bereits hierbei die definitiven, mittelst der aus den vorläufigen Werten der geographischen Koordinaten berechneten Azimute $\bar{\alpha}$ abgeleiteten l angewandt hat. Sind dazu indes, wie schon oben vorausgesetzt, andere Werte $\bar{\alpha}'$ verwandt, und sind auch anfangs die Reduktionen weggeblieben, so ist nun eine neue Formel nötig, welche, die Stationsrechnungen benutzend, eine möglichst einfache Bildung des Teiles I gestattet. Wir gehen zur Entwicklung derselben über.

Die Stationsausgleichungen geben anstatt der λ andere Verbesserungen e; auch $u, u' \ldots$, sowie $A, B, C \ldots$ haben hier nicht die Werte, wie sie der allgemeinen Ausgleichung entsprechen, sondern andere Werte, die wir durch den untern Index 0 auszeichnen. Da auch die l nicht notwendig schon diejenigen der allgemeinen Ausgleichung sind, mufs dafür ein andres Symbol $\mathfrak{l}$ gesetzt werden. Für die Richtungssätze einer Station hat man also zunächst mit Rücksicht auf die Stationsausgleichung allein nachstehende Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll|ll|l}
e_1 = -\mathfrak{l}_1 + u_0 + A_0 & \text{Gew. } g_1 & e'_1 = -\mathfrak{l}'_1 + u'_0 + A_0 & \text{Gew. } g'_1 & \ldots \\
e_2 = -\mathfrak{l}_2 + u_0 + B_0 & \quad\text{,,}\quad g_2 & e'_2 = -\mathfrak{l}'_2 + u'_0 + B_0 & \quad\text{,,}\quad g'_2 & \ldots \\
e_3 = -\mathfrak{l}_3 + u_0 + C_0 & \quad\text{,,}\quad g_3 & e'_3 = -\mathfrak{l}'_3 + u'_0 + C_0 & \quad\text{,,}\quad g'_3 & \ldots \\
\cdots & & \cdots & & \ldots
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Die Beziehung der $\mathfrak{l}$ zu den l ergiebt sich daraus, dafs für irgend eine Richtung (entsprechend dem in § 12 S. 501 vorausgesetzten Gange) zu setzen ist:

$$\mathfrak{l} = \alpha - \bar{\alpha}' \qquad l = \alpha - \bar{\alpha} + \text{Red. f. diese Richtung}$$

Man hat also allgemein:

$$l = \mathfrak{l} + \bar{\alpha}' - \bar{\alpha} + \text{Red. f. diese Richtung.} \tag{6}$$

Die Stationsfehlergleichungen geben nun in Verbindung mit der letzten Beziehung die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l|c||l|c||c} l_1 = -e_1 + u_0 + (1) & g_1 & l'_1 = -e'_1 + u'_0 + (1) & g'_1 & \ldots \\ l_2 = -e_2 + u_0 + (2) & g_2 & l'_2 = -e'_2 + u'_0 + (2) & g'_2 & \ldots \\ l_3 = -e_3 + u_0 + (3) & g_3 & l'_3 = -e'_3 + u'_0 + (3) & g'_3 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & . & \ldots\ldots\ldots & . & \ldots \end{array}\right\}, \quad (7)$$

wenn man die nachstehenden Abkürzungen benutzt:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) = (\bar{\alpha}'_1 + A_0) + Red_1 - \bar{\alpha}_1 & \text{f. d. 1. Richtung} \\ (2) = (\bar{\alpha}'_2 + B_0) + Red_2 - \bar{\alpha}_2 & \text{„ „ 2. „} \\ (3) = (\bar{\alpha}'_3 + C_0) + Red_3 - \bar{\alpha}_3 & \text{„ „ 3. „} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right\}, \quad (8)$$

in denen $\bar{\alpha}'_1 + A_0$, $\bar{\alpha}'_2 + B_0$, $\bar{\alpha}'_3 + C_0$, ... die Ergebnisse der Stationsausgleichungen für die Richtungen bedeuten (§ 12 S. 502).

Bildet man nun nach den Relationen (7) zunächst für *eine* Station durch Quadrieren und Addieren $[llg]$, so folgt, wenn bei llg und eeg nach oberen und unteren Indices summiert wird:

$$\left.\begin{array}{l} [llg] = [eeg] + \{u_0 + (1)\}^2 g_1 + \{u_0 + (2)\}^2 g_2 + \{u_0 + (3)\}^2 g_3 + \cdots \\ \qquad + \{u'_0 + (1)\}^2 g'_1 + \{u'_0 + (2)\}^2 g'_2 + \{u'_0 + (3)\}^2 g'_3 + \cdots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (9)$$

Alle doppelten Produkte fallen hierbei weg, da zufolge der Stationsnormalgleichungen deren Faktoren

$$[e_1 g_1] = [e_2 g_2] = [e_3 g_3] = \ldots$$

sowie

$$[eg] = [e'g'] = [e''g''] = \ldots$$

gleich null sind.

Andrerseits finden für die einzelnen Reihen (also Summierung nach unterem Index allein), die Beziehungen statt:

$$\left.\begin{array}{l} [lg] = u_0\,[g] + (1)\,g_1 + (2)\,g_2 + (3)\,g_3 + \cdots \\ [l'g'] = u_0\,[g'] + (1)\,g'_1 + (2)\,g'_2 + (3)\,g'_3 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}. \quad (10)$$

Man erhält hieraus leicht die Werte von $[lg]^2 : [g]$, $[l'g']^2 : [g']$, ... und damit für die einzelne Station die Gleichung:

$$[llg] - \frac{[lg]^2}{[g]} - \frac{[l'g']^2}{[g']} - \cdots = \left\{\begin{array}{l} [eeg] + (1)^2[g_1] + (2)^2[g_2] + (3)^2[g_3] + \cdots \\ - \dfrac{\{(1)g_1 + (2)g_2 + (3)g_3 + \cdots\}^2}{[g]} \\ - \dfrac{\{(1)g'_1 + (2)g'_2 + (3)g'_3 + \cdots\}^2}{[g']} - \ldots \end{array}\right\} (11)$$

Dieselbe gilt für jede Station und man hat daher für Teil I, um nicht die l der einzelnen Beobachtungen herstellen zu müssen, die Rechnung wie folgt zu führen. Es ist zu setzen:

$$
\mathrm{I} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Summe aller } [eeg] \text{ für alle Stationen nach Mafsgabe aller Stationsausgleichungen} \\ + \left\{ \begin{array}{c} \text{Summe aller } (i)^2 [g_i] \text{ für alle im Netze beobachteten Richtungen, wobei } [g_i] \\ \text{die Summe der Gewichte aller Einstellungen \textit{der i. Richtung} bedeutet} \end{array} \right\} \\ - \left\{ \begin{array}{c} \text{Summe aller } \dfrac{\{(1)g_1 + (2)g_2 + (3)g_3 + \cdots\}^2}{[g]} \text{ für alle Sätze, wobei } [g] \\ \text{die Summe der Gewichte aller Richtungen \textit{eines Satzes} bedeutet.} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (12)
$$

Sind die Teile I und II und damit $[\lambda\lambda g]$ nach den vorigen Formeln ermittelt, so erhält man damit also $[\lambda\lambda g]$ durch summarische Berechnung; wir denken uns hierbei die $[eeg]$ für die Stationen konsenquentermafsen ebenfalls nach den bekannten Summenformeln abgeleitet.

Zur Kontrolle kann man nunmehr, ebenso wie man die $[eeg]$ aus den numerisch im einzelnen ermittelten e berechnen kann, auch $[\lambda\lambda g]$ aus den einzeln berechneten λ ermitteln — oder man kann, um nicht wie bei den e auf die einzelnen Beobachtungen nochmals zurückgehen zu müssen, sich der weiterhin folgenden Kontrollformel bedienen.

Zieht man von jeder Fehlergleichung für λ die entsprechende für e ab, vergl. (6) S. 497 und (7) S. 506, und beachtet die Beziehung von l zu $\mathfrak{l}$, so erhält man für die Richtungssätze irgend einer Station:

$$
\left.\begin{array}{l|c||l|c||c}
\lambda_1 = e_1 + \delta - (1') & g_1 & \lambda'_1 = e'_1 + \delta' - (1') & g'_1 & \cdots \\
\lambda_2 = e_2 + \delta - (2') & g_2 & \lambda'_2 = e'_2 + \delta' - (2') & g'_2 & \cdots \\
\lambda_3 = e_3 + \delta - (3') & g_3 & \lambda'_3 = e'_3 + \delta' - (3') & g'_3 & \cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdots
\end{array}\right\}, \quad (13)
$$

worin gesetzt ist:

$$
\delta = u - u_0; \quad \delta' = u' - u'_0; \cdots \quad (14)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
(1') = (1) - (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots) \\
(2') = (2) - (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots) \\
(3') = (3) - (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}\right\}. \quad (15)
$$

Man erhält nun mittelst der vorigen Gleichungen durch Bildung aller $\lambda\lambda g$ für eine Station, so dafs also die Summen $[\lambda\lambda g]$ und $[eeg]$ sich auf oberen und unteren Index innerhalb einer Station beziehen:

$$
[\lambda\lambda g] = \left\{ \begin{array}{c} [eeg] + (1')^2[g_1] + (2')^2[g_2] + (3')^2[g_3] + \cdots \\ + \delta^2[g] + \delta'^2[g'] + \cdots \\ - 2(1')[\delta g_1] - 2(2')[\delta g_2] - 2(3')[\delta g_3] - \cdots . \end{array} \right\} \quad (16)
$$

Nun ist aber aus den Normalgleichungen für u_0 und u sofort abzuleiten, vergl. (7) S. 497:

$$u_0 = \frac{[gl] - A_0 g_1 - B_0 g_2 - C_0 g_3 - \cdots}{[g]}$$

$$u = \frac{[gl] - (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots) g_1 - (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots) g_2 - (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \cdots) g_3 - \cdots}{[g]}$$

und hieraus mit Rücksicht auf die (6) und (8):

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{(1')g_1 + (2')g_2 + (3')g_3 + \cdots}{[g]}. \\ \text{Ebenso ist:} \qquad \delta' &= \frac{(1')g'_1 + (2')g'_2 + (3')g'_3 + \cdots}{[g']} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

u. s. f. für alle anderen Sätze. Mittelst dieser Relationen folgt aber, indem man die Gleichung für δ mit $[g]\delta$, diejenige für δ' mit $[g']\delta'$ multipliziert, u. s. f. und dann addiert:

$$\delta^2[g] + \delta'^2[g'] + \cdots = (1')[\delta g_1] + (2')[\delta g_2] + (3')[\delta g_3] + \cdots. \tag{18}$$

Man erhält sonach für die einzelne Station:

$$[\lambda\lambda g] = \left\{ \begin{aligned} &[eeg] + (1')^2[g_1] + (2')^2[g_2] + (3'^2)[g_3] + \cdots \\ &- \frac{\{(1')g_1 + (2')g_2 + (3')g_3 + \cdots\}^2}{[g]} - \frac{\{(1')g'_1 + (2')g'_2 + (3')g'_3 + \cdots\}^2}{[g']} - \cdots \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

Durch Bildung der Summe $[\lambda\lambda g]$ für das ganze Netz ergiebt sich endlich die *Kontrollformel*:

$$[\lambda\lambda g] = \left\{ \begin{aligned} &\{\text{Summe aller } [eeg] \text{ für alle Stationen; aus den einzelnen } e \text{ zu berechnen}\} \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &\text{Summe aller } (i')^2[g_i] \text{ für alle Richtungen des Netzes, wobei } [g_i] \\ &\text{die Gewichtssumme aller Einstellungen der } i.\text{Richtung bedeutet} \end{aligned} \right\} \\ &- \left\{ \begin{aligned} &\text{Summe aller } \frac{\{(1')g_1 + (2')g_2 + (3')g_3 + \cdots\}^2}{[g]} \text{ für alle Sätze,} \\ &\text{wobei } [g] \text{ die Gewichtssumme aller Richtungen eines Satzes ist.} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

§ 14. **Fortsetzung.** Die Funktion von (1), (2), (3) ... in dem Ausdrucke für I nach Formel (12) S. 507) und die ganz ebenso gebildete Funktion von (1′), (2′), (3′) .. in dem Ausdrucke für $[\lambda\lambda g]$ nach (20) oben kann man in vielen Fällen mit Nutzen unter Anwendung der *Koefficienten der Stationsnormalgleichungen* bilden.

Setzt man in die nachstehenden Aggregate

$$\left.\begin{aligned} &u g_1 + u' g'_1 + \ldots \quad + A[g_1] \\ &u g_2 + u' g'_2 + \ldots \quad + B[g_2] \\ &u g_3 + u' g'_3 + \ldots \quad + C[g_3] \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

die Gewichte g, g' .. entsprechend den Richtungssätzen einer Station genommen und unter u, u' .. sowie A, B, C.. vorläufig ganz beliebige Werte verstanden, für u, u' ... die Werte:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{Ag_1 + Bg_2 + Cg_3 + \dots}{[g]} \\ u' &= -\frac{Ag'_1 + Bg'_2 + Cg'_3 + \dots}{[g']} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

so gehen sie, wie der Vergleich mit (7) bis (9) S. 497 u. 498 zeigt, in nachstehende Aggregate über:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathfrak{aa})\,A + (\mathfrak{ab})\,B + (\mathfrak{ac})\,C + \dots \\ &(\mathfrak{ab})\,A + (\mathfrak{bb})\,B + (\mathfrak{bc})\,C + \dots \\ &(\mathfrak{ac})\,A + (\mathfrak{bc})\,B + (\mathfrak{cc})\,C + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

deren Koefficienten völlig mit denen der Stationsnormalgleichungen übereinstimmen. Multipliziert man nun die Aggregate in beiden Formen mit $A, B, C\dots$ der Reihe nach, addiert sie dann und eliminiert aus der 1. Form $u, u'\dots$ mittelst der (2), so wird erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} &A^2[g_1] + B^2[g_2] + C^2[g_3] + \dots \\ &-\frac{\{Ag_1 + Bg_2 + Cg_3 + \dots\}^2}{[g]} \\ &-\frac{\{Ag'_1 + Bg'_2 + Cg'_3 + \dots\}^2}{[g']} \\ &-\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} = \\ &= \left\{\begin{aligned} &A\{(\mathfrak{aa})\,A + (\mathfrak{ab})\,B + (\mathfrak{ac})\,C + \dots\} \\ &+B\{(\mathfrak{ab})\,A + (\mathfrak{bb})\,B + (\mathfrak{bc})\,C + \dots\} \\ &+C\{(\mathfrak{ac})\,A + (\mathfrak{bc})\,B + (\mathfrak{cc})\,C + \dots\} \\ &+\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Hierin kann man für die noch willkürlichen Werte $A, B, C\dots$ setzen:

$$A = (1) \quad B = (2) \quad C = (3)\dots \tag{5}$$

oder

$$A = (1') \quad B = (2') \quad C = (3')\dots \tag{6}$$

und erhält damit Formeln zur stationsweisen Berechnung der betreffenden Glieder der Formeln (12) S. 507 und (20) S. 508. Die Stationsnormalgleichungen sind hierbei in der Form (9) S. 498 vorausgesetzt, wie es für die Bildung der zur gesamten Netzausgleichung gehörigen allgemeinen Normalgleichungen nach § 10 nötig ist.

An diese Form ist man aber nicht gebunden, sondern kann auch die *Bessel*sche Form anwenden. Zieht man, um dies nachzuweisen, von dem Ausdrucke rechter Hand in (4) den Ausdruck ab:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad A\{(\mathfrak{aa})A+(\mathfrak{ab})A+(\mathfrak{ac})A+\ldots\} \\ +B\{(\mathfrak{ab})A+(\mathfrak{bb})A+(\mathfrak{bc})A+\ldots\} \\ +C\{(\mathfrak{ac})A+(\mathfrak{bc})A+(\mathfrak{cc})A+\ldots\} \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\},$$

d. h. null, und setzt man dann $B - A = B'$, $C - A = C' \ldots$, so folgt der gleichwertige Ausdruck:

$$\left\{\begin{array}{l} \quad B'\{(\mathfrak{bb})B'+(\mathfrak{bc})C'+\ldots\} \\ +C'\{(\mathfrak{bc})B'+(\mathfrak{cc})C'+\ldots\} \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\}, \tag{7}$$

wie man successive mit Rücksicht auf die Beziehungen $(\mathfrak{aa}) + (\mathfrak{ab}) + (\mathfrak{ac}) + \ldots = 0$, $(\mathfrak{ab}) + (\mathfrak{bb}) + (\mathfrak{bc}) + \ldots = 0$, u. s. f., ohne Mühe findet.

Dieses zeigt, dafs man auch mit den Koefficienten der *Bessel*schen Stationsnormalgleichungen rechnen kann, wenn man in (4) rechter Hand den gleichwertigen Ausdruck (7) einführt und darin setzt:

$$\left.\begin{array}{ll} B' = (2) - (1) \quad C' = (3) - (1) \ldots & \text{für die Anwendung auf (12) S. 507} \\ B' = (2') - (1') \quad C' = (3') - (1') \ldots & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{(20) S. 508.} \end{array}\right\} \tag{8}$$

Nunmehr ergiebt sich mittelst der Koefficienten der reducierten Normalgleichungen endlich noch eine 3. Form der rechten Seite in (4) (*Ausgleichungsrechnung* S. 101). Man kann nämlich anstatt (7) schreiben:

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{bb})\left\{B' + \frac{(\mathfrak{bc})}{(\mathfrak{bb})}C' + \frac{(\mathfrak{bd})}{(\mathfrak{bb})}D' + \cdots\right\}^2 \\ \qquad + (\mathfrak{cc}.1)\left\{C' + \frac{(\mathfrak{bd}.1)}{(\mathfrak{cc}.1)}D' + \cdots\right\}^2 \\ \qquad\qquad + (\mathfrak{dd}.2)\{D' + \cdots\}^2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\}, \tag{7*}$$

für welche, durch successive Elimination aus (7) in bekannter Weise abzuleitende Umformung wir den Nachweis übergehen.

Mit dem letzten Ausdruck sind wir bei dem, *den einzelnen Stationsmessungen äquivalenten System von Winkelfunktionen* angelangt. Ein Vergleich mit *Ausgleichungsrechnung* S. 166 (5) wird zeigen, dafs die geschlungenen Parenthesen der einzelnen Zeilen des Ausdrucks (7*), wenn man für B', C', $D' \ldots$ die Zahlwerte zufolge einer Stationsausgleichung setzt, ein dem Komplex der Stationsmessung äquivalentes System von Funktionen der Winkel zwischen der 1. und den anderen Richtungen vorstellen. Wendet man aber die 1. Reihe der Substitutionen (8) an, so erhält man die negativen Änderungen dieser Funktionen durch Einführung der Näherungswerte $\bar{\alpha}$ und der Reduktionen beim Übergang zur Netzausgleichung. Setzt man dagegen

die 2. Substitutionen (8), so erhält man die negativen Verbesserungen derselben Funktionen zufolge der Netzausgleichung. Der Ausdruck (7*) stellt dann die in ihre Gewichte multiplizierte Quadratsumme dieser Verbesserungen vor.

§ 15. Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit; allgemeine Bemerkungen. Das angegebene Ausgleichungsverfahren gilt nicht nur, wenn die $g = 1$ oder null sind, sondern allgemein; es setzt aber voraus, dafs erhebliche Fehlerquellen bei der Netzausgleichung nicht hervortreten, dafs also die Beobachtungsfehler nicht zum Teil durch konstant oder systematisch wirkende Ursachen erzeugt werden. Wir gehen hier auf die in dieser Beziehung bemerkenswerten Fragen: wie im letzteren Falle die Ausgleichung zu modificieren wäre, ob und wann für einzelne Richtungen oder Messungen überhaupt ungleiche Gewichte einzuführen sind und welches die Bedeutung der aus der Ausgleichung folgenden mittleren Fehler ist, nicht ein.*) Wir erwähnen nur die rein formelle Beziehung, dafs der m. F. der Gewichtseinheit für die einzelne Station zufolge der Stationsausgleichung sich mittelst des zugehörigen $[eeg]$ nach der bekannten Formel ergiebt:

$$\pm\sqrt{\frac{[eeg]}{R - S - m + 1}}, \tag{1}$$

worin R die Anzahl der Richtungsbeobachtungen, S die Anzahl der Sätze und m die Anzahl der Richtungen bedeutet.

Die Widersprüche der Netzausgleichung allein geben als m. F. der Gewichtseinheit:

$$\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g] - [eeg]}{M - 3N + F + G + 3}}, \tag{2}$$

worin M die Anzahl der Richtungen von den $N - F$ Standpunkten nach den N Netzpunkten überhaupt und G die Anzahl der Grundlinien bedeutet. Aus (1) und (2) zusammen folgt endlich durch Addition der Zähler und Nenner:

$$\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda g]}{[R] - [S] - 2N + M - [m] + G + 3}}. \tag{3}$$

Die Nenner entsprechen in jedem Falle der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen (*Ausgleichungsrechnung* S. 208 und 325**)).

*) Über diese Fragen vergl. die erwähnten *Abhandlungen* von *Schreiber* und das mehrgenannte Referat über die *Dänische Gradmessung*, sowie diese selbst.

**) Bezüglich unserer Formel für die Anzahl der Winkelgleichungen ebenda S. 326 sei hier beiläufig ergänzend bemerkt, dafs sie zufolge ihrer Ableitung nur für den Fall gilt, wo jeder Standpunkt wenigstens mit 2 anderen solchen durch gegenseitige Richtungen verbunden ist. Dies ist allerdings in guten Dreiecksnetzen immer der Fall.

Bei ihrer Bildung ist natürlich angenommen, dafs solche Punkte nicht als Netzpunkte gezählt sind, welche nicht in die Netzausgleichung aufgenommen wurden resp. werden konnten, gleichwohl aber in den Stationsausgleichungen vorkommen. Wenn dergleichen überhaupt nicht vorhanden sind, so ist $M - [m] = 0$.

Die in den letzten Paragraphen angegebene Ausgleichungsmethode wird zwar bei einfachen Ketten komplizierter als die übliche nach bedingten Beobachtungen, aber sie gestattet mit Leichtigkeit den *Zusammenschlufs verschiedener Netze*, welche in gemeinsamen Punkten zusammentreffen, nicht blos in der Weise, dafs die Resultate der Einzelausgleichungen einiger Netze ganz oder teilweise beibehalten werden, sondern auch so, dafs der Gesamtkomplex eine Ausgleichung aus einem Gusse erfährt.

Zu letzterem Zwecke ist aus den Normalgleichungen der verschiedenen Netzteile durch Addition derjenigen Gleichungen, welche derselben Unbekannten angehören, ein *Hauptsystem* zu bilden. Der Übersichtlichkeit wegen wird man jene Addition erst vornehmen, nachdem bereits die Unbekannten, welche nicht in mehreren Netzteilen erscheinen, eliminiert sind: ein Verfahren, welches ganz streng ist.

Wie sich die Ausgleichung gestaltet, wenn die Resultate der Ausgleichung der Einzelnetze teilweise beibehalten werden sollen, bedarf ebenso wenig der Besprechung, wie die bereits erwähnte Einschaltung von Punkten in ein fertiges Netz, da hier das allgemeine Verfahren keine weitere Änderung erleidet, als dafs einzelne Unbekannte *gegebene* Werte annehmen.

---

12. Kapitel.

Messungen auf der physischen Erdoberfläche und näherungsweise Bestimmung einzelner Teile des Geoids.

§ 1. **Referenzellipsoid und Lotabweichung.** Bei allen Betrachtungen seit S. 134 ist angenommen worden, dafs die Lotrichtungen der geodätischen Operationspunkte auf der physischen Erdoberfläche die geradlinigen Lotlinien einer mathematischen Erdoberfläche seien, welche die Gestalt eines schwachabgeplatteten Rotationsellipsoids hat. Indes schon Kapitel 1 u. 2 der Einleitung setzen aus einander, inwiefern dies irrig ist. Darnach besitzen weder die mathematische Erdoberfläche, noch überhaupt Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche jene Form in Strenge, sondern nur angenähert. Auch

haben diese Niveauflächen nicht genau parallele Lage zu einander, weshalb die Lotlinien schwach gekrümmt sind und von Lotrichtungen bei mathematischen Auseinandersetzungen unterschieden werden müssen.

Wenn nun also bisher für die Reduktion der geodätischen Messungen ein solches Rotationsellipsoid vorausgesetzt wurde, so ist das keinesfalls streng. Aber die Unbekanntschaft mit der genaueren Gestaltung der Niveauflächen nötigt vorerst dazu, auch in der Praxis jene Voraussetzung zu machen: es ist eine 1. Annäherung.

Nehmen wir indessen einmal an, dafs die Figur der Niveauflächen und demgemäfs auch der Verlauf der Lotlinien bekannt seien. Wie würde man alsdann die geodätischen Messungen auf der physischen Erdoberfläche reduzieren? Würde man insbesondere auf eine der Niveauflächen reduzieren?

Hier lautet die Antwort: Nein. Wie schon in der Einleitung erwähnt, besitzen das Geoid und ebenso alle der physischen Erdoberfläche benachbarten Niveauflächen aufser kontinentalen rasch wechselnde lokale Unregelmäfsigkeiten. Diese letzteren äufsern sich namentlich als beträchtliche Variationen der Gröfse der Krümmungsradien, wobei Diskontinuitäten oder kontinuirliche Variationen, die praktisch solchen gleich zu achten, nicht ausgeschlossen sind. Die lokale Veränderlichkeit ist der Geschwindigkeit nach dieselbe, wie bei einem Hügelland, ohne dafs es indes zur Bildung von Thälern (Konkavitäten) kommt, weil der Krümmungsradius voraussichtlich doch stets nach innen gerichtet bleibt.

Solche unregelmäfsige Flächen eignen sich nicht zur bequemen mathematischen Behandlung. Namentlich würden Reihenentwicklungen, wie bereits S. 22 bemerkt wurde, schon für kurze geodätische Linien von der Länge der Dreiecksseiten 1. Ordnung ganz unpraktikabel, ja zum Teil unmöglich werden, da auf solche Strecken bereits zahlreiche Variationen der Krümmung stattfinden.

Man hat allerdings die Formeln der Geodäsie zum Teil für beliebige Flächen entwickelt, u. a. diejenigen für geodätische Dreiecke und für die Abweichung des vertikalen Schnitts von der geodätischen Linie. Allein für wirkliche Niveauflächen sind diese Entwicklungen gänzlich wertlos, da sie viel zu wenig Glieder haben und oftmals nicht konvergieren würden. (Ebenso wertlos sind natürlich die Schlüsse, welche aus jenen Entwicklungen für die Allgemeingültigkeit der üblichen geodätischen Methoden gezogen worden sind.)

Die mathematische Behandlung verlangt eine einfache Fläche und, wie früher bemerkt, genügt das schwach abgeplattete Rotationsellipsoid nicht nur, sondern ist auch trefflich geeignet wegen seiner be-

quemen Formeln. Der Einwand, welcher sich gegen seine Anwendung erheben läfst, dafs ein nichthomogener, flüssiger Körper keine rotationsellipsoidischen Niveauflächen hat, also selbst in diesem Idealfalle gerade durch die Einführung des Ellipsoids Lotabweichungen rechnungsmäfsig entstehen, kommt dagegen gar nicht in betracht, weil die thatsächlichen Verhältnisse der Massenlagerung weit gröfsere Lotabweichungen erzeugen.

Das Ellipsoid nun, welches an Stelle der mathematischen Erdoberfläche als Projektionsfläche dient, nennen wir im allgemeinen ein *Referenzellipsoid.* Es ist nämlich keineswegs zu verwechseln mit einem sich dem Geoid überhaupt möglichst anschmiegenden *günstigsten Rotationsellipsoid*, dessen Axe in die Erdaxe, dessen Mittelpunkt in den Erdschwerpunkt fällt: dem *Erdellipsoid.* Es ist vielmehr, was später klar werden wird, nur ein solches, dessen Axe bei unbestimmtem Abstand von der Erdaxe parallele Lage zu dieser hat, und welches ferner in der Gegend der betreffenden geodätischen Operationen (in weiter zu erörternder Weise) dem Geoid nahe liegt und es schneidet.

Die Lotrichtung eines geodätischen Punktes weicht nun von der Lotlinie des Referenzellipsoids, welche durch ihn hindurchführt, ab um die *Lotabweichung.* Diese Lotabweichungen sind selbstverständlich verschieden je nach der Wahl der Dimensionen des Ellipsoids, sowie seiner Lage und sie dürfen nicht mit den Lotabweichungen gegen die Lotlinien des am besten anschliefsenden obengenannten Ellipsoids (des Erdellipsoids) verwechselt werden, die wir als *absolute* Lotabweichungen oder auch als *Lotablenkungen* bezeichnen dürfen, wenn es gilt, sie von jenen zu unterscheiden, die nur *relative* sind.

Im allgemeinen halten wir die Bezeichnung Lotabweichung für die zutreffendste, weil sie die Meinung ausschliefst, als habe man es nur mit der Wirkung lokaler Massenunregelmäfsigkeiten zu thun.

§ 2. **Reduktion der Horizontalwinkel.** Indem wir jetzt voraussetzen, dafs die Lotabweichungen der geodätischen Operationspunkte auf der physischen Erdoberfläche gegen ein Referenzellipsoid bekannt seien, lassen sich die Gröfsen ermitteln, welche an den gemessenen Horizontalwinkeln angebracht werden müssen, um sie auf die Vertikalschnitte beziehen zu können, die ihre durch die ellipsoidischen Lotlinien auf dem Ellipsoid entstehend Projektionen verbinden.

Um den Standpunkt P_1 auf der physischen Erdoberfläche legen wir eine Hilfskugel von beliebigem Radius, der als Einheit der Längen dient und verschieben alle in betracht kommenden Geraden parallel durch P_1. Fig. 41 zeigt die Durchschnitte dieser Parallelen mit der Oberfläche der Hilfskugel; die Bögen gröfsten Kreises zwischen den-

selben geben die Winkel zwischen den Linien, und die Winkel zwischen den größten Kreisen geben die Flächenwinkel an. Insbesondere stellt Z den Durchschnitt der Lotlinie des Ellipsoids, welche durch P_1 führt, vor und Z' den Durchschnitt der wirklichen Lotrichtung in P_1. Ersteres ist das *ellipsoidische Zenith*, letzteres das *wirkliche Zenith* von P_1 an der Hilfskugel (Himmelskugel).

N sei ferner der Nordpol, als Durchschnitt des *nördlichen* Endes einer Parallelen durch P_1 zur Axe des Referenzellipsoids, die wir der Erdaxe parallel voraussetzen, mit der Hilfskugel, und P_2 bezeichne den Durchschnitt der scheinbaren Richtung (d. i. der letzten Tangente des Lichtstrahls) von P_1 nach P_2 mit der Hilfskugel.

Im übrigen werden die Bezeichnungen an den Linien von Fig. 41 verständlich sein.

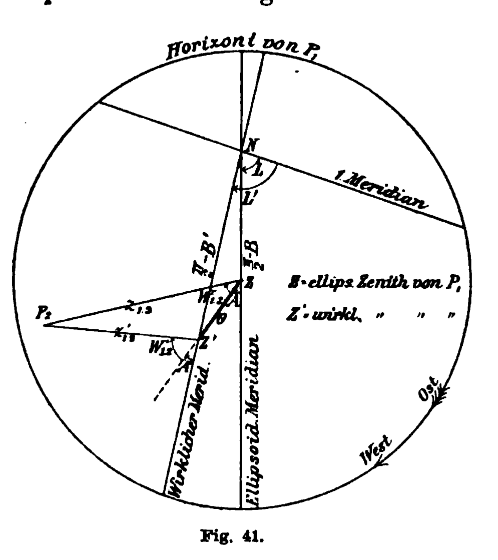


Fig. 41.

$ZZ' = \Theta$ bezeichnet die Lotabweichung; sie hat das ellipsoidische Azimut A und das wirkliche Azimut $180^0 + A'$.

$A + W_{1.2}$ ist das ellipsoidische Azimut der scheinbaren Richtung nach dem Objekt P_2 und $A' + W'_{1.2}$ ist das entsprechende wirkliche Azimut.

$z_{1.2}$ ist die ellipsoidische Zenithdistanz, $z'_{1.2}$ ist die wirkliche Zenithdistanz der scheinbaren Richtung nach P_2. Denkt man sich in Fig. 41 noch die scheinbare Richtung nach einem andern Objekt P_3 angegeben, so wird $A + W_{1.3}$ das ellipsoidische, $A' + W'_{1.3}$ das wirkliche Azimut der scheinbaren Richtung nach dem Objekt P_3. Es ist daher die Reduktion des gemessenen Horizontalwinkels $\left(\frac{P_2 P_3}{P_1}\right)$ auf die ellipsoidische Lotlinie gleich

$$(W_{1.3} - W_{1.2}) - (W'_{1.3} - W'_{1.2}) \text{ oder } (W_{1.3} - W'_{1.3}) - (W_{1.2} - W'_{1.2}). \quad (1)$$

Das sphärische Dreieck $ZZ'P_2$ giebt nun ohne weiteres nach der 1. *Neper*schen Analogie S. 78 (6) folgende Gleichung zur Bestimmung von $W_{1.2} - W'_{1.2}$:

$$\tan \frac{z_{1.2} + z'_{1.2}}{2} = \frac{\sin \frac{W'_{1.2} + W_{1.2}}{2}}{\sin \frac{W'_{1.2} - W_{1.2}}{2}} \tan \frac{\Theta}{2}. \quad (1)$$

Hieraus folgt:

$$\sin \frac{W'_{1.2} - W_{1.2}}{2} = \tan \frac{\Theta}{2} \sin \frac{W'_{1.2} + W_{1.2}}{2} \cot \frac{z'_{1.2} + z_{1.2}}{2} \qquad (2)$$

oder in stets ausreichender Annäherung:

$$W_{1.2} - W'_{1.2} = -\Theta \cot z'_{1.2} \sin W'_{1.2} + \cdots. \qquad (3)$$

Wenn man das wirkliche Azimut von P_2 in P_1 mit $a'_{1.2}$ bezeichnet, so kann man noch schreiben:

$$W_{1.2} - W'_{1.2} = -\Theta \cot z'_{1.2} \sin (a'_{1.2} - A') + \cdots. \qquad (4)$$

Zur *Reduktion des Horizontalwinkels* $\left(\begin{smallmatrix} P_2 P_3 \\ P_1 \end{smallmatrix}\right)$ auf die ellipsoidische Lotlinie hat man hiernach den Ausdruck:

$$\Theta \left(\cot z'_{1.2} \sin (a'_{1.2} - A') - \cot z'_{1.3} \sin (a'_{1.3} - A')\right) + \cdots, \qquad (5)$$

wobei man Θ in Sekunden nehmen mufs, um die Reduktion in Sekunden zu erhalten.

Die Auflösung der Sinus in (5) giebt für die Reduktion anstatt (5) den Ausdruck:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi (\cot z'_{1.2} \sin a'_{1.2} - \cot z'_{1.3} \sin a'_{1.3}) \\ -\eta (\cot z'_{1.2} \cos a'_{1.2} - \cot z'_{1.3} \cos a'_{1.3}) + \cdots \end{array}\right\}, \qquad (6)$$

wobei gesetzt sind:

$$\Theta \cos A' = \xi \qquad \Theta \sin A' = \eta. \qquad (7)$$

Nachdem vorstehende Reduktion (6) am Horizontalwinkel angebracht ist, bezieht sich derselbe auf die Voraussetzung, dafs in P_1 die Vertikalaxe des Theodolits der ellipsoidischen Lotrichtung folgt, und es ist strenggenommen noch wegen Lateralrefraktion zu korrigieren (S. 489).

Damit aber der Winkel dem Flächenwinkel zwischen den Vertikalschnitten entspricht, welche von der durch die ellipsoidische Lotlinie bewirkten Projektion des Punktes P_1 nach den entsprechenden Projektionen der Punkte P_2 und P_3 gehen, mufs noch weiter korrigiert werden, wie früher fürs Ellipsoid schon angegeben ist, wegen der Höhe der Objekte P_2 und P_3 über dem Ellipsoid (die Reduktion darf also nicht mittelst der Meereshöhe der Objekte erfolgen). Die Höhe des Standpunkts P_1 aber ist gleichgültig.

Aufserdem ist, wie früher angegeben, eventuell der Übergang von den Vertikalschnitten zu den geodätischen Linien zu bewirken.

Dies ist der Theorie nach die Reihe der Reduktionen. In der Praxis treten aber erhebliche Vernachlässigungen ein, worüber weiterhin mehr.*)

§ 3. Reduktion der Azimute, geographischen Breiten und Längen. Das sphärische Dreieck NZZ' giebt zunächst zur Entwicklung der Differenz $A - A'$ mittelst der 1. *Neper*schen Analogie S. 78 (6):

$$\cot \frac{B' + B}{2} = \frac{\sin \frac{A + A'}{2}}{\sin \frac{A - A'}{2}} \tan \frac{\Theta}{2} \tag{1}$$

oder

$$\sin \frac{A - A'}{2} = \tan \frac{\Theta}{2} \tan \frac{B' + B}{2} \sin \frac{A' + A}{2}. \tag{2}$$

Hieraus folgt stets ausreichend genau, insofern starke Annäherungen an die Pole in Wirklichkeit gegenwärtig ausgeschlossen sind und bei dem geringen Betrage von Θ daher $\sin (A - A')$ stets sehr klein bleiben wird:

$$A - A' = \Theta \tan B' \sin A' + \cdots. \tag{3}$$

Nun ist aber das wirkliche Azimut von P_2 in P_1, d. h. $a'_{1.2}$, gleich $A' + W'_{1.2}$ und das entsprechende ellipsoidische Azimut $a_{1.2}$ gleich $A + W_{1.2}$. Man hat daher als *Reduktion des wirklichen aufs ellipsoidische Azimut* den Wert

$$a_{1.2} - a'_{1.2}, \text{ d. i. } (A - A') + (W_{1.2} - W'_{1.2})$$

oder

$$\Theta \left(\tan B' \sin A' - \cot z' \sin (a'_{1.2} - A')\right) + \cdots. \tag{4}$$

Dafür kann man mit Rücksicht auf die (7) oben auch schreiben:

$$-\xi \cot z' \sin a'_{1.2} + \eta (\tan B' + \cot z' \cos a'_{1.2}) + \cdots. \tag{5}$$

Es mag hierbei noch bemerkt werden, dafs die Azimute ebenso wie die Horizontalwinkel strenggenommen wegen Lateralrefraktion zu korrigieren sind, und dafs ferner, insoweit es sich um irdische Objekte handelt, wegen der Höhe derselben über dem Referenzellipsoid und eventuell wegen des Übergangs von dem Vertikalschnitt zur geodätischen Linie zu reduzieren ist.

---

*) Es kann gleich hier bemerkt werden, dafs eigentlich die Korrektion wegen Lateralrefraktion zu *beginnen* hätte. Da man sie aber doch nur nach der Voraussetzung einer ellipsoidischen Gestalt der Geoidfläche in Rechnung ziehen kann, so geht die Reduktion wegen Lotabweichung ganz passend voran

In Bezug auf die geographische Breite giebt Fig. 41 Dreieck NZZ' unter Anwendung der 2. *Neper*schen Analogie S. 78 (6) die Gleichung:

$$\tan\frac{B'-B}{2} = -\frac{\cos\frac{A+A'}{2}}{\cos\frac{A-A'}{2}}\tan\frac{\Theta}{2}. \qquad (6)$$

Hieraus folgt, abgesehen von der Nähe der Pole, in völlig ausreichender Annäherung, als *Reduktion der wirklichen geographischen Breite auf die ellipsoidische Breite:*

$$B - B' = +\Theta\cos A' + \cdots = +\xi + \cdots. \qquad (7)$$

Für den Längenunterschied, abgerechnet von irgend einem 1. Meridian, erhält man aus dem Dreieck NZZ':

$$\sin(L' - L) = \sin\Theta\frac{\sin A}{\cos B'}. \qquad (8)$$

Es ist daher in stets ausreichender Näherung, wobei nur wieder die nächste Nähe der Pole ausgeschlossen ist, die *Reduktion der wirklichen geographischen Länge auf die ellipsoidische:*

$$L - L' = -\Theta\sin A\sec B' + \cdots = -\eta\sec B' + \cdots. \qquad (9)$$

Man wird bemerken, dafs die Reduktionen in Azimut und in geographischer Länge wesentlich bezw. ausschliefslich von η, der westlichen Komponente der Lotabweichung Θ, dagegen sehr wenig oder gar nicht von ξ, der südlichen, abhängen. Hierdurch ist ein wertvoller Zusammenhang beider Reduktionen gegeben, der sich weiterhin fruchtbar erweisen wird.

§ 4. Reduktion der Zenithdistanzen; trigonometrische Höhenmessung.

Das sphärische Dreieck $ZZ'P_2$ in Fig. 41 giebt:

$$\cos z_{1.2} = \cos z'_{1.2}\cos\Theta - \sin z'_{1.2}\sin\Theta\cos W'_{1.2}. \qquad (1)$$

Hieraus folgt:

$$\cos z_{1.2} - \cos z'_{1.2} = -\sin\Theta\sin z'_{1.2}\cos W'_{1.2} - 2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos z'_{1.2};$$

so lange nun als z' sich auf irdische Objekte bezieht, also keinesfalls klein ist, kann man in ausreichender Näherung hiernach zur Reduktion der wirklichen auf die ellipsoidische Zenithdistanz setzen:

$$z_{1.2} - z'_{1.2} = +\Theta\cos W'_{1.2} + \cdots = \Theta\cos(a'_{1.2} - A') + \cdots,$$

oder

$$z_{1.2} - z'_{1.2} = \xi\cos a'_{1.2} + \eta\sin a'_{1.2} + \cdots. \qquad (2)$$

Indem aber $\zeta'_{1.2}$ die beobachtete Zenithdistanz bezeichnet, ist dieselbe behufs Anwendung auf eine trigonometrische Höhenmessung erstens wegen Höhenrefraktion, zweitens nach Formel (2) zu verbessern. Die erstere Korrektion wird man wie gewöhnlich auf die Form $\frac{1}{2}\, k_1 \gamma'$ bringen können, worin k_1 den Refraktionskoefficienten in P_1 und γ' den Konvergenzwinkel zwischen den Lotrichtungen in P_1 und P_2 bezeichnet. Den Koefficienten k_1 nehmen wir vorläufig als bekannt an.

Um nun zunächst zu einer Figur zu gelangen, erinnern wir uns, dafs die ellipsoidischen Lotlinien sich im allgemeinen nicht schneiden und zwischen P_1 und P_2 keine gemeinsame Vertikalebene existiert. Als Bildfläche benutzen wir daher eine Ebene, die parallel zu beiden ellipsoidischen Lotlinien inmitten zwischen ihnen liegt und projicieren darauf die Lotlinien.

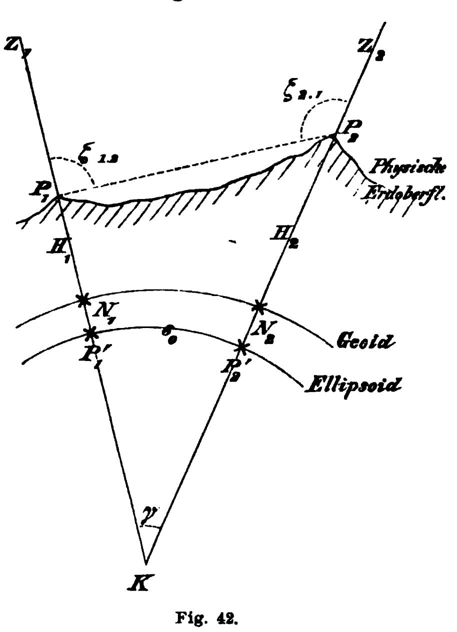


Fig. 42.

Die auf diesen Lotlinien abgemessenen Strecken H und N (Fig. 42) projicieren sich natürlich richtig, ebenso γ, der Winkel zwischen denselben; nicht ganz korrekt ist es dagegen, den Bogen s_0 der Fig. 42 als Länge der geodätischen Linie zwischen P'_1 und P'_2 zu nehmen, und ebenso wenig ist der mit $\zeta_{1.2}$ bezeichnete Winkel genau gleich $\zeta_{1.2}$, der von Refraktion befreiten ellipsoidischen Zenithdistanz. Da aber die Entfernung der Punkte $P_1 P_2$ im vorliegenden Falle stets eine im Vergleiche zu a_0 kleine sein wird, so wird auch der kleinste Abstand der ellipsoidischen Lotlinien klein sein im Verhältnis zu $P'_1 P'_2$.*) Da sie also verhältnismäfsig sehr dicht an der Projektionsebene gelegen sind, ergiebt sich leicht weiter, dafs man ohne merkbaren Fehler in Fig. 42

*) Mit Rücksicht auf S. 137 (9) und Fig. 10, sowie nach S. 41 (9) folgt näherungsweise als kleinster Abstand der Lotlinien, abgesehen vom Zeichen:

$$\mathfrak{a} \cos^2 B \sin 2a \,.\, s_0 \,,$$

worin B und a mittlere geographische Breite und mittleres Azimut sind, $\mathfrak{a}$ aber die Abplattung bezeichnet. Der Abstand ist sonach sicher kleiner als $\frac{1}{300}$ der Distanz und der Neigungswinkel der Linien $P_1 P_2$ und s_0 zur Projektionsebene beträgt im Maximum kaum $\frac{1}{5}^0$.

s_0 in der That als geodätischen Abstand $P_1'P_2'$ auf dem Referenzellipsoid und Winkel $Z_1P_1P_2$ als $\zeta_{1.2}$ bezeichnen darf.

Das Dreieck P_1P_2K giebt nun nach dem Tangentensatz der ebenen Trigonometrie:

$$(P_2K - P_1K) : (P_2K + P_1K)$$
$$= \tan\frac{1}{2}(\zeta_{2.1} - \zeta_{1.2}) : \tan\left(180^0 - \frac{1}{2}(\zeta_{2.1} + \zeta_{1.2})\right), \qquad (3)$$

oder mit Rücksicht darauf, daſs $\zeta_{2.1} = \gamma + 180^0 - \zeta_{1.2}$ ist:

$$(H_2 - H_1) + (N_2 - N_1)$$
$$= 2\left(\varrho_{1.2} + \frac{1}{2}(H_2 + H_1 + N_2 + N_1)\right)\tan\frac{1}{2}\gamma\tan\frac{1}{2}(\zeta_{2.1} - \zeta_{1.2}) - E_{2.1}. \quad (4)$$

Hierin bezeichnet das Glied $E_{2.1}$ die Differenz $P_2'K - P_1'K$, welche von den Autoren gewöhnlich gleich null angesetzt wird.

$\varrho_{1.2}$ ist für das arithmetische Mittel von $P_2'K$ und $P_1'K$ eingeführt; man kann offenbar in grofser Annäherung setzen:

$$s_0 = \gamma\varrho_{1.2}\,.$$

Setzen wir noch für $\tan\frac{1}{2}\gamma$ die Reihenentwicklung und eliminieren auch im letzten Faktor $\zeta_{2.1}$, so folgt als Formel für sogenannte einseitige Zenithdistanzen:

$$\left.\begin{aligned} &(H_2 - H_1) + (N_2 - N_1) = s_m\left(1 + \frac{1}{12}\frac{s_0^2}{\varrho_{1.2}^2}\right)\cot\left(\zeta_{1.2} - \frac{1}{2}\gamma\right) - E_{2.1} + \cdots \\ &\text{wobei} \\ &\qquad s_m = s_0\left(1 + \frac{H_1 + H_2 + N_1 + N_2}{2\varrho_{1.2}}\right) \\ &\qquad \underset{\text{in Sek.}}{\gamma} = \varrho''\,\frac{s_0}{\varrho_{1.2}}, \\ &\qquad \zeta_{1.2} = z_{1.2}' + \frac{1}{2}k_1\gamma' + \xi_1\cos a_{1.2}' + \eta_1\sin a_{1.2}' + \cdots. \end{aligned}\right\} (5)$$

An ξ und η sind hier die Indices 1 angebracht, um anzudeuten, daſs sie die Komponenten der Lotabweichung im Standpunkte P_1 bezeichnen.

Man erhält ferner als Formel für gegenseitige Zenithdistanzen:

$$\left.\begin{aligned} &(H_2 - H_1) + (N_2 - N_1) = s_m\left(1 + \frac{1}{12}\frac{s_0^2}{\varrho_{1.2}^2}\right)\tan\frac{1}{2}(\zeta_{2.1} - \zeta_{1.2}) - E_{2.1} \\ &\text{mit} \\ &\qquad s_m = s_0\left(1 + \frac{H_1 + H_2 + N_1 + N_2}{2\varrho_{1.2}}\right) \\ &\qquad \zeta_{2.1} - \zeta_{1.2} = z_{2.1}' - z_{1.2}' + \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(k_2 - k_1)\gamma' \\ &+ \xi_2\cos a_{2.1}' + \eta_2\sin a_{2.1}' \\ &- \xi_1\cos a_{1.2}' - \eta_1\sin a_{1.2}' + \cdots \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right\} (6)$$

Um noch γ' zu erhalten, beachten wir die der Gleichung $\zeta_{1.2} + \zeta_{2.1} - 180^0 = \gamma$ entsprechende Gleichung $\zeta'_{1.2} + \zeta'_{2.1} - 180^0 = \gamma'$. Darnach hat man:

$$\gamma' = \gamma - \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \cos a'_{1.2} + \eta_1 \sin a'_{1.2} \\ + \xi_2 \cos a'_{2.1} + \eta_2 \sin a'_{2.1} \end{array} \right\} + \cdots . \qquad (7)$$

In (6) und (7) bezeichnen ξ_2 und η_2 die Komponenten der Lotabweichung in P_2. s_m aber, welche Gröfse in (5) und (6) zur Abkürzung eingeführt ist, entspricht offenbar sehr nahe der horizontalen Entfernung von P_1 und P_2, gemessen in einer in mittlerer Höhe zwischen beiden Punkten gelegenen Niveaufläche.

Die Formeln (5) und (6) zeigen, dafs auf eine trigonometrische Höhenmessung nicht nur die Lotabweichungen, sondern auch die Abstände des Referenzellipsoids vom Geoid Einflufs haben. Betrachtet man aufser den Lotabweichungen die H, welche von den Meereshöhen (S. 8) nicht merklich verschieden sein werden, als bekannt, so würden nach (5) und (6) Zenithdistanzmessungen dazu dienen können, die Abstände N des Referenzellipsoids vom Geoid (bis auf eine Konstante) zu bestimmen, wenn eine ausreichende Kenntnis der Refraktionskoefficienten zu erlangen wäre, woran es jedoch gerade fehlt. Es soll dieses hier aber nicht weiter ausgeführt werden, vielmehr versparen wir die weitere Ausführung auf Teil II dieses Buches, weil insbesondere die Theorie der Refraktion wesentlich physikalischer Natur ist.

Wir werden dann auch das kleine Ergänzungsglied $E_{2.1}$ behandeln.

§ 5. **Die Reduktion der Basis eines Dreiecksnetzes.** Die Grundlinie hat in der Regel nur eine im Verhältnis zu a_0 sehr kleine Länge, meist kaum 10^{km}. Da aufserdem aus praktischen Gründen die physische Erdoberfläche wenigstens in roher Annäherung in der Richtung der Basis eben sein mufs, so kann man ohne weiteres annehmen, dafs die Messung in einer der beiden *ellipsoidischen* Vertikalebenen durch die Punkte $P_1 P_2$ erfolge, welche überdies für den vorliegenden Zweck als zusammenfallend angesehen werden können.

Denkt man sich nämlich von P_1 oder P_2 aus die Mefsstangen eingerichtet, so erfolgt die Messung strenggenommen in einer der beiden *wirklichen* Vertikalebenen entlang der physischen Erdoberfläche; eine der Lotabweichung entsprechende Drehung der Vertikalebene um die Gerade $P_1 P_2$ giebt aber keine merklich andere Profillinie auf der physischen Erdoberfläche, da dieselbe wegen der vorausgesetzten annähernden Ebenheit von der mathematischen Geraden $P_1 P_2$ nicht erheblich genug absteht.

Dieselbe Annahme kann man machen, wenn von einem mittleren

Punkt C aus aligniert wird, wenn C so liegt, dafs der Horizontalwinkel nach P_1 und P_2 gerade 180° beträgt. In diesem Falle erfolgt die Messung auch in einer Ebene durch $P_1 P_2$, welche aber für C Vertikalebene ist. Dieselbe bildet wegen der vorausgesetzten Kürze der Distanz mit den anderen genannten Vertikalebenen kleine Winkel, die hauptsächlich nur noch von der Lotabweichung abhängig sind.*) Der maximale Abstand der unter den verschiedenen Umständen gemessenen Linien auf dem Terrain ist daher näherungsweise gleich einem Kreisbogen, dessen Radius der gröfste Vertikalabstand der Profillinie von der mathematischen Geraden $P_1 P_2$ und dessen Zentriwinkel höchstens vom Betrage der Lotabweichungen ist — also gewifs in praktischen Fällen eine sehr kleine Gröfse.

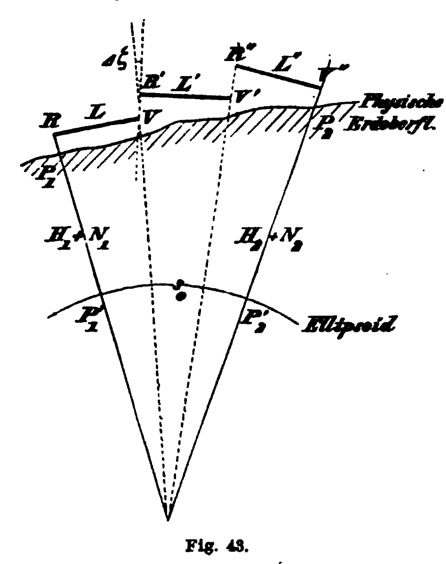


Fig. 43.

In Fig. 43 ist als Projektionsebene wie bei Fig. 42 eine Ebene parallel zu den ellipsoidischen Lotlinien $P_1 P_1'$ und $P_2 P_2'$ benutzt. Man erkennt sofort, dafs in dieser Figur das Verhältnis der Länge der Profillinie zu der (mit den beiden Vertikalschnitten im wesentlichen identischen) Kürzesten zwischen P_1' und P_2' bis auf unmerkliche Gröfsen dasselbe ist wie in Wirklichkeit, weil beide Linien zur Projektionsebene offenbar sehr nahe gleiche Neigung haben, durch die Projektion aber überhaupt obendrein die Dimensionen nur in geringem Betrage sich ändern.

Wir setzen daher in Fig. 43 sogleich die Bezeichnungen der wirklichen Längen ein.

Es handelt sich nun darum, aus dem Resultat der Messung im Profil auf die kürzeste Entfernung s_0 von P_1' und P_2' zu schliefsen.

Die Messung ist aber wesentlich eine staffelförmige. Zur Ver-

*) Nach S. 189 ist der Abstand der ellipsoidischen Vertikalschnitte, die von P_1 nach P_2 und umgekehrt führen, für die vorausgesetzte Distanz kleiner als $0{,}01^{mm}$. Der Schnitt der in C vertikalen Ebene mit dem Terrain hat aber jedenfalls von jenen beiden im allgemeinen einen noch kleineren Abstand. Dies erkennt man, wenn man sich C beweglich und alle Lagen von P_1 bis P_2 einnehmen denkt. Insofern dabei die geographische Breite im allgemeinen immer zu oder abnimmt, dreht sich die Vertikalebene kontinuierlich nur nach derselben Seite.

deutlichung zeigt Fig. 43 drei horizontale Strecken L, L' und L'' (anstatt der in der Praxis vorhandenen zahlreichen Lagen der Meſsstangen). Würde nun thatsächlich mit den Lotlinien des Ellipsoids gearbeitet, so könnte man sofort setzen, indem jede Strecke als Kreisbogen, konzentrisch mit ihrer Projektion aufs Ellipsoid, betrachtet werden darf:

$$s_0 = L \frac{\varrho}{\varrho + H + N} + L' \frac{\varrho}{\varrho + H' + N'} + \cdots, \tag{1}$$

worin $H + N$, $H' + N'$, u. s. f. die Höhen der Strecken über dem Ellipsoid bedeuten und für ϱ in allen Gliedern völlig ausreichend der Krümmungsradius des Ellipsoids im mittleren Azimut der Basis genommen werden darf. Durch Reihenentwicklung erhält man aus dem Vorigen die stets ausreichende Näherungsformel:

$$s_0 = L\left(1 - \frac{H + N}{\varrho}\right) + L'\left(1 - \frac{H' + N'}{\varrho}\right) + \cdots, \tag{2}$$

welche sich noch dadurch, daſs bei Berechnung der kleinen Glieder $L\frac{H + N}{\varrho}$ u. s. f. für die bis auf Kleinigkeiten mit einander übereinstimmenden Faktoren L, L' u. s. f. ein Durchschnittswert eingeführt wird, vereinfachen läſst in:

$$s_0 = (L + L' + \cdots)\left(1 - \frac{H_m + N_m}{\varrho} + \cdots\right). \tag{3}$$

Hierin bezeichnen H_m und N_m die Summen der H, $H' \cdots$ bezw. N, $N' \cdots$ für die sämtlichen Strecken dividiert durch ihre Anzahl. Man kann H_m als durchschnittliche Höhe des gemessenen Profils über dem Geoid ansehen, dagegen ist N_m die durchschnittliche Höhe des Geoids über dem Referenzellipsoid unterhalb der Basis.

Vorstehende Formel setzt voraus, daſs bei der Messung die Stangen normal zu den Lotlinien des Ellipsoids liegen oder doch ihr Neigungswinkel gegen dieselben ermittelt wird und daſs mit diesen Lotlinien gelotet wird. Da dieses nun nicht der Fall ist, so betrachten wir beispielsweise die Messung der Strecke L', Fig. 43, und nehmen wie bisher der Einfachheit halber an, daſs L' horizontal sei und das Ende R' lotrecht über dem Ende V von L liege; dann weichen diese horizontale und lotrechte Richtung von der entsprechenden ellipsoidischen um die in Richtung der Basis fallende Komponente der Lotabweichung ab. Heiſst diese $\Delta\zeta$, so ist strenggenommen anstatt L' in (3) einzuführen:

$$L' \cos \Delta\zeta + (H' - H) \sin \Delta\zeta. \tag{4}$$

Daſs dieses selbst bei beträchtlichen Werten von $\Delta\zeta$ eine gegen L' ganz verschwindende Abweichung zeigt, die auch bei ihrer Summierung

über die ganze Basis weg in der Regel nichts Erhebliches giebt, ist leicht zu erkennen. Man darf daher Formel (3) als hinreichend streng betrachten; in der Regel auch dann noch, wenn die Messungsoperation von dem oben angenommenen idealen Vorgange etwas abweicht.

In *Grunerts Archiv* von 1869, Teil 51, S. 28 vergleicht *Sonderhof* die geodätische Linie auf einer zum Rotationsellipsoid *parallelen* Niveaufläche mit derjenigen auf dem Rotationsellipsoid, wenn beide zwischen denselben Lotlinien liegen. Das Ergebnis stimmt mit dem oben bei der Reduktion befolgten Vorgange überein.

§ 6. **Erste Annäherung bei der Berechnung eines Dreiecksnetzes.** Wenn über die Beziehung des Geoids zu einem Referenzellipsoid noch nichts bekannt ist, so wird man in 1. Annäherung das Geoid als mit irgend einem plausiblen Referenzellipsoid (die Annahme der Dimensionen nach *Bessel* ist ganz angemessen) identisch ansehen müssen, sodafs nun von Lotabweichung und Höhen N nicht weiter die Rede sein kann. Bei der Reduktion der Basismessung nach Formel (3) auf voriger Seite wird also auch ein N_m nicht berücksichtigt werden können.

Dadurch allein entsteht indessen noch kein Fehler.

Macht man nämlich, wie bisher immer geschehen, die Annahme, dafs die Axe des Referenzellipsoids parallel zur Erdaxe sein soll, ohne indessen mit ihr zu koincidieren, so wird die Annahme N_m = null nur heifsen, dafs das Referenzellipsoid und das Geoid unterhalb der Mitte der Basis sich schneiden.

Anders freilich ist die Sache, sobald mehrere Basismessungen in betracht kommen, da die Annahme N_m = null nur für *eine* Basis ohne weiteres zulässig ist, wie im folgenden § 10 sich zeigen wird. Wenn man also für alle Grundlinien N_m = null annimmt, so giebt dies notwendig in den reduzierten Längen derselben Fehler. Die Gröfse dieser Fehler wird im allgemeinen vom gegenseitigen Abstande der Grundlinien abhängen; man bemerkt leicht, dafs bereits Werte N_m von nur wenigen Metern genügen, um eine Unsicherheit zu erzeugen, die weit gröfser ist, als diejenige infolge der eigentlichen Messungsfehler, selbst wenn man diese zu $\frac{1}{500000}$ der Länge annimmt. Immerhin gestaltet sich diese Unsicherheit nicht sehr bedenklich, weil die mittelst Dreiecksketten aus den Grundlinien abgeleiteten linearen Längen der geodätischen Linien wegen der Winkelbeobachtungsfehler eine weit geringere Genauigkeit besitzen.*)

*) Nach vorliegenden Erfahrungen steigert sich bereits im Basisnetz der m. F. der Dreiecksseiten auf $\frac{1}{150000}$ bis $\frac{1}{250000}$ und wächst leicht weiter nach Mafsgabe der in § 8 demnächst anzugebenden Formel bis auf $\frac{1}{100000}$ und mehr. Man vergl. das Referat über die *Dänische Gradmessung*, S. 63, Bd. 13 der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.*

Indem wir vorläufig diese Angelegenheit nicht weiter verfolgen, ist nun nächst dem Fehler bei Reduktion der Grundlinien auf die Fehler bei Reduktion der Winkel hinzuweisen. Streng genommen ist jeder Horizontalwinkel nach S. 516 (6) zu reduzieren, um fürs Referenzellipsoid gültig zu werden. Wegen der bei der 1. Annäherung mangelnden Kenntnis der Lotabweichungskomponenten ξ und η mufs diese Reduktion unterbleiben. Die Fehler, welche dadurch entstehen, sind allerdings in der Regel höchstens vom Betrage weniger Zehntelsekunden. Nur im Hochgebirge, wo die Lotabweichungen und zugleich die $\cot z'$ im allgemeinen die gröfsten Werte erreichen, können die Fehler wohl auf 1″ und mehr anwachsen. Jedoch wird bei Dreiecken 1. Ordnung die Gefahr, dafs dies geschieht, dadurch vermindert, dafs stark geneigte Visuren, d. h. grofse Werte von $\cot z'$, selten vorkommen und meistens vermieden werden können. Nehmen wir also an, dafs im allgemeinen diese Einflüsse etwas kleiner sind, als diejenigen der Beobachtungsfehler, so ist bei der Beurteilung ihres Einflusses auf die schliefslichen Ergebnisse des Dreiecksnetzes zu beachten, ob sie wie diese als zufällige Fehler wahrscheinlich einer teilweisen Kompensation unterliegen, oder ob ein konstanter, systematischer Charakter derselben eine Anhäufung ihres Einflusses bewirken kann.

Man sieht leicht ein, dafs beides stattfinden wird. Die Lotabweichungen haben zum Teil einen systematischen Charakter, der von der Wahl des Referenzellipsoids und den kontinentalen Unregelmäfsigkeiten des Geoids abhängt, zum Teil einen rasch veränderlichen, der von den lokalen Unregelmäfsigkeiten des Geoids bedingt ist. Die Veränderlichkeit der Reduktionen der Horizontalwinkel wird aber nicht nur durch letztere, sondern auch durch die Schwankungen in den $\cot z'$ bedingt, die für Dreiecke 1. Ordnung in der Regel indes kleine *negative* Werte annehmen werden.*)

Wir gehen nun dazu über, einige Betrachtungen über die Wirkungen der Vernachlässigung dieser teils systematisch, teils zufällig veränderlichen Reduktionen anzustellen.

---

*) Aus der bekannten Näherungsformel für trigonometrische Höhenmessung:

$$H_2 - H_1 = s \cot z'_{1.2} + \frac{s^2}{2\varrho}(1-k),$$

die sich auch aus (5) S. 520 ableiten läfst, folgt

$$\cot z'_{1.2} = \frac{H_2 - H_1}{s} - \frac{s}{2\varrho}(1-k).$$

§ 7. Einflufs der Lotabweichungen auf die Ergebnisse für ein Dreiecksnetz. Setzen wir voraus, dafs $\cot z'$ für die 3 Seiten eines gleichseitigen Dreiecks denselben Wert hat, wozu Gleichheit der Höhen der 3 Punkte gehört, und nehmen wir ferner an, dafs die Lotablenkung in den letzteren ebenfalls identisch ist, so wird die Winkelsumme dieses Dreiecks durch die Vernachlässigung der Reduktionen nicht beeinflufst. Abgesehen vom Faktor $\Theta \cot z'$ ist nämlich für die 3 Winkel die Reduktion nach (5) S. 516:

$$\begin{aligned}
&\sin(a'_{1.2} - A') - \sin(a'_{1.3} - A') \\
&\sin(a'_{2.3} - A') - \sin(a'_{2.1} - A') \\
&\sin(a'_{3.1} - A') - \sin(a'_{3.2} - A')
\end{aligned}$$

wenn $180^0 + A'$ das allen 3 Punkten gemeinsame wirkliche Azimut des ellipsoidischen Zeniths ist. Es geht aber in der That jene Summe in null über, weil infolge der Gleichseitigkeit des Dreiecks die vertikal über einander stehenden Azimute um je 120^0 verschieden sind, sodafs jede Vertikalkolonne für sich verschwindet.*) Selbstverständlich ändert nun auch die Ausgleichung nichts an dem Einflufs, welchen diese vernachlässigten Reduktionen auf die einzelnen Winkel haben.

Eine einfache aus gleichseitigen Dreiecken bestehende Dreieckskette wird sich daher in leicht zu übersehender Weise deformieren. Wir betrachten zunächst 2 an einander stofsende Dreiecke 1.2.3 und 2.4.3 und ermitteln die Fehler in den Seiten 2.4 und 3.4, wenn 1.2 als Ausgangsseite dient.

Man hat aber

$$(2.4) = (1.2)\,\frac{\sin\binom{2.3}{1}\sin\binom{2.4}{3}}{\sin\binom{1.2}{3}\sin\binom{3.2}{4}}$$

$$(3.4) = (1.2)\,\frac{\sin\binom{2.3}{1}\sin\binom{4.3}{2}}{\sin\binom{1.2}{3}\sin\binom{3.2}{4}}.$$

Die vernachlässigten Reduktionen sind, abgesehen vom Faktor $\Theta \cot z'$,

$$\text{in } \binom{1.2}{3}: \quad \sin(a'_{3.1} - A') - \sin(a'_{3.2} - A')$$

*) Dasselbe ergiebt sich, wenn man ungleichseitige Dreiecke betrachtet und, entsprechend gleicher Höhe der Punkte, $\cot z'$ gleich $\frac{s}{2\varrho}$ setzt (*Bessel, Abhandl.* Bd. 3, S. 32). Auch die bei der Ausgleichung auftretenden Zentralsysteme werden unter gewissen, näherungsweise oft zutreffenden Umständen in ihren Widersprüchen nicht von konstanten Lotabweichungen beeinflufst.

$$\text{in } \binom{3.2}{4}: \quad \sin(a'_{4.3} - A') - \sin(a'_{4.2} - A')$$

$$\text{in } \binom{2.3}{1}: \quad \sin(a'_{1.2} - A') - \sin(a'_{1.3} - A')$$

$$\text{in } \binom{2.4}{3}: \quad \sin(a'_{3.2} - A') - \sin(a'_{3.4} - A')$$

$$\text{in } \binom{4.3}{2}: \quad \sin(a'_{2.4} - A') - \sin(a'_{2.3} - A').$$

Mit Rücksicht auf den Parallelismus der Seiten 1.2 und 3.4, 1.3 und 2.4 kann man diese Reduktionen in sofort ersichtlicher Abkürzung auch schreiben

$$\text{für } \binom{1.2}{3}: \quad +r_2 + r_1$$

$$\text{„ } \binom{3.2}{4}: \quad -r_3 - r_2$$

$$\text{„ } \binom{2.3}{1}: \quad +r_3 + r_2$$

$$\text{„ } \binom{2.4}{3}: \quad -r_1 - r_3$$

$$\text{„ } \binom{4.3}{2}: \quad -r_2 - r_1.$$

Hiermit erhält man den Einflufs dieser Gröfsen, wenn alle Winkel zu 60^0 angenommen werden, für $\log \frac{2.4}{1.2}$ gleich

$$\frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . (r_2 + r_3 - 2r_1) \tag{1}$$

und für $\log \frac{3.4}{1.2}$ gleich

$$\frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . (2r_3 - 2r_1), \tag{2}$$

wobei die r in Sekunden ausgedrückt gedacht sind. Setzt sich an die Seite 3.4 ein anderes Dreieckspaar und so fort, bis $2i$ Dreiecke eine geradgestreckte Kette im Azimut $a'_{1.3}$ bilden (vergl. Fig. 13 S. 198), und bezeichnen wir die Ausgangsseite 1.2 mit a sowie die ihr parallelen Anschlufsseiten 3.4 u. s. f. der Dreieckspaare mit $a', a'' \ldots a^{(i)}$, dagegen die in Richtung 2.4 sich an einander setzenden Seiten mit d, $d' \ldots d^{(i-1)}$, so wird der konstante Teil der Lotabweichung auf $\log \frac{a^{(i)}}{a}$ den nachstehenden Einflufs haben:

$$\frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . (2 i r_3 - 2 i r_1). \tag{3}$$

Dagegen ist der Einfluſs auf $\log \frac{d^{(i-1)}}{a}$ gleich

$$\frac{1}{\varrho''} (i-1) M \cot 60^0 . (2 r_3 - 2 r_1) + \frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . (r_2 + r_3 - 2 r_1). \tag{4}$$

Berechnet man hieraus den Einfluſs für $\frac{d^{(i-1)}}{a}$ selbst, sodann durch Addition aller Werte desselben für $i = 1$ bis i den Einfluſs auf $\frac{[d]}{a}$, wobei $[d]$ = der Langseite des Netzes in Richtung 2.4 ist, so folgt endlich als Einfluſs auf $\log \frac{[d]}{a}$:

$$\frac{1}{\varrho''} M \cos 60^0 . \{ i r_3 + r_2 - (i+1) r_1 \}. \tag{5}$$

Nächst diesen Einflüssen auf die Seitenverhältnisse betrachten wir noch den Einfluſs auf den Horizontalwinkel zwischen der Langseite $[d]$ des Netzes in Richtung 2.4 und der Ausgangsseite 1.2. Der Fehler im Winkel $\binom{1.4}{2}$ ist aber gleich $- r_2 + r_3$ und die Fehler der gestreckten Winkel zwischen den Strecken $d, d', \ldots d^{(i-1)}$ sind der Reihe nach alle gleich $-2 r_2$. Hierdurch entsteht eine Krümmung der Langseite und es wird der Gesamtfehler im bezeichneten Winkel, wie man durch Projektion auf eine Richtung quer zu 2.4 findet, gleich:

$$(- r_2 + r_3) - 2 r_2 \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + (i-1)}{i}$$

d. i.

$$- i r_2 + r_3 . \tag{6}$$

Dagegen ist der Fehler in der Differenz der Azimute der Seiten $a^{(i)}$ und a gleich

$$- 2 i r_2 . \tag{7}$$

Nach diesen Formeln wird man nicht nur für das ideelle Dreiecksnetz sondern auch vielfach bei thatsächlichen einfachen Dreiecksketten den Einfluſs des allen Stationen gemeinsamen Teiles der Lotabweichungen schätzen können, während ein anderer veränderlicher Teil sich mit den Messungsfehlern kombiniert. Zur Vergleichung betrachten wir nun noch die Anhäufung dieser letzteren, insoweit sie als zufällig zu betrachten sind.

§ 8. **Einfluſs zufälliger Fehler.** Wir knüpfen zunächst wieder an die Seitenverhältnisse $\frac{2.4}{1.2}$ und $\frac{3.4}{1.2}$ im 1. Dreieckspaar an, die Dreiecke als gleichseitig vorausgesetzt. Ist nun μ der mittlere zufällige Fehler

eines Dreieckswinkels, so erkennt man leicht, dafs der m. F. in $\log\frac{2.4}{1.2}$ und ebenso in $\log\frac{3.4}{1.2}$ gleich wird:

$$\pm\frac{1}{\varrho''}M\cot 60^0.\,\mu\sqrt{4}, \qquad (1^*)\text{ u. }(2^*)$$

indem nämlich in diesen Seitenverhältnissen je 4 von einander unabhängige Winkelfehler auftreten. Die Existenz der Bedingungsgleichung zwischen den 3 Dreieckswinkeln ändert hieran nichts, weil sie gleich grofse Verbesserungen an den gleich genau gemessenen Winkeln erzeugt und weil bei der gleichen Gröfse der Winkel somit das Sinusverhältnis nicht beeinflufst wird.*)

Man hat nun den Einflufs auf $\log\frac{a^{(i)}}{a}$ sowie auf $\log\frac{d^{(i-1)}}{a}$, indem diese Seitenverhältnisse sich aus i von einander unabhängigen Seitenverhältnissen mit dem m. F. (1*) zusammensetzen, gleich:

$$\pm\frac{1}{\varrho''}M\cot 60^0.\,\mu\sqrt{4i}. \qquad (3^*)\text{ u. }(4^*)$$

Komplizierter ist die Berechnung für den m. F. $\log\frac{[d]}{a}$. Wenn wir darauf Rücksicht nehmen, dafs die Seiten $d, d' \ldots$ alle gleich a sind, so wird der Ausdruck für $\frac{[d]}{a}$ im Anschlufs an Fig. 13 S. 198:

$$\frac{\sin\binom{2.3}{1}}{\sin\binom{1.2}{3}\sin\binom{3.2}{4}}\left\{\sin\binom{2.4}{3}+\frac{\sin\binom{4.3}{2}\sin\binom{4.5}{3}}{\sin\binom{3.4}{5}\sin\binom{5.4}{6}}\left\{\sin\binom{4.6}{5}+\frac{\sin\binom{6.5}{4}\sin\binom{6.7}{5}}{\sin\binom{5.6}{7}\sin\binom{7.6}{8}}\left\{\sin\binom{6.8}{7}+\cdots\right\}\right\}\right\}.$$

Die hier angesetzten Glieder beziehen sich auf 3 Dreieckspaare. Um nun zum mittleren Fehlerquadrat zu gelangen, hat man die Differentialquotienten nach allen vorkommenden Winkeln zu bilden, darin alle Winkel gleich 60^0 zu setzen und die Quadratsumme der genannten Quotienten mit μ^2 zu multiplizieren.

*) Auf den geringen bezw. verschwindenden Einflufs der Winkelgleichungen in den Dreiecken auf die Seitenverhältnisse haben wir schon in den *Studien über rationelle Vermessungen*, Abschnitt 4, Art. 49, *Zeitschrift f. Math. u. Phys.* 1868 aufmerksam gemacht. Nur die Seitengleichungen vermehren die Genauigkeit der Seitenverhältnisse wesentlich. (Vergl. das Referat über die *Dänische Gradmessung*, S. 63 in Bd. 13 der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.*). Selbstverständlich darf man nicht weiter schliefsen wollen, dafs es überflüssig sei, alle 3 Dreieckswinkel zu messen. Denn wollte man deren nur 2 messen, so würde eines der Seitenverhältnisse im Dreieck erheblich ungenauer werden.

Die Bestandteile des mittleren Fehlerquadrats werden, abgesehen vom Faktor $\frac{1}{\varrho''^2}\mu^2 \cot^2 60^0$, gleich

$$i^2 \text{ für jeden der 3 Winkel } \binom{2.3}{1}, \binom{1.2}{3}, \binom{3.2}{4},$$

$$(i-1)^2 \text{ für jeden der 4 Winkel } \binom{4.3}{2}, \binom{4.5}{3}, \binom{3.4}{5}, \binom{5.4}{6},$$

$$(i-2)^2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 4 \quad \text{„} \quad \binom{6.5}{4}, \binom{6.7}{5}, \binom{5.6}{7}, \binom{7.6}{8},$$

. . . .

$$1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad i \quad \text{„} \quad \binom{2.4}{3}, \binom{4.6}{5}, \binom{6.8}{7}, \cdots$$

oder zusammen genommen gleich

$$-i^2 + 4\left(i^2 + (i-1)^2 + \cdots + 1\right) + i;$$

das giebt, weil die Summe der Quadrate von 1 bis i^2 gleich ist $\frac{1}{6} i(i+1)(2i+1)$, für den mittleren Fehler von $\frac{[d]}{a}$ den Betrag

$$\frac{1}{\varrho''}\mu \cot 60^0 . \sqrt{\frac{1}{6} i (8i^2 + 6i + 10)}.$$

In $\log \frac{[d]}{a}$ endlich ist demnach, weil $\frac{[d]}{a}$ gleich i ist, der mittlere Fehler gleich

$$\pm \frac{1}{\varrho''} M \cot 60^0 . \mu \sqrt{\frac{4}{3} i + \frac{5}{3}\frac{1}{i} + 1}. \qquad (5^*)$$

Etwas anders gestalten sich die Ausdrücke für die Voraussetzung vollständiger (oder diesen äquivalenter) Satzbeobachtungen, jedoch bleibt in (5*) jedenfalls dasjenige gewahrt, worauf es uns besonders ankommt, nämlich Zunahme mit $\sqrt{i}$ und nicht mit i.*)

Um zu dem mittleren Fehler im Horizontalwinkel zwischen der Ausgangsseite 1.2 und der Langseite $[d]$ in Richtung 2.4 zu gelangen, bezeichnen wir die wahren Fehler der Winkel $\binom{4.1}{2}, \binom{6.2}{4}, \binom{8.4}{6}, \cdots$ mit $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6 \cdots$.

Alsdann findet man durch Projektion auf eine Richtung normal zur Seite 2.4 sofort, dafs der Fehler im genannten Horizontalwinkel ist:

*) Dafs die Änderung der Ausdrücke nicht erheblich sein kann, erkennt man daran, dafs zur successiven Berechnung der a', a'', a''' ... nur von einander wesentlich unabhängige Elemente in betracht kommen.

$$\varepsilon_2 + \frac{1}{i}\left((i-1)\,\varepsilon_4 + (i-2)\,\varepsilon_6 + \cdots + 2\varepsilon_{2(i-1)} + \varepsilon_{2i}\right).$$

Nehmen wir alle diese Winkel mit dem mittleren Fehler μ direkt beobachtet an, so folgt nun als mittleres Fehlerquadrat sofort:

$$\mu^2\left(1 + \frac{(i-1)^2 + (i-2)^2 + \cdots + 1}{i^2}\right).$$

Der mittlere Fehler im bezeichneten Horizontalwinkel wird also gleich

$$\pm\,\mu\sqrt{\frac{1}{3}\,i + \frac{1}{2} + \frac{1}{6i}}.$$

Hierbei ist auf die überschüssigen Messungen im Netze noch keine Rücksicht genommen. Diese geben aber etwa noch eine 2. Bestimmung gleicher Sicherheit durch die Langseite [c] hindurch. Wir setzen daher den m. F. näherungsweise gleich

$$\pm\,\mu\sqrt{\frac{1}{6}\,i + \frac{1}{4} + \frac{1}{12i}}. \qquad (6^*)$$

Die Differenz der Azimute der Seiten $a^{(i)}$ und a kann man durch die beiden Langseiten [d] und [c] des Netzes, sowie durch den Zug der zwischen beiden liegenden Seiten a und b herstellen. Diese Bestimmungen sind im wesentlichen von einander unabhängig und die Ausgleichung vereinigt sie nach Mafsgabe ihrer Gewichte, die sich näherungsweise wie $1 : 1 : \frac{1}{2}$ verhalten. Da nun der mittlere Fehler der Differenz der Azimute der Seiten $a^{(i)}$ und a aus einer Langseite gleich

$$\pm\,\mu\sqrt{i+1}$$

wird, so findet sich der mittlere Fehler für jene Differenz der Azimute mit Rücksicht auf die Ausgleichung näherungsweise gleich

$$\pm\,\mu\sqrt{\frac{i+1}{2{,}5}}. \qquad (7^*)$$

§ 9. Vergleichung, Zeitpunkt der Gesamtausgleichung u. a. Die im vorstehenden Paragraphen abgeleiteten Ausdrücke werden sich etwas verändern, wenn man die Bedingungen der Ausgleichung unter Voraussetzung vollständiger Richtungsbeobachtungen streng beachtet. Aber schon in der vorliegenden Form genügt das Gegebene zu zeigen (was hier die Veranlassung der Entwicklungen war), dafs der Einflufs der zufälligen Fehler bei einigermafsen grofsen Werten von i von den entsprechenden Einflüssen, welche nach § 7 unter gewissen Voraussetzungen aus den Reduktionsfehlern resultieren, übertroffen werden kann, selbst wenn die konstanten Werte von r_1, r_2 und r_3 nur soviel Hundertstelsekunden betragen, als μ Zehntelsekunden.

Gröfsere Dreiecksketten, welche einzeln ausgeglichen sind und auf besonderen Grundlinien beruhen, werden in ihren Anschlufsseiten wie überhaupt in den Bedingungen ihres Zusammenschlufses hiernach Widersprüche zeigen können, die, insoweit die Winkel in betracht kommen, nicht nur von den zufälligen Messungsfehlern der Winkel und dem veränderlichen Teil des Lotabweichungseinflusses, sondern auch merklich von dem konstanten Teil des Einflusses der Lotabweichungen auf die Winkel abhängen. Je gröfser die Güte der Messungen ist, um so mehr kann letzterer hervortreten. Da nun nach S. 523 auch die aus der Unkenntnis der Höhenlage des Geoids gegen das Referenzellipsoid entspringenden Reduktionsfehler der Grundlinien im allgemeinen nicht ganz unerheblich sind, so wird eine Gesamtausgleichung des Komplexes aller Dreiecksketten, die über einen Teil der Erdoberfläche ausgebreitet sind, nicht eher vorgenommen werden dürfen, bis entweder durch vorläufige Rechnungen nachgewiesen ist, dafs die betreffenden Einflüsse der Lotabweichungen und der Höhenlage des Geoids nicht wesentlich diejenigen der zufälligen Messungsfehler übersteigen, oder bis auf Grund einer vorläufigen Bestimmung wenigstens des systematischen Teiles der Lotabweichungen und der Höhenlage des Geoids eine Reduktion der Richtungen im Dreiecksnetz und der Grundlinien stattgefunden hat. Diese Richtungsreduktion würde strenggenommen sogar eine Neuausgleichung der einzelnen Ketten erfordern (und nur die Stationsausgleichungen würden nicht zu wiederholen sein). Indessen wird man wohl in der Regel bei der Berechnung der Dreiecksnetze ohne Reduktion der Richtungen wegen relativer Lotabweichungen stehen bleiben können, wenn es sich nur darum handelt, Untersuchungen über die Gestalt eines *mäfsig* ausgedehnten Teiles des Geoids anzustellen, oder wenn die Messungen eine Landesaufnahme bezwecken.

Im ersteren Falle wird man zunächst ein sich den Messungen möglichst anschmiegendes Referenzellipsoid bestimmen, sei es von gegebenen Dimensionen oder erst noch zu ermittelnden. Gegen dieses Ellipsoid relative Lotabweichungen werden in der Regel einen von Punkt zu Punkt wesentlich veränderlichen Charakter zeigen und es wird also kein vorwiegend systematischer Einflufs derselben zu befürchten sein, ebenso wenig wie der Einflufs der Höhenlage des Geoids ein erheblicher werden kann. Günstig ist noch der Umstand, dafs die Wahl der Dimensionen des Ellipsoids auf die Berechnung der Dreiecke einen ganz geringfügigen Einflufs hat, wie aus den Untersuchungen S. 405 hervorgeht. Wenn man also schliefslich die Dimensionen des Ellipsoids abändert, so braucht deshalb keine Neuberechnung zu erfolgen.

Im zweiten Falle, dem der Landesaufnahme, dürfte es stets ausreichen von denjenigen Reduktionen ganz abzusehen, welche daraus entspringen, dafs die Voraussetzung eines Ellipsoids keine ganz zutreffende ist. Genügt es hier doch für Zwecke der Detailvermessung in der Regel von dem oft verhältnismäfsig beträchtlichen Unterschied zwischen direkt auf der physischen Erdoberfläche gemessenen Entfernungen und den entsprechenden aus der Haupttriangulation ohne weitere Rücksicht auf die Höhenlage abgeleiteten Entfernungen abzusehen. Allerdings können bei Einschaltungen jene Winkelreduktionen infolge steiler Visuren gröfser als die Beobachtungsfehler werden, indes ist andrerseits durch die Einschaltung in ein festes Netz Fehleranhäufungen vorgebeugt.*)

§ 10. **Die Berechnung der Lotabweichungen** für angenommene Dimensionen des Referenzellipsoids setzt voraus, dafs man entweder für einen Punkt die Lotabweichung null setzt oder sie als unbekannte Gröfse in die Rechnung einführt. Hierbei nehmen wir natürlich an, dafs *alle Dreiecksnetze in Verbindung mit einander stehen* — oder richtiger umgedreht: Netze, die nicht mit dem gewählten Ausgangspunkt der Berechnung in Verbindung stehen, fallen ganz bei den weiter zu besprechenden Rechnungen heraus.

Im ersteren Falle, Nullsetzen einer Lotabweichung, trifft man über das Referenzellipsoid offenbar die Bestimmung, dafs es von der wirklichen Lotrichtung jenes Ortes normal getroffen wird. Wenn man nun aufserdem, um Fig. 41 und die Formeln dieses Kapitels anwenden zu können, Parallelismus seiner Axe zur Erdaxe voraussetzt, so ist seine Lage völlig bestimmt bis auf eine Verschiebungsgröfse parallel zu jener Lotrichtung, welche von der Vernachlässigung der N_m bei der Reduktion der Grundlinien abhängt. Ist nur *eine* solche vorhanden, so schneidet das Ellipsoid das Geoid unterhalb der Mitte jener Basis. Sind mehrere gemessen, so wird man ihm, so lange eben nicht bereits mit genäherten Werten von N_m reduziert ist, eine mittlere Lage (die sich genau nicht ohne weiteres angeben läfst) dergestalt zuschreiben müssen, dafs einzelne N_m positiv, andere negativ sind. (In welchem Abstand die Erdaxe von der Axe des Referenzellipsoids liegt, läfst sich auch nicht angeben, es sei denn, dafs man bereits Kenntnis von der Lage des oben erwähnten Ausgangspunktes

*) Nicht unerwähnt mag bleiben, dafs man die Zulässigkeit der *sphärischen* Berechnung der Figuren innerhalb eines kleinen Teiles des das Geoid ersetzenden Rotationsellipsoids leicht mittelst der Methode der Lothabweichungen zeigen kann. Als Lotabweichungen treten dann eben die Winkel zwischen den Ellipsoid- und Kugelnormalen auf.



zur Erdaxe hätte, welche Kenntnis sich überdies auf den üblichen geodätisch-astronomischen Wegen gar nicht erlangen läfst.)

Es ist aber nicht vorteilhaft, für einen Punkt die Lotabweichung gleich null zu setzen. Das Anschmiegen des Referenzellipsoides läfst sich weit besser erzielen, wenn man die Lotabweichung auch im Anfangspunkte der Berechnungen als *unbestimmt* annimmt.

Da dieses zugleich der allgemeinere Fall ist, so werden wir die Aufgaben: die successive Berechnung der Lotabweichungen zu zeigen, eventuell die Dimensionen des Ellipsoids zu verbessern und die Form des Geoids soweit als möglich aus den Lotabweichungen abzuleiten, an ihn anknüpfen.

Auf die Aufgabe, Lotabweichungen für ein Referenzellipsoid zu ermitteln, dessen Axe *nicht* parallel zur Erdaxe ist, werden wir nicht eingehen. Die Formeln dazu würden sich — soviel mag bemerkt werden — leicht aus Fig. 41 bestimmen lassen, wenn man darin 2 Nordpole N und N' unterscheiden würde. Nächst den Dimensionen des Ellipsoids und den Komponenten der Lotabweichung eines Anfangspunktes, also 4 Unbekannten, würden noch 2 Unbekannte, die die Lage von N gegen N' feststellen, auftreten. Da jedoch die ellipsoidischen geographischen Breiten von den wirklichen bei diesem Vorgange recht erheblich abweichen können, wird man um so mehr davon absehen, als die relativen Lotabweichungen wohl in der Regel durch örtliche rasch veränderliche Formveränderungen der Niveauflächen bedingt werden. Aufserdem komplizieren sich die Berechnungsvorschriften, wenn man die Differenz von N und N' nicht geradezu klein annimmt, recht erheblich, wie man aus *Fergolas* wiederholt erwähnter *Abhandlung* bezw. der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.*, Bd. 11, ersehen wird. Der Grund ist, dafs man nicht ohne weiteres die höheren Potenzen des Unterschieds NN' vernachlässigen darf (was *Fergola* allerdings schliefslich z. T. doch noch thut).

§ 11. Einflufs der Lotabweichungen auf die geodätisch ermittelten geographischen Koordinaten: Formeln zur Berechnung der Lotabweichungen.

Denken wir uns aus den wirklichen Werten der geographischen Breite und Länge sowie des Azimuts B_1', L_1' und $\alpha_{1.2}'$ in P_1 mit Hilfe der linearen Länge der Kürzesten $P_1 P_2$ unter Annahme bestimmter Dimensionen eines Referenzellipsoides Breite, Länge und Azimut in P_2 berechnet, so werden diese im allgemeinen von den wahren Werten B_2', L_2' und $\alpha_{2.1}'$ dieser Gröfsen abweichen.

Wir nennen die berechneten Werte B_2'', L_2'' und $\alpha_{2.1}''$.

Hätte man die Rechnung mit den ellipsoidischen Werten B_1, L_1

und $\alpha_{1.2}$ ausgeführt, so hätten sich auch die ellipsoidischen Werte B_2, L_2 und $\alpha_{2.1}$ ergeben. Um diese Werte mit jenen zu vergleichen, benutzen wir die Differentialformeln.

Nach § 3 S. 517 u. 518 ist in ausreichender Annäherung:

$$\left.\begin{aligned} B_1 - B_1' &= + \xi_1 + \cdots \\ L_1 - L_1' &= - \eta_1 \sec B_1' + \cdots \\ \alpha_{1.2} - \alpha_{1.2}' &= + \eta_1 \tan B_1' + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei in der letzten Formel ebenso wie bei der Berechnung des Dreiecksnetzes von den kleinen, in die Cotangenten der Zenithdistanzen multiplizierten Gliedern, sowie von dem Einflufs des Abstandes des Geoids vom Ellipsoid auf die Reduktion der Richtungen wegen der Höhe der Objekte abgesehen ist — oder angenommen wird, dafs alle Richtungen, also auch $\alpha_{1.2}'$ bereits mittelst vorläufiger Werte der Lotabweichungen um diese Glieder korrigiert worden sind.

Indem wir nun die Werte $+\xi_1$, $-\eta_1 \sec B_1'$ und $+\eta_1 \tan B_1'$ als δB_1, δL_1 und $\delta\alpha_{1.2}$ in die Formeln (7) bis (9) S. 282 einführen, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} B_2 - B_2'' = &+ \frac{W_2^3}{W_1^3}\left\{\cos\varDelta\alpha + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\right\}\xi_1 \\ &- \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\frac{W_2^3}{1-e^2}\tan B_1 \sin\alpha_{2.1}\,.\,\eta_1 + \cdots \end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned} L_2 - L_2'' = &-\frac{(1-e^2)W_2}{W_1^3}\left\{\sin\varDelta\alpha - \left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\right\}\sec B_2\,.\,\xi_1 \\ &- \left\{\sec B_1 + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \sec B_2 \tan B_1 \cos\alpha_{2.1}\right\}\eta_1 + \cdots \end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2.1} - \alpha_{2.1}'' = &\frac{a_0}{\mathfrak{m}}\frac{1-e^2}{W_1^3}\left\{\begin{aligned} &\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\cos\varDelta\alpha\sin\alpha_{2.1} - \frac{\sin^2\varDelta\alpha}{\sin\alpha_{1.2}} \\ &+ \left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right]\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin^2\alpha_{2.1}\sin\alpha_{1.2} \end{aligned}\right\}\xi_1 \\ &+ \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \tan B_2 \cos\alpha_{2.1}\right\}\tan B_1\,.\,\eta_1 + \cdots. \end{aligned}\right\}(4)$$

Wenn man hierin für B_2, L_2 und $\alpha_{2.1}$ den (1) entsprechend die Substitutionen benutzt:

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= B_2' + \xi_2 + \cdots \\ L_2 &= L_2' - \eta_2 \sec B_2' + \cdots \\ \alpha_{2.1} &= \alpha_{2.1}' + \eta_2 \tan B_2' + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

so erhält man Gleichungen zwischen den Komponenten ξ und η der

Lotabweichungen beider Punkte P_1 und P_2 bezüglich des Referenzellipsoids. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} B_2'' - B_2' - \xi_2 + \frac{W_2^3}{W_1^3}\left\{\cos\Delta\alpha + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\sin\alpha_{2.1}\right\}\xi_1 \\ - \frac{\mathfrak{m}}{a_0}\,\frac{W_2^3}{1-e^2}\tan B_1 \sin\alpha_{2.1}\,.\,\eta_1 + \cdots = 0 \end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned} L_2'' - L_2' + \sec B_2\,.\,\eta_2 - \frac{(1-e^2)W_2}{W_1^3}\left\{\sin\Delta\alpha - \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin\alpha_{1.2}\cos\alpha_{2.1}\right\}\sec B_2\,.\,\xi_1 \\ - \left\{1 + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \sin B_1 \sec B_2 \cos\alpha_{2.1}\right\}\sec B_1\,.\,\eta_1 + \cdots = 0 \end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2.1}'' - \alpha_{2.1}' - \tan B_2\,.\,\eta_2 \\ - \frac{a_0}{\mathfrak{m}}\,\frac{1-e^2}{W_1^3}\left\{\begin{aligned} &\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\cos\Delta\alpha\sin\alpha_{2.1} - \frac{\sin^2\Delta\alpha}{\sin\alpha_{1.2}} \\ &+\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2}\right]\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{2.1}\right]\sin^2\alpha_{2.1}\sin\alpha_{1.2} \end{aligned}\right\}\xi_1 \\ + \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{1.2} + \frac{\mathfrak{m}}{a_0} W_2 \tan B_2 \cos\alpha_{2.1}\right\}\tan B_1\,.\,\eta_1 + \cdots = 0. \end{aligned}\right\}(8)$$

Über die strenge und näherungsweise Berechnung der hierin auftretenden Koefficienten vergl. § 11 S. 283.

Man kann in den Koefficienten jedenfalls die wirklichen Werte der geographischen Koordinaten und der Azimute anstatt der ellipsoidischen anwenden, die der Einfachheit halber eingeführt sind.

Wenn man nun ferner erwägt, dafs einerseits die Beobachtungsfehler in B', L' und α' schon in der 1. Decimalstelle der Sekunden auftreten, dafs andrerseits die Komponenten der Lotabweichungen im allgemeinen nur einzelne Sekunden betragen, so erscheint es überhaupt völlig genügend, die Koefficienten von ξ_1 und η_1 auf drei Decimalen anzugeben, was für $s < 0{,}1\,a_0$ und (wie immer) abgesehen von hohen Breiten auf die Vernachlässigung von $e^2 s : a_0$, d. h. auf die Anwendung der Formeln (10) S. 285 hinauskommt.

Es ergiebt sich darnach unter den ebenerwähnten Voraussetzungen:

$$\left.\begin{aligned} &B_2'' - B_2' - \xi_2 + \xi_1 \cos L_{1.2} + \eta_1 \sin L_{1.2} \sin B_1 + \cdots = 0 \\ &L_2'' - L_2' + \eta_2 \sec B_2 + \xi_1 \sin L_{1.2} \tan B_2 \\ &\qquad - \eta_1 (\sec B_1 + \sin L_{1.2} \tan B_1 \csc\alpha_{1.2} \cos\alpha_{2.1}) + \cdots = 0 \\ &\alpha_{2.1}'' - \alpha_{2.1}' - \eta_2 \tan B_2 - \xi_1 \sin L_{1.2} \sec B_2 \\ &\qquad + \eta_1 \cos L_{1.2} \sin B_1 \sec B_2 + \cdots = 0, \end{aligned}\right\}(9)$$

genau bis auf Glieder von der Ordnung $e^2 s : a_0$ in den Koefficienten von ξ_1 und η_1. Dabei bedeuten B_2', L_2', $\alpha_{2.1}'$ die wirklichen Werte der geographischen Breite und Länge sowie des Azimuts der geodätischen Linie in P_2; B_2'', L_2'', $\alpha_{2.1}''$ hingegen die von P_1 aus mittelst B_1', L_1', $\alpha_{1.2}'$ und s berechneten Werte. Es ist ferner in den Koefficienten $L_{1.2} = L_2 - L_1$ zu nehmen.

In dem Koefficienten von η_1 in der 2. Gleichung (9) kann man für

$$\sin L_{1.2} \tan B_1 \csc \alpha_{1.2} \cos \alpha_{2.1}$$

auch schreiben:

$$\sin \frac{s}{a_0} \tan B_1 \sec B_2 \cos \alpha_{2.1}.$$

Setzt man ξ_1 und η_1 gleich null, so folgt aus (9):

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \quad B_2'' - B_2' + \cdots \\ \eta_2 &= -(L_2'' - L_2') \cos B_2 + \cdots \\ \eta_2 &= \quad (\alpha_{2.1}'' - \alpha_{2.1}') \cot B_2 + \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{9*}$$

Man hat daher, falls sowohl geographische Längen wie Azimute vorliegen, durch die doppelte Bestimmung von η_2 die Gleichung

$$(\alpha_{2.1}'' - \alpha_{2.1}') + (L_2'' - L_2') \sin B_2 + \cdots = 0, \tag{10}$$

welche Bedingungsgleichung eine Kontrolle der Genauigkeit der geodätischen und astronomischen Operationen giebt. Setzt man ξ_1 und η_1 nicht null, so ist der Ausdruck, welcher die linke Seite der Gleichung (10) bildet, gleich der Summe zweier Bruchteile von η_1, und von ξ_1, welche in Bezug auf $s : a_0$ die 1. Ordnung haben.

Die 3. Gleichung (9*) verliert übrigens in der Nähe des Äquators ihre Brauchbarkeit, weil hier die Fehler der Azimutmessung stark vergröſsert in η_2 übergehen. Die Gleichung (10) aber ist auch hier anwendbar und von Nutzen.

Sie ist schon von *Laplace* angegeben worden (vergl. den Schluſs dieses Kapitels) und wird auch als das *Theorem von Laplace* bezeichnet.

Unter der Annahme ξ_1 und η_1 gleich null für *München* berechnet *Carl von Orff* S. 55 u. ff. der Abhandlung: *Bestimmung der geographischen Breite der Königl. Sternwarte bei München,* im Supplement zum 21. Bd. der Annalen derselben Sternwarte für mehrere Punkte nördlich und südlich der Alpen Lothabweichungen und gelangt S. 57 zu 6 Kontrollgleichungen aus doppelter Bestimmung von η:



	$L''-L'$	$\alpha''-\alpha'$	$(L''-L')\sin B$
Mannheim	$-4{,}71''$	$+2{,}94''$	$-3{,}58''$
Pfänder	$-19{,}98$	$+14{,}84$	$-14{,}73$
Zürich	$+0{,}71$	$-0{,}1$	$+0{,}5$
Rigi	$-2{,}16$	$-2{,}31$	$-1{,}6$
Bern	$+6{,}14$	$+0{,}4$	$+4{,}5$
Mailand	$+6{,}21$	$+0{,}2$	$+4{,}4$

	$\alpha''-\alpha'+(L''-L')\sin B$	Länge der Ketten
Mannheim	$-0{,}64''$	60 Meilen
Pfänder	$+0{,}11$	22 „
Zürich	$+0{,}4$	38 „
Rigi	$-3{,}9$	33 „
Bern	$+4{,}9$	48 „
Mailand	$+4{,}6$	52 „

Für die geodätische Übertragung der Breite und Länge sowie des Azimuts wurden hierbei mit Vorteil zuerst Polarkoodinaten berechnet und dann die Formeln S. 298 angewandt.

Bessel hat 1837 in den *Astronom. Nachr.* Bd. 14, S. 269 u. ff. in der Abhandlung: *Über den Einfluſs der Unregelmäſsigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten* u. s. f. (vergl. auch *Abhandl.* Bd. 3, S. 19 u. ff., insbesondere S. 36) die Ausdrücke für die Koefficienten von ξ_1 und η_1 ohne Benutzung der reduzierten Länge m entwickelt, was nur mittelst Reihenentwicklung möglich ist. Seine Angaben sind jedoch in gleicher Weise entstellt wie die andern auf S. 295 erwähnten, ohne daſs indessen dieser Umstand ebenso wie bei jenen Angaben von erheblichem Einfluſs auf die Resultate der numerischen Rechnung wird.

§ 12. Genauigkeit der berechneten relativen Lotabweichungen.

Es mögen δs, $\delta\alpha'$, $\delta B'$, $\delta L'$ Verbesserungen der beobachteten wirklichen Werte für s, α, B und L bezeichnen. Dann geben uns die Gleichungen (10) S. 285 mit Rücksicht auf (10*) ebenda sofort folgende Ausdrücke, welche den Gleichungen (6), (7) und (8) S. 536, bezw. den drei Gleichungen (9) S. 536 linker Hand beizufügen sind:

$$\cos L_{1.2}\,\delta B'_1 - \delta B'_2 + \varrho'' \cos \alpha_{2.1} \frac{\delta s}{a_0} + \sin L_{1.2} \cos B_1\, \delta\alpha'_{1.2} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \delta L'_1 - \delta L'_2 + \sin L_{1.2} \tan B_2\, \delta B'_1 \\ -\varrho'' \sec B_2 \sin \alpha_{2.1} \dfrac{\delta s}{a_0} - \sin \dfrac{s}{a_0} \sec B_2 \cos \alpha_{2.1}\, \delta\alpha'_{1.2} \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{c} -\sin L_{1.2} \sec B_2\, \delta B'_1 \\ +\varrho'' \tan B_2 \sin \alpha_{2.1} \dfrac{\delta s}{a_0} + \cos L_{1.2} \cos B_1 \sec B_2\, \delta\alpha'_{1.2} - \delta\alpha'_{2.1}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Denkt man sich aus den (9) S. 536 ξ_2 und η_2 berechnet, so stellt

jetzt (1) zugleich den Einfluſs der Beobachtungsfehler im Sinne einer Verbesserung für ξ_2 dar; dagegen ist — (2) cos B_2 und + (3) cot B_2 der entsprechende Einfluſs für η_2. Derselbe ist also gleich

$$\left.\begin{array}{l}(\delta L'_2 - \delta L'_1)\cos B_2 - \sin L_{1.2} \sin B_2\, \delta B'_1 \\ \quad + \varrho'' \sin \alpha_{2.1} \frac{\delta s}{a_0} + \sin \frac{s}{a_0} \cos \alpha_{2.1} \delta \alpha'_{1.2}\end{array}\right\} \quad (2^*)$$

bezw.

$$\left.\begin{array}{l}- \sin L_{1.2} \csc B_2\, \delta B'_1 \\ + \varrho'' \sin \alpha_{2.1} \frac{\delta s}{a_0} + \cos L_{1.2} \cos B_1 \csc B_2\, \delta \alpha'_{1.2} - \cot B_2\, \delta \alpha'_{2.1}.\end{array}\right\} (3^*)$$

Ferner ist der Einfluſs auf die linke Seite der *Kontrollgleichung* (10) S. 537 gleich

$$\left.\begin{array}{l}(\delta L'_1 - \delta L'_2)\sin B_2 - \sin L_{1.2} \cos B_2 \delta B'_1 \\ + \left(\cos L_{1.2} \cos B_1 \sec B_2 - \sin \frac{s}{a_0} \tan B_2 \cos \alpha_{2.1}\right) \delta \alpha'_{1.2} - \delta \alpha'_{2.1}.\end{array}\right\} (4)$$

Dieses zeigt, daſs die Kontrollgleichung unabhängig vom Fehler δs ist, daſs sie ferner in der Nähe des Äquators auch frei von den $\delta L'$ wird und daſs sie endlich jedenfalls eine gute Kontrolle der Azimutübertragung durch das Dreiecksnetz giebt.

Was die Bestimmung von η_2 anbetrifft, so zeigen die Ausdrücke (2*) und (3*) vorerst natürlich wieder die Unbrauchbarkeit der Azimutmessungen am Äquator, sodann aber überhaupt eine Überlegenheit der geographischen Längenbestimmung gegenüber den Azimutmessungen, weil $\delta \alpha'_{1.2}$ in (2*) selbst im Maximum nur den Faktor $\sin \frac{s}{a_0}$ hat, während in (3*) der Faktor jeden Wert annehmen kann. Es tritt zwar in (2*) noch das Fehlerglied $(\delta L'_2 - \delta L'_1)\cos B_2$ auf, wozu (3*) nichts Analoges hat, allein dieses vermindert den Genauigkeitsgrad der Bestimmung von η_2 nicht wesentlich, wenn telegraphische Längenbestimmungen nach den besten Methoden vorausgesetzt werden. Denn der mittlere Fehler einer solchen beträgt in der That nicht mehr, wie derjenige einer Azimutmessung.*) Während

*) Nach *Albrechts* vorläufiger Ausgleichung einiger Längenbestimmungen in den *Astronom. Nachr.* Bd. 89, No. 2132 S. 305 u. ff., finden wir als m. F. der besten Längenbestimmungen $\pm 0{,}75''$. Dagegen würde nach 5 Doppelazimutbestimmungen des Geodätischen Instituts (mit 2 verschiedenen Instrumenten nach 2 verschiedenen Methoden) der m. F. einer Doppelazimutbestimmung gleich $\pm 0{,}58''$. Dies sind jedoch extreme Werte, die sich durch definitive Bearbeitung der Endresultate wesentlich reduzieren werden. Wir vermuten in beiden Fällen auf $\pm \frac{1}{2}''$. Dagegen folgt aus 7 Doppelbestimmungen des Geodätischen Instituts in geographischer Breite als m. F. einer solchen Doppelbestimmung $\pm 0{,}29''$.

aber $(\delta L'_2 - \delta L'_1)$ dem m. F. der Längendifferenz unmittelbar entspricht, setzt sich $\delta\alpha'_{1.2}$ aus dem m. F. der Azimutmessung und den Übertragungsfehlern durch das Dreiecksnetz zusammen. Dieser Teil wächst, insofern er zufälliger Natur ist, nach S. 531 (6*) mit der Quadratwurzel aus der Entfernung, insofern er aber von konstanten Ursachen abhängt, nach S. 528 (6) direkt mit der Entfernung.

Die Ausdrücke (1), (2*) und (3*) gestatten die mittleren Fehler in der Bestimmung von ξ_2 und η_2 zu berechnen, wenn die mittleren Fehler in B', L', s und α' gegeben sind.

Setzen wir beispielsweise in der mittleren Breite von 45° eine Kette von 20 an einander hängenden Dreiecken voraus, die im Azimut 45° eine Längenerstreckung von 637^{km} hat, so ergeben sich zunächst nach (5*) S. 530 und (6*) S. 531 mit $\mu = \pm 0{,}5''$ und $i = 10$ die mittleren Beträge

$$\delta s = \pm 3{,}5^m \quad \text{und} \quad \delta w = \pm 0{,}7'',$$

wenn w den Winkel zwischen der Anfangsseite und Langseite des Netzes bezeichnet. Nehmen wir ferner als mittlere Fehler der Breiten-, Längen- und Azimutbestimmung bezw. $\pm 0{,}3''$, $\pm 0{,}5''$ und $\pm 0{,}5''$, so wird der mittlere Betrag von

$$\delta B'_1 \text{ und } \delta B'_2 = \pm 0{,}3'',\ (\delta L'_2 - \delta L'_1) = \pm 0{,}5''$$

$$\delta\alpha'_{1.2} = \pm 0{,}5'' \pm 0{,}7'' = \pm 0{,}9''$$

$$\delta\alpha'_{2.1} - \delta\alpha'_{1.2} = \pm 0{,}5'' \pm 0{,}5'' \pm 1{,}0'' = \pm 1{,}2'',$$

wobei das 3. Glied des letzten Ausdruckes nach Formel (7*) S. 531 ermittelt wurde. Die Ausdrücke (1), (2*) und (3*) geben jetzt:

$$\pm 0{,}3 \pm 0{,}3 \pm 0{,}7 . 0{,}11 \pm 0{,}07 . 0{,}9 = \pm 0{,}4'' \text{ für } \xi_2$$

$$\pm 0{,}7 . 0{,}5 \pm 0{,}07 . 0{,}3 \pm 0{,}7 . 0{,}11 \pm 0{,}07 . 0{,}9 = \pm 0{,}4'' \quad \text{„} \quad \eta_2$$

$$\pm 0{,}14 . 0{,}3 \pm 0{,}7 . 0{,}11 \pm 1{,}2 = \pm 1{,}2'' \quad \text{„} \quad \eta_2.$$

Die grofse Überlegenheit der geographischen Längenbestimmungen tritt hier deutlich hervor.

Immerhin verdienen die Azimutmessungen einige Aufmerksamkeit, denn sie lassen sich leichter als Messungen geographischer Längen anstellen. In den meisten Fällen, wo es sich um die Ermittlung der Lotabweichungen einer gröfseren Anzahl astronomischer Stationen handelt, wird man nur Breite und Azimut bestimmen können. Damit aber in den η keine Fehleranhäufung eintritt, sind für einige gröfsere

Distanzen auch geographische Längen zu ermitteln. Den Azimutmessungen fällt dann die Aufgabe zu, die η dazwischen zu *interpolieren.*

Der Anblick der obigen Fehlerausdrücke giebt noch zu der Bemerkung Veranlassung, dafs bei *sehr* beträchtlichen Ausdehnungen die Bestimmung von ξ und η aus den geographischen Breiten und Längen wegen der Fehler in s und α' eine sehr ungenaue werden kann. Dieses ist indes unvermeidlich. Der Fehler in ξ und η wird übrigens wesentlich kleiner, als obige Ausdrücke ihn angeben, wenn nur bei grofser Ausdehnung des triangulierten Gebietes stets *mehrere* Grundlinien gemessen werden und bei der Ausgleichung des Netzes hierauf, sowie auf die *Kontrollgleichungen* (10) S. 537, welche in gehöriger Anzahl zu schaffen sind, Rücksicht genommen wird.

In den *Astronom. Nachr.* Bd. 90, No. 2144 und Bd. 91, No. 2170 giebt *Sadebeck* den Einflufs der Lotabweichung auf die Horizontalwinkelmessung vom Brocken an. Es findet sich für den Brocken zur Ermittlung der Lotabweichung, wobei Seeberg bei Gotha als Ausgang dient, mit $\xi_1 = 0$ und $\eta_1 = 0$:

astron.	$B'_2 = 51^0 48' 10{,}59''$	$L'_{1.2} = 26{,}757^s$	$\alpha'_{2.1} = 355^0 18' 29{,}665''$
geodät.	$B''_2 = \quad 1{,}41$	$L''_{1.2} = 26{,}986$	$\alpha''_{2.1} = \quad 21{,}430$
Es ist also nach unserer Bezeichnungsweise	$\xi_2 = \quad -9{,}18''$	$\eta_2 \sec B_2 = -3{,}435''$	$\eta_2 \tan B_2 = \quad -8{,}235''$
		$\eta_2 = -2{,}12''$	$\eta_2 = \quad -6{,}48''.$

Der Fehler der Kontrollgleichung ist 5,5″, was auf einen groben Fehler hinweist. *Sadebeck* nimmt eine Ausgleichung vor, die jedoch verfehlt ist, indem sie 2 Bedingungsgleichungen voraussetzt, obgleich die 3 Bestimmungen für 2 Elemente der Lotabweichung doch nur einer Bedingung unterliegen können. Es ist dies eben die Kontrollgleichung. Jene 2 Gleichungen kommen dadurch zustande, dafs die Richtung der Lotabweichung nach einer 1. Rechnung in versteckter Weise als fest gegeben eingeführt wird.

Wegen des zu vermutenden groben Fehlers erscheint eine Ausgleichung unthunlich. Will man aber doch ein Mittel bilden, so genügt das einfache arithmetische Mittel $\eta_2 = -4{,}3''$ vollständig. Denn nach (2*) und (3*) S. 539 sind die wesentlichsten Teile der Fehler in den beiden Werten von η_2 gleich

$$(\delta L'_2 - \delta L'_1) \cos B_2 \quad \text{bezw.} \quad (\delta \alpha'_{1.2} - \delta \alpha'_{2.1}) \cot B_2$$

mit

$$\cos B_2 = 0{,}62 \qquad\qquad \cot B_2 = 0{,}79\,.$$

Unter der Voraussetzung gleichen mittleren Betrags von $\delta L'_2 - \delta L'_1$ und $\delta \alpha'_{1.2} - \delta \alpha'_{2.1}$ ist daher das Verhältnis der Gewichte gleich $0{,}79^2 : 0{,}62^2$. Bei der gänzlichen Ungewifsheit über die Zulässigkeit jener Voraussetzung ist aber diese Ungleichheit der Gewichte ohne Bedeutung.

Übrigens entsteht möglicherweise der grofse Widerspruch nur dadurch, dafs dem $\alpha''_{2.1}$ nicht ein auf Seeberg, sondern ein auf Inselsberg gemessenes Azimut zu grunde liegt (vergl. weiterhin S. 568). Der zweite obiger

Werte von η_2 würde alsdann sehr stark von der Lotabweichung auf Inselsberg beeinflufst sein.

§ 13. **Die Ausführung der Rechnung** wird sich in der Praxis verschieden gestalten können, je nach der Häufigkeit der astronomischen Stationen und der Vollständigkeit der Beobachtungen auf denselben. Wir wollen drei Fälle etwas detaillierter behandeln.

Im 1. Falle nehmen wir an, dafs keine überschüssigen Gleichungen zur Bestimmung der Lotabweichungen entstehen, indem auf jeder astronomischen Station (eine einzige ausgenommen) nur entweder das Azimut einer Dreiecksseite oder der Längenunterschied gegen eine andere astronomische Station gemessen ist.

Im 2. Falle setzen wir voraus, dafs auf allen astronomischen Stationen Breite und Azimut, zum Teil aber auch Längendifferenzen gemessen seien.

Im 3. Falle nehmen wir dasselbe an, zugleich aber, dafs alle geodätischen Stationen auch astronomische Stationen seien.

In allen drei Fällen setzen wir voraus, dafs die Bestimmungen der Längendifferenzen ein zusammenhängendes Netz bilden und dafs die Bedingungsgleichungen, welche sich durch überschüssige Bestimmung von Längendifferenzen ergeben, bereits durch eine Ausgleichung befriedigt worden sind und somit als definitive angesehen werden können.*) Dieser Vorgang erscheint so lange völlig zulässig, als in den Kontrollgleichungen des Netzes, S. 537 (10), die Fehler der Azimutübertragung dominieren, so dafs es ein sehr zweifelhafter Gewinn sein würde, die geographischen Längen zu verbessern. Gegenwärtig ist dieses aber wohl bei allen Gradmessungsnetzen der Fall, weil infolge der Schwierigkeit der Längenbestimmung die Anzahl der sowohl in Länge als auch in Azimut behandelten Stationen immer eine verhältnismäfsig kleine bleiben wird.

Auch die Breitenbestimmungen können eventuell mit Vorteil, wie es mehrfach geschehen ist, einer separaten Ausgleichung dahin unterworfen werden, dafs man aufser den geographischen Breiten auch die Deklinationen der Sterne (und bei α Urs. min. sowie den Polsternen überhaupt auch die Rektascensionen) als Unbekannte ansieht und alles durch eine gemeinsame Ausgleichung bestimmt.**)

---

*) Vergl. hierzu u. a. die S. 539 u. citierte Arbeit *Albrechts*.

**) In dieser Weise gingen *W. Struve* bei der Gradmessung in den russischen Ostseeprovinzen und *James* bei der englischen Gradmessung vor (vergl. das mehrfach erwähnte Hauptwerk der englischen Landesvermessung). Da in neuester Zeit mit besonderer Rücksicht auf Gradmessungszwecke sehr scharfe Sternörter abgeleitet worden sind, so kann das Verfahren vielleicht dahin modificiert werden, dafs man die Sternörter als gegeben ansieht, aber die auf der einzelnen

Man wird alsdann zunächst nur die Breitendifferenzen erhalten, aber sehr genau, und kann schliefslich mit strenger Beibehaltung derselben auch noch die geographischen Breiten selbst herstellen. Einen Vorteil wird allerdings dies Verfahren nur bieten, wenn auf benachbarten Stationen hinlänglich viel gemeinsame Sterne nach derselben Methode beobachtet sind, sodafs die Breitendifferenzen frei von den Deklinationen und Instrumentalfehlern werden. Dafs es aber nötig ist, noch immer die Genauigkeit der Breitendifferenzen (welche offenbar am meisten interessieren) zu verschärfen, zeigen die verhältnismäfsig grofsen Unterschiede der Bestimmungen derselben Breiten nach verschiedenen Methoden.

§ 14. 1. Fall praktischer Bestimmung der Lotabweichung. Die Formeln (6) bis (8) oder (9) S. 536 gestatten die Berechnung von ξ und η für alle astronomischen Stationen, wenn diejenigen einer 1. Station P_1 unbestimmt gelassen werden. Als solche denken wir uns eine Station gewählt, die im Netz der Längenbestimmungen vorkommt, für welche aber auch die geographische Breite und ein Azimut gemessen sind.

Wir nehmen endlich noch an, dafs das Dreiecksnetz im Zusammenhange ausgeglichen und demnach ohne Widersprüche sei, dafs ferner von P_1 nach allen astronomischen Stationen Polarkoordinaten, also die Längen der Radienvektoren sowie die Winkel zwischen denselben und den anschliefsenden Dreiecksseiten in ihren Endpunkten berechnet seien. Da nun in P_1 das Azimut einer Dreiecksseite direkt beobachtet ist, kann man sofort die $\alpha'_{1.i}$ für jede Station P_i angeben. $\alpha'_{i.1}$ findet sich aus dem beobachteten Azimut einer Dreiecksseite in P_i und den berechneten Winkeln.

Alsdann kann man nach früher angegebenen Formeln aus $s_{1.i}$ und $\alpha'_{1.i}$ auf B''_i, L''_i und $\alpha''_{i.1}$ übergehen. Für jeden Punkt $P_2, P_3 \dots P_i \dots$, wo Breite und Länge oder Azimut gemessen sind, erhält man nach den eingangs genannten Formeln eine Gleichung für ξ_i und eine für η_i, die sich in die nachstehenden symbolischen Formen bringen lassen:

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= -l_i + a_i\xi_1 + b_i\eta_1 \\ \eta_i &= -l'_i + a'_i\xi_1 + b'_i\eta_1 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Hierin sind l_i und l'_i Sekundenwerte, a_i und b_i Koefficienten. Diese Bestimmung von ξ_i und η_i ist offenbar eine nur gerade hinreichende ohne jede Kontrolle, sodafs alle Beobachtungsfehler und die Reduktions-

---

Station kaum vollständig eliminierbaren Instrumentalfehler durch möglichst identischen Vorgang bei der Breitenbestimmung auf verschiedenen Stationen streng zu eliminieren sucht.

fehler der Azimute ganz in die Werte ξ_i und η_i eingehen. Ein Nutzen der Längenbestimmungen zur Verbesserung der η aus den Azimuten tritt nicht hervor, weil sich eben nirgends doppelt bestimmte η vergleichen lassen.

Um schliefslich definitive Werte der ξ und η zu erhalten, ist für ξ_1 und η_1 eine Annahme zu machen, d. h. das Referenzellipsoid ist in eine bestimmte Lage zur Lotrichtung P_1 zu bringen:

Man wird bei der Wahl von ξ_1 und η_1 am besten so verfahren, dafs die Summe der $\xi_i^2 + \eta_i^2$ ein Minimum wird in Bezug auf ξ_1 und η_1 als Unbekannte (Variable). Diese Wahl ist wenigstens dann eine sehr passende, sobald die astronomischen Stationen gleichmäfsig über einen Teil der Geoidfläche verbreitet sind.

Die Ausgleichung ist eine solche nach vermittelnden Beobachtungen und ohne alle Schwierigkeiten. Bezeichnen wir ξ_1 und η_1, insofern sie Unbekannte sind, mit x und y, so lauten für die Fehler $\xi_1, \xi_2 \ldots \eta_1, \eta_2 \ldots$ die Fehlergleichungen in symbolischer Form:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_1 = \cdot \cdot + \;\; x \;\; \cdot \cdot & \eta_1 = \cdot \cdot \cdot \cdot + \;\; y \\ \xi_2 = - l_2 + a_2 x + b_2 y & \eta_2 = - l'_2 + a'_2 x + b'_2 y \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot , \end{array}\right\} \qquad (2)$$

die nach *Ausgleichungsrechnung* S. 115 u. ff. weiter zu behandeln sind.

Wir bemerken hierbei nur noch, dafs man beiden Fehlergleichungssystemen und allen einzelnen Gleichungen so lange unbedingt *dasselbe Gewicht* erteilen mufs, als nicht die Beobachtungs- und Reduktionsfehler nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung so anschwellen können, dafs die ξ und η von ihren wahren Werten um Beträge abweichen, die selbst von der Ordnung dieser Werte, also Beträge von mehreren Sekunden sind. Nach § 12 S. 540 wird dieses zuerst bei Azimutmessungen eintreten können.

Was die Berechnung von B''_i, L''_i und $\alpha''_{i.1}$ anlangt, wofür oben die Benutzung von Polarkoordinaten vorausgesetzt wurde, so ist noch darauf hinzuweisen, dafs dieselbe auch ohne solche erfolgen kann. Es genügt und ist unter Umständen vorteilhafter, von Punkt zu Punkt die Breite und Länge sowie das Azimut zu übertragen. Diese Übertragung kann erfolgen entweder durch die Dreiecksseiten selbst oder durch eingeschaltete Hilfslinien, die vielleicht die benachbarten astronomischen Stationen verbinden. Natürlich giebt sie dieselben Resultate, wie die andere oben vorausgesetzte Rechnung, falls sich diese durchaus auf die für P_1 erhaltenen astronomischen Beobachtungswerte und das Dreiecksnetz stützt und nirgends etwa noch ein anderes beobachtetes

Azimut zur weiteren Übertragung angewandt wird. Der Form nach besteht indes der Unterschied, dafs nicht das $\alpha''_{i.1}$ für einen Punkt P_i erhalten wird, sondern das Azimut der letzten zur Übertragung benutzten Linie, welches hier vorübergehend mit $\alpha''_{i.k}$ bezeichnet werden soll. Die Azimutbeobachtung in P_i giebt hierzu mit Benutzung der Winkel im Netze unmittelbar einen Wert $\alpha'_{i.k}$, der sofort mit $\alpha''_{i.k}$ verglichen werden kann.

In der Gleichung, welche der Azimutmessung entspricht, ist nun bei diesem Vorgange an Stelle von $\alpha''_{i.1} - \alpha'_{i.1}$ zu setzen $\alpha''_{i.k} - \alpha'_{i.k}$. Beide Werte stimmen aber mit einander überein, da die Differenzen $\alpha''_{i.1} - \alpha''_{i.k}$ und $\alpha'_{i.1} - \alpha'_{i.k}$ denselben Winkelwert bezeichnen, wie sich mit Rücksicht auf die S. 543 angegebene Berechnungsweise von $\alpha'_{i.1}$ leicht findet. (Ein Unterschied entsteht nur dann, wenn das Netz für die verschiedenen Berechnungen etwas verschiedene Orientierung hat, was auch einen Unterschied dieser Winkel bedingt. Derselbe wird aber, wie aus § 19 S. 405 zu ersehen ist, verschwindend klein, weil die den beiden Orientierungen entsprechenden Unterschiede in den geographischen Breiten der Punkte in der Regel so geringfügig ausfallen, dafs sie ohne Einflufs auf die bei Anwendung des erweiterten *Legendre*schen Theorems zu berechnenden Reduktionsglieder bleiben.)

Wendet man anstatt der Polarkoordinaten die zuletzt besprochene successive Übertragung an, so müssen für die Differentialformeln schliefslich noch die $\alpha_{1.i}$ und $\alpha_{i.1}$, sowie eventuell die $s_{1.i}$ berechnet werden, weil diese Gröfsen in denselben ohne Weitläufigkeit nicht wohl entbehrlich sind. Selbstverständlich reicht hier eine mehr oberflächliche Rechnung mit wenig Decimalen aus, die zweckmäfsig die Formeln des § 23 S. 313 u. ff. in abgekürzter Gestalt benutzen wird.

Ein Beispiel zu vorstehender Aufgabe bietet die Vermessung von Grofsbritannien und Irland, vergl. das Hauptwerk derselben: *Ordnance Trigonometrical Survey, Principal Triangulation* S. 686 u. ff. Hier sind für 35 Stationen die Breite, für 5 Stationen die Längendifferenz mit Greenwich und für 35 Stationen, von denen keine mit einer Längenstation identisch ist und die z. T. auch nicht mit den Breitenstationen zusammenfallen, die Azimute zur Verwertung gelangt. Den Rechnungen wurden *Airys* Elemente für das Erdellipsoid (vom Jahre 1830) zu grunde gelegt.

Man blieb jedoch dabei nicht stehen, sondern fügte den Gleichungen für ξ und η noch Glieder bei für einen Zuwachs von a_0 und e^2 und bestimmte nunmehr das Minimum von $\xi_i^2 + \eta_i^2$ in Bezug auf x, y und diese beiden unbekannten Zuwachse der Elemente der Meridianellipse. In Bezug auf die Gewichtsannahme sind mehrere Ausgleichungen nach verschiedenen Gesichtspunkten durchgeführt.

Diese vorzügliche und zum Studium höchst empfehlenswerte Arbeit ist auch dadurch interessant, dafs für eine gröfsere Anzahl Stationen Lotablenkungen durch benachbarte sichtbare Massenunregelmäfsigkeiten ermittelt wurden. Die Vergleichung (auf die wir im 2. Band zurückkommen) zeigt, dafs in der That zum gröfsten Teil die betreffenden Lotabweichungen gegen das wie angegeben ermittelte Referenzellipsoid durch die lokalen Ursachen erklärbar sind (S. 699; wie weit in der Herbeiziehung solcher zu gehen ist, siehe S. 700).*)

Einige der erwähnten Ausgleichungsrechnungen sind nach vorheriger Korrektion wegen lokaler Attraktion ausgeführt. Schliefslich ist (S. 710—713) ein Ellipsoid mit der Abplattung 1 : 280,4 als plausibelstes ausgewählt und der definitiven Landesvermessung, sowie den für diese beizubehaltenden geographischen Positionen zu grunde gelegt (S. 717).

Die Details lohnen die Mühe des Nachschlagens.

§ 15. **2. Fall praktischer Bestimmung der Lotabweichung.** Dieser unterscheidet sich vom vorigen dadurch, dafs die Bestimmung von η für einige Punkte eine doppelte ist, indem sie nämlich sowohl aus der Längendifferenz, als auch aus der Azimutmessung erfolgt. Wenn wir nun jene als sehr genau bestimmt und die gegenseitigen Entfernungen der ins Netz der Längenbestimmungen eingeführten Punkte nicht gerade klein voraussetzen, sodafs die Azimutdifferenzen sehr erheblich ungenauer werden als die Längendifferenzen, so erscheint es passend und zugleich bequem, η aus der Längenbestimmung definitiv beizubehalten.

Wir verzichten also im Folgenden auf eine Verbesserung der geographischen Breiten und Längen und verbessern nur die Azimute und die Stücke des geodätischen Netzes.

Der Rechnungsgang kann nun zunächst wie im 1. Falle angelegt werden. Es entsteht dann aber einige Schwierigkeit, die Kontrollen für die Azimutmessungen, welche von der an einigen Punkten stattfindenden Doppelbestimmung von η geliefert werden, auszunutzen.

Streng genommen mufs auf diese Kontrollen schon bei der Netzausgleichung Rücksicht genommen werden. Wenn das, soviel uns bekannt, noch nirgends geschehen ist, so hat dieses wohl seinen hauptsächlichsten Grund in der geringen Genauigkeit der Bestimmung geographischer Längen bis in die neueste Zeit, infolge welcher in der That die Kontrollen kaum eine Bedeutung für die Winkel des Netzes, sondern lediglich für jene Längenbestimmungen allein beanspruchen konnten.

*) Vergl. in dieser Beziehung auch das Werk: *Die bayerische Landesvermessung.*

Aufserdem nehmen die betreffenden Kontrollgleichungen eine etwas ungewöhnliche Form an, wie man erkennt, wenn man bei Ableitung der Gleichung (10) S. 537 ξ_1 und η_1 nicht null setzt, sondern als unbestimmte Gröfsen beibehält. Alsdann erscheinen in der modificierten Gleichung (10) zwei neue Glieder mit ξ_1 und η_1. Die Koefficienten dieser beiden Gröfsen sind zwar in der Regel klein, aber es ist doch unzweifelhaft notwendig, sie zu berücksichtigen, was in *der* Form zu geschehen hat, dafs alle Ergebnisse der Ausgleichungsrechnung als lineare Funktionen von ξ_1 und η_1 dargestellt werden.

Die hierbei entstehende Komplikation der Rechnung in Verbindung mit der Schwierigkeit, die relativen Genauigkeiten der Längenbestimmungen und der Azimut- und Winkelbeobachtungen richtig einzuführen, werden vielleicht auch jetzt noch als triftige Gründe gelten, die geodätische Netzausgleichung zunächst mit jenen Kontrollen nicht zu vermischen.

Sehen wir also von einer direkten strengen Behandlung ab, indem wir uns die Netzausgleichung wie üblich erfolgt denken, so bleibt die Aufgabe zu lösen, *nachträglich* jene Kontrollen zu verwerten.

Ein Näherungsverfahren ist folgendes: Da nur die astronomischen Stationen interessieren, substituieren wir an Stelle des primären Dreiecksnetzes ein ideales, welches benachbarte astronomische Stationen zu Dreiecken oder Polygonen verbindet.

In diesem idealen Netz betrachten wir nicht nur die Richtungen, d. h. die Azimute bis auf eine jeder Station eigentümliche Konstante, sondern auch die Seiten als unabhängige Beobachtungsgröfsen, deren Gewichte nach Mafsgabe der Seitenlänge geschätzt werden (§ 8 S. 528 u. ff. giebt eine Andeutung in dieser Hinsicht).

Die Wahl des idealen Netzes ist mehr oder weniger willkürlich, aber nicht gleichgültig. Um gar nichts von der Strenge zu opfern, hätte man die N_a astronomischen Punkte durch einen *offenen* Zug von $N_a - 1$ Linien zu verbinden und diese Linien, sowie die $N_a - 2$ Zwischenwinkel als Ergebnisse der geodätischen Netzausgleichung in die allgemeine Netzausgleichung einzuführen.

Hierbei wären aber die $2N_a - 3$ Stücke nicht als unabhängig anzunehmen, sondern es wäre ein System von $2N_a - 3$ Funktionen derselben zu bilden, welche dem Ergebnis der geodätischen Netzausgleichung *äquivalent* sind und die ihrerseits erst als unabhängige Gröfsen in die Gesamtausgleichung eingeführt werden dürften.

Die Bildung derartiger äquivalenter Funktionen (Beobachtungen) zeigt im allgemeinen § 27 S. 222 u. ff. unserer *Ausgleichungsrechnung*. Indessen ist es unvorteilhaft, weil zu mühsam, eine strenge Ausgleichung auf diese Art herbeiführen zu wollen. Da es sich aber um eine An-

näherung allein handelt, so hat die eben gegebene Erörterung doch den Gewinn zu zeigen, dafs darnach zu streben ist, im idealen Netz ein dem Ergebnis der geodätischen Netzausgleichung möglichst äquivalentes System von Beobachtungen zu erhalten.

Indem man im idealen Netz mehr als $2N_a - 3$ Stücke annimmt, wird es weit eher möglich werden als bei nur $2N_a - 3$ solchen, sie so zu wählen, dafs sie selbst als unabhängig zu betrachten sind. Im allgemeinen läfst sich übersehen, dafs es vorteilhaft ist, wenn die Linien des idealen Netzes das primäre Netz möglichst gleichmäfsig überziehen, und dafs sie da zu vermeiden sind, wo dieses letztere keine direkte Verbindung giebt. Indem nicht nur Winkel, sondern auch lineare Längen als fingierte Beobachtungen in das ideale Netz eingeführt werden, resultiert der Vorteil, nicht an wohlgeformte Dreiecke und an Dreiecke überhaupt gebunden zu sein, sondern auch Polygone anwenden zu können.

Für die praktische Anwendung des Vorstehenden wird es notwendig werden, an einer Reihe von Fällen die günstigste Wahl idealer Netze zu studieren. Hier würde dieses zu weit führen. Wir hoffen aber später darauf zurückkommen zu können und es sei für jetzt nur bemerkt, dafs man sich bei diesem Studium, welches an *ebenen* Figuren stattfinden darf, am besten rechtwinkliger Koordinaten bedienen wird. In ähnlicher Weise wie § 10 S. 495 u. ff. angegeben ist, hat man die Normalgleichungen für die Koordinaten der Netzpunkte herzustellen, sodann aber diejenigen der nichtastronomischen Punkte zu eliminieren. Alsdann mufs mittelst eines idealen Netzes dasselbe System näherungsweise hergeleitet werden.

Betrachten wir jetzt irgend eine Linie P_iP_k des idealen Netzes und denken uns B_k'', L_k'' und α_{ki}'' von P_i aus mittelst s_{ik}, α_{ik}', B_i' und L_i' berechnet. Bezeichnen wir nun mit δs_{ik}, $\delta\alpha_{ik}'$ und $\delta\alpha_{ki}'$ Verbesserungen von s_{ik}, α_{ik}' und α_{ki}', so ergeben sich, alle Glieder auf Sekunden reduziert, folgende drei Gleichungen (vergl. § 11 und 12 S. 534 u. ff.):

$$\left.\begin{array}{l} B_k'' - B_k' - \xi_k + p_1\xi_i + p_2\eta_i + p_3\delta s_{ik} + p_4\delta\alpha_{ik}' + \cdots = 0 \\ L_k'' - L_k' + \eta_k \sec B_k + q_1\xi_i + q_2\eta_i + q_3\delta s_{ik} + q_4\delta\alpha_{ik}' + \cdots = 0 \\ \alpha_{ki}'' - \alpha_{ki}' - \eta_k \tan B_k + r_1\xi_i + r_2\eta_i + r_3\delta s_{ik} + r_4\delta\alpha_{ik}' - \delta\alpha_{ki}' + \cdots = 0. \end{array}\right\} (1)$$

Hierin haben die Koefficienten p, q, r nachstehende Näherungswerte:

$$\left.\begin{array}{l|l} p_1 = \cos L_{ik} & q_1 = \sin L_{ik} \tan B_k \\ p_2 = \sin L_{ik} \sin B_i & q_2 = -\left\{\begin{array}{l}\sec B_i \\ + \sin\frac{s_{ik}}{a_0} \tan B_i \sec B_k \cos\alpha_{ki}\end{array}\right\} \\ p_3 = \frac{\varrho''}{a_0}\cos\alpha_{ki} & \\ p_4 = -\sin\frac{s_{ik}}{a_0}\sin\alpha_{ki} & q_3 = -\frac{\varrho''}{a_0}\sec B_k \sin\alpha_{ki} \\ \quad = \sin L_{ik}\cos B_i & q_4 = -\sin\frac{s_{ik}}{a_0}\sec B_k \cos\alpha_{ki} \end{array}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= -\sin L_{ik} \sec B_k \\
r_2 &= \cos L_{ik} \sin B_i \sec B_k \\
r_3 &= \frac{\varrho''}{a_0} \tan B_k \sin \alpha_{ki} \\
r_4 &= \cos \frac{s_{ik}}{a_0} + \sin \frac{s_{ik}}{a_0} \tan B_k \cos \alpha_{ki} \\
&= \cos L_{ik} \cos B_i \sec B_k\,.
\end{aligned}\right\} \text{zu (2)}$$

In strenger Form lauten dagegen diese Koefficienten nach S. 536 (6) bis (8), sowie nach S. 280 (6):

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{W_k^3}{W_i^3}\left\{\cos \varDelta\alpha + \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\right] \sin \alpha_{ik} \sin \alpha_{ki}\right\} \\
q_1 &= -\frac{(1-e^2)W_k}{W_i^3}\left\{\sin \varDelta\alpha - \left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\right] \sin \alpha_{ik} \cos \alpha_{ki}\right\} \sec B_k \\
r_1 &= -\frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}}\frac{1-e^2}{W_i^3}\left\{\begin{aligned}&\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik} + 1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\right]\cos \varDelta\alpha \sin \alpha_{ki} - \frac{\sin^2 \varDelta\alpha}{\sin \alpha_{ik}} \\ &+\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik}\right]\left[1 - \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\right]\sin^2 \alpha_{ki} \sin \alpha_{ik}\end{aligned}\right\} \\
p_2 &= -\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\frac{W_k^3}{1-e^2} \tan B_i \sin \alpha_{ki} \\
q_2 &= -\left\{1 + \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} W_k \sin B_i \sec B_k \cos \alpha_{ki}\right\} \sec B_i \\
r_2 &= \left\{\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik} + \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} W_k \tan B_k \cos \alpha_{ki}\right\} \tan B_i \\
p_3 &= \frac{\varrho''}{a_0}\frac{W_k^3}{1-e^2} \cos \alpha_{ki} \qquad\qquad p_4 = -\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\frac{W_k^3}{1-e^2} \sin \alpha_{ki} \\
q_3 &= -\frac{\varrho''}{a_0} W_k \sec B_k \sin \alpha_{ki} \qquad q_4 = -\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} W_k \sec B_k \cos \alpha_{ki} \\
r_3 &= \frac{\varrho''}{a_0} W_k \tan B_k \sin \alpha_{ki} \qquad\quad r_4 = \left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik} + \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0} W_k \tan B_k \cos \alpha_{ki}\,.
\end{aligned}\right\} (3)$$

Hierbei ist $\varDelta\alpha = \alpha_{ki} - \alpha_{ik} - 180^0$ und $W_k = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_k}$; im übrigen vergleiche § 11 S. 283.

Enthält das ideale Netz Q astronomische Punkte und darunter aufser Punkt P_1 A Punkte mit geographischer Längenbestimmung, sind ferner R Verbindungslinien angenommen und für jede derselben die 3 Gleichungen (1) aufgestellt, so ist zunächst zu beachten, dafs als Unbekannte auftreten $2\,(Q - 1)$ Lotabweichungskomponenten ξ und η, ausgenommen ξ_1 und η_1, welche unbestimmt bleiben und von der Definition des Referenzellipsoids abhängen. Unbekannt sind ferner

$Q - \varDelta - 1$ geographische Längen L', welche nur symbolisch in die betreffenden Gleichungen (1) eingeführt werden können. (Ist z. B. L'_i unbekannt, so erscheint L''_k in der Form $L''_k = L'_i +$ einem Zahlwert.)

Eliminiert man diese $3(Q-1) - \varDelta$ Unbekannten, so bleiben

$$3(R - Q + 1) + \varDelta \tag{4}$$

Bedingungsgleichungen zwischen den δs und $\delta\alpha$ übrig, welche nunmehr gestatten, die δs und $\delta\alpha$ als Funktionen von ξ_1 und η_1 herzuleiten.

Fehlte jede geographische Längenbestimmung (oder allgemeiner: wäre kein astronomischer Punkt gleichzeitig in Azimut und geographischer Länge bestimmt), so hätte man nur $3(R - Q + 1)$ Gleichungen, die ganz ohne Widerspruch erfüllt sein müfsten, da sie nur Stücke des bereits ausgeglichenen geodätischen Netzes mit einander kombinieren. Zu diesen *Polygongleichungen* treten aber noch $\varDelta$ Gleichungen, die der *Kontrollgleichung* (10) S. 537 entsprechen.

Die Ausgleichung erfolgt nun auf Grund dieser Bedingungsgleichungen in der Weise, dafs die für alle Linien des idealen Netzes zu bildende Summe

$$g_s \delta s^2 + g_v v^2 + g_u u^2 \tag{5}$$

ein Minimum wird, wobei die g Gewichte bedeuten und $-u$ dem Fehler der astronomischen Azimutbestimmung der einzelnen Stationen entspricht, während v nur den Fehler der geodätischen Richtungsangabe allein bezeichnet.*)

In den Gleichungen (1) ist demgemäfs $\delta\alpha' = v - u$ zu nehmen; u konstant für alle Richtungen von einer Station aus.

An Stelle von (5) setzt man für die numerische Rechnung besser

$$g\left(\frac{\varrho''}{a_0}\delta s\right)^2 + g'\left(\frac{\mathfrak{m}}{a_0} v\right)^2 + g''\left(\frac{\mathfrak{m}}{a_0} u\right)^2, \tag{6}$$

wo nun g, g' und g'' bezw. umgekehrt proportional den mittleren Werten der drei Quadrate

$$\left(\frac{\varrho''}{a_0}\delta s\right)^2 \qquad \left(\frac{\mathfrak{m}}{a_0} v\right)^2 \qquad \left(\frac{\mathfrak{m}}{a_0} u\right)^2$$

zu nehmen sind. ($\mathfrak{m}$ kann in diesen Ausdrücken ohne Schaden durch

*) Gehen von einer Station n längere Richtungen aus, deren gegenseitige Lage durch Rechnung ermittelt wurde, so besteht das Resultat in n Zahlen, deren Differenzen der gegenseitigen Lage der Richtungen entsprechen. Diese geodätischen Richtungsangaben werden zu astronomischen d. h. zu Azimuten durch die Beifügung des Orientierungsfehlers auf Grund einer Azimutbestimmung. Da diese aber keine der Richtungen direkt betrifft, erscheint es am angemessensten, $\delta\alpha'$ für *alle* Richtungen in $v - u$ zu zerspalten und nicht für eine Richtung etwa v einfach zu unterdrücken, welches letztere überdies keinesfalls zulässig ist.

s ersetzt werden.) Man hat jetzt den Vorteil, es mit Fehlergröfsen zu thun zu haben, die auf gleiche Mafseinheit reduziert sind.

Sind die δs und $\delta\alpha'$ ermittelt, so ergeben sich aus den (1) die ξ und η. Alsdann kann die weitere Behandlung wie § 14 S. 543 u. ff. vor sich gehen.

§ 16. 2. Fall, Fortsetzung: Näherungsweise Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. Sowohl im Hinblick auf die Anzahl der Gleichungen, wie auch zur Erzielung einer gröfseren Übersichtlichkeit wird sich vielfach die Anwendung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen empfehlen.

Wir denken uns zunächst irgendwie durch scharfe Rechnung ein System zusammengehöriger Werte der B, L, s und α für alle astronomischen Stationen abgeleitet, welche Werte wir z. B. für die Linie P_iP_k mit

$$\overline{\overline{B}}_i \quad \overline{\overline{B}}_k \quad \overline{L}_i \quad \overline{L}_k \quad \bar{s}_{ik} \quad \bar{\alpha}_{ik} \quad \bar{\alpha}_{ki}$$

bezeichnen. Mit Rücksicht auf die (1) S. 535 erhalten wir als Verbesserungen dieser Gröfsen, um sie auf die günstigsten ellipsoidischen Werte zu bringen:

$$\left.\begin{aligned}
dB_i &= B_i' + \xi_i - \overline{\overline{B}}_i + \cdots \\
dL_i &= L_i' - \eta_i \sec B_i - \overline{L}_i + \cdots \\
d\alpha_{ik} &= \alpha_{ik}' + \delta\alpha_{ik}' + \eta_i \tan B_i - \bar{\alpha}_{ik} + \cdots \\
ds_{ik} &= s_{ik} + \delta s_{ik} - \bar{s}_{ik} + \cdots \\
dB_k &= B_k' + \xi_k - \overline{\overline{B}}_k + \cdots \\
dL_k &= L_k' - \eta_k \sec B_k - \overline{L}_k + \cdots \\
d\alpha_{ki} &= \alpha_{ki}' + \delta\alpha_{ki}' + \eta_k \tan B_k - \bar{\alpha}_{ki} + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Man kann nun entweder diese dB, dL, $d\alpha$ und ds für δB, δL, $\delta\alpha$ und δs in die Gleichungen (4) S. 282 einführen, wobei nur die Indices i und k bezw. für 1 und 2 zu nehmen sind — oder, was vorzuziehen ist, man behält die dB und dL als Unbekannte (anstatt ξ und η im andern Falle) bei.

Indem wir diesen Weg einschlagen, müssen wir aus den Ausdrücken für $d\alpha$ die Gröfsen η eliminieren. Wir setzen also mit Rücksicht auf die (1)

$$\left.\begin{aligned}
d\alpha_{ik} &= \alpha_{ik}' - \bar{\alpha}_{ik} + \delta\alpha_{ik}' + (L_i' - \overline{L}_i - dL_i) \sin B_i + \cdots \\
d\alpha_{ki} &= \alpha_{ki}' - \bar{\alpha}_{ki} + \delta\alpha_{ki}' + (L_k' - \overline{L}_k - dL_k) \sin B_k + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wir beachten ferner, dafs zufolge der Gleichung (5) S. 275 gesetzt werden darf:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\sin B_k+\frac{\cos B_i}{W_i}\cos\alpha_{ik}&=-\frac{\cos B_k}{W_k}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik}\cos\alpha_{ki}\\ \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\sin B_i+\frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki}&=-\frac{\cos B_i}{W_i}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\cos\alpha_{ik},\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

womit sich die Koefficienten der dL wesentlich vereinfachen lassen.

Die (4) S. 282 gehen nun, dB, dL und $d\alpha'$ in Sekunden verstanden, nach einigen weiteren einfachen Transformationen über in:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varrho''}{a_0}\delta s_{ik}&=\left\{\begin{aligned}&\frac{\varrho''}{a_0}(\bar{s}_{ik}-s_{ik})+\frac{1-e^2}{W_i^3}\cos\alpha_{ik}dB_i+\frac{1-e^2}{W_k^3}\cos\alpha_{ki}dB_k\\&+\frac{\cos B_k}{W_k}\sin\alpha_{ki}(dL_i-dL_k)+\cdots\end{aligned}\right\}\\
\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\delta\alpha'_{ik}&=\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\left(\bar{\alpha}_{ik}-\alpha'_{ik}+(\bar{L}_i-L'_i)\sin B_i\right)\\&-\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\sin\alpha_{ik}dB_i-\frac{1-e^2}{W_k^3}\sin\alpha_{ki}dB_k\\&-\frac{\cos B_i}{W_i}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\cos\alpha_{ik}dL_i-\frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki}dL_k+\cdots\end{aligned}\right\}\\
\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\delta\alpha'_{ki}&=\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\left(\bar{\alpha}_{ki}-\alpha'_{ki}+(\bar{L}_k-L'_k)\sin B_k\right)\\&-\frac{1-e^2}{W_i^3}\sin\alpha_{ik}dB_i-\frac{1-e^2}{W_k^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik}\sin\alpha_{ki}dB_k\\&-\frac{\cos B_i}{W_i}\cos\alpha_{ik}dL_i-\frac{\cos B_k}{W_k}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ik}\cos\alpha_{ki}dL_k+\cdots.\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Diese Gleichungen sind für jede Linie aufzustellen; sodann ist noch $\delta\alpha'$ in $v-u$ zu zerspalten und u nach rechts zu schaffen. Zu den Fehlergleichungen für δs und v tritt jetzt, um die bekannten Ausgleichungsformeln anwenden zu können, noch für jede Station die identische Gleichung

$$u=u,\tag{5}$$

u natürlich für jede Station ein anderes. Rechter Hand bedeutet u eine Unbekannte, linker Hand eine Verbesserung.

Nach Mafsgabe des Ausdrucks (6) S. 550 sind nun *Normalgleichungen* zu bilden für die Unbekannten dB und dL, ausgenommen dB_1 und dL_1, welche als unbestimmte Gröfsen in der Rechnung bleiben; ferner für die u der sämtlichen Q Stationen und endlich für die L' der $Q-\Lambda-1$ in geographischer Länge nicht bestimmten Stationen. Zusammen $4Q-\Lambda-3$ Gleichungen.

Von diesen sind aber diejenigen für die u und L' leicht zu eliminieren. Sind endlich die dB und dL bezw. die L' gefunden, so

geben die (1) mittelst derselben und der beobachteten B' und L' die ξ und η als Funktionen von ξ_1 und η_1 (bezw. dL_1) an.

§ 17. Modifikation des 2. Falles für das europäische Dreiecksnetz. Das europäische Dreiecksnetz besteht aus vielen für sich geodätisch ausgeglichenen Komplexen, welche teils eine wesentlich lineare Form als *Dreiecksketten*, teils eine flächenartige Ausbreitung als *Dreiecksnetze* haben. Während wir uns die letzteren wie im vorigen Falle durch ideale Netze ersetzt denken, welche aber aufser den astronomischen Stationen noch die Anschlufspunkte mit Nachbarkomplexen enthalten müssen, denken wir uns erstere einfach durch eine gebrochene Linie ersetzt, welche die astronomischen Stationen verbindet und an welche die Anschlufsseiten sich direkt oder mittelst einer Hilfslinie ansetzen.

Im allgemeinen ist nun, wenn nach *bedingten* Beobachtungen ausgeglichen werden soll, für jede Linie das System der 3 Gleichungen (1) S. 548 herzustellen und wie S. 550 $\delta\alpha'$ in $v - u$ zu zerspalten. Für die nicht astronomischen Stationen bleiben aber die in ξ und η multiplizierten Glieder weg, weil sie unbestimmbar sind; dagegen treten an Stelle der wirklichen Werte B', L' und α' auf diesen Stationen die unbekannten ellipsoidischen Werte B, L und α (einfach durch Wegfall des obern Index). Dafs dem so ist, zeigt unzweifelhaft die Entwicklung § 11 S. 534 u. ff.

Was die *Anschlufsseiten* anbetrifft, so ist für diese die eben angegebene Rechnung nur in den Netzen auszuführen, aber in den Ketten in der Regel nicht, weil wir voraussetzen, dafs sie sich hier in der Regel nur einseitig an einen gebrochenen Linienzug anreihen. (Die Berechnung der 3 Gleichungen ist eben nur für diejenigen Anschlufsseiten erforderlich, die sich beiderseits an Linien desselben Komplexes anreihen.)

Die einseitig anhängenden Anschlufsseiten geben dagegen im betreffenden Komplex 2 Gleichungen der Form:

$$\left.\begin{aligned} \text{Seite } pq &= \text{Zahlwert} + \delta s_{pq} \\ \alpha_{pq} - \alpha_{po} &= \text{Zahlwert} + v_{pq} - v_{po}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei die Anschlufsseite mit pq und die anschliefsende Seite des Linienzuges mit po bezeichnet ist. δs_{pq} bedeutet die Verbesserung der linearen Länge; ferner bedeuten v_{pq} und v_{po} die Verbesserungen der geodätischen Richtungsangaben. Selbstverständlich müssen δs_{pq} und v_{pq} im Nachbarkomplex noch einen unterscheidenden Index erhalten.

Sind alle diese Gleichungen aufgestellt, so werden wie im vorigen

Falle (S. 550) die Unbekannten eliminiert, wodurch nun die Bedingungsgleichungen zwischen den δs und $\delta\alpha' = v - u$ erhalten werden.

Als Unbekannte treten auf die ξ und η der Q astronomischen Stationen bis auf die 2 Werte ξ_1 und η_1 (einer willkürlich gewählten Station), welche als unbestimmte Werte stehen bleiben; ferner die $Q - A - 1$ geographischen Längen derjenigen astronomischen Stationen, die nur in Breite und Azimut bestimmt sind; ferner die B, L und α auf den nichtastromischen Stationen; endlich noch die Anschlufsseiten.

Für diejenigen Ketten (Netze), welche ohne Grundlinie sind, tritt aufserdem noch je eine Unbekannte in den Verbesserungen δs der linearen Längen der Linien auf, indem wegen der nur vorläufigen Berechnung dieser Dimensionen den gewöhnlichen Symbolen δs noch Glieder in der Form von Produkten einer Unbekannten in die linearen Längen beigefügt werden müssen.

Ehe nun zur weiteren Ausgleichung nach der Bedingung (5) oder (6) S. 550 verschritten werden kann, ist zu überlegen, ob die Stücke der einfachen Linienzüge, welche die Dreiecksketten ersetzen, als unabhängig aufgefafst werden sollen, oder nicht. Im ersteren Falle erlangen die Kontrollen (1) durch die Anschlufsseiten gar keinen Einflufs auf die Ketten, weil kein Zusammenhang zwischen den δs dieser Seiten und den Verbesserungen der anderen Stücke besteht.

Es leuchtet aber ein, dafs eine Veränderung in der Länge einer Anschlufsseite auch Veränderungen in der Länge und dem Azimut der anderen Linien notwendig macht und wenn nun auch für den Komplex zweier an einander hängender Ketten im ganzen genommen wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Verbesserungen der Anschlufsseite in beiden Ketten nicht immer eine wesentliche Längenänderung eintritt, so bleibt doch jedenfalls die Änderung im einzelnen. Auch Azimutänderungen werden erfolgen.

Eine näherungsweise Berücksichtigung des Einflusses der Anschlufsseiten würde von selbst eintreten, wenn wir auch für die Ketten die Bildung eines *geschlossenen* idealen Netzes voraussetzen wollten. Indessen halten wir es für einfacher, hier bei dem einfachen Linienzug als Regel stehen zu bleiben; wir denken uns aber ein (wenigstens näherungsweise) *äquivalentes System* von Funktionen der Verbesserungen der Stücke eingeführt, wie bereits S. 547 angedeutet ist.

An Stelle der δs und v (den Verbesserungen der geodätischen Richtungsangaben, S. 550) treten nun als lineare Funktionen derselben Gröfsen, die wir mit δl bezeichnen wollen. Die Ableitung des funktionalen Zusammenhangs zwischen den δl und δs und v

giebt auch eine Bestimmung des den $\delta \mathfrak{l}$ zukommenden mittleren Quadrats und damit eine solche ihres Gewichts $\mathfrak{g}$.

In den Bedingungsgleichungen sind dann die δs und v mittelst der $\delta \mathfrak{l}$ zu eliminieren und endlich die Ausgleichung so vorzunehmen, dafs die Summe der in ihre Gewichte multiplizierten Quadrate der $\delta \mathfrak{l}$ und der anderen noch verbliebenen, als unabhängig betrachteten Verbesserungen [vergl. S. 550 (5) bezw. (6)] ein Minimum wird.

Die detaillierte Ausführung zu Vorstehendem insbesondere die Bildung äquivalenter Systeme hoffen wir an anderer Stelle ausführlicher zu behandeln. Hier verweisen wir auf die S. 548 gegebenen Notizen und bemerken nur, dafs eine ausreichende Lösung für Ketten ziemlich leicht zu erzielen sein wird, wenn den Spezialausgleichungen immer die Berechnung der mittleren Fehler einiger Hauptergebnisse beigefügt sind und dann den gegebenen Ketten einfachere Ketten aus gleichseitigen Dreiecken mit nahezu gleicher Genauigkeit der entsprechenden Ergebnisse für den Zweck der Bildung der äquivalenten Systeme substituiert werden.

Bei der Behandlung des vorliegenden Falles nach *vermittelnden* Beobachtungen, welche sich durch Übersichtlichkeit sehr empfiehlt, ist zunächst für jedes ideale Netz (jeden Linienzug) wie § 16 S. 551 u. ff. zu verfahren, nur fallen auf den nichtastronomischen Stationen die Glieder mit ξ und η weg und es sind an Stelle der B', L' und α' in den Gleichungen einfach die ellipsoidischen Werte B, L und α zu setzen.

Diese α sind bis auf eine, allen Richtungen einer Station gemeinsame Gröfse u bekannt, sodafs an Stelle von $\delta\alpha$ auch hier $v - u$ tritt. Aber da für diese u keine Beobachtungen existieren, so fallen also auf den nichtastronomischen für die u die Fehlergleichungen

$$u = u\,,$$

vergl. S. 552, fort. Auf den nichtastronomischen Stationen nehmen überhaupt die Fehlergleichungen (4) S. 552 für die $\delta\alpha_{ik}$ nach einiger Reduktion rechter Hand die einfachere Form (3) S. 496 an.

Als Unbekannte treten auf (vergl. S. 552 Schlufs des § 16) die ξ und η von $Q - 1$ astronomischen Stationen, die $Q - \varDelta - 1$ Werte L' der nicht in geographischer Länge bestimmten astronomischen Stationen, die B und L der nichtastronomischen Stationen, endlich die u aller Stationen und die durch mangelnde Basismessung entstehenden Unbekannten.

Ehe aber zur Bildung der Normalgleichungen verschritten werden kann, müssen die Ausdrücke für die δs und v in die mit $\delta \mathfrak{l}$ am Schlusse voriger Seite bezeichneten äquivalenten Funktionen eingesetzt werden, insoweit nicht bereits diese δs und v als unabhängige Gröfsen aufgefafst sind.

Die grofse Übersichtlichkeit des Verfahrens der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen beruht darauf, dafs man zunächst für jedes Netz (jede Kette) die Normalgleichungen gesondert aufstellen und diejenigen Unbekannten eliminieren kann, welche nur in der betreffenden Abteilung vorkommen und durch dieselbe allein schon bestimmbar sind. Es gehen also im wesentlichen in das Hauptsystem der Normalgleichungen, welche sich für jede Unbekannte durch Addition der so modificierten entsprechenden Normalgleichungen der einzelnen Abteilungen bilden, nur die in wenigstens 2 Netzen (Ketten) auftretenden Unbekannten über. Es wird daher die kleinstmögliche Anzahl von Unbekannten zur gemeinsamen Ausgleichung herangezogen.

§ 18. **Strenge Ausgleichung des europäischen Dreiecksnetzes.** Eine solche kann, wenn überhaupt praktisch durchführbar, nur nach vermittelnden Beobachtungen erfolgen, weil die Anzahl der Bedingungsgleichungen schon für die einzelnen Netze und Ketten vielfach eine an der Grenze der Übersichtlichkeit liegende ist. Dieses wird nur wenig gebessert, wenn man etwas von der Strenge absehend mit *Andrae* den Ketten möglichst einfache fingierte Ketten unter Weglassung aller Diagonalen substituieren wollte.*)

Wir denken uns demgemäfs für jedes Partialnetz (für jede Kette) die Ausgleichung nach S. 495 u. ff. durchgeführt — wenn nicht von haus aus, so doch nachträglich nach bereits erfolgter bedingter Ausgleichung, wobei dann die Absolutglieder wegfallen, falls man von Näherungswerten ausgeht, die den Resultaten dieser Ausgleichung genügen. (Man wird sich namentlich im letzteren Falle mit wenigziffrigen Koefficienten der Unbekannten begnügen dürfen.)

Bei der Bildung der allgemeinen Normalgleichungen jedes Partialnetzes werden jetzt aber die Verbesserungen der geographischen Koordinaten keines Punktes unterdrückt (wie dort diejenigen des astronomischen Anfangspunktes), sondern es werden für alle Punkte die Normalgleichungen gebildet. Wir nehmen ferner an, dafs die Basismessungen und Azimutbestimmungen (wie alle astronomischen Bestimmungen) vorerst unberücksichtigt bleiben.

Aus diesen Normalgleichungen eliminiert man zunächst die Verbesserungen der Koordinaten derjenigen Punkte, welche astronomische Bestimmungen nicht aufweisen excl. derjenigen der Anschlufspunkte

*) Vergl. S. 244 u. ff. der *Verhandlungen der 5. allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung.* Berlin 1878.

Sobald Ketten zu Polygonen zusammentreten, läfst sich die Ausgleichung nicht mehr so einfach, wie an diesem Orte angegeben ist, ausführen. Auch sind die von uns mehrfach erwähnten Kontrollen aus geographischen Längen und Azimuten nicht berücksichtigt (überhaupt nicht erwähnt).

benachbarter Netze, sowie der Endpunkte der Basen und der Zielpunkte bei astronomischen Azimutbestimmungen.

Ist ein solcher Zielpunkt eine lokale Marke, so ist die Verbesserung für die Richtung nach derselben (entsprechend dem C S. 501) in dem Normalgleichungssystem zu konservieren.

Die Absolutglieder dieser Normalgleichungen verschwinden, sobald man sich unter den Unbekannten derselben weitere Verbesserungen denkt, die an den Ergebnissen einer separaten Ausgleichung dieses Partialnetzes anzubringen sind. (Bei dieser separaten Auflösung wären 4 der Unbekannten null zu setzen oder willkürlich anzunehmen, wenn, wie vorausgesetzt, von einer Einführung der Basis- und Azimutmessung abgesehen wird.)

Um nun die wie oben modificierten Normalgleichungen der verschiedenen Partialnetze kombinieren zu können, müssen die in ihnen erscheinenden Unbekannten, insoweit sie sich eben auf dieselbe Gröfse beziehen, Verbesserungen *derselben* Näherungswerte bezeichnen. Dieses ist leicht zu bewerkstelligen:

Bezeichnet in einem System Z einen Näherungswert einer Unbekannten, z seine als Unbekannte in der Ausgleichung auftretende Verbesserung und werden im anderen System die entsprechenden Gröfsen bezw. Z_1 und z_1 genannt, so ist

$$Z + z = Z_1 + z_1 \tag{1}$$

und man hat nun im 2. System für z_1 einfach $Z - Z_1 + z$ zu substituieren, um Z auch in diesem System als Näherungswert einzuführen.

Auf diese Art wird man in einigen Normalgleichungen wieder Absolutglieder erhalten. Nun addiert man alle Normalgleichungen, deren quadratische Koëfficienten zu derselben Unbekannten gehören und erhält ein *Hauptnormalgleichungssystem*, welches offenbar den gesamten Winkelbeobachtungen des ganzen Netzkomplexes äquivalent ist. (Seine Summe ist identisch null.)

Hierzu treten zunächst die Gleichungen für die *Basismessungen*. Da wir mehrere voraussetzen, betrachten wir sie hier zunächst als Fehlergleichungen. Die Messung der Linie $P_i P_k$ giebt, wenn δs_{ik} die Verbesserung der linearen Länge, sowie dB und dL die Verbesserungen der oben für das Hauptnormalgleichungssystem der Winkelmessungen angenommenen Näherungswerte der ellipsoidischen geographischen Breiten und Längen bedeuten [vergl. S. 499 (1) od. S. 552 (4)]:

$$\frac{\varrho''}{a_0}\delta s_{ik} = \frac{\varrho''}{a_0}(\bar{s}_{ik} - s_{ik}) + \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1-e^2}{W_i^3}\cos\alpha_{ik}\,dB_i + \dfrac{1-e^2}{W_k^3}\cos\alpha_{ki}\,dB_k \\ + (dL_i - dL_k)\,\dfrac{\cos B_k}{W_k}\sin\alpha_{ik} \end{array} \right\}. \tag{2}$$

Als Fehlergleichungen im gewöhnlichen Sinne diese Gleichungen beizubehalten, ist indes nicht passend. Denn der gröfste Teil der δs entsteht durch die mangelnde Reduktion wegen der Höhe des Geoids über dem Ellipsoid. Sobald wir eine Ausdehnung des Netzes wie diejenige des europäischen voraussetzen, können wir bei einer ganz strengen Behandlung von derselben nicht absehen. Da aber die Reduktion vorläufig unbekannt ist, lassen wir die δs für die Grundlinien als unbestimmte Gröfsen in der Rechnung.*) Auf die Messungsfehler braucht eine besondere Rücksicht nicht genommen zu werden; sie treten ganz zurück, wie schon S. 499 bemerkt wurde.

Wir denken uns nun mittelst der Basisgleichungen in jedem Partialnetz, wie S. 499 u. 500 angegeben ist, eine Unbekannte eliminiert, sodafs diese Gleichungen (2) in die Gesamtausgleichung gar nicht eingehen.

Aber es entsteht der Unterschied gegen früher, dafs jede Basis eine unbestimmte Gröfse δs in den Absolutgliedern der Normalgleichungen zurückläfst.

Die *gemessenen Azimute* geben nach S. 282 (4) und S. 551 (1) Fehlergleichungen in der nachstehenden Form, diese speziell bezogen auf α'_{ik} in P_i für P_iP_k:

$$\delta\alpha'_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha'_{ik} - \eta_i \tan B_i$$
$$- \frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1-e^2}{W_i^3}\left(\dfrac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} \sin\alpha_{ik}\, dB_i + \dfrac{1-e^2}{W_k^3} \sin\alpha_{ki}\, dB_k \\ + \dfrac{\cos B_k}{W_k} \cos\alpha_{ki}\,(dL_k - dL_i) \end{array} \right\} + \cdots . \quad (3)$$

Man hat nun noch für jeden Punkt die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{L} + dL = L' - \eta \sec B + \cdots \\ \bar{B} + dB = B' + \xi + \cdots, \end{array}\right\} \quad (4)$$

wenn wieder dL und dB die Verbesserungen der Näherungswerte $\bar{L}$ und $\bar{B}$ bezeichnen, die schon bei dem oben erwähnten Hauptnormalgleichungssystem der Winkelmessungen auftreten.

Mittelst der (4) kann man entweder anstatt der dB und dL ξ und η einführen oder, was weit bequemer ist, η aus (3) eliminieren

*) Für eine Landesvermessung ist dagegen die Annahme δs = null sehr zweckmäfsig, denn man erhält dadurch in allen Teilen Dimensionen im Meeresniveau. Infolge des etwas fehlerhaften mathematischen Zusammenhanges ist nur die Übereinstimmung der Resultate etwas ungünstiger, als bei ganz strenger Behandlung.

und zwar mittelst der 1. Gleichung (4) durch dL ausdrücken. Mit Rücksicht auf die 2. Gleichung (3) S. 552 geht (3) nun über in:

$$\delta\alpha'_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha'_{ik} + (\bar{L}_i - L'_i)\sin B_i$$
$$-\frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\sin\alpha_{ik}\,dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3}\sin\alpha_{ki}\,dB_k\\ + \frac{\cos B_i}{W_i}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\cos\alpha_{ik}\,dL_i + \frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki}\,dL_k\end{array}\right\} + \cdots \quad (5)$$

Als Fehlergleichung ist diese Gleichung aber nur da zu behandeln, wo L' beobachtet ist. Denn da jedes L' nur in *einer* Gleichung vorkommt, so mufs $\delta\alpha'$ gleich null angenommen werden, wo L' nicht beobachtet ist.

Die Gleichungen (5) stellen wir also nur für die in Azimut *und* geographischer Länge bestimmten Punkte auf und bilden dann die Beiträge dieser Gleichungen zu den Normalgleichungen der in ihnen auftretenden dL und dB mit Rücksicht auf die Gewichte.

Dient als Zielpunkt der Azimutmessung eine lokale Marke, so tritt rechter Hand in (5) an Stelle des die grofse Parenthese enthaltenden Aggregats die *eine* früher S. 501 und 557 mit C bezeichnete lokale Unbekannte $+ \sin B_i dL_i$.

Die Bestimmung der Gewichte der Azimutbeobachtungen im Verhältnis zu den geodätischen Richtungsbeobachtungen hat nach dem Satze zu erfolgen, dafs die Gewichte umgekehrt proportional den mittleren Fehlerquadraten zu setzen sind. Indem wir annehmen, dafs die Netzteile auch einzeln vollständig ausgeglichen werden oder wenigstens die Dreiecksabschlüsse gebildet sind, wird sich hieraus für die Gewichtseinheit der Richtungs- bezw. Winkelbeobachtungen das mittlere Fehlerquadrat ergeben. Mafsgebend ist immer derjenige Wert des mittleren Fehlerquadrats, den *die Widersprüche des Netzes allein* geben. Das mittlere Fehlerquadrat der Azimute kann am sichersten dadurch ermittelt werden, dafs man die doppel- und mehrfachen Bestimmungen der Azimute zu verschiedenen Zeiten und mit verschiedenen Instrumenten mit einander vergleicht.*)

In dem schliefslich aus der Addition der Beiträge der Azimutmessungen zu den entsprechenden Gleichungen des bereits gebildeten Normalgleichungssystemes erhaltenen *Gesamtnormalgleichungssystem* ist für einen Punkt P_1 dL_1 und dB_1 unbestimmt zu lassen, sodafs dafür die Normalgleichungen wegfallen und alle andern dL und dB schliefslich als Funktionen von dL_1 und dB_1 auftreten.

*) Siehe die Anm. S. 539.

Um die Auflösung der Normalgleichungen möglichst *übersichtlich* zu gestalten, ist es ratsam, zunächst *jedes Partialnetz für sich* in der oben angegebenen Weise zu behandeln. Aus den Partialnormalgleichungssystemen können dann vorerst alle Unbekannten eliminiert werden, die nur in einem derselben auftreten. Dann erst erfolgt die Addition der Gleichungen, die zu derselben Unbekannten gehören und somit die Bildung eines im Zusammenhange weiter zu behandelnden Systems.

Indem man nun mittelst der Beziehungen (4) von dL und dB zu ξ und η übergeht, erhält man alle ξ und η als Funktionen der Werte ξ_1 und η_1 und der δs der Grundlinien.

In 1. Annäherung wird man die $\delta s =$ null setzen und dann über ξ_1 und η_1 disponieren, etwa wie § 14 S. 543 u. ff. Darnach wird man suchen, die Höhenlage des Geoids zu dem gewählten Referenzellipsoid mittelst der ξ und η in weiterhin anzugebender Weise zu bestimmen, um endlich im stande zu sein, Näherungswerte für die δs anzugeben und eine neue Rechnung für die ξ und η durchzuführen. Schliefslich kann man auch aus den Widersprüchen bezw. den Verbesserungen, welche die Gesamtausgleichung fordert, den mittleren Fehler der Gewichtseinheit feststellen, wozu die S. 504—511 gegebenen Vorschriften mit geringen Modifikationen ausreichen.

§ 19. **3. Fall der Bestimmung von Lotabweichungen: Jede Station des Dreiecksnetzes ist auch astronomische Station.** In diesem Falle ist es möglich, direkt die kleinen von den cot z' abhängenden Einflüsse der Lotabweichungen zu berücksichtigen, ohne durch vorhergehende Näherungsrechnungen schon Näherungswerte derselben abgeleitet zu haben (S. 535 o.). Man wird also in diesem Falle beinahe ganz unabhängig von der Hypothese über die Erdgestalt. Denn es bleibt nur als Voraussetzung eine näherungsweise ellipsoidische Form und als Vernachlässigung der sehr kleine Fehler bei der Reduktion der Richtungen wegen der Höhe der Objekte über dem Referenzellipsoid (wofür man eben nicht ganz zutreffend die Meereshöhe nimmt).

Die Ausgleichung beginnt genau wie S. 495 u. ff. mit der Ausgleichung der Stationen. Bei dem Übergange zur Netzausgleichung wird aber die Bedeutung der Aggregate $ax + by + cz + \cdots$ eine andere.

Indem wir nämlich auf den Ausdruck (5) S. 517 Rücksicht nehmen, erhalten wir jetzt als die einer Azimutmessung entsprechende Fehlergleichung, vergl. S. 552 und 558:

$$\delta\alpha'_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha'_{ik} - \eta_i \tan B_i - \eta_i \cot z_{ik} \cos\alpha_{ik} + \xi_i \cot z_{ik} \sin\alpha_{ik}$$
$$-\frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}}\left\{\begin{array}{c}\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki}\sin\alpha_{ik}dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3}\sin\alpha_{ki}dB_k \\ + \frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki}(dL_k - dL_i)\end{array}\right\} + \cdots.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{L} + dL = L' - \eta \sec B + \cdots \\ \bar{B} + dB = B' + \xi + \cdots\end{array}\right\} \qquad (1)$$

und unter Beachtung der 2. Gleichung (3) S. 552:

$$\left.\begin{array}{l}\delta\alpha'_{ik} = \bar{\alpha}_{ik} - \alpha'_{ik} + (\bar{B}_i - B'_i)\cot z_{ik}\sin\alpha_{ik} \\ \qquad + (\bar{L}_i - L'_i)(\sin B_i + \cot z_{ik}\cos B_i \cos\alpha_{ik}) \\ -\frac{a_0}{\mathfrak{m}_{ik}}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{1-e^2}{W_i^3}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} - \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\cot z_{ik}\right]\sin\alpha_{ik}dB_i + \frac{1-e^2}{W_k^3}\sin\alpha_{ki}dB_k \\ + \left[\frac{1}{W_i}\left(\frac{d\mathfrak{m}}{ds}\right)_{ki} - \frac{\mathfrak{m}_{ik}}{a_0}\cot z_{ik}\right]\cos B_i \cos\alpha_{ik}dL_i + \frac{\cos B_k}{W_k}\cos\alpha_{ki}dL_k\end{array}\right\} + \cdots.\end{array}\right\} (2)$$

Insoweit es sich um die den geodätischen Richtungsbeobachtungen entsprechenden Fehlergleichungen handelt, setzen wir für $\delta\alpha'_{ik}$ wie S. 496 (3) eine Verbesserung λ_{ik} und fügen rechts für jeden Satz noch eine Unbekannte u bei. Die Vergleichung von (2) mit (3) und (4) S. 496 zeigt nun die etwas veränderte Bedeutung der Aggregate $ax + by + cz + \cdots$. Einesteils besteht sie in einer Veränderung der Koefficienten der dB und dL, andrerseits tritt da, wo L'_i nicht beobachtet ist, diese Gröfse (oder bequemer $\bar{L}_i - L'_i$) als neue Unbekannte auf.

Das weitere Verfahren zur Bildung der Netznormalgleichungen ist vorerst ganz wie S. 497 u. ff. Nur bemerken wir noch, dafs man in allen Fehlergleichungen λ_{ik} den Teil $(\bar{L}_i - L'_i)\sin B_i$ einfach weglassen darf. Denn man kann sich ihn dem Orientierungsfehler u der einzelnen Sätze, da er unabhängig von dem besonderen Objekt ist, hinzugefügt denken. Hierdurch wird der Koefficient von $(\bar{L} - L')$ wesentlich verkleinert und daher die Rechnung, insbesondere falls L'_i unbekannt ist, etwas bequemer.

Die bis jetzt erhaltenen Normalgleichungen entsprechen den geodätischen Richtungsbeobachtungen allein. Für jede Station erhält man aber noch eine Fehlergleichung der Form (2) infolge der Azimutmessung. $\delta\alpha'_{ik}$ bezeichnet darin unmittelbar die Verbesserung der

letzteren. Man hat nun die Beiträge aller dieser Gleichungen zu den Normalgleichungen der verschiedenen Unbekannten mit Rücksicht auf die Gewichte zu bilden und den betreffenden früheren Normalgleichungen zuzufügen.

So ist wenigstens der strenge Vorgang. Allein da die Bestimmung der Unbekannten L', da wo eben die geographische Längenbestimmung fehlt, wesentlich nur auf der Azimutmessung beruht, weil hier allein L' einen grofsen Koefficienten hat, so wird man in denjenigen Gleichungen (2), welche Azimutmessungen auf Stationen entsprechen, wo L' unbekannt ist, am besten einfach $\delta\alpha' =$ null setzen und die Gleichung zur Bestimmung von L' als Funktion der anderen Unbekannten benutzen.

Hiernach modificiert sich das Verfahren dahin, dafs aus den Aggregaten $ax + by + cz + \cdots$ die unbekannten L' mittelst jener Azimutgleichungen (2) vor Bildung der Normalgleichungen zu eliminieren sind.

Als Azimutfehlergleichungen bleiben nur diejenigen Gleichungen (2), für welche L'_i direkt beobachtet ist.

Diese L' nehmen wir (ebenso wie die B') *ohne* Verbesserungen aus dem schon früher angegebenen Grunde (§ 15 S. 546), dafs eine Einführung solcher nur viel Mühe ohne wesentliche Vorteile erzeugt, so lange die Stationen mit geographischen Längenbestimmungen relativ selten sind, welcher Fall praktisch allein in betracht kommt.

(Für die B' ist der Grund dafür, dafs es genügt von Verbesserungen abzusehen, der geringe Betrag der Koefficienten dieser Gröfsen in den Fehlergleichungen.)

Über die Berücksichtigung der Grundlinien, sowie hinsichtlich anderer Details vergl. den vorigen Paragraphen. Ist das Gesamtsystem aufgelöst, so führen die (1) zu den ξ und η u. s. f. wie dort.

§ 20. **Referenzellipsoid von günstigsten Dimensionen.** Bisher wurden die Elemente der Meridianellipse a_0 und e^2 als gegeben vorausgesetzt, jedoch bereits in § 14 S. 545 für einen bestimmten Fall angedeutet, wie gleichzeitig mit der günstigsten Wahl von ξ_1 und η_1 auch eine günstigste Wahl der Form des Referenzellipsoids getroffen werden könnte.

Dieselbe Methode kann auch in den anderen Fällen angewandt werden. Nachdem nämlich alle ξ und η zum Schlufs der Gesamtausgleichung als Funktionen von ξ_1 und η_1 erhalten sind, kann man wie im ersterwähnten Falle diesen Ausdrücken Glieder beifügen, die von Änderungen da_0 und de^2 der bis dahin benutzten Werte a_0 und e^2 abhängen. Man wird in allen Fällen (vergl. S. 543) Gleichungen der nachstehenden Form erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= -l_i + a_i\xi_1 + b_i\eta_1 + c_i\frac{da_0}{a_0} + d_i\cdot\frac{1}{2}\frac{de^2}{1-e^2} \\ \eta_i &= -l'_i + a'_i\xi_1 + b'_i\eta_1 + c'_i\frac{da_0}{a_0} + d'_i\cdot\frac{1}{2}\frac{de^2}{1-e^2}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Um die Ausdrücke für die Koefficienten c und d zu bekommen, beachten wir die Gleichungen (6), (7) und (8) S. 536. Dieselben zeigen, dafs Änderungen $\delta B''_i$, $\delta L''_i$ und $\delta\alpha''_{i.1}$ in den berechneten beziehungsweisen Werten B''_i, L''_i und $\alpha''_{i.1}$ für ξ_i, η_i und η_i bezw. die Änderungen $\delta B''_i$, $-\delta L''_i \cos B_i$, $\delta\alpha''_{i.1}\cot B_i$ hervorbringen. Wie diese Änderungen $\delta B''_i$, $\delta L''_i$ und $\delta\alpha''_{i.1}$ aber von da_0 und de^2 erzeugt werden, geben die Formeln des § 16 S. 294 an. Es ist:

$$c_i = -\varrho''\frac{s_{i.1}}{a_0}\frac{W_i^3}{1-e^2}\cos\alpha_{i.1} \qquad d_i = \varrho''\frac{W_i^3}{1-e^2}\left(\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\cos\alpha_{i.1} + \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\sin\alpha_{i.1}\right), \quad (2)$$

ferner

$$c'_i = -\varrho''\frac{s_{i.1}}{a_0}W_i\sin\alpha_{i.1} \qquad d'_i = \varrho'' W_i\left(\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\sin\alpha_{i.1} - \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\cos\alpha_{i.1}\right), \quad (3)$$

wenn η_i mittelst der geographischen Länge ermittelt ist; dagegen

$$c'_i = -\varrho''\frac{s_{i.1}}{a_0}W_i\sin\alpha_{i.1} \quad d'_i = \varrho'' W_i\left(\frac{\mathfrak{S}}{a_0}\sin\alpha_{i.1} - \frac{\mathfrak{T}}{a_0}\cos\alpha_{i.1} + \frac{1}{W_i}\mathfrak{U}\right), \quad (4)$$

wenn η mittelst des Azimuts ermittelt ist.

Die Bedeutung von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ erhellt aus S. 294, wo immer Index i an Stelle von Index 2 zu setzen ist.

Wie man sieht, stimmen die beiden Formen von d'_i nicht ganz überein; sie unterscheiden sich durch das allerdings kleine Glied mit $\mathfrak{U}$. Im Falle nun ξ und η nach den Methoden der §§ 15 bis 19 S. 546 u. ff. bestimmt sind, wird man stets den Ausdruck (3) für d'_i anwenden müssen, weil alle η den Bestimmungen der geographischen Längen thunlichst angepafst sind.

Ganz streng ist dieses Verfahren allerdings nicht, eben so wenig wie überhaupt der ganze Vorgang; denn bei Berechnung der von da_0 und de^2 abhängenden Glieder denkt man sich die geodätischen Linien von P_1 nach den verschiedenen Punkten P_i sowohl hinsichtlich ihrer linearen Länge als auch hinsichtlich ihrer Azimute unverändert, während doch durch eine Änderung in a_0 und e^2 sich das Netz etwas deformiert und also auch die linearen Längen und die Azimute Änderungen erleiden, welche für ein z. B. so beträchtlich wie das europäische Netz ausgedehntes Netz recht wohl erheblich werden können.

Ein völlig korrektes Verfahren ergiebt sich, wenn man bei den Ausgleichungen nach *vermittelnden* Beobachtungen (S. 551 u. S. 555 u. ff.) den Ausdrücken für $\delta\alpha'_{ik}$ und δs_{ik} noch nach § 14 S. 291 die von

da_0 und de^2 abhängigen Glieder beifügt. Haben wir es beispielsweise wie im vorhergehenden Paragraphen nur mit Dreiecksseiten 1. Ordnung, also kurzen Entfernungen zu thun, so erhalten wir nach den Formeln (6) S. 291 als Zuwachse rechter Hand in den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } \delta\alpha'_{ik}: & \frac{1}{2}\frac{de^2}{1-e^2}\frac{\varrho''}{W^2}(2\cos^2 B\sin\alpha\cos\alpha+\cdots) \\ \text{„ } \delta s_{ik}: & \frac{da_0}{a_0}s_{ik}-\frac{1}{2}\frac{de^2}{1-e^2}\frac{s_{ik}}{W^2}(2\cos^2 B\cos^2\alpha-[1-e^2]\sin^2 B+\cdots), \\ \text{wobei} & \\ & B=\frac{B_i+B_k}{2} \qquad \alpha=\frac{\alpha_{ik}+\alpha_{ki}-180^\circ}{2} \\ & W \text{ zum Argument } B \end{array}\right\}(5)$$

zu nehmen sind.

Der erstere Ausdruck ist nicht nur allen Fehlergleichungen für gemessene Azimute, sondern auch allen Fehlergleichungen für die geodätischen Richtungsbeobachtungen auf den Stationen beizufügen, er tritt also auch auf als Zuwachs der Ausdrücke $ax+by+cz+\cdots$.

Bei *bedingter* Ausgleichung im Anschlufs an die Formeln (1) S. 548 u. ff. hat man den B''_i, L''_i und α''_{ki} die durch die Formeln des § 16 S. 294 gegebenen Werte der δB_i, δL_i und $\delta\alpha_{ki}$ zuzufügen, wobei die Indices 1 und 2 durch i und k zu ersetzen sind. Die Unbekannten da_0 und de^2 müssen dann ebenso wie die anderen vorerst eliminiert werden, wenn man es nicht vorzieht, die Ausgleichung nach § 26 S. 215 unserer *Ausgleichungsrechnung* zu behandeln.

Einen eigentlichen Wert erlangt übrigens die Bestimmung von da_0 und de^2 nur dann, wenn die astronomischen Punkte über die Fläche wenigstens annähernd *gleichmäfsig* verteilt sind.

Das richtigste Prinzip zur Bestimmung von da_0 und de^2 ist das, die über die ganze Fläche zu erstreckende Summe der N^2 zu einem Minimum zu machen. Allein der Ausführung stellen sich grofse praktische Schwierigkeiten entgegen.

§ 21. **1. Annäherung zur Bestimmung des Geoids.** Wenn Lotabweichungen ξ und η gegen ein gut anschliefsendes Ellipsoid für eine so dicht liegende Anzahl Punkte bestimmt sind, dafs sie nicht mehr von Punkt zu Punkt einen regellos verlaufenden Gang, sondern einen mehr regelmäfsigen Charakter zeigen, dann kann man eine Bestimmung der Geoidfläche vornehmen, freilich nur unter der Voraussetzung, dafs die Lotlinien innerhalb ihrer Ausdehnung von den Stationen auf der physischen Erdoberfläche bis zum Geoid als Gerade angesehen werden dürfen. Wegen der thatsächlichen Krümmung

der Lotlinien bleibt eine Ungenauigkeit, deren Betrag indes, wie wir später sehen werden, gering ist, insoweit er nicht von lokalen Ursachen herrührt, welcher aber, insoweit dieses der Fall ist, der Rechnung im allgemeinen zur Zeit aus praktischen Gründen gar nicht unterworfen werden kann.

Der Fehler verschwindet überdies praktisch genommen, wenn die Stationen alle in geringer Meereshöhe, oder doch nahezu gleich hoch liegen. Im letzteren Falle kann man jedenfalls annehmen, dafs sich die Konstruktion in Strenge auf eine Niveaufläche anstatt auf die Geoidfläche selbst bezieht.

Zum Unterschied vom Geoid wollen wir die den Lotabweichungen angepafste Fläche das *Sphäroid* nennen.

Die Konstruktion kann in nachstehender Weise empirisch-graphisch vorgenommen werden, wenn stets beide Komponenten ξ und η gegeben sind.

Man vereinigt in einer Übersichtskarte die Stationen zu nahezu geradlinigen Zügen und berechnet zuerst an jedem Punkt die in die Zugrichtung fallende Komponente γ der Lotabweichung. Ist α' das Azimut, so wird nach Fig. 41 S. 515 die Komponente $\gamma = \Theta \cos (A' - \alpha')$, also wegen der (7) S. 516:

$$\gamma = \xi \cos \alpha' + \eta \sin \alpha'. \tag{1}$$

Der Sinn hiervon ist der, dafs im Azimut α' die Tangente des Sphäroids den *Depressionswinkel* γ in Bezug auf die Tangente des Referenzellipsoids hat.

Alle Werte γ trägt man in grofsem Mafsstabe auf Millimeterquadratpapier als Ordinaten auf, rechtwinklig zu Abscissen, deren Differenzen den horizontalen Entfernungen entsprechen. Durch die erhaltenen Punkte legt man eine Kurve aus freier Hand, wobei zur Abrundung der Kurve Abweichungen von den Punkten zulässig sind, die jedoch innerhalb des Betrages des Einflusses der plausiblen Beobachtungsfehler in ξ und η auf γ bleiben müssen und in der Regel abwechselnd + und — zu nehmen sind.

Man kann aber mit völlig genügender Annäherung für den Zuwachs der Erhebung $\Delta N' = N'_k - N'_i$, welche das Sphäroid in Bezug aufs Ellipsoid von P_i bis P_k besitzt, setzen:

$$\Delta N' = -\int \frac{\gamma''}{\varrho''} ds, \tag{2}$$

wobei die Integration über die ganze Länge der kürzesten Linie von P_i bis P_k zu erstrecken ist.

Kommen in der Zeichnung c_1 Sek. der Ordinaten und c_2 Meter der Abscissen auf 1^{mm}, so ist $c_1 \gamma^{mm} = \gamma''$ und $c_2 s^{mm} = s^m$, daher

$$\left.\begin{array}{l} \Delta N' = -\frac{c_1 c_2}{\varrho''}\int \gamma^{mm} ds^{mm} \\ \text{oder} \\ \Delta N' = -\frac{c_1 c_2}{\varrho''} F_{ik}{}^{qmm}. \end{array}\right\} \quad (3)$$

F_{ik} bedeutet die Fläche zwischen den Ordinaten γ_i und γ_k in Quadratmillimetern. Dieselbe kann mit dem Polarplanimeter oder durch mechanische Quadratur berechnet werden.

Im letztern Falle mifst man alle Ordinaten in einem hinreichend kleinen Interwall Δs^{mm} der Abscissen ab, sodafs man zwischen je 2 benachbarten Ordinaten die Interpolationskurve als Gerade betrachten darf. Bei der Ungenauigkeit der ganzen Procedur wird es dann genügen, abgesehen von strengeren Formeln, zu setzen:

$$F_{ik} = \left(\sum_i^k \gamma - \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_k)\right) \Delta s, \tag{4}$$

wobei $\Sigma\gamma$ die Summe der Ordinaten in Millimetern von γ_i bis γ_k incl. bezeichnet.

Noch bequemer wird der Ausdruck, wenn für jedes Stück Δs die *mittlere* Ordinate gemessen wird. Hierbei ist einfach

$$F_{ik} = \Sigma\,(\text{der mittleren Ordinaten})\, \Delta s. \tag{5}$$

Nach diesen Formeln berechnet man die Werte $\Delta N'$ für eine hinreichende Anzahl Punkte in Bezug auf einen derselben und kann endlich ein Verzeichnis derselben anlegen oder auch ein (natürlich behufs gröfserer Deutlichkeit verzerrtes) Profil des Sphäroids bezüglich des Ellipsoids herstellen.

In der Regel wird man einen grofsen Teil der Punktzüge in meridionaler Richtung legen, nicht nur weil es bequem ist, sondern auch weil die Anzahl der ermittelten ξ überwiegen wird. Man wird dann allerdings genötigt sein, da sich hinlänglich viele Punkte auf einem Meridian nur selten vorfinden werden, ξ für ideelle Meridianpunkte aus solchen zu beiden Seiten liegenden zu interpolieren. Als Abscissen dienen zugleich am besten direkt die geographischen Breiten.

Meridionale Züge genügen indes allein nicht, denn sie geben nur die Figur einer Anzahl Schnitte ohne Zusammenhang. Um sie zu verbinden, müssen so viele Punkte auch in η bekannt sein, dafs man entweder entlang von Parallelkreisen mit den η allein, oder in irgend welchen Azimuten (jedoch die Meridianschnitte kreuzend) verbindende Profile herstellen kann.

Lassen sich mehrfache Verbindungen herstellen, so giebt dieses Kontrollen für die Richtigkeit der Konstruktion. Man kann dieselben

durch eine *Ausgleichung* ausnutzen. Dieselbe wird gerade so geführt, wie für Nivellements und zwar am besten nach vermittelnden Beobachtungen, wobei als Unbekannte zunächst nur die Höhen der Knotenpunkte der Profile über einem beliebigen Nullpunkt eingehen und $\Delta N'$ jeder Profilstrecke zwischen 2 Knotenpunkten als Beobachtung auftritt. (Vergl. weitere Details in der *Ausgleichungsrechnung* S. 310 unten.*))

Die Gewichte dieser Beobachtungen nimmt man im allgemeinen umgekehrt proportional den Entfernungen, da unter sonst gleichen Umständen die mittleren Fehlerquadrate in den $\Delta N'$ offenbar mit der Anzahl n der Ordinaten wachsen, die zu ihrer Bildung benutzt sind. Wenn freilich die graphischen Interpolationen der Lotabweichungen sich für verschiedene Profile sehr ungleich genau herstellen lassen, mufs auch hierauf bei der Gewichtsbestimmung Rücksicht genommen werden, indem man die Gewichte umgekehrt proportional den Entfernungen mal den mittleren Fehlerquadraten der Ordinaten setzt, für welche letztere die Unsicherheit beim Zeichnen Anhaltspunkte zur Bestimmung giebt (siehe das Beispiel). Bei wenig Zwischenpunkten in einer Strecke kann sogar das Gewicht umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung mal dem mittlern Fehlerquadrat der Ordinaten werden, weil dann die Ordinatenfehler alle nach einer Seite liegen.

Sind die Höhenunterschiede der Knotenpunkte ermittelt, so werden die Verbesserungen für die Zwischenpunkte bestimmt (*Ausgleichungsrechnung* S. 311), und nun ist nur noch die Höhe eines Punktes des Sphäroids über dem Ellipsoid nötig, um das Sphäroid völlig zu bestimmen. Ist nur *eine* Grundlinie gemessen, so schneiden beide Flächen sich am Orte dieser Grundlinie; bei mehreren Grundlinien allerdings bleibt eine Unklarheit (vergl. S. 524 u. 533), und man mufs sich dann das Sphäroid etwa so gelegt denken, dafs es eine mittlere Lage zum Ellipsoid in Bezug auf die Orte der Grundlinien hat. Diese Unsicherheit ist übrigens von geringem Belang, da die Lage der Axe des Referenzellipsoids zur Erdaxe ja doch nicht näher bekannt ist (S. 533) und da, wie oben bemerkt, das Sphäroid aufserdem mehr eine Niveaufläche in der mittleren Höhe des betreffenden Gebiets der physischen Erdoberfläche als das Geoid selbst

---

*) Nur führe man die Höhen über einem unbestimmten Nullpunkt ein, sodafs die Summe der Normalgleichungen identisch null wird, was bei der hier zweckmäfsigen Auflösung durch Näherung (a. a. O. S. 133) eine gröfsere Konvergenz ergiebt.

(Kunstgriff von *Gaufs* nach *v. Freeden, die Praxis der M. d. kl. Qu.* S. 29.)



darstellt. — Schliefslich kann man durch *Kurven gleichen* $\Delta N'$ das Sphäroid in der ebenen Zeichnung charakterisieren.

§ 22. **Zahlenbeispiel: Lotabweichungen im Harze.** Das königlich preufsische geodätische Institut hat im Harze eine Reihe Lotabweichungen ξ bestimmt, welche einen ausgesprochen regelmäfsigen Gang zeigen. Wir beschränken uns hier auf eine Reihe von Punkten, die nahe dem Meridian des Brockens liegen, Fig. 44. Nach S. 150 der *Publikation der astronomischen Arbeiten von 1875* (erschienen 1876) hat man dafür folgende Zahlen:

Station	Meeres-höhe	Östl. Länge von Ferro	Polhöhe geodätisch B''	Polhöhe astronomisch B'	ξ
Heldburg	395m	28° 24′	50° 17′ 23,57″	19,25″	+ 4,32″
Dollmar	740	28 9	37 32,45	27,35	+ 5,10
Inselsberg	916	28 8	51 8,66	11,47	— 2,81
Craula	456	28 9	51 3 30,44	28,38	+ 2,06
Mühlhausen	227	28 9	12 10,44	6,18	+ 4,26
Löwenburg	422	28 13	26 34,26	33,93	+ 0,33
Tettenborn	323	28 13	34 22,39	17,29	+ 5,10
Hohegeis	640	28 20	39 58,38	57,02	+ 1,36
Osterode	260	27 54	43 23,20	23,18	+ 0,02
Brocken	1143	28 17	48 1,41	10,59	— 9,18
Ilsenburg	249	28 21	52 24,86	35,71	— 10,85
Harzburg	217	28 13	53 25,74	39,25	— 13,51
Fallstein	167	28 18	52 1 5,91	9,34	— 3,43
Asse	203	28 19	8 20,38	20,38	0,00

Bei Berechnung der geodätischen Polhöhen ist diejenige der Sternwarte *Seeberg* bei Gotha zu Grunde gelegt. Als Azimut diente das 1869 auf dem *Inselsberge* gemessene (vergl. S. 148 a. a. O.). Die ξ beziehen sich also auf ein *Bessel*sches Ellipsoid, das für Seeberg $\xi = 0$ und für den Inselsberg $\eta = 0$ giebt.*)

*) Ganz streng ist das nicht, doch mit Rücksicht auf den geringen geographischen Längenunterschied L von Inselsberg und Seeberg genügend. Formel (9) S. 536 zeigt nämlich, dafs bei der Übertragung des ellipsoidischen Azimuts nach Seeberg von Inselsberg aus, weil hier ξ nicht genau null ist, ein kleiner dem $\sin L$ proportionaler Einflufs entsteht, der jedoch schliefslich die von Seeberg aus berechneten ξ nur in verschwindendem Mafse afficiert.

Bezüglich seiner Höhenlage zum Geoid genügt unter Hinweis auf den Schlufs von § 21 die Bemerkung, dafs beide in der Gegend des untersuchten Gebiets irgendwo sich schneiden, dafs das Sphäroid aber eher einer Niveaufläche in einigen Hundert Meter Meereshöhe als dem Geoid selbst entspricht.

Um ein nahezu meridionales Profil zu erhalten, wurden Hohegeis und Osterode einerseits, Harzburg und Ilsenburg andrerseits zu einem ideellen Punkt vereinigt:

	Länge	Polhöhe geodätisch	ξ
$\left(\frac{4}{5}\right.$ Hohegeis $+ \frac{1}{5}$ Osterode$\left.\right)$	28° 15′	51° 40′ 39″	+ 1,1″
$\left(\frac{1}{2}\right.$ Ilsenburg $+ \frac{1}{2}$ Harzburg$\left.\right)$	28 17	51 52 55	− 12,2

Für γ kann in den Formeln S. 565, da das Azimut α' des Zuges gering ist, direkt ξ gesetzt werden, oder wenn man von Süden nach Norden geht, d. h. $\alpha' = 180^0$ annimmt, $- \xi$.

In der graphischen Darstellung wurden 2 extreme Interpolationskurven gebildet. Dabei war

$$1^{mm} \text{ Ordinate} = 0,1''$$

und

$$1^{mm} \text{ Abscisse} = 30'' \text{ in geogr. Breite}$$

$$= 927^m,$$

mithin:

$$c_1 = 0,1$$

$$c_2 = 927^m$$

$$\frac{c_1\, c_2}{\varrho''} = \frac{1}{2220}.$$

Fig. 45 zeigt diese graphische Darstellung in halber Gröfse.

Es wurden folgende Zahlen erhalten:

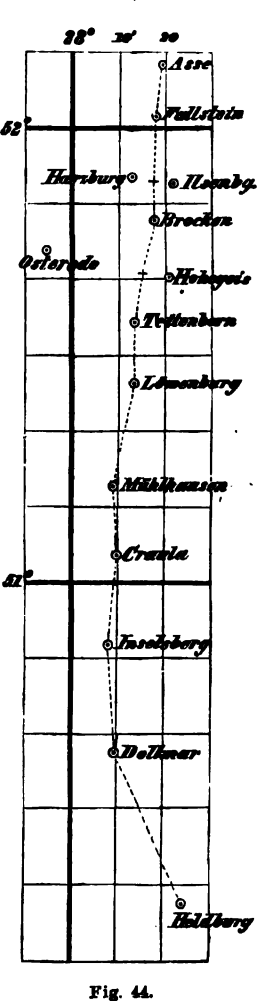


Fig. 44.

	I.		II.		Mittel
	$-F$	$\Sigma \Delta N'$	$-F$	$\Sigma \Delta N'$	
50°20′		$0{,}00^{m}$*)		$0{,}00^{m}$	$0{,}00^{m}$
Von 50°20′ bis 50°30′	+ 1009^{qmm}	+ 0,45	+ 1220^{qmm}	+ 0,55	0,50
„ 30 „ 40	+ 1034	+ 0,92	+ 1110	+ 1,05	0,98
„ 40 „ 50	+ 465	+ 1,12	— 45	+ 1,03	1,07
„ 50 „ 51 0	— 523	+ 0,89	— 318	+ 0,88	0,88
„ 51 0 „ 10	+ 505	+ 1,12	+ 505	+ 1,11	1,11
„ 10 „ 20	+ 650	+ 1,41	+ 850	+ 1,49	1,45
„ 20 „ 30	+ 65	+ 1,44	+ 285	+ 1,62	1,53
„ 30 „ 40	+ 800	+ 1,80	+ 760	+ 1,96	1,88
„ 40 „ 50	— 978	+ 1,36	— 1070	+ 1,48	1,42
„ 50 „ 52 0	— 1875	+ 0,52	— 1925	+ 0,62	0,57
„ 52 0 „ 10	— 305	+ 0,38	— 295	+ 0,48	0,43

Fig. 45.

Die beiden Interpolationskurven, welche beide *genau* durch die

*) Als Nullpunkt willkürlich angenommen.

Punkte gelegt sind, geben ziemlich gut übereinstimmende Resultate. Es ist wohl möglich, dafs dieses ein Zufall ist.*) Nach Ansicht der Zeichnung kann man aber annähernd die Differenzen F nach beiden Kurven von 10′ zu 10′ in geographischer Breite als zufällige betrachten. Bildet man aus den Quadraten der 11 Differenzen der F in derselben Zeile die mittlere Differenz im Sinne eines mittleren Fehlers, so folgt als mittlerer Fehler eines $\varDelta N'$ für eine Strecke von 10′ in geographischer Breite

$$\pm 0^m{,}10\,.$$

Für den Gesamthöhenunterschied in I oder II also ist hiernach der m. F. gleich:

$$\pm 0{,}1\sqrt{11}\,,\ \text{d. i.}\ \pm 0{,}33^m$$

und für das Mittel beider Ergebnisse

$$\pm 0{,}23^m\,.$$

Die hierin noch nicht enthaltene Unsicherheit der ξ selbst vergröfsert diesen mittleren Fehler nur wenig. Andrerseits ist derselbe eher zu grofs als zu klein geschätzt, indem im einzelnen die beiden Interpolationskurven möglichst extreme, obgleich plausible Lagen erhalten haben. Die Fig. 45 zeigt auch die dem Mittel von I und II entsprechende Interpolationskurve.

§ 23. **Lotabweichungen in der Alpengegend.** *Carl von Orff* hat in der Schrift *Bestimmung der geographischen Breite der Königlichen Sternwarte bei München,* 1877 (Supplement zum 21. Bde. der Annalen der Sternwarte) einen sehr interessanten Anhang beigefügt, worin mittelst süddeutscher, österreichischer, schweizer und italienischer Dreiecksnetze Lotabweichungen nördlich und südlich der Alpen gewonnen werden. Auch hier ist ein Gang unverkennbar, jedoch ist trotz 31 Punkten in Breite, 8 in Länge und 14 in Azimut (aufser dem Ausgangspunkt München mit $\xi_1 = 0$ $\eta_1 = 0$) bei der Gröfse der Verteilungsfläche eine nur sehr unsichere Bestimmung des Sphäroids möglich. Für eine Reihe Punkte nahe dem Münchener Meridian hat man nach S. 60 a. a. O. folgende Werte:

*) S. 206 der *Zeitschrift für Vermessungswesen* Bd. 4 1875 giebt *Börsch* ähnliche Resultate, welche Differenzen bis zu $0{,}4^m$ mit den Ergebnissen I und bis zu $0{,}2^m$ mit den Ergebnissen II zeigen.

No.	Station	Geogr. Breite, angenähert.	ξ
9	Nürnberg	49° 27,5′	+ 4,9″
8	Wülzburg	49 1,5	— 1,8
7	Ingolstadt	48 45,8	+ 4,8
6	München	48 8,3	0,0*)
5	Holzkirchen, Peifsenberg — Mittel	47 50,5	— 3,5
4	Benediktbeuren, Wendelstein, Mittenwald, Lanserkopf — Mittel	47 31,5	— 12,1
3	S. Salvatore	45 51,1	+ 13,2
2	Padua, Venedig — Mittel	45 24,9	+ 5,5
1	Bologna	44 29,8	— 6,6

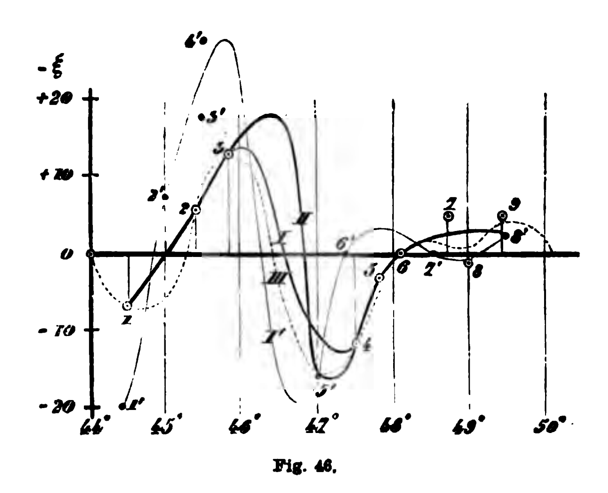


Fig. 46.

Die graphische Darstellung giebt nun für 2 zum Teil zusammenfallende, aber im allgemeinen doch extreme Ausgleichungskurven unter Ausgleichung der kleinen Schwankungen bei den 3 nördlichen Punkten:

---

*) Angenommen.

	I.		II.		Mittel	Reduziertes Mittel
	$-F$	$\Sigma N'$	$-F$	$\Sigma N'$		
44,5°		0,0^m	wie in I	0,0^m	0,0^m *)	
Von 44,5° bis 45	− 16,5^{qmm}	− 0,9	wie in I	− 0,9	− 0,9	− 2,0^m
„ 45 „ 45,5	+ 17	+ 0,0	wie in I	+ 0,0	+ 0,0	− 1,1
„ 45,5 „ 46	+ 52	+ 2,8	wie in I	+ 2,8	+ 2,8	+ 1,4
„ 46 „ 46,5	+ 44	+ 5,2	+ 85	+ 7,4	+ 6,3	+ 5,2
„ 46,5 „ 47	− 17,5	+ 4,3	+ 14	+ 8,2	+ 6,3	+ 5,2
„ 47 „ 47,5	− 56,5	+ 1,2	− 69	+ 4,5	+ 2,8	+ 1,7
„ 47,5 „ 48	− 33	− 0,6	wie in I	+ 2,7	+ 1,1	+ 0,0 *)
„ 48 „ 48,5	+ 2,5	− 0,4	wie in I	+ 2,8	+ 1,2	+ 0,1
„ 48,5 „ 49	+ 12,5	+ 0,2	wie in I	+ 3,5	+ 1,9	+ 0,8
„ 49 „ 49,5	+ 12,5	+ 0,9	wie in I	+ 4,2	+ 2,6	+ 1,5

Hierbei war

$$c_1 = 1 \text{ und } c_2 = 11150, \quad \frac{c_1 c_2}{\varrho''} = 0{,}054.$$

Die reduzierten Mittel sind durch Subtraktion von 1,1^m entstanden. Die Unsicherheit des totalen Höhenunterschieds von 45,5 bis 49° geographischer Breite dürfte 2 bis 3^m nicht überschreiten.

Die Fig. 46 zeigt noch eine Interpolationskurve I′ für ein zweites näherungsweise meridionales Profil. Die Nummern 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′ beziehen sich dabei der Reihe nach auf die Punkte Mondovi, Turin, Mailand, Andrate, Rigi, Zürich, Strafsburg-Tübingen, Mannheim.

Der Verlauf der ξ ist hier ganz ähnlich wie in dem ersten Profil und man kann auch in den Höhen nach Mafsgabe der Flächen einen ähnlichen Gang und gleiche (vielleicht etwas gröfsere) Extreme erwarten.

§ 24. **Anwendung der Rechnung auf die Bestimmung des Sphäroids.** Um die Willkürlichkeiten des graphischen Verfahrens zu vermeiden, kann man den Weg der Rechnung betreten. Man wird allerdings sehr bald finden, dafs hier die willkürliche Wahl der Interpolationsformel auch bedenklich ist. Sie ist vielleicht sogar bedenklicher als die Willkür beim graphischen Verfahren, weil es schwieriger ist, den Grad der Willkür zu konstatieren. Nur bei sehr dicht liegenden Bestimmungen, die eine wirkliche Ausgleichung gestatten, dürfte die Rechnung vorzuziehen sein.

*) Angenommen.

Nimmt man an, dafs die Sphäroidfläche sich durch *eine* Gleichung darstellen läfst*), so kann man bei mäfsiger Ausdehnung eines Stückes, das in Untersuchung ist, für N' eine Reihe der Form anwenden:

$$\left.\begin{aligned} N' = N'_0 &+ \mathfrak{A}_1 \Delta B + \mathfrak{A}_2 \Delta L \\ &+ \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_1 \Delta B^2 + \mathfrak{B}_2 \Delta B \Delta L + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_3 \Delta L^2 \\ &+ \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}_1 \Delta B^3 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_2 \Delta B^2 \Delta L + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_3 \Delta B \Delta L^2 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}_4 \Delta L^3 + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

worin $\Delta B = B - B_0$, $\Delta L = L - L_0$ ist und N'_0 den Wert von N' im Ausgangspunkte $(B_0 L_0)$ bezeichnet. Diese Reihe kann man entweder als *Taylors* Reihe auffassen, oder als eine Interpolationsformel, die aus derjenigen von *Lagrange* für einen Meridianschnitt, also aus einer Reihe nach Potenzen von ΔB, hervorgeht, wenn die Koefficienten wieder als Potenzreihen nach ΔL entwickelt werden.

Ist nun dM ein Meridianelement und dP ein Element des Parallelkreises, dann ist $\frac{\partial N'}{\partial M} dM$ der Zuwachs von N' nach Norden für dM und $\frac{\partial N'}{\partial P} dP$ der Zuwachs von N' nach Westen für dP. Da diese Gröfsen bezw. auch gleich ξdM und $-\eta dP$ sind, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial N'}{\partial M} \quad \text{d. i.} \quad \xi = \frac{\partial N'}{\varrho_m \partial \Delta B} \\ \eta &= -\frac{\partial N'}{\partial P} \quad \text{d. i.} \quad \eta = -\frac{\partial N'}{\varrho_n \cos B \partial \Delta L}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wobei ϱ_m den Krümmungsradius im Meridian, ϱ_n denjenigen im Perpendikel für die geographische Breite B bezeichnet.

Führt man die Differentiation aus, so erhält man Ausdrücke für ξ und η, welche zeigen, wie aus einer Reihe gegebener ξ und η sich der Ausdruck (1) für N' bis auf die Konstante N'_0 bestimmen läfst.

Für eine Funktion i. Grades müssen $(2 + 3 + \cdots \overline{i + 1})$, d. i. $\frac{1}{2} i (i + 3)$ Komponenten der Lotabweichung vorliegen. Verteilen sich dieselben nicht gleichmäfsig auf ξ und η, so müssen doch wenigstens i der gegebenen Werte Komponenten ξ oder η sein, je nachdem die Anzahl der η oder ξ dominiert.

*) Näherungsweise wird dieses trotz der Krümmungsdiskontinuitäten des Geoids (S. 22) der Fall sein. Aber es bleibt doch jedenfalls eine grofse Schwierigkeit infolge derselben, da viele Glieder mit zu bestimmenden Koefficienten zur Darstellung erforderlich werden.

Wenn man überlegt, dafs eine Ausmittelung der Funktion N' sich nur lohnen wird, falls für eine gröfsere Anzahl Punkte ξ und η gegeben sind, so giebt es bei strenger Darstellung dieser Werte auch viele Koefficienten zu bestimmen. Eine Verminderung der Anzahl derselben verlangt eine Ausgleichung, die aber wegen der hierbei unvermeidlichen (mit der Natur der Potenzreihe verbundenen) grofsen Zahlenkoefficienten sehr mühsam, ja in der Regel wohl undurchführbar wird. Ein einfaches Zahlenbeispiel wird die Schwierigkeit weiterhin erläutern und bestätigen.

Einfacher ist natürlicherweise die Rechnung, wenn es nur gilt, einzelne Profile zu behandeln. Das erwähnte Beispiel bezieht sich in der That nur auf ein Profil; allein selbst hier wird die numerische Arbeit der Ausgleichungsrechnung schon bedeutend.

Am einfachsten ist es noch, alle Lotabweichungskomponenten für ein Profil streng darzustellen, weil man hierbei die *Lagrange*sche Interpolationsformel in der ursprünglichen Form anwenden kann, ohne eine Auflösung von Gleichungen erst vornehmen zu müssen.*) Man hat z. B. für eine meridionales Profil, wenn die Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_i \ldots \xi_n$ für n Punkte gegeben sind, welche in Bezug auf einen willkürlichen Anfangspunkt in geographischer Breite die Abstände $\varDelta B_1$, $\varDelta B_2, \ldots \varDelta B_i \ldots \varDelta B_n$ haben, als interpolatorisch für den Punkt $\varDelta B$ bestimmten Wert ξ:

$$\xi = \sum_1^n \xi_i \frac{\varDelta B - \varDelta B_1}{\varDelta B_i - \varDelta B_1} \frac{\varDelta B - \varDelta B_2}{\varDelta B_i - \varDelta B_2} \cdots \frac{\varDelta B - \varDelta B_{i-1}}{\varDelta B_i - \varDelta B_{i-1}} \frac{\varDelta B - \varDelta B_{i+1}}{\varDelta B_i - \varDelta B_{i+1}} \cdots \frac{\varDelta B - \varDelta B_n}{\varDelta B_i - \varDelta B_n} . \quad (3)$$

Die Entwicklung der n Glieder der Summe rechter Hand giebt ξ als Potenzreihe von $\varDelta B$.**) Jedoch dürfte es in der Regel bequemer sein, für eine Anzahl $\varDelta B$ in gleichem Intervall ξ zu berechnen und $\varDelta N'$ durch mechanische Quadratur abzuleiten.

*) Diese Interpolationsformel ist nichts anderes als die *allgemeine* Auflösung des Problems. Um sie zu gewinnen, können die Koefficienten der Potenzreihe aus dem mittelst Determinanten aufzulösenden Gleichungssystem entnommen werden, welches die streng darzustellenden Werte der Potenzreihe geben. Aufserdem ist insbesondere noch ein bekannter Satz über die Umformung eines Produktes aller Differenzen gegebener Gröfsen in eine Determinante anzuwenden.

**) Es liegt der Gedanke nahe, die allgemeine Formel für ξ auch für den Fall aufzusuchen, dafs mittelst Ausgleichungsrechnung aus n Beobachtungen eine Potenzreihe mit weniger als n Koefficienten hergeleitet werden soll. Dieses kann in der That auch mittelst der bekannten Determinantensätze geschehen, allein trotz der theoretischen Einfachheit dürfte doch die Formel für die Anwendung zu mühsam erscheinen.

Tchébychef hat sich in mehreren Abhandlungen (vergl. insbesondere die *Mémoires de l'Acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg* von 1858 und 1859) mit

Ein anderer und zwar recht bequemer Weg zur interpolatorischen Darstellung der Lotabweichungen einzelner Profile ergiebt sich, wenn man darauf verzichtet, sämtliche gegebene Werte durch *eine* Gleichung zu befriedigen.

Das einfachste Verfahren ist, immer nur mit Rücksicht auf 2 benachbarte Lotabweichungen zu interpolieren, d. h. also für ein meridionales Profil zwischen ξ_i und ξ_k zu setzen:

$$\xi = \xi_i \frac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_i - \Delta B_k} + \xi_k \frac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_k - \Delta B_i}. \tag{4}$$

Im Profil der ξ giebt das gerade Linien zwischen je 2 Punkten, also eine Interpolation mit Unstetigkeiten, die sich aber im Profil der N' versteckt, da die Gleichheit der ξ an den Unstetigkeitsstellen des erstgenannten Profils zusammenfallende Tangenten [siehe die 1. Gleichung (2)] im Profil der N' erzeugt.

Vorzuziehen ist es in vielen Fällen, immer 3 benachbarte Lotabweichungen zu beachten, also für ein meridionales Profil

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} \xi_h \dfrac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_h - \Delta B_i} \dfrac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_h - \Delta B_k} + \xi_i \dfrac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_i - \Delta B_h} \dfrac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_i - \Delta B_k} \\ \qquad + \xi_k \dfrac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_k - \Delta B_h} \dfrac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_k - \Delta B_i} \end{array} \right\} \tag{5}$$

zu setzen, wobei ξ_h, ξ_i, ξ_k 3 auf einander folgende gegebene Werte sind. Als Interpolationskurve im Profil der ξ tritt jetzt die Parabel 2. Grades auf. Selbstverständlich giebt es auch hier Unstetigkeiten, aber auch nur im Profil der ξ.

Für die praktische Anwendung dürfte vielleicht als *zweckmäfsigstes Verfahren* ein Vorgang der Art anzuwenden sein, dafs man immer 4 benachbarte Lotabweichungen in eine Interpolationsformel (3) bringt, aber jedesmal *nur das mittelste Stück* der Interpolationskurve benutzt.*) Man wird auf diese Art die kleinsten Diskontinuitäten erhalten. Die Formel lautet hier, wenn ξ_h, ξ_i, ξ_k, ξ_l auf einander folgen:

---

dem Problem der Interpolation beschäftigt, u. a. auch mit der Interpolation nach der Methode der kl. Qu. (1859). Die grofsen Zahlen sind jedoch hierbei nicht vermieden, wie überhaupt eine wesentliche Vereinfachung gegen die gewöhnliche Procedur für diese Methode nicht erreicht ist und auch nicht möglich scheint.

*) Von diesem Vorgange ist man allerdings an den beiden Enden der zu interpolierenden Amplitude genötigt etwas abzuweichen, was aber gerade an den Enden ohne Belang ist.

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} \xi_h \frac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_h - \Delta B_i} \frac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_h - \Delta B_k} \frac{\Delta B - \Delta B_l}{\Delta B_h - \Delta B_l} + \xi_i \frac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_i - \Delta B_h} \frac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_i - \Delta B_k} \frac{\Delta B - \Delta B_l}{\Delta B_i - \Delta B_l} \\ + \xi_k \frac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_k - \Delta B_h} \frac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_k - \Delta B_i} \frac{\Delta B - \Delta B_l}{\Delta B_k - \Delta B_l} + \xi_l \frac{\Delta B - \Delta B_h}{\Delta B_l - \Delta B_h} \frac{\Delta B - \Delta B_i}{\Delta B_l - \Delta B_i} \frac{\Delta B - \Delta B_k}{\Delta B_l - \Delta B_k} . \end{array} \right\} \quad (6)$$

Über zwei andere Interpolationsformeln vergl. das *American Journal of Mathematics pure and applied* Vol. II No. 4, 1879; dieselben sind aber im vorliegenden Falle weniger zweckmäfsig. — Zur Interpolation gegebener Werte ξ für Punkte einer Fläche giebt es auch Formeln; schon *Lambert* erwähnt solche im 3. Teil seiner *Beiträge zum Gebrauch der Mathematik* (1772), S. 68 u. ff. Hier treten immer an Stelle der Faktoren $\Delta B - \Delta B_i, \ldots$ die Faktorenpaare $(\Delta B - \Delta B_i)\,(\Delta L - \Delta L_i)$ auf. Würde man eine solche Formel auf den Harz anwenden, so gäbe ihre Integration nach B den Ausdruck für N' bis auf eine unbekannte Funktion von L, zu deren Bestimmung es einer Anzahl Werte η bedarf. Übrigens macht auch bereits *Lambert* auf die Vorteile periodischer Reihen aufmerksam.

§ 25. **Fortsetzung.** Eine im allgemeinen weit mehr als die Potenzreihe zu strenger Darstellung und zu Ausgleichungen geeignete Formel erhält man, wenn N' für einen Meridian nach *Fouriers* Reihe entwickelt gedacht wird und die Koefficienten selbst wieder als Funktionen des geographischen Längenunterschieds nach *Fourier* entwickelt werden. Wir setzen also:

$$\left. \begin{array}{l} N' = b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots \\ \qquad + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots \\ \text{wobei} \\ b_i = b_{i.0} + b_{i.1} \cos y + b_{i.2} \cos 2y + \cdots \\ \qquad + b'_{i.1} \sin y + b'_{i.2} \sin 2y + \cdots \\ \text{und} \\ a_i = a_{i.0} + a_{i.1} \cos y + a_{i.2} \cos 2y + \cdots \\ \qquad + a'_{i.1} \sin y + a'_{i.2} \sin 2y + \cdots \end{array} \right\} \quad (1)$$

ist und x und y solche Vielfache von ΔB und ΔL bedeuten, dafs die zur Interpolation gelangenden Amplituden von x und y angemessen kleiner als 2π sind. Man mufs es nämlich vermeiden, dafs die äufsersten gegebenen Werte von N' zu Werten von x bezw. y gehören, die nahezu um 2π verschieden sind, weil der Ausdruck (1) bei Variationen von x und y um 2π dieselben Werte N' wiedergiebt. Die Nichtbeachtung dieses Umstandes erschwert offenbar die Darstellung.

Um dieselbe noch mehr zu erleichtern, ist aufserdem eine Modifikation des Ausdrucks (1) notwendig. Die Differentialquotienten von N', welche mittelst der Relationen (2) des vorigen Paragraphen zu

den Ausdrücken für ξ und η führen, besitzen nämlich bei der jetzigen Gestalt des Ausdrucks (1) kein von Cosinus oder Sinus freies Glied. Es ist daher die Summe der ξ oder η für alle Werte über eine Periode von x oder y hinweg gerade null.

Fügen wir nun in den Ausdrücken (1) rechter Hand

$$\left.\begin{array}{llll} \text{zu } N': & \text{das Glied} & & a_0\, x \\ \text{,,}\ b_i: & \text{,,} & \text{,,} & b'_{i.0}\, y \\ \text{,,}\ a_i: & \text{,,} & \text{,,} & a'_{i.0}\, y\,, \end{array}\right\} \qquad (1^*)$$

so kommen jetzt in den Differentialquotienten auch konstante Glieder vor, sodafs die Summe der ξ oder η innerhalb einer Periode nicht mehr notwendig null sein wird, was den Anschlufs sehr erleichtert.

Die Differentialquotienten sind jetzt erst in völliger Allgemeinheit *Fourier*sche Reihen; sie bleiben es zwar auch, wenn man a_0 konstant annimmt und alle Koefficienten von y bis auf den einen Koefficienten $b'_{0.0}$ gleich null setzt; allein alsdann ändern sich die konstanten Glieder der Reihen für ξ und η nicht mehr von Meridian zu Meridian bezw. von Parallel zu Parallel, wodurch der Anschlufs wieder sehr erschwert wird. Wir behalten demnach die allgemeinen Ausdrücke bei. (Nur $a'_{0.0}$ könnte man allenfalls weglassen.)

Diese Ausdrücke eignen sich aber im Vergleich zu Potenzreihen zur Interpolation gegebener ξ und η (in Strenge oder unter Ausgleichung) deshalb sehr gut, weil die Koefficienten der Unbekannten nicht blos stark nach der Gröfse, sondern auch im Vorzeichen variieren.

§ 26. **Zahlenbeispiel.** Wir wenden die Zahlwerte des Beispiels von § 23 S. 572 auf die Potenzreihe an. Die Figur 46 zeigt, dafs ξ wenigstens vom 4. Grade angenommen werden mūfs. Indem wir noch etwas weiter gehen und in dem Ausdruck (1) S. 574 $\varDelta L$ gleich null setzen, sowie die Bedeutung der Koefficienten z. T. etwas abändern, erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} N' = N'_0 + \mathfrak{A}_1 \varDelta B + \frac{1}{2}\, \mathfrak{B}_1 \varDelta B^2 + \frac{1}{3}\, \mathfrak{C}_1 \varDelta B^3 + \frac{1}{4}\, \mathfrak{D}_1 \varDelta B^4 \\ \qquad + \frac{1}{5}\, \mathfrak{E}_1 \varDelta B^5 + \frac{1}{6}\, \mathfrak{F}_1 \varDelta B^6. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Differentiation giebt, wenn $\varDelta B$ in Gradmafs verstanden und ξ für $\varDelta B =$ null (München) auch null genommen wird:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{ \mathfrak{B}_1 \varDelta B + \mathfrak{C}_1 \varDelta B^2 + \mathfrak{D}_1 \varDelta B^3 + \mathfrak{E}_1 \varDelta B^4 + \mathfrak{F}_1 \varDelta B^5 \right\} \frac{\varrho^0 \varrho''}{\varrho_m} \quad (2)$$

oder in sofort ersichtlicher Abkürzung:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \mathfrak{B}'_1 \varDelta B + \mathfrak{C}'_1 \varDelta B^2 + \mathfrak{D}'_1 \varDelta B^3 + \mathfrak{E}'_1 \varDelta B^4 + \mathfrak{F}'_1 \varDelta B^5. \quad (3)$$

Wir erhalten nun nachstehende *Fehlergleichungen,* indem wir uns jedem ξ eine Verbesserung λ beigefügt denken und alsdann ξ nach rechts schaffen:

	$-\xi$	$\mathfrak{B}'_1$ 1.	$\mathfrak{C}'_1$ 2.	$\mathfrak{D}'_1$ 3.	$\mathfrak{E}'_1$ 4.	$\mathfrak{F}'_1$ 5.
$\lambda_1 =$	+ 6,6″	− 3,64	13,2496	− 48,2285	175,5519	− 639,0089
$\lambda_2 =$	− 5,5	− 2,72	7,3984	− 20,1236	54,7363	− 148,8828
$\lambda_3 =$	− 13,2	− 2,29	5,2441	− 12,0090	27,5006	− 62,9763
$\lambda_4 =$	+ 12,1	− 0,61	0,3721	− 0,2269	0,1384	− 0,0844
$\lambda_5 =$	+ 3,5	− 0,30	0,0900	− 0,0270	0,0081	− 0,0024
$\lambda_7 =$	− 4,8	+ 0,63	0,3969	+ 0,2500	0,1575	+ 0,0992
$\lambda_8 =$	+ 1,8	+ 0,89	0,7921	+ 0,7050	0,6274	+ 0,5584
$\lambda_9 =$	− 4,9	+ 1,32	1,7424	+ 2,3000	3,0360	+ 4,0075
Summen:			29,2856	− 77,3600	261,7562	− 846,2897

Höhere Potenzen von ΔB zur Bildung der Normalgleichungen				
6.	7.	8.	9.	10.
2325,9924	− 8466,6125	30818,470	− 112179,230	408332,396
404,9612	− 1101,4945	2996,065	− 8149,296	22166,087
144,2158	− 330,2542	756,282	− 1731,886	3966,019
0,0515	− 0,0314	0,019	− 0,012	0,007
0,0007	− 0,0000	0,000	0,000	0,000
0,0625	+ 0,0394	0,025	+ 0,016	0,010
0,4970	+ 0,4423	0,394	+ 0,350	0,312
5,2899	+ 6,9826	9,217	+ 12,166	16,060
2881,0710	− 9890,9283	34580,472	− 122047,892	434480,891

Die *Normalgleichungen* lauten hiernach wie folgt:

	$\mathfrak{B}'_1$	$\mathfrak{C}'_1$	$\mathfrak{D}'_1$	$\mathfrak{E}'_1$	$\mathfrak{F}'_1$
1.	29,2856	− 77,3600	261,7562	− 846,2897	2881,0710
2.	− 77,3600	261,7562	− 846,2897	2881,0710	− 9890,9283
3.	261,7562	− 846,2897	2881,0710	− 9890,9283	34580,472
4.	− 846,2897	2881,0710	− 9890,9283	34580,472	− 122047,892
5.	2881,0710	− 9890,9283	34580,472	− 122047,892	434480,891

zu 1 $= -$ 4,843
zu 2 $= +$ 26,66565
zu 3 $= +$ 63,15049
zu 4 $= -$ 481,78488
zu 5 $= +$ 2587,45361.

Eine Überschlagsrechnung ergab, dafs der Koefficient von $\mathfrak{F}_1$ sich ebenso wie das rechter Hand stehende Absolutglied bei der successiven Elimination von $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{D}'_1$, und $\mathfrak{E}'_1$ in der 5. Gleichung zuletzt auf einige Einheiten in den Zehnern reduziert, sodafs es sogar zweifelhaft ist, ob die angesetzten Koefficienten auf genügend viele Decimalen berechnet sind, um die Unbekannten mit der erforderlichen Schärfe zu erhalten. Aus diesem Grunde, wodurch sich also das Verfahren als ganz unpraktisch erweist, wurde die Rechnung nicht fortgesetzt.

Unter Anwendung der geradlinigen Interpolation bezw. der Interpolation mittelst der Parabel vom 2. Grade (vergl. die Formeln (4) und (5) S. 576) erhielt S. 61 a. a. O. *von Orff* nachstehende Werte von N', wobei N' für München (Nr. 6) zu null angenommen wurde:

	N' 1.	N' 2.	Geogr. Breite
1	$-$ 0,80^m	$+$ 8,41^m	44,50^0
2	$-$ 1,08	$+$ 7,91	45,42
3	$+$ 1,12	$+$ 10,09	45,85
4	$+$ 1,62	$+$ 1,66	47,53
5	$+$ 0,28	$+$ 0,27	47,84
6	0,00	0,00	48,14
7	$+$ 0,81	$+$ 0,91	48,76
8	$+$ 1,02	$+$ 1,03	49,03
9	$+$ 1,38	$+$ 0,96	49,46

§ 27. **Fortsetzung des Zahlenbeispiels.** Die Reihe (1.1*) S. 577 und 578 giebt bei der Differentiation nach x:

$$\frac{\partial N'}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{c} - b_1 \sin x - 2b_2 \sin 2x - 3b_3 \sin 3x - \cdots \\ + a_0 + a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + 3a_3 \cos 3x + \cdots . \end{array} \right\} \quad (1)$$

Hierin haben die Koefficienten a und b konstante Werte, wenn die Reihe wie im vorliegenden Falle auf ein Meridianprofil Anwendung findet.

Die graphische Darstellung zeigt nun sofort, dafs es passend ist, $60\,\varDelta B = x$ zu setzen.*) Es wird somit $dx = 60\,d\varDelta B$ und daher:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \frac{60\,\varrho''}{\varrho_m}\left\{\begin{array}{c} -\,b_1 \sin x - 2b_2 \sin 2x - 3b_3 \sin 3x - \cdots \\ +\,a_0 + a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + 3a_3 \cos 3x + \cdots \end{array}\right\} \quad (2)$$

oder abgekürzt:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{\begin{array}{c} S_1 \sin x + S_2 \sin 2x + S_3 \sin 3x + \cdots \\ +\,T_0 + T_1 \cos x + T_2 \cos 2x + T_3 \cos 3x + \cdots. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Da für München $\xi = 0$ gesetzt wurde und zugleich $x = 0$ ist, hat man noch als Bedingung, um hier ξ in Strenge gleich null zu behalten:

$$0 = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + \cdots, \quad (4)$$

daher endlich:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{\begin{array}{c} S_1 \sin x + S_2 \sin 2x + S_3 \sin 3x + \cdots \\ -\,T_1(1-\cos x) - T_2(1-\cos 2x) - T_3(1-\cos 3x) - \cdots. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Hiermit ergeben sich unter Beschränkung auf 6 Koefficienten nachstehende *Fehlergleichungen*:

$x =$					
$-218^0\,24'$	$\lambda_1 = +\ 6{,}6$	$+\,0{,}621\ S_1$	$-\,1{,}783\ T_1$	$-\,0{,}974\ S_2$
$-163\ \ 12$	$\lambda_2 = -\ 5{,}5$	$-\,0{,}289$	$-\,1{,}957$	$+\,0{,}553$
$-137\ \ 24$	$\lambda_3 = -\ 13{,}2$	$-\,0{,}677$	$-\,1{,}736$	$+\,0{,}996$
$-\ 36\ \ 36$	$\lambda_4 = +\ 12{,}1$	$-\,0{,}596$	$-\,0{,}197$	$-\,0{,}957$
$-\ 18\ \ 0$	$\lambda_5 = +\ 3{,}5$	$-\,0{,}309$	$-\,0{,}049$	$-\,0{,}588$
$+\ 37\ \ 48$	$\lambda_7 = -\ 4{,}8$	$+\,0{,}613$	$-\,0{,}210$	$+\,0{,}969$
$+\ 53\ \ 24$	$\lambda_8 = +\ 1{,}8$	$+\,0{,}803$	$-\,0{,}404$	$+\,0{,}957$
$+\ 79\ \ 12$	$\lambda_9 = -\ 4{,}9$	$+\,0{,}982$	$-\,0{,}813$	$+\,0{,}368$**)

zu λ_1	$-\,0{,}772\ T_2$	$+\,0{,}905\ S_3$	$-\,0{,}574\ T_3$
zu λ_2	$-\,0{,}167$	$-\,0{,}771$	$-\,1{,}637$
zu λ_3	$-\,0{,}916$	$-\,0{,}790$	$-\,0{,}387$
zu λ_4	$-\,0{,}711$	$-\,0{,}941$	$-\,1{,}339$
zu λ_5	$-\,0{,}191$	$-\,0{,}809$	$-\,0{,}412$
zu λ_7	$-\,0{,}751$	$+\,0{,}918$	$-\,1{,}397$
zu λ_8	$-\,1{,}289$	$+\,0{,}339$	$-\,1{,}941$
zu λ_9	$-\,1{,}928$	$-\,0{,}844$	$-\,1{,}536.$

*) Ein etwas kleinerer Faktor wäre noch passender gewesen.
**) Sollte genauer gleich 0,371 sein.

Die Koefficienten der *Normalgleichungen* wurden auf 4 Decimalstellen gebildet; indessen genügen eigentlich 2, sodafs der *Rechenschieber* hier ausreichen würde. Diese Gleichungen sind:

	S_1	T_1	S_2	T_2	S_3	T_3
1.	$3{,}3631\,S_1$	$-\ 0{,}4853\,T_1$	$+\ 1{,}0369\,S_2$	$-\ 2{,}7170\,T_2$	$+\ 2{,}1366\,S_3$	$-\ 2{,}6194\,T_3$
2.	$-\ 0{,}4853$	$+\ 10{,}9321$	$-\ 1{,}7466$	$+\ 5{,}6888$	$+\ 1{,}8481$	$+\ 7{,}5092$
3.	$+\ 1{,}0369$	$-\ 1{,}7466$	$+\ 5{,}4983$	$-\ 2{,}1308$	$+\ 0{,}1849$	$-\ 2{,}9844$
4.	$-\ 2{,}7170$	$+\ 5{,}6888$	$-\ 2{,}1308$	$+\ 7{,}9476$	$+\ 1{,}4782$	$+\ 8{,}6142$
5.	$+\ 2{,}1366$	$+\ 1{,}8481$	$+\ 0{,}1849$	$+\ 1{,}4782$	$+\ 5{,}2475$	$+\ 1{,}9976$
6.	$-\ 2{,}6194$	$+\ 7{,}5092$	$-\ 2{,}9844$	$+\ 8{,}6142$	$+\ 1{,}9976$	$+\ 13{,}2001$

zu 1 $= -\ 0{,}0226$
zu 2 $= -\ 23{,}6202$
zu 3 $= +\ 40{,}9866$
zu 4 $= -\ 9{,}3747$
zu 5 $= -\ 6{,}7633$
zu 6 $= -\ 3{,}4178.$

Sie sind geprüft durch direkte Bildung ihrer Summengleichung, welche auch bei der successiven Elimination zu steter Kontrolle mit fortgeführt wurde (*Ausgleichungsrechnung* S. 104).

Die reduzierten Normalgleichungen lauten:

S_1	T_1	S_2	T_2	S_3	T_3	
$3{,}3631\,S_1$	$-\ 0{,}4853\,T_1$	$+\ 1{,}0369\,S_2$	$-\ 2{,}7170\,T_2$	$+\ 2{,}1366\,S_3$	$-\ 2{,}6194\,T_3$	1.
	$10{,}8621$	$-\ 1{,}5970$	$+\ 5{,}2967$	$+\ 2{,}1564$	$+\ 7{,}1312$	2.
		$4{,}9438$	$-\ 0{,}5144$	$-\ 0{,}1568$	$-\ 1{,}1283$	3.
			$3{,}1163$	$+\ 2{,}1365$	$+\ 2{,}9032$	4.
				$1{,}9922$	$+\ 0{,}2198$	5.
					$3{,}4917$	6.

zu 1 $= -\ 0{,}0226$
zu 2 $= -\ 23{,}6235$
zu 3 $= +\ 37{,}5204$
zu 4 $= +\ 6{,}0305$
zu 5 $= -\ 5{,}0035$
zu 6 $= +\ 15{,}5709,$

woraus sich nachstehende Werte der Unbekannten ergeben:

$$S_1 = 2{,}1674 \quad \log = 0{,}33594$$
$$T_1 = -\ 3{,}1793 \quad 0{,}50233_n$$

$$S_2 = +8{,}4951 \qquad 0{,}92917$$
$$T_2 = -0{,}1601 \qquad 9{,}2044_n - 10$$
$$S_3 = -3{,}0035 \qquad 0{,}47763_n$$
$$T_3 = +4{,}4594 \qquad 0{,}64927.$$

Die übrigbleibenden Fehler, d. h. die Verbesserungen der gegebenen ξ (abgesehen von ξ für München) werden:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = +0{,}187'' & \lambda_5 = -\ 1{,}385'' \\ \lambda_2 = -0{,}163 & \lambda_7 = -\ 3{,}439 \\ \lambda_3 = +0{,}107 & \lambda_8 = +\ 3{,}487 \\ \lambda_4 = +0{,}273 & \lambda_9 = -\ 1{,}067 \end{array}\right\} [\lambda\lambda] = 27{,}190.$$

Dagegen ist nach den bekannten beiden Kontrollformeln*) im Mittel $[\lambda\lambda] = 27{,}194$. Von diesen ist namentlich diejenige, welche die Glieder der reduzierten Normalgleichungen benutzt, interessant; denn sie zeigt, wie sich $[\lambda\lambda]$ durch Mitnahme je einer weiteren Unbekannten verkleinert. Man hat:

$$[\lambda\lambda] = [\xi\xi] - \frac{0{,}0226^2}{3{,}3631} - \frac{23{,}6235^2}{10{,}8621} - \cdots$$
$$\left.\begin{array}{l} = 457{,}00 - 0{,}000 - 51{,}378 - 284{,}756 \\ \quad - 11{,}670 - 12{,}566 - 69{,}437 \end{array}\right\} = 27{,}193.$$

Die Formel für ξ wird jetzt, da nach (4) $T_0 = -1{,}1200$ folgt:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{\begin{array}{l} +\ 2{,}1674 \sin x + 8{,}4951 \sin 2x - 3{,}0035 \sin 3x \\ -\ 1{,}1200 - 3{,}1793 \cos x - 0{,}1601 \cos 2x + 4{,}4594 \cos 3x \end{array}\right\}$$

oder

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \left\{\begin{array}{c} -\ 1{,}1200 + 3{,}8478 \sin (x - 55^0\ 43') \\ +\ 8{,}4967 \sin (2x - 1^0\ 5') \\ +\ 5{,}3765 \sin (3x + 123^0\ 59'). \end{array}\right\}$$

Es wird ferner:

$$N' = \left\{\begin{array}{l} b_0 - 2{,}1674 \cos x - 4{,}2476 \cos 2x + 1{,}0012 \cos 3x \\ -1{,}1200x - 3{,}1793 \sin x - 0{,}0801 \sin 2x + 1{,}4865 \sin 3x \end{array}\right\} \frac{\varrho_m}{60\,\varrho''}$$

oder

$$N' = \left\{\begin{array}{l} b_0 - 1{,}1200\,x - 3{,}8478 \cos (x - 55^0\ 43') \\ \qquad - 4{,}2483 \cos (2x - 1^0\ 5') \\ \qquad - 1{,}7922 \cos (3x + 123^0\ 59') \end{array}\right\} \frac{\varrho_m}{60\,\varrho''},$$

*) *Ausgleichungsrechnung* S. 106 u. 107 (6) und (9).

wobei x im 2. Glied als Arcus, oder gleich x in Graden: ϱ^0 zu verstehen ist. Ferner ist $\varrho_m : \varrho''$ für 46,5° Breite gleich 30,87; also

$$\frac{\varrho_m}{60\,\varrho''} = 0{,}5145.$$

Berechnet man noch zur Kontrolle nach der zweiten der eben für ξ gefundenen Formeln ξ für die 8 Beobachtungen, so folgt:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = +\,0{,}193'' & \lambda_5 = -\,1{,}386'' \\ \lambda_2 = -\,0{,}163 & \lambda_7 = -\,3{,}442 \\ \lambda_3 = +\,0{,}101 & \lambda_8 = +\,3{,}493 \\ \lambda_4 = +\,0{,}271 & \lambda_9 = -\,1{,}036, \end{array}$$

was völlig genügend mit den oben ermittelten Werten stimmt, wenn man beachtet, dafs die Koefficienten der Fehlergleichungen nur mit 3 Decimalen angesetzt sind. (λ_9 weicht allerdings infolge eines gröberen Versehens in einem Koefficienten um 0,03″ von dem Ergebnis der anderen Rechnung ab, doch ist auch das noch ohne Belang.)

Man findet endlich nach den Formeln für ξ und N', wenn zu allen N' noch $(5{,}42 - b_0) \,.\, 0{,}5145$ addiert wird, um N' für München gleich null zu bekommen:

B	ΔB	x	ξ	N'
44,5°	− 3,64°	− 218° 24′	− 6,41″	+ 5,3^m
45	− 3,14	− 188 24	− 5,59	+ 3,3
45,5	− 2,64	− 158 24	+ 7,55	+ 3,5
46	− 2,14	− 128 24	+ 12,78	+ 6,7
46,5	− 1,64	− 98 24	− 1,00	+ 8,6
47	− 1,14	− 68 24	− 15,32	+ 6,1
47,5	− 0,64	− 38 24	− 12,43	+ 2,0
48	− 0,14	− 8 24	− 1,89	+ 0,1
48,5	+ 0,36	+ 21 36	+ 1,61	+ 0,2
49	+ 0,86	+ 51 36	+ 1,58	+ 0,6
49,5	+ 1,36	+ 81 36	+ 4,00	+ 1,4
50	+ 1,86	+ 111 36	+ 1,68	

Die Ergebnisse für die N' weichen innerhalb 45,5° und 49° von den früher auf S. 573 auf graphischem Wege erhaltenen um 3 bis 5^m ab. Wenn man aber den Verlauf der ξ nach vorstehender Rechnung in der Zeichnung Fig. 46 betrachtet, woselbst er durch Kurve III dar-

gestellt ist, wird man sich sagen müssen, dafs dem jetzigen Resultat mindestens nicht mehr Sicherheit zukommt, als dem früher auf graphischem Wege erhaltenen.

Ein strenger Anschlufs an alle 9 Werte ξ würde wenig förderlich sein, weil derselbe die Kurve nur wesentlich in der Gegend der Punkte 7, 8 und 9, wo jetzt der Anschlufs noch schlecht ist, beeinflussen wird.*)

§ 28. **Historische Notizen zur Entwicklung der Theorie der Lotabweichungen.** Die Beziehung (10) S. 537 zwischen Lotabweichung in Länge und Azimut, d. h. also die mehrerwähnte Kontrollgleichung, gab bereits *Laplace* 1799 in der *Mécanique céleste t.* II, *l.* III p. 117 und zwar nur speziell für die Endpunkte eines Meridianbogens an.

Gaufs benutzt sie 1830 (vergl. *Gaufs' Werke*, Bd. 4 S. 376) gelegentlich einer Anzeige der *Opérations géodésiques et astronom. pour la mesure d'un arc du parallèle moyen, exécutées en Piémont et en Savoie etc. en* 1821—23, um die Güte der Messungen zu kontrollieren. Bei dieser Operation waren die geographischen Längendifferenzen noch durch Pulversignale ermittelt worden; die Kontrollen waren also dabei von weit geringerem geodätischen Wert, wie jetzt seit Einführung des elektromagnetischen Telegraphen.

Ausführlich stellt *Bessel* 1837 in seiner mehrerwähnten Abhandlung *Über den Einflufs der Unregelmäfsigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen* (*Astronom. Nachr.* Bd. 14, Nr. 329—331, S. 269 oder *Abhandlungen* Bd. 3, S. 19 u. ff.) alles Wesentliche dar, sodafs seitdem über die Berechtigung, ja Notwendigkeit, mit der Hypothese des Rotationsellipsoids zu rechnen, ebenso wenig ein Zweifel bleiben konnte, wie über die Rechnungsvorschriften, um Lotabweichungen u. s. f. aus Messungen zu ermitteln.

Ebenso behandelt das Hauptwerk der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* 1858 das Problem, S. 609 u. ff.

Auch General *von Schubert* entwickelt 1860 in den *Astronom. Nachr.* Bd. 52, Nr. 1245—47, S. 321 die Formeln für den Einflufs einer Lotabweichung auf Azimut, Breite und Länge. Die Zenith-

---

*) Wir können zum Schlufs nicht unerwähnt lassen, dafs wir das Ausgleichungsverfahren auf die Zahlwerte des § 23 S. 572 nur des Beispiels halber angewandt haben. Strenggenommen ist es im vorliegenden Falle ganz und gar nicht am Platze. Die Beobachtungen ξ sind ja auch zu einer irgend sicheren Bestimmung viel zu lückenhaft.

distanz irdischer Objekte nimmt er 90^0, sodafs sie hier keinen Einflufs hat. Doch giebt er die Formel für Horizontalwinkel an.

Nach *Puissant, Traité de Géodésie,* t. II hat übrigens schon vor *Laplace* in der Mitte des 18. Jahrhunderts *Clairaut* einen Versuch gemacht, Abweichungen von der rotationsellipsoidischen Gestalt in betracht zu ziehen.

Neuere Darstellungen sind von *Villarceau, Sadebeck* (*Astronom. Nachr.* 1877 Bd. 90 S. 113 und Bd. 91 S. 145) und *Bremiker* (mitgeteilt von *v. Morozowicz* ebenda Bd. 90 S. 353). Letztere zwei Autoren beschäftigen sich insbesondere mit dem Einflufs auf Horizontalwinkel.

Villarceau bespricht zuerst das Theorem von *Laplace*, sein 1. Theorem, und behandelt sodann verschiedene Methoden zur Bestimmung der Erhebung N des Geoids über dem Ellipsoid; nämlich erstens diejenige durch Zenithdistanzen in Verbindung mit geometrischen Nivellements (vergl. S. 521) und zweitens diejenige durch Interpolation der Lotabweichungen, für welchen letzteren Fall er verschiedene Interpolationsformeln angiebt. Wenn er aber dabei, um zu einem Ausdruck für N zu gelangen, darauf fufst, dafs N eine [*analytische*] Funktion von ΔB und ΔL ist, dafs man also unzweifelhaft

$$\frac{\partial \xi}{\partial P} = -\frac{\partial \eta}{\partial M}$$

setzen könne, weil beide Differentialquotienten nur denselben Wert $\frac{\partial^2 N}{\partial P \partial M}$ vorstellen, so ist dieses (wie früher bemerkt) nicht ganz korrekt und nur eben für eine Interpolationsformel zulässig (vergl. S. 574).

Sein 2. Theorem giebt den Einflufs der Lotabweichung auf die Zenithdistanz, sein 3. die letztgenannte Differentialgleichung. Vergl. *Verhandlungen der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung* von 1875 (publ. 1875) S. 111 u. ff., woselbst eine Zusammenstellung seiner Arbeiten, das 1. Theorem ausgenommen, sich findet; oder *Journal de Mathém. pures et appl.* (2. Ser., t. 12. 1867); *Comptes rendus* 1868 Bd. 67 S. 1275 sowie 1871 Bd. 73 S. 808 (periodische Reihen nach *Bertrand*) und 1873 Bd. 76 S. 851 (Potenzreihen).

Bessel giebt (vergl. *Abhandlungen* Bd. 3 S. 39) in seiner obenerwähnten Abhandlung auch Formeln zur Bestimmung der speziellen Krümmungsverhältnisse in einem Punkte, womit die Bestimmung eines osculierenden Ellipsoids eng zusammenhängt. Ebenso behandelt *Laplace* 1799 in der *Méc. cél.* t. II l. III p. 124 die Aufgabe, aus Breiten- und Azimutmessungen ein an einer Stelle osculierendes Rotationsellipsoid zu ermitteln. (Vergl. auch *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 622 u. ff. und *Gaufs* im *Briefwechsel zwischen Gaufs und Schumacher* Bd. 2. S. 197.)

Da diese Fragen indes keinerlei praktischen Wert haben, so sind sie hier nicht behandelt.

---

13. Kapitel.

Bestimmung des Erdellipsoids aus Gradmessungen.

§ 1. **Vorbemerkungen.** Obwohl die allgemeinen Formeln zur Bestimmung des Rotationsellipsoids, welches sich vielen über die Erdoberfläche verteilten astronomisch-geodätischen Messungen am besten anschliefst, im wesentlichen schon § 20 S. 562 gegeben sind, ist es doch erforderlich, die Bestimmung dieses Erdellipsoids noch besonders zu behandeln, um die für gewöhnlich üblichen Methoden nicht unerwähnt zu lassen und die Bedeutung der Ergebnisse zu beleuchten.

Die Messungen denken wir uns wieder in der für Landesvermessungen angegebenen Weise nach S. 485 u. ff. reduziert, wobei irgend welche vorläufigen Elemente der Meridianellipse benutzt werden und alle Grundlinien auf das Meeresniveau zu beziehen sind. Wie schon früher hervorgehoben ist, werden die rein geodätischen Resultate von den Abweichungen des Lotes und der gewählten Elemente der Meridianellipse gegen das gesuchte Erdellipsoid weit weniger afficiert, als die astronomischen Resultate. Wir werden uns daher in 1. Annäherung immer begnügen können, die rein geodätischen Resultate bis auf einen von der Höhenlage des Geoids zum Erdellipsoid abhängenden Reduktionsfaktor der linearen Längen als richtig anzunehmen.

§ 2. **Zwei Breitengradmessungen.** Bereits S. 12 ist erwähnt, dafs bei den ältesten Messungen zur Ermittlung der Gröfse und Gestalt der Erde die Meridianbögen direkt als horizontale Strecken abgemessen wurden. Wir denken uns in dieser Weise direkt oder durch Triangulation indirekt zwei Meridianbögen in (absolut genommen) möglichst verschiedenen geographischen Breiten ermittelt und nehmen an, dafs ihre Amplituden in geographischer Breite etwa 1 bis 2^0 nicht wesentlich überschreiten.

Nach S. 52 kann man aber einen Meridianbogen von geringer Ausdehnung in Bezug auf seine Länge mit grofser Genauigkeit als einen Kreisbogen betrachten, dem der zur mittleren Breite gehörende Krümmungsradius im Meridian als Radius und die Differenz der geographischen Breiten der Endpunkte als Zentriwinkel entsprechen.

Sind nun für eine Gradmessung B_1 und B_2 die geographischen Breiten der Endpunkte und bezeichnet ϱ_m den Krümmungsradius im Meridian für die Breite $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$, so wird



$$\varrho_m = \varrho'' \frac{M}{\varDelta B} + \cdots, \tag{1}$$

worin M die Länge des Meridianbogens bezeichnet und $\varDelta B$ gleich dem absoluten Werte der Differenz $B_2 - B_1$ in Sekunden ist.

Aus 2 Werten ϱ_m und ϱ'_m für die mittleren Breiten B und B' bestimmt sich e^2 wie folgt. Es ist

$$\varrho_m = \frac{a_0(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}^{\,3}}, \qquad \varrho'_m = \frac{a_0(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}^{\,3}}. \tag{2}$$

Hieraus folgt durch Division und Potenzierung:

$$\frac{1-e^2\sin^2 B}{1-e^2\sin^2 B'} = \left(\frac{\varrho'_m}{\varrho_m}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Reduziert man dies auf e^2 bezw. $1-e^2$, so ist endlich:

$$\left.\begin{array}{c} e^2 = \dfrac{q-1}{q\sin^2 B' - \sin^2 B} \quad \text{und} \quad 1-e^2 = \left(\dfrac{b_0}{a_0}\right)^2 = \dfrac{\cos^2 B - q\cos^2 B'}{q\sin^2 B' - \sin^2 B} \\ q = \sqrt[3]{\left(\dfrac{\varrho'_m}{\varrho_m}\right)^2}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Kennt man erst e^2, so folgt a_0 aus den Gleichungen (2) für ϱ_m und ϱ'_m ohne Schwierigkeit.

Wenn man bedenkt, dafs ϱ_m und ϱ'_m verhältnismäfsig wenig von einander abweichen, so kann man unter Vernachlässigung der 2. Potenz von $(\varrho'_m - \varrho_m)$ Näherungsformeln für e^2 oder die Abplattung $\mathfrak{a}$ ableiten, welche Formeln indessen kaum einfacher sind als obige Formel, trotzdem aber früher im Gebrauch waren. Sei $\varrho'_m > \varrho_m$, so setzen wir successive:

$$\left.\begin{array}{c} q = \left(1 + \dfrac{\varrho'_m - \varrho_m}{\varrho_m}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\varrho'_m - \varrho_m}{\varrho_m} + \cdots \\ e^2 = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\varrho'_m - \varrho_m}{\sqrt[3]{\varrho'^2_m \varrho_m}\sin^2 B' - \varrho_m \sin^2 B} + \cdots \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Im 2. Glied des Nenners darf man für ϱ_m auch $\sqrt[3]{\varrho'^2_m \varrho_m}$ setzen, da dies im Resultat nur einen Fehler der Ordnung $\left(\dfrac{\varrho'_m - \varrho_m}{\varrho_m}\right)^2$ giebt, der um so geringfügiger ist, als noch der Faktor $\sin^2 B$ hinzutritt (insbesondere weil B absolut genommen die kleinere geographische Breite ist).

Multipliziert man aufserdem Zähler und Nenner mit $3600 : \varrho''$, sodafs ϱ'_m und ϱ_m in die Gradlängen G' und G übergehen, und

beachtet die Beziehung von e^2 zu $\mathfrak{a}$, sowie die Relation $\sin^2 B' - \sin^2 B = \sin(B' + B) \sin(B' - B)$, dann wird erhalten:

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{3} \frac{(G' - G) : \sqrt[3]{G'^2 G}}{\sin(B' + B) \sin(B' - B)} + \cdots. \tag{5}$$

Setzt man entsprechend der peruanischen und der revidierten älteren französischen Gradmessung*)

$$G' = 57012^t \text{ für } B' = 45^0$$
$$G = 56734 \quad „ \quad B = -1^0\,31',$$

so folgt

$$\log \frac{G'}{G} = 0{,}0021229 \qquad \log q = 0{,}0014153$$
$$q = 1{,}0032642 \qquad q - 1 = 0{,}0032642$$
$$q \sin^2 B' = 0{,}5016321 \qquad \sin^2 B = 0{,}0007005.$$

Die Formel (3) für e^2 giebt somit $e^2 = 0{,}0065163$; hieraus folgt streng:

$$\mathfrak{a} = 0{,}0032635 = 1 : 306{,}4.$$

Dagegen giebt die Formel (5) für $\mathfrak{a}$ näherungsweise

$$\mathfrak{a} = 1 : 306{,}7.$$

Nach *Todhunter, Figure of the Earth* Bd. 1 S. 70 löste *Maupertuis* die Aufgabe, die Axen des Erdellipsoids aus 2 Breitengradmessungen zu finden, in einer Abhandlung betitelt *Sur la Figure de la Terre* in den Memoiren der französischen Akademie der Wissenschaften von 1733 (publ. 1735). *Maupertuis* setzt $\mathfrak{a} = \frac{1}{3}(G' - G) : (G' \sin^2 B' - G \sin^2 B)$, während *E. Schmidt* 1829 in seinem *Lehrbuch der mathematischen Geographie* Bd. 1 S. 178 Formel (5) entwickelt, mit dem Unterschied, dafs die $\sqrt[3]{G'^2 G}$ durch G ersetzt ist. Nach *Gehlers physikalischem Wörterbuch* Art. Erde S. 861 gaben *Euler* und *Roumovsky* die oben *Maupertuis* zugeschriebene Formel.

Die Formel (5) zeigt, dafs bei denselben Werten von B und B' die Schärfe der Bestimmung von $\mathfrak{a}$ besonders von den Fehlern in $G' - G$ abhängt.

Vereinfachen und modificieren wir diese Formel für den Zweck weiterer Untersuchung nach dieser Hinsicht in

*) Nach *R. Wolff, Handbuch der Math., Physik, Geodäsie und Astronomie* Bd. 2 S. 130 und *E. Mayer*, *Gestalt und Gröfse der Erde* S. 37. Nimmt man mit *Zach* (vergl. *Mayer* a. a. O. S. 36) $G = 56732$, so folgt entsprechend der üblichen von uns S. 13 reproduzierten Angabe $\mathfrak{a} = 1 : 304$.

$$\mathfrak{a} = \left(\frac{G'}{G} - 1\right) : 3 \sin (B' + B) \sin (B' - B) + \cdots, \tag{6}$$

so sehen wir, dafs der Zähler rechter Hand für $B' = 90^0$ und $B = 0^0$ bei $\mathfrak{a} = \frac{1}{300}$ den Wert $\frac{1}{100}$, seinen Maximalwert, annimmt. In der Regel ist aber dieser Zähler weit kleiner und nun ist leicht zu erkennen, wie sehr die Abweichungen des Geoids vom Erdellipsoid die Berechnung von $\mathfrak{a}$ beeinflussen.

Für obiges Beispiel ist $\frac{G'}{G} - 1 = \frac{1}{200}$. Wenn nun für G das Geoid 1000^m über dem Ellipsoid liegt, so ist G um $\frac{1}{6370}$ seines Betrages zu verkleinern. Der Zähler in (6) wächst also um $\frac{1}{6370}$ oder $\frac{1}{32}$ seines Betrages, d. h. es wird $\mathfrak{a} = \frac{1}{297}$.

Noch beträchtlicher ist der Einflufs der Fehler in den geographischen Breiten. Ist die Amplitude für G um nur $5''$ durch Lotabweichungen oder Beobachtungsfehler irritiert, so giebt das $\frac{5}{3600}$ oder $\frac{1}{720}$ Fehler in G und also $\frac{1}{36}$ Fehler in $\mathfrak{a}$ in Bruchteilen seines Betrags. Hierdurch geht $\mathfrak{a}$ in rund $\frac{1}{420}$ oder $\frac{1}{210}$ (je nach dem Vorzeichen des Fehlers) über.

Dieses Beispiel beweist zur genüge, dafs aus 2 wenig ausgedehnten Breitengradmessungen selbst ein nur leidlich brauchbarer Wert von $\mathfrak{a}$ nicht zu erzielen ist, da Beeinflussungen der Lotrichtung schon durch Lokalanziehung recht wohl im Betrag mehrerer Sekunden vorkommen können.

§ 3. **Reduktion auf den Abstand der Parallelen.** Die Endpunkte eines zur Bestimmung von ϱ_m durch Triangulation gemessenen Bogens liegen im allgemeinen nicht genau auf demselben Meridian. Um die Krümmung im Meridian kennen zu lernen, mufs daher vorerst aus der Entfernung dieser Punkte der Meridianbogen abgeleitet werden, welcher ihren geographischen Breiten entspricht und der Abstand der Parallelen genannt wird.

Die Reduktionsformel fällt verschieden aus, je nachdem man aufser der geodätischen Linie zwischen den Punkten P_1 und P_2 als gegeben voraussetzt das Azimut in P_1 oder in P_2, oder den geographischen Längenunterschied. Mit Rücksicht darauf aber, dafs die Dimensionen des Rotationsellipsoids als zu bestimmende Gröfsen bei der Reduktion möglichst wenig Einflufs erhalten müssen, ist es vorteilhaft, mit *Bessel* anzunehmen, dafs *beide Azimute* gegeben und zwar direkt aus astronomischen Beobachtungen abgeleitet sind.

Die Formel, welche hierbei in Anwendung zu bringen ist, ist (16) auf S. 308, wobei s die gegebene geodätische Linie, dagegen M den Abstand der Parallelen bezeichnet. Der Einflufs von e^2 beträgt nun in Bruchteilen von M in der That nur

$$\frac{1}{12}\, e^2 \frac{s^2}{a_0^{\,2}} \sin^2\alpha \cos 2B\,;$$

er ist also für alle praktischen Fälle beinahe verschwindend und wir können daher im Folgenden wenigstens den Einflufs eines Fehlers in e^2 auf die Reduktion vernachlässigen. Ebenso gestaltet sich das Verhalten der Formel in Bezug auf einen kleinen Fehler in a_0 günstig.

Weit ungünstiger ist dagegen eine Formel, welche nur eines der Azimute, etwa $\alpha_{1.2}$, als gegeben ansieht.

Die ersten Glieder einer solchen Formel lauten nämlich:

$$M = -\, s\left(\cos\alpha_{1.2} + \frac{1}{2}\,\frac{s}{a_0}\,\tan B_1 \sin^2\alpha_{1.2}\left(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2 B_1\right) + \cdots\right) \quad (1)$$

und man sieht, dafs der Einflufs von a_0 und e^2 hier besonders deshalb ein gröfserer ist, weil s nur in der 1. Potenz als Faktor von e^2 auftritt.

Aufserdem ist offenbar die (vervollständigte) Formel (1) zur numerischen Rechnung mit Rücksicht auf die Anzahl der Reduktionsglieder auch weit unbequemer als die oben genannte Formel (16) S. 308.

Was die Genauigkeit dieser letzteren Formel bezüglich der in der Parenthese vernachlässigten Glieder (von der 6. Ordnung in Bezug auf e und $\frac{s}{a_0}$) anbetrifft, so läfst sich ohne weiteres soviel erkennen, dafs erst bei $s : a_0 = 0{,}1$ höchstens die 8. Decimalstelle von $\log M$ eine geringfügige Unsicherheit erhalten wird, eine Genauigkeit, die immer ausreicht.

Die Reduktion auf den Meridianbogen kann auch dadurch geschehen, dafs man ein Perpendikel von dem einen Endpunkt auf den Meridian des anderen fällt und die geographische Breite des Fufspunkts, sowie die Länge des Meridianbogens bis zu demselben ermittelt. Diesen Weg schlug *Delambre* in den mehrfach erwähnten *Méthodes analytiques pour la Détermination d'un Arc du Méridien* ein (1799).

Verschiedene andere Formeln giebt das Werk *Ordnance Survey, Principal Triangulation* S. 248 u. ff.

§ 4. **Mehrere Breitengradmessungen.** Die neueren Breitengradmessungen bestimmen die geographischen Breiten nicht nur für die äufsersten Punkte meridionaler Dreiecksketten, sondern auch für Punkte mittlerer Lage. Es zerfällt somit schon jede einzelne Operation in mehrere Breitengradmessungen. Da nun die Gesamtzahl aller Messungen 2 weit übersteigt, so erfordert die Berechnung der Werte

für die Elemente der Meridianellipse aus allen diesen Messungen eine Ausgleichung.

Bezeichnen wir die astronomischen Punkte einer einzelnen Dreieckskette von Süden nach Norden geordnet, mit $P_0\, P_1 \ldots P_m$ und denken uns mit *Bessel*, indem auf allen diesen Stationen auch das Azimut als gemessen vorausgesetzt wird, für je 2 benachbarte Stationen den Abstand M der Parallelen nach der im vorigen Paragraphen erwähnten Formel (16) von S. 308 berechnet, so kann man durch successive Addition die Meridianbögen zwischen den Parallelen von P_0 und $P_1,\, P_2,\, \ldots P_m$ bilden. Wir bezeichnen dieselben mit $M_{0.1}$, $M_{0.2},\, \ldots\, M_{0.m}$.

Aus den M lassen sich aber nach den Formeln des § 10 S. 53 u. ff. die Differenzen der geographischen Breiten berechnen, wenn die Elemente der Meridianellipse als bekannt vorausgesetzt werden. Es ist z. B. die Formel zur Berechnung der Breitendifferenz von P_0 und P_i aus $M_{0.i}$:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{in Sek.}}{B_i - B_0} = \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\sigma_{0.i}} + 3\varrho'' n \cos 2\sigma_{0.i} \sin \Delta\sigma_{0.i} \\ \qquad\qquad + \frac{21}{8}\varrho'' n^2 \cos 4\sigma_{0.i} \sin 2\Delta\sigma_{0.i} + \cdots, \\ \text{worin} \\ \qquad 2\sigma_{0.i} = 2\sigma_0 + \Delta\sigma_{0.i} \\ \qquad \underset{\text{in Sek.}}{2\sigma_0} = \underset{\text{in Sek.}}{2B_0} - 3\varrho'' n \sin 2B_0 + \cdots \\ \text{sowie} \\ \qquad \underset{\text{in Sek.}}{\Delta\sigma_{0.i}} = 3600\,\frac{M_{0.i}}{G} \\ \text{ist und } G \text{ mit } a_0 \text{ durch die Gleichung zusammenhängt:} \\ \qquad G = \frac{a_0}{\varrho^0}\,\frac{1 + \frac{1}{4}n^2 + \cdots}{1 + n}. \end{array}\right\} (1)$$

Glieder mit n^3, welche selbst für $M_{0.i} = 0{,}1\,a_0$ kaum 0,001″ betragen, sind hierbei nicht berücksichtigt, da Beobachtungsfehler und Lotabweichungen in den Gleichungen weit gröſsere Widersprüche erzeugen, nämlich erfahrungsmäſsig im Mittel 2 bis 3 Sekunden.

Ist nun G'' ein Näherungswert von G (der mittleren Länge eines Grades) und n'' ein solcher für n (der anstatt e^2 eingeführten und nach ihrer Bedeutung S. 37 charakterisierten Hilfsgröſse), so wird man definitiv setzen können:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G''}(1 + x) \quad \text{und} \quad n = n''(1 + y). \tag{2}$$

Hierin bedeuten die x und y nur noch kleine Brüche.

Die Substitution dieser Werte in (1) führt zu nachstehender Formel:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{B_i - B_0} &= \underset{\text{in Sek.}}{(B_i'' - B_0'')} + \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}''}(1 + 3n''\cos 2\sigma_i'')\,x \\ &+ \begin{pmatrix} 3\varrho''n''\cos 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' + \frac{21}{4}\varrho''n''^2\cos 4\sigma_{0.i}''\sin 2\varDelta\sigma_{0.i}'' \\ + 9\varrho''n''^2\sin 2B_0\sin 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' \end{pmatrix} y + \cdots, \end{aligned}\right\}(3)$$

wobei das 1. Glied rechter Hand die mit den Näherungswerten berechnete Breitendifferenz bezeichnet. Es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{B_i'' - B_0''} &= \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}''} + 3\varrho''n''\cos 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' \\ &\quad + \frac{21}{8}\varrho''n''^2\cos 4\sigma_{0.i}''\sin 2\varDelta\sigma_{0.i}'' + \cdots \\ 2\sigma_{0.i}'' &= 2\sigma_0'' + \varDelta\sigma_{0.i}'' \qquad 2\sigma_i'' = 2\sigma_0'' + 2\varDelta\sigma_{0.i}'' \\ \underset{\text{in Sek.}}{2\sigma_0''} &= \underset{\text{in Sek.}}{2B_0} - 3\varrho''n''\sin 2B_0 + \cdots \\ \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}''} &= 3600\,\frac{M_{0.i}}{G''}. \end{aligned}\right\}(4)$$

In Formel (3) sind die bei der Substitution der Ausdrücke (2) entstehenden in xy und y^2 multiplizierten Glieder weggelassen. Dieselben betragen für $x = 0{,}0001$ und $y = \frac{1}{30}$ höchstens einige Tausendstelsekunden. (Übrigens *mufs* man bei der späteren Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate die besprochenen Glieder weglassen; doch ist dies eben darum ganz unbedenklich, weil es ziemlich sicher ist, dafs z. B. die von *Bessel* für a_0 und n gefundenen Werte keiner Verbesserungen bedürfen, welche die angegebenen Beträge von x und y erheblich übersteigen).

Für B_0 und B_i hat man nun selbstverständlich in den Formeln (3) und (4) die Beobachtungswerte einzuführen, ebenso für $M_{0.i}$. Zeichnen wir die Beobachtungswerte aber durch einen oberen Index aus und nennen die von der Ausgleichung für B_0' und B_i' geforderten Verbesserungen λ_0 und λ_i, für $M_{0.i}'$ aber $\delta_{0.i}$, so folgt als *Fehlergleichung*, welche der Messung des Bogens $M_{0.i}$ entspricht:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\lambda_i - \lambda_0} - 3600\,\frac{\delta_{0.i}}{G''}(1 + 3n''\cos 2\sigma_i'') + \cdots &= \underset{\text{in Sek.}}{(B_i'' - B_0'')} - \underset{\text{in Sek.}}{(B_i' - B_0')} \\ + \underset{\text{in Sek.}}{\varDelta\sigma_{0.i}''}(1 + 3n''\cos 2\sigma_i'')\,x + \begin{pmatrix} 3\varrho''n''\cos 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' + \frac{21}{4}\varrho''n''^2\cos 4\sigma_{0.i}''\sin 2\varDelta\sigma_{0.i}'' \\ + 9\varrho''n''^2\sin 2B_0\sin 2\sigma_{0.i}''\sin\varDelta\sigma_{0.i}'' \end{pmatrix} y. \end{aligned}\right\}(5)$$

Die Beziehungen (4) bleiben bestehen, nur wird $2\sigma_0''$ mit B_0' anstatt B_0 berechnet. Das hieraus sich ergebende Fehlerglied ist, ebenso wie mehrere andere auch ganz unerhebliche, weggelassen.

Bei allen bisher ausgeführten Ausgleichungen hat man *nur die λ, nicht aber* die δ berücksichtigt. Die Berechtigung hierzu würde sehr zweifelhaft sein, wenn die λ nur Beobachtungsfehlern entsprächen; allein nach S. 535 (1) ist die Verbesserung der beobachteten Breite B_i' auf die ellipsoidische B_i gleich Beobachtungsfehler $+ \xi_i$, der meridionalen Komponente der Lotabweichung, und insofern diese wesentlich von lokalen Lotablenkungen abhängt, kann man sich bei den λ recht wohl auf mittlere Beträge von mehreren Sekunden gefafst machen.

Wesentlich kleiner ist nun in der That der Einflufs der δ. Erst ein δ im Betrag von 30^m würde in (5) linker Hand rund $1''$ erzeugen. Fehler in M können aber entstehen durch Beobachtungsfehler der Winkel und der Grundlinien, sowie durch Reduktionsfehler bei der Berechnung wegen mangelnder Kenntnis des Geoids und wegen mangelhafter Kenntnis von a_0 und e^2. Der Einflufs aller dieser Fehler ist schon erörtert, bis auf denjenigen für die Lotabweichung bei Reduktion der geodätischen Linien auf den Abstand der Parallelen. Nach Formel (16) S. 308 kommt besonders die Einwirkung der Lotabweichung auf α in betracht und man erhält mit Rücksicht auf deren Betrag (vergl. S. 535) für den Meridianbogen M_{ik} zwischen 2 benachbarten Punkten den Einflufs im wesentlichen gleich

$$- M_{ik} \tan \alpha \frac{\eta_0 \tan B_0 + \eta_i \tan B_i}{2\varrho''}. \tag{6}$$

Für meridionale Dreiecksketten wird dieses stets geringfügig.

Der Einflufs aller Fehlerursachen überhaupt bleibt unter $1''$, solange man nicht über 1000^{km} lange Meridianbögen in Rechnung zieht. Am meisten zu fürchten scheint uns stets die Vernachlässigung der Reduktion wegen der Höhe N des Geoids über dem Ellipsoid. Sie giebt z. B. unter Annahme von $N = 200^m$ bei $M = 1000^{km}$ bereits $1''$.

Trotzdem kann man im Mittel jedenfalls annehmen, dafs die Lotablenkungen durch die λ einen weit gröfseren Einflufs äufsern, als alle in den δ vereinigten Beobachtungs- und Reduktionsfehler.

Vernachlässigt man nun in den Fehlergleichungen (5) die Glieder mit den δ, so hat das die Bedeutung, dafs man die M als genau richtig gemessene elliptische Meridianbögen ansieht, alle Fehler aber auf die Breiten wirft. Den λ liegt von da an also eine Ursache mehr zu grunde, welche offenbar in der einzelnen Gradmessungsoperation einen *systematischen* Charakter hat. Bei dem immerhin noch geringen numerischen Betrage ist dieses aber um so unbedenklicher, als die λ, insofern sie von Lotablenkungen herrühren, ja ohnedies auch systematisch verlaufende Bestandteile besitzen, die erfahrungsmäfsig jene Beträge weit überschreiten.

§ 5. **Fortsetzung: Ausgleichung.** Die Fehlergleichung (5) nimmt bei Vernachlässigung von δ die nachfolgende Form an:

$$\lambda_i - \lambda_0 = \{(B_i'' - B_0'') - (B_i' - B_0')\} + a_i x + b_i y, \tag{1}$$

wofür die Bedeutung der Koefficienten a_i und b_i durch Vergleichung mit (5) sofort erhellt.

Die geschlungene Parenthese hat die Bedeutung: *Berechnete* Breitendifferenz — *beobachtete* Breitendifferenz, kurz *Rechn.* — *Beob.*

In derselben Weise nun, wie der Bogen $M_{0.i}$ zur Herstellung der Fehlergleichung (1) dient, sind die übrigen Bögen zu verwerten. Zwischen $m + 1$ Parallelen giebt es m von einander unabhängige Bögen. Man wird dieselben am besten, wie bisher vorausgesetzt, systematisch von *einem* Anfangspunkt aus rechnen oder auch auf einander folgend nehmen. Das Resultat der Ausgleichung ist natürlich hiervon ganz unabhängig, ebenso von der Wahl des Ausgangspunktes. (Wenn etwas zweifelhaft ist, so ist dies nur die oben in § 4 gegebene Motivierung der Zulässigkeit der Abkürzung der Fehlergleichungen durch Vernachlässigung der δ.)

Wir behalten hier als Ausgangspunkt für alle Bögen M den südlichsten Punkt P_0 bei und erhalten dann für die einzelne Breitengradmessungsoperation mit m astronomischen Punkten ein Fehlergleichungssystem der Form

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_0 = - l_1 + a_1 x + b_1 y \\ \lambda_2 - \lambda_0 = - l_2 + a_2 x + b_2 y \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_m - \lambda_0 = - l_m + a_m x + b_m y. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Die l dienen als Abkürzung für die Differenzen *Beob.* — *Rechn.* Jede Gradmessung giebt ein solches System mit denselben Unbekannten x und y, während die λ selbstverständlich immer andere Werte haben, weil nach unserer Voraussetzung Gradmessungsoperationen, die im Zusammenhange stehen, hier als eine einzige aufgefafst werden.

Für die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist die Quadratsumme $[\lambda\lambda]$ für alle verschiedenen Systeme (2) zusammengenommen zu einem Minimum zu machen, ohne dafs dabei verschiedene Gewichte einzuführen sind, was mit Rücksicht auf die wesentlichste Ursache der λ, nämlich die Lotabweichung, unmittelbar einleuchtet.

Die weitere Rechnung kann nach S. 143 u. unserer *Ausgleichungsrechnung* geschehen. Darnach wird man am bequemsten an Stelle von (2) das nachfolgende modificierte Fehlergleichungssystem setzen:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0 = -l'_0 + u + a'_0 x + b'_0 y \\ \lambda_1 = -l'_1 + u + a'_1 x + b'_1 y \\ \lambda_2 = -l'_2 + u + a'_2 x + b'_2 y \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_m = -l'_m + u + a'_m x + b'_m y,\end{array}\right\} \qquad (3)$$

worin, wenn die eckige Klammer ein Summenzeichen bedeutet,

$$l'_0 = -\frac{[l]}{m+1} \qquad a'_0 = -\frac{[a]}{m+1} \qquad b'_0 = -\frac{[b]}{m+1} \qquad (4)$$

gesetzt ist, und für irgend einen Index i die Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l}l'_i = l_i + l'_0 \\ a'_i = a_i + a'_0 \\ b'_i = b_i + b'_0.\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Die sämtlichen Systeme (3) werden nun in gewöhnlicher Weise zur Bildung von Normalgleichungen benutzt. Jedes System giebt eine Gleichung für die ihm eigentümliche Konstante u, die sich jedoch auf null reduziert, da die betreffende Normalgleichung lautet

$$(m+1)\,u + [a']\,x + [b']\,y = [l']$$

und $[a']$, $[b']$, $[l']$ für jedes System einzeln null sind, wie (4) und (5) zeigen.

Aus den Systemen (3) folgen daher die Normalgleichungen für x und y nach dem Schema:

$$\left.\begin{array}{l}[a'a']\,x + [a'b']\,y = [a'l'] \\ [a'b']\,x + [b'b']\,y = [b'l'],\end{array}\right\} \qquad (6)$$

worin die Summierung über alle Systeme (3) auszudehnen ist. Zu x und y ergeben sich G und n mittelst der Relationen (2) S. 592 und hierauf a_0 aus der letzten Gleichung (1) S. 592, sowie e^2 oder $\mathfrak{a}$ aus n mittelst der S. 37 angegebenen Beziehungen.

Gewichtsberechnungen für x und y lassen sich in gewöhnlicher Weise auf das System (6) stützen, mittelst dessen sich auch die Gewichte der aus x und y abgeleiteten Gröfsen nach gewöhnlichen Regeln der Methode der kleinsten Quadrate ergeben (*Ausgleichungsrechnung* S. 81 u. 137).

Mit Hilfe dieser Gewichte lassen sich ferner mittlere Fehler ableiten, nachdem der mittlere Fehler einer Gleichung der reduzierten Systeme (3) berechnet ist, wobei die Formel:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{[m]-2}} \qquad (7)$$

zur Anwendung gelangt, in welcher $[m]$ die Summe aller m, d. h. die Gesamtanzahl aller selbständigen Bögen bezeichnet, aus denen die Unbekannten x und y zu bestimmen sind. Allein da man es in den λ nicht mit den Wirkungen zufälliger Fehlerursachen ausschliefslich zu thun hat, so ist das Ergebnis von (7), wie auch bereits das der Gewichtsberechnung, jedenfalls von zweifelhaftem Wert und man mufs sich darauf gefafst machen, dafs die Unsicherheit der Ergebnisse für x und y immer weit gröfser sein wird, als die Rechnung anzeigt.

Es mufs zum Schlusse auch hervorgehoben werden, dafs man die durch die Ausgleichung geforderten λ nicht mit den Lotabweichungen ξ identificieren darf. Man darf sich in dieser Beziehung nicht durch die Ähnlichkeit der vorstehenden Aufgabe mit der des § 20 S. 562 täuschen lassen. Allerdings gehen für Meridianbögen die 1. Gleichungen (1) daselbst, indem darin die $a_i = 1$ und $b_i =$ null werden, in die Gestalt der Gleichungen (2) über, sodafs λ_i mit ξ_i identisch scheint. Aber es ist dort nur *ein* System von Gleichungen vorausgesetzt, entsprechend *einer* zusammenhängenden Operation. Jetzt handelt es sich indes um die Kombination isolierter Operationen. Die Ausgleichung setzt für jede die Summe

$$[\lambda] = 0 \tag{8}$$

und aufserdem für alle Systeme zusammen noch $[a'\lambda] = 0 = [b'\lambda]$, und man sieht sogleich, dafs die Lotabweichungen die Gleichung (8) für jede Operation einzeln ganz und gar nicht erfüllen werden.

Die λ sind also nicht die meridionalen Lotabweichungskomponenten ξ, ganz abgesehen von den oben erwähnten Einflüssen, die nebst den Lotabweichungen sich in den λ äufsern. (Vergl. S. 607.)

Dem Ausgleichungsverfahren kann man einen Vorwurf hieraus nicht machen, denn *kein* Rechnungsverfahren kann den mangelnden Zusammenhang der Operationen ersetzen (und diesen auch vorausgesetzt, ist es offenbar noch ein weiter Schritt von dem nunmehr bestimmbaren Referenzellipsoid bis zu einem dem ganzen Geoid entsprechenden Erdellipsoid).

Den ersten Versuch, aus mehreren Gradmessungen günstigste Werte der Erddimensionen abzuleiten, scheint *Boscovich* gemacht zu haben. *Boscovich* und *Maire*, zwei Jesuiten, mafsen (nach *Todhunter, Figure of the Earth* Bd. 1 S. 332) seit 1750 im Kirchenstaate und beschrieben 1755 ihre Arbeiten in dem Werke: *De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem;* die hiervon 1770 erschienene französische Übersetzung: *Voyage astronomique et géographique dans l'Etat de l'Eglise* giebt in einem Anhang auch einen Bericht über die Ausgleichungsmethode von *Boscovich*, wendet sie aber auf 9 Meridianbögen an, während *Boscovich* nur 5 behandelt.

Derselbe setzt die Summen der positiven und negativen λ einander gleich und macht beide möglichst klein. Die geometrische Entwicklung

ersetzt *Laplace* in einer Abhandlung in den Memoiren der französischen Akademie von 1789 (publ. 1793) durch eine interessante analytische. Von den drei Ausgleichungsverfahren, die er in der *Mécanique céleste* auf das Problem anwandte, ist diese Methode die dritte und zwar diejenige, deren Resultaten *Laplace* damals das meiste Zutrauen schenkt (tome II, livre III p. 135 etc.). In der That sind auch die beiden anderen Methoden weniger frei von Willkürlichkeiten.

Die erste derselben (ebenda S. 126 u. ff.) wandte *Laplace* bereits in einer Abhandlung in den genannten Memoiren von 1783 (publ. 1786) auf Breitengradmessungen [und Pendelbeobachtungen] an, später nochmals, aber vereinfacht, in den Memoiren von 1789. Es wird bei dieser Methode der gröſste Fehler möglichst klein gemacht.

Aus 7 Breitengradmessungen findet *Laplace* in der *Méc. cél.* p. 139 nach der 2. und 3. Methode als Abplattung $\frac{1}{277}$ und $\frac{1}{312}$. Dieser groſse Unterschied der Resultate erklärt sich durch die groſsen Abweichungen der einzelnen Messungen, infolge deren aus paarweisen Kombinationen derselben sehr verschiedene Dimensionen resultieren und also auch aus der etwas verschiedenen Kombination von 7 Messungen noch erheblich verschiedene Werte entstehen müssen.

In *Gehlers physikalischem Wörterbuch,* Artikel *Erde* S. 872 findet man die Abplattung nach 18 verschiedenen paarweisen Kombinationen aufgeführt, mit $\frac{1}{307,7}$ Abplattung im Mittel (1827).

Die Methode der kleinsten Quadrate wandte wohl zuerst 1819 *Walbeck* an und zwar auf 6 Gradmessungen, wobei er indes allein die Polhöhen der äuſsersten Punkte berücksichtigte und auch nur die 1. Potenz der Abplattung in den Formeln beibehielt. Auf Veranlassung von *Gauſs* zog *Ed. Schmidt* auch die mittleren Polhöhen in mehreren von 1827 bis 1830 unternommenen Rechnungen bei.

Schmidt hat seine Methode 1829 im 1. Bd. seiner *Mathematischen Geographie* S. 190 u. ff. auseinandergesetzt. Wesentlich dieselbe Methode hat später *Bessel* angewandt, *Astronom. Nachr.* vom Jahre 1837 Bd. 14 No. 333 S. 333 (*Abhandlungen* Bd. 3 S. 41 u. ff.). Auch unsere Darstellung gleicht wesentlich dem von *Schmidt* gegebenen Vorbild. Die Unterschiede bestehen nur in der Ableitung der Fehlergleichungen (2) aus den Meridianbögen, worin wir auch *Bessel* nicht gefolgt sind, der von Formel (4) S. 49 ausgeht. *Schmidt* nahm die Formel einfacher und benutzte s anstatt n.

Bessel übte eine sehr scharfe Kritik des Beobachtungsmaterials und deckte namentlich einen Fehler in der französischen Gradmessung auf. Wie sich neuerdings herausgestellt hat, sind indes mehrere der von ihm benutzten Messungen in den Meridianbögen (wo man es am wenigsten hätte erwarten sollen) mit erheblichen Fehlern behaftet. Der dänische Bogen Lauenburg-Lysabbel ist 83ᵗ zu klein, wie *Andraes* Revision gezeigt hat (*Dänische Gradmessung* Bd. 2 S. 489, auch *Vierteljahrsschr. der Astronom. Ges.* Bd. 12 S. 187) und der hannoverische Bogen, welcher auf der Braacker Basis beruht, wird um circa 4ᵗ zu verlängern sein (nämlich $\frac{1}{30000}$ der Länge, nicht $\frac{1}{10000}$ wie infolge Druckfehlers am letztgenannten Orte angegeben ist.) Nach *Ph. Fischer*, *Gestalt der Erde,* sind in der 3. Ausgabe von *Puissant, Traité de Géodésie,* an einigen Bögen der französischen Gradmessung Änderungen bis zu 33,6ᵗ angebracht (im Vergleiche zu *Bessels*

letzter Annahme von 1841?) und am südlichen Teile der ostindischen Gradmessung sind auch erhebliche Änderungen zu erwarten (*Vierteljahrsschr. der Astronom. Ges.* Bd. 8 S. 18).

§ 6. **Längengradmessungen.** Für die astronomischen Stationen einer ostwestlichen Dreieckskette denken wir uns aufser den geographischen Längendifferenzen noch geographische Breite und Azimut ermittelt, sodafs für zwei benachbarte Stationen P_i und P_k zur Aufstellung einer Gleichung für die Elemente der Meridianellipse unmittelbar Formel (13) S. 311 dienen kann. Zufolge Formel (3) S. 313 kann man aber in jener Formel das Produkt aus $s \sin \alpha$ in die geschlungene Parenthese bezeichnen mit P_{ik}, dem Parallelbogen in der geographischen Breite $B = \frac{1}{2}(B_i + B_k)$, welcher zu dem geographischen Längenunterschied L_{ik} gehört. Sie nimmt alsdann die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{L_{ik}} &= \frac{\varrho''}{a_0} P_{ik} W \sec B \\ W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

P_{ik} ist mit Näherungswerten von a_0 und e^2 zu berechnen und (ebenso wie M nach der Reduktionsformel (16) S. 308) in nur sehr geringem Mafse von Fehlern dieser Werte abhängig. Im Folgenden sehen wir daher wie früher bei den M von diesen geringen Fehlern ab.

Der Einflufs der Lotabweichungen auf P_{ik} ist im wesentlichen durch den Ausdruck

$$P_{ik} \cot \alpha \, \frac{\eta_i \tan B_i + \eta_k \tan B_k}{2 \varrho''} \tag{2}$$

gegeben (vergl. (6) S. 594). Für ostwestliche Ketten ist das stets geringfügig.

Was die Genauigkeit der Formel (13) S. 311 anbetrifft, reduziert auf P_{ik}, so mag bemerkt werden, dafs die in der geschlungenen Parenthese vernachlässigten Glieder 6. Ordnung erst für $s \sec B = 0{,}1\, a_0$ die 8. Decimale des Logarithmus ein wenig beeinflussen können.

Als Unbekannte treten nun in Gleichung (1), an welche das Weitere anzuknüpfen ist, $\frac{1}{a_0}$ und e^2 auf; um indessen dieselben Unbekannten wie bei Breitengradmessungen zu haben, was aus leicht ersichtlichen Gründen wünschenswert ist, führen wir wie dort G und n als solche ein. Es ist aber

$$\frac{1}{G} = \frac{\varrho^0}{a_0} \frac{1 + n}{1 + \frac{1}{4} n^2 + \cdots} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{4n}{(1+n)^2}. \tag{3}$$

Hiermit ergiebt sich durch eine einfache Rechnung:

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{a_0} = \frac{1+\frac{1}{4}n^2+\cdots}{\varrho^0 G(1+n)^2}\sqrt{1+n^2+2n\cos 2B}$$

$$= \frac{1}{\varrho^0 G}\left\{\begin{array}{c} 1-n(2-\cos 2B) \\ +\,n^2\left(\frac{15}{4}-2\cos 2B-\frac{1}{2}\cos^2 2B\right)+Gl_6\end{array}\right\}.$$

Wenn wir dieses in (1) einsetzen, haben wir zu beachten, dafs $\varrho'' = 3600\,\varrho^0$ ist. Es wird dann erhalten:

$$\left.\begin{array}{c} \underset{\text{in Sek.}}{L_{ik}} = p_{ik}\left\{\begin{array}{c} 1-n(2-\cos 2B) \\ +\,n^2\left(\frac{15}{4}-2\cos 2B-\frac{1}{2}\cos^2 2B\right)+Gl_6\end{array}\right\} \\ p_{ik} = 3600\,\frac{P_{ik}}{G}\sec B. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Wir wenden nun wieder die Näherungswerte G'' und n'' an, indem wir setzen:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G''}(1+x) \qquad n = n''(1+y). \quad (5)$$

Es ergiebt sich hiermit aus (4) die Gleichung:

$$L_{ik} = L''_{ik} + a_{ik}x + b_{ik}y, \quad (6)$$

wobei die rechter Hand auftretenden abkürzenden Symbole nach den folgenden Formeln zu berechnen sind:

$$\left.\begin{array}{c} L''_{ik} = p''_{ik}\left\{\begin{array}{c} 1-n''(2-\cos 2B) \\ +\,n''^2\left(\frac{15}{4}-2\cos 2B-\frac{1}{2}\cos^2 2B\right)+Gl_6\end{array}\right\} \\ p''_{ik} = 3600\,\frac{P_{ik}}{G''}\sec B \qquad a_{ik} = L''_{ik} \\ b_{ik} = p''_{ik}\left\{\begin{array}{c} -\,n''(2-\cos 2B) \\ +\,2n''^2\left(\frac{15}{4}-2\cos 2B-\frac{1}{2}\cos^2 2B\right)+\cdots\end{array}\right\}. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Wir führen endlich noch die astronomisch beobachteten Werte L'_{ik} und $B' = \frac{1}{2}(B'_i + B'_k)$ ein. Dieselben sind wegen Lotabweichung und Beobachtungsfehlern zu verbessern. Die Verbesserungen seien beziehungsweise $\lambda'_k - \lambda'_i$ und $\frac{1}{2}(\xi_i + \xi_k)$, letzteres der Einfachheit

halber ohne besondere Hervorhebung der Beobachtungsfehler. Für λ'_i ist nach S. 535 (1) der von Lotabweichung herrührende Bestandteil $-\eta_i \sec B'_i$ und entsprechend für λ'_k. Bezeichnen wir endlich noch die Verbesserung von P_{ik} mit δ'_{ik}, so geht (6) über in die der Messung der geographischen Längendifferenz L_{ik} entsprechende *Fehlergleichung*:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_k - \lambda'_i - \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2\varrho''} \tan B' + \frac{\delta'_{ik}}{P_{ik}}\right) L''_{ik} + \cdots \\ = L''_{ik} - L'_{ik} + a_{ik}x + b_{ik}y, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

wobei vorausgesetzt ist, dafs in (7) für B der oben angegebene Mittelwert der astronomisch beobachteten Breiten gesetzt wird. Es ist ferner von verschiedenen unerheblichen Fehlergliedern abgesehen.

Wenn wir nun linker Hand nur die Differenz $\lambda'_k - \lambda'_i$ beibehalten, d. h. alle Fehler auf die geographischen Längen werfen, so ist das insofern eine brauchbare Annäherung, als wenigstens für mäfsig grofse L_{ik} das die Parenthese enthaltende Glied linker Hand im Mittel kleiner als jene Differenz sein wird. (Hinsichtlich δ'_{ik} vergl. die auch jetzt passenden Bemerkungen S. 594.)

Wenden wir jetzt Formel (8) auf die Indices 0 bis m und zwar immer gemäfs je 2 benachbarten Punkten an, so ergiebt sich das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_1 - \lambda'_0 &= L''_{0.1} - L'_{0.1} + a_{0.1} \cdot x + b_{0.1} \cdot y \\ \lambda'_2 - \lambda'_1 &= L''_{1.2} - L'_{1.2} + a_{1.2} \cdot x + b_{1.2} \cdot y \\ \lambda'_3 - \lambda'_2 &= L''_{2.3} - L'_{2.3} + a_{2.3} \cdot x + b_{2.3} \cdot y \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda'_m - \lambda'_{m-1} &= L''_{m-1.m} - L'_{m-1.m} + a_{m-1.m}x + b_{m-1.m}y. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Indem man hierin successive addiert die 1. und 2. Gleichung, dazu die 3., dann die 4., u. s. f., so wird ein bequemeres System erhalten, welches linker Hand dem System (2) S. 595 gleicht und symbolisch auch rechter Hand wie jenes geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_1 - \lambda'_0 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y \\ \lambda'_2 - \lambda'_0 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \lambda'_m - \lambda'_0 &= -l_m + a_m x + b_m y. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Hieran schliefst sich dieselbe Umformung wie S. 596 und es können die Gleichungen (3) bis (7) hierher übertragen werden, mit der Modifikation jedoch, dafs noch auf die *Gewichte* Rücksicht zu nehmen ist.

Geben wir den Fehlergleichungen der Breitengradmessungen S. 596 (3) das Gewicht 1, so wird mit Rücksicht auf den dominierenden Einfluſs der Lotabweichungen über den der Messungsfehler (abgesehen von älteren Längengradmessungen) und weil in λ'_i seitens der Lotabweichungen der Betrag $\eta_i \sec B_i$ eingeht, das Gewicht einer der Fehlergleichungen (3) S. 596, wenn diese sich auf eine Längengradmessung beziehen, gleich $\cos^2 B_i$ zu setzen sein, worin B_i die geographische Breite desjenigen Punktes ist, auf den sich der Index der Verbesserung λ'_i linker Hand in der Fehlergleichung bezieht.

Diese modificierten Fehlergleichungen mit ihren Gewichten lauten sonach in den Bezeichnungen von S. 596:

$$\left.\begin{array}{ll}
\lambda'_0 = -l'_0 + u + a'_0 x + b'_0 y & \text{Gew. } \cos^2 B_0 \\
\lambda'_1 = -l'_1 + u + a'_1 x + b'_1 y & \quad ,, \quad \cos^2 B_1 \\
\lambda'_2 = -l'_2 + u + a'_2 x + b'_2 y & \quad ,, \quad \cos^2 B_2 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\lambda'_m = -l'_m + u + a'_m x + b'_m y & \quad ,, \quad \cos^2 B_m,
\end{array}\right\} \quad (11)$$

und die Gröſsen rechter Hand bestimmen sich (*Ausgleichungsrechnung* S. 145) nach den Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll}
l'_0 = -\frac{[l \cos^2 B]}{[\cos^2 B]} & l'_i = l_i + l'_0 \\
a'_0 = -\frac{[a \cos^2 B]}{[\cos^2 B]} & a'_i = a_i + a'_0 \\
b'_0 = -\frac{[b \cos^2 B]}{[\cos^2 B]} & b'_i = b_i + b'_0.
\end{array}\right\} \quad (12)$$

Die Bildung der Normalgleichung für u zeigt nun, daſs diese Gröſse null wird; dagegen ergeben sich für x und y die Normalgleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
[a'a' \cos^2 B]\, x + [a'b' \cos^2 B]\, y = [a'l' \cos^2 B] \\
[a'b' \cos^2 B]\, x + [b'b' \cos^2 B]\, y = [b'l' \cos^2 B],
\end{array}\right\} \quad (13)$$

welche durch Addition mit den entsprechenden Normalgleichungen anderer Längengradmessungsoperationen und eventuell denen der Breitengradmessungen zu vereinigen sind.

Im übrigen ist der Schluſs des § 5 S. 596 u. 597 zu vergleichen.

§ 7. **Azimutmessungen.** Bezeichnen wir in Formel (5) S. 312 das Produkt von $s \sin \alpha$ in die geschlungene Parenthese mit $\mathfrak{P}_{i\,k}$, wenn es sich um zwei Punkte P_i und P_k handelt, so giebt die Differenz der gemessenen Azimute die nachstehende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\text{in Sek}}{\Delta\alpha} &= -\frac{\varrho''}{a_0}\,\mathfrak{P}_{ik}\,W\tan B \\ \Delta\alpha &= \alpha_{ki} - \alpha_{ik} - 180^0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die Gleichung (1) zeigt nun eine grofse Ähnlichkeit mit der einem beobachteten geographischen Längenunterschied entsprechenden Gleichung (1) S. 599; denn abgesehen von den kleinen Verschiedenheiten der in P_{ik} und $\mathfrak{P}_{ik}$ auftretenden geschlungenen Parenthesen sind diese Ausdrücke und demnach die rechten Seiten der erwähnten Gleichungen identisch bis auf die Faktoren — tan B bezw. sec B. Aus diesem Grunde wird die Gleichung für x und y, welche sich aus der Differenz der Azimute ableiten läfst, nicht wesentlich von derjenigen verschieden, welche aus der geographischen Längendifferenz resultiert, da eben die Koefficienten von x und y in beiden Gleichungen in demselben Verhältnis stehen.

Die weitere Behandlung der Formeln ist wie bei den Längenbestimmungen, nur ist schliefslich, abgesehen von Beobachtungsfehlern, das Gewicht der Fehlergleichungen (11) S. 602 nicht $\cos^2 B$, sondern $\cot^2 B$, da auf das einzelne Azimut die Lotabweichung mit η tan B einwirkt.

Man sieht sogleich, dafs diese Gewichtsbestimmung für die Nähe des Äquators jedenfalls unzulässig wird, weil hier η tan B gegen die Beobachtungsfehler ganz zurücktritt. Dann ist Gleichung (1) überhaupt nur mehr ein Mafs für die Beobachtungsfehler, aber wegen des kleinen Faktors tan B kein Mittel zur Bestimmung der Elemente der Meridianellipse.

Die Beobachtungsfehler kommen übrigens bei Azimutgleichungen auch aus anderem Grunde weit mehr in betracht als bei den Gleichungen für geographische Längen, wenn wir hier, wie immer bisher, die Anwendung des elektromagnetischen Telegraphen voraussetzen. Denn die Beobachtungsfehler werden im letztern Falle für die Längendifferenz $L_{0.m}$ nicht wesentlich gröfser als für irgend ein $L_{i.k}$, sobald nur (wie es immer der Fall sein wird) die entferntesten Punkte P_0 und P_m direkt mit einander verbunden sind.

Anders bei den Azimutgleichungen. Hier ist es selbstverständlich, dafs in den letzten Gleichungen des Systems (10) S. 601 die Beobachtungsfehler eine weit gröfsere Bedeutung haben, als in den ersten. Das angegebene Ausgleichungsverfahren kann daher nur dann als zulässig angesehen werden, wenn die Ausdehnung der ganzen Operation nicht so beträchtlich ist, dafs die Einflüsse der Beobachtungsfehler denjenigen der Lotabweichungen im Mittel gleich zu achten sind — oder wenn eine Kontrolle durch Beobachtung geographischer Längen geschaffen wird.

In der That, wenn sowohl die geographische Längendifferenz als die Azimutdifferenz vorliegt, ergiebt sich wie bekannt eine Kontrolle hinsichtlich des Einflusses der Beobachtungsfehler. Es sollten dann nach obigen Bemerkungen offenbar die mit sin B multiplizierten Absolutglieder der Fehlergleichungen aus den Längendifferenzen übereinstimmen mit denen aus den Azimutmessungen. Auf die Ausnutzung dieser Kontrollen gehen wir aber nicht weiter ein, da wir es beim Vorhandensein solcher für angezeigt halten, für die einzelne Operation die Formeln des § 15 S. 546 u. ff. auf den offenen Zug der geodätischen Linien P_0P_1, P_1P_2, ... $P_{m-1.m}$ anzuwenden, unter Beifügung der Glieder für δa_0 und δe^2 nach § 20 S. 562, eventuell mit Umwandlung für die oben benutzten Unbekannten x und y (G und n).

Andrerseits wird man die aus den Azimutmessungen folgenden Gleichungen bei Längengradmessungen mit sehr weit abstehenden benachbarten astronomischen Stationen gegen die aus den geographischen Längendifferenzen folgenden ohne weiteres der geringen Sicherheit halber ganz vernachlässigen können.

Es mag noch erwähnt werden, dafs in den Fehlergleichungen, welche Azimutmessungen entsprechen, sich die Lotabweichungen ξ weit ungünstiger äufsern, als bei denjenigen der Längendifferenzen; vergl. (8) S. 601. Das entsprechende Glied linker Hand wird nämlich gleich

$$+\frac{\xi_i + \xi_k}{\varrho'' \sin 2B'} \Delta\alpha''. \tag{2}$$

Reduziert man es auf gleiches Gewicht mit demjenigen in (8) S. 601, so zeigt es sich $\csc^2 B'$ mal so grofs als dieses. Der Einflufs des Gliedes (2) ist überhaupt nur für nicht kleine geographische Breiten unerheblich; in der Nähe des Äquators kann er stark anwachsen. Hier sind aber, wie oben erwähnt, Azimutgleichungen überhaupt zur Bestimmung der Elemente der Meridianellipse wertlos.

Die Bedeutung der Azimutmessungen in nicht zu kleinen Breiten erkannte bereits *Euler* sowie später *Laplace* (nach *Soldner, Bayerische Landesvermessung* S. 533). Nur *Legendre* leugnet sie infolge eines Übersehens auf S. 15 der mehrfach erwähnten Schrift *Delambre, Méthodes analytiques etc.*

§ 8. **Gradmessung schief zum Meridian.** Eine mäfsig ausgedehnte Gradmessung nahe im Meridian oder nahe im Parallel giebt wesentlich nur *eine* Gleichung für die unbekannten Elemente der Meridianellipse. Um deren wenigstens *zwei* zu erhalten, sind von derartigen Operationen 2 Breitengradmessungen oder 2 Längengradmessungen in (dem absoluten Werte nach) wesentlich verschiedenen

geographischen Breiten erforderlich. Mit Messungen in gleichen geographischen Breiten kommt man nur dann zu einer Lösung, wenn die eine der Operationen Breitengradmessung, die andere derselben Längengradmessung ist, und durch eine einzige Triangulation läfst sich daher beides zugleich nur bei Werten des Azimuts inmitten zwischen null und 90^0 erreichen.

Denken wir uns also an beiden Enden einer geodätischen Linie $P_1 P_2$ die geographischen Breiten und Azimute gemessen, so kann man zunächst den Abstand M der Parallelen und die dem Parallelbogen in der mittleren Breite $B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ sehr nahe kommende Hilfsgröfse $\mathfrak{P}$ berechnen [vergl. S. 308 (16) und S. 312 (5) bezw. S. 603 (1)]. Es folgt dann weiter [vergl. S. 588 (1) und (2)]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_0(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}^3} &= \varrho_m = \varrho'' \frac{M}{\varDelta B} + \cdots \\ \frac{a_0}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} &= \varrho_n = -\varrho'' \frac{\mathfrak{P}}{\varDelta \alpha} \tan B, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

worin ϱ_m und ϱ_n die Krümmungsradien im Meridian und Perpendikel für die mittlere Breite B, $\varDelta B$ und $\varDelta\alpha$ aber die Differenzen der geographischen Breiten und Azimute der Punkte P_1 und P_2 nach Mafsgabe bekannter Formeln bezeichnen.

Die (1) geben nun leicht successive unter Einführung einer Abkürzung q':

$$\frac{\varrho_n}{\varrho_m} = \frac{1-e^2\sin^2 B}{1-e^2} = q' \tag{2}$$

$$e^2 = \frac{q'-1}{q'-\sin^2 B}, \tag{3}$$

und für die Abplattung:

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}(q'-1)\sec^2 B + \cdots. \tag{4}$$

Ist erst e^2 bekannt, so geben die (1) auch noch a_0 ohne Schwierigkeit. Die Bestimmung wird aber überhaupt ganz unzuverlässig für die Nähe des Äquators, weil hier $\varDelta\alpha$ der null zustrebt und die Beobachtungsfehler also mehr und mehr dominierenden Einflufs auf ϱ_n erlangen, wie die Differentiation von $\log \varrho_n$ sofort zeigt.

In dieser und auch in anderer Beziehung ist die Bestimmung von ϱ_n aus der geographischen Längendifferenz vorteilhafter. Wir haben damit [S. 599 (1)]:

$$\varrho_n = \varrho'' \frac{P}{L} \sec B, \tag{5}$$

wo jetzt P den Parallelbogen in der mittleren Breite B bezeichnet.

Da nun P und $\mathfrak{P}$ für dieselbe geodätische Linie nahezu gleich sind, so zeigt die Vergleichung von (5) mit der 2. Gleichung (1), dafs L absolut genommen $> \varDelta\alpha$ ist. Gleich grofse Beobachtungsfehler sind daher bei der Bestimmung von ϱ_n aus (5) immer von geringerem Einflusse als bei derjenigen aus der 2. Gleichung (1), doch nimmt der Unterschied mit wachsender Breite ab.

Dagegen ist der Einflufs der Lotabweichung für beide Bestimmungen immer gleich. Er beträgt in $\varDelta\alpha$ sehr nahe $(\eta_2 - \eta_1) \tan B$ und in L sehr nahe $(\eta_1 - \eta_2) \sec B$, für ϱ_n in Bruchteilen seines Wertes daher in beiden Fällen sehr nahe

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\varrho''} \frac{a_0}{s \sin\alpha}, \tag{6}$$

wenn für $\mathfrak{P}$ und P kurz $s \sin\alpha$ gesetzt wird.

Für ϱ_m hat man ganz ebenso als Einflufs der Lotabweichung:

$$\frac{\xi_2 - \xi_1}{\varrho''} \frac{a_0}{s \cos\alpha}. \tag{7}$$

Am geringsten wird nun der Einflufs dieser Gröfsen auf $\mathfrak{a}$ für den Äquator, weil hier $q' - 1$ am gröfsten ist, nämlich rund $\frac{1}{150}$. Giebt man der Linie s dabei behufs einer Vergleichung mit S. 589 dieselbe Ausdehnung wie für 2 Breitengradmessungen zusammen, so wird unter sonst gleichen Umständen $\mathfrak{a}$ nur halb so stark von Lotabweichungen wie im Beispiel daselbst beeinflufst.

Dagegen ist für höhere Breiten wegen beschleunigter Abnahme von $q' - 1$ die Bestimmung von $\mathfrak{a}$ nach der Methode dieses Paragraphen eine wachsend ungünstigere. Es findet sich, dafs überhaupt hinsichtlich der Einflüsse (6) und (7) zwei Breitengradmessungen, deren mittlere Breiten absolut genommen um rund 45^0 differieren, vorteilhafter sind, als eine Gradmessung in 45^0 Azimut, welche ebenso ausgedehnt ist, wie jene zusammen, sobald für dieselbe die mittlere Breite absolut genommen $> 45^0$ wird.

Bessel legte seinerzeit die ostpreufsische Gradmessung schief zur meridionalen Richtung, um durch sie allein schon 2 Gleichungen zu erhalten, die zur Bestimmung der Meridianellipse genügt haben würden, wenn eben Lotabweichungen und Beobachtungsfehler nicht existierten. Um letztere für $\varDelta\alpha$ möglichst herabzudrücken, suchte er thunlichst lange Seiten zur Azimutübertragung zu gewinnen.

Die Bedeutung derartiger Gradmessungen erkannte übrigens, wie auch *Bessel* erwähnt (*Abhandlungen* Bd. 3 S. 63) bereits im vorigen Jahrhundert *Tobias Mayer* der Ältere, 1723—1762), dessen hinterlassenes, sehr interessantes Manuskript über diesen Gegenstand Bd. 13 der *Astronom. Nachr.* Nr. 310 S. 354 (1836) bringt. *Mayer* denkt sich an den Endpunkten einer geodätischen Linie Breite und Azimut gemessen und zeigt, dafs man das Verhältnis $a_0 : b_0$ ohne Kenntnis der linearen Länge der Linie ermitteln kann.

§ 9. **Berechnung des Erdellipsoids aus Gradmessungen im allgemeinen.** Die in den §§ 4 bis 7 angewandte Methode der Aufstellung der Fehlergleichungen, welche den astronomisch geodätischen Messungen entsprechen, ist nicht streng, da immer nur gewisse Einflüsse der Lotabweichungen als wesentlich vorausgesetzt werden. Die Vernachlässigung ist allerdings um so geringer, je mehr die Dreiecksketten den Richtungen der Meridiane oder Parallelen folgen. Doch fand sich schon für letzeren Fall der Hinweis auf eine strengere Ausgleichung nötig (vergl. S. 604).

Sobald nun geodätische Linien in beliebigen Azimuten vorkommen, ist eine strengere Behandlung besonders durch den Einfluſs der Lotabweichungen auf M und P bezw. $\mathfrak{P}$ gefordert [S. 594 (6) und 599 (2)].

Wollte man eine strengere Rechnung nach der Methode jener Paragraphen ausführen, so müſste man alle die einzelnen Glieder beibehalten, welche die Lotabweichungen successive ergeben und auch noch die Fehlerglieder aufführen, die von Beobachtungsfehlern in Länge, Breite, Azimut und s abhängen. Indessen ist die entstehende Form der Gleichungen für eine strenge Rechnung unbequem.

Bei strenger Rechnung verfährt man bequemer nach den Vorschriften des vorigen Kapitels (in der Regel kommt § 15 S. 546 u. ff. in frage, jedenfalls auſserdem § 20 S. 562). Man sucht für jede zusammenhängende Operation wie dort die Normalgleichungen für ξ_1, η_1, δa_0 und δe^2 auf. Die Lotabweichungen ξ_1 und η_1 des willkürlichen und für jede isolierte Operation besonderen Anfangspunktes werden dann mittelst ihrer Normalgleichungen eliminiert und endlich werden alle Normalgleichungen für δa_0 sowie alle für δe^2, welche die verschiedenen Systeme ergeben, addiert. Die beiden so entstehenden Gleichungen für δa_0 und δe^2 sind die Endnormalgleichungen, welche nunmehr nach den genannten beiden Unbekannten aufgelöst werden müssen.

Der Sinn dieser Rechnung ist, daſs die Dimensionen der Referenzellipsoide der einzelnen Ausgleichungssysteme bei zur Erdaxe parallelen Rotationsaxen identisch genommen werden, während es unentschieden bleibt, inwieweit die Drehaxen und Mittelpunkte der einzelnen Ellipsoide unter sich und mit der Erdaxe und dem Erdschwerpunkt zusammenfallen.

Erst in dem allerdings nur idealen Falle, daſs alle Gradmessungen in eine zusammenhängende Operation verschmolzen worden wären, würden alle Referenzellipsoide in ein einziges übergehen, welches nun aber immer noch auf keine Weise durch die Gradmessungen allein in Bezug zum Erdschwerpunkt gebracht werden könnte.

In diesem Falle lieſsen sich aber bei angemessen dichter Lage

der astronomischen Stationen die Erhebungen des Geoids über dem Ellipsoid berücksichtigen, indem man z. B. bei Anwendung der Vorschriften des § 15 S. 546 den δs in den Gleichungen (1) Glieder von der Form $-s\frac{N'}{a_0}$ beifügte, wobei N' die Erhebung für die betreffende Grundlinie bezeichnet.*) Den bisherigen Gleichungen würden nun noch Gleichungen zuzufügen sein, welche die Differenz der N' benachbarter Grundlinien als lineare Funktionen der Lotabweichungen der astronomischen Zwischenpunkte darstellen. Solcher Gleichungen würde man in überschüssiger Zahl (vielleicht für die N' aller benachbarten astronomischen Stationen) aufstellen und gleichzeitig mit den anderen Gleichungen (den Systemen (1) S. 548) zur Ausgleichung verwenden.

Für das günstigste Referenzellipsoid würde übrigens auf diese Art kaum ein erheblich besseres Resultat erzielt werden, da die Fehler, welche durch mangelnde Reduktion der Linien s wegen der N' entstehen, im Endresultat sich voraussichtlich nicht anhäufen, sondern im wesentlichen kompensieren werden.

§ 10. **Unzulänglichkeit der Gradmessungen für die genaue Bestimmung des Erdellipsoids.** Bereits im vorigen Paragraphen ist angedeutet worden, dafs sich das Resultat der Ausgleichung der Fehlergleichungen mehrerer isolierter Gradmessungssysteme auf ebenso viele Referenzellipsoide bezieht, die alle gleiche Dimensionen und zur Erdaxe parallele Rotationsaxen haben, die aber im allgemeinen nicht unter sich zusammenfallen, sondern einzeln mit der Geoidfläche im Bezirke des betreffenden Gradmessungssystems annähernd koincidieren. Irgend ein Mittel, um dasjenige Ellipsoid abzuleiten, welches sich den Messungen am besten anschmiegt und dabei mit seiner kleinen Axe in die Erdaxe und mit seinem Schwerpunkt in den Erdschwerpunkt fällt, hat man aus Gradmessungen allein nicht.

Dieselben bieten ein solches auch noch nicht in dem idealen Falle, dafs sich die *ganze* Erde mit einem Dreiecksnetze umspannen liefse, dessen sämtliche Punkte astronomische Stationen wären, da eben ein *geometrischer* Zusammenhang zwischen Schwerpunktslage und Lotablenkungen nicht besteht, sondern nur ein *dynamischer*. Ohne hier der Sache von diesem Gesichtspunkte aus näher zu treten, läfst sich doch soviel erkennen, dafs man immerhin diesem Erdellipsoid, namentlich bezüglich der Dimensionen, durch zahlreiche Gradmessungen näher kommen wird, als durch wenige. Der letzte Fall ist allerdings gegenwärtig der thatsächliche und wird es bis zu gewissem Grade

*) Es ist N mit dem oberen Index versehen, da nicht in Strenge das Geoid in frage kommt, sondern das S. 565 definitive Sphäroid.

immer bleiben, da nur $\frac{3}{11}$ der Erdoberfläche mit Festland bedeckt und Gradmessungen zugänglich sind.

Es ist nun von Interesse, eine Vorstellung von der Genauigkeit der Ergebnisse für die Elemente der Meridianellipse, wie der gegenwärtige Stand der Gradmessungen sie liefert, zu gewinnen zu suchen. Dazu gehen wir im folgenden Paragraphen über; wir müssen dabei freilich auch wieder die Schätzungen der absoluten Lotablenkungen und Höhen N des Geoids über dem Erdellipsoid anticipieren, wie Betrachtungen der Mechanik sie liefern.

§ 11. **Genauigkeitsgrad.** Die Dimensionen des Ellipsoids sind wiederholt berechnet worden mit Zunahme der Anzahl und Ausdehnung insbesondere der Breitengradmessungen. Dabei hat man das von *Ed. Schmidt* und *Bessel* angegebene und oben mitgeteilte Verfahren, namentlich also auch die Methode der kleinsten Quadrate angewandt. *Ph. Fischer* hat (vergl. seine *Untersuchungen über die Gestalt der Erde*) hierin einen grofsen Mangel zu erblicken geglaubt und überhaupt die formelle Behandlung angegriffen. Seine Ausführungen sind indes in dieser Hinsicht nicht stichhaltig.*) Ein Vorwurf kann nur insoweit erhoben werden, als man Gewichte und mittlere Fehler der Endresultate berechnet hat, als wären die übrigbleibenden Fehler die Folge zufälliger Beobachtungsfehler und zufälliger Abweichungen des Lotes, infolge dessen aber sie für weit genauer hielt, als sie sind (S. 597 o.). Denn da die absoluten Lotablenkungen innerhalb einer isolierten Operation oft einen wesentlich systematischen Charakter haben, so kann es sich treffen (*Ausgleichungsrechnung* S. 257), dafs die übrigbleibenden Fehler trotz bedeutender Gröfse der Lotablenkungen klein sind und doch der systematische Bestandteil der letzteren einen sehr beträchtlichen Einflufs auf die Resultate ausübt.

Dieser Fall tritt in der That für die ostindische Gradmessung ein, für welche *Pratt* grofse Lotablenkungen auf Grund der äufseren Terraingestalt wahrscheinlich machte. Da nun bei allen Rechnungen diese Messung die einzige von grofser Ausdehnung unter kleinen Breiten war und also ohne erhebliche Kontrolle blieb, weil die

*) Der begründete Teil der Vorwürfe *Ph. Fischers* in Bezug auf die Auffassung des Problems dürfte überhaupt weniger die Rechner treffen, als diejenigen, welche deren Arbeiten einfach acceptierten, ohne sie nach ihrer ganzen Entstehung zu kennen. Was die Rechner anlangt, so sei u. a. erwähnt, dafs *Paucker*, dessen ausführliche Rechnungen S. 17 besprochen sind, nicht nur über den Charakter der übrigbleibenden Fehler der Ausgleichung, insbesondere ihr Verhältnis zu absoluten Lotablenkungen, völlig im Klaren war, sondern auch den ungünstigen Einflufs systematischer Lotablenkungen auf die Güte der Rechnungsergebnisse richtig erkannte.

europäischen Messungen, mit denen sie sich kombinierte, hauptsächlich nur unter sich kontrollierend wirken, so mufste ein gewisser systematischer Teil der Lotablenkungen unerkannt bleiben. Es ist dieses, wie man sofort bemerkt, aufser einem absolut konstanten unschädlichen Teil, ein Teil, der mit der Meridianbogenlänge wächst und gerade so wirkt, wie ein konstanter Fehler der Grundlinien bezw. der Mafseinheit — oder wie ein Fehler in der Reduktion der Grundlinien wegen der Höhe N des Geoids über dem Ellipsoid.

Unter den verschiedenen interessanten Rechnungen, welche das wiederholt erwähnte Hauptwerk der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* bietet, findet sich aber S. 775 auch eine Angabe der Einflüsse der Änderungen der Mafseinheiten auf die Halbaxen $a_0 b_0$ der Meridianellipse und die Hilfsgröfse $\frac{1}{2}\,\frac{a_0 + b_0}{a_0 - b_0}$, d. i. $\frac{1}{2n}$. Wir benutzen hier nur die Angabe in Bezug auf letztere Gröfse.

Es wird aus 9 isolierten Breitengradmessungsoperationen abgeleitet:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2n} &= 293{,}76 + 0{,}1139\,\Theta_0' + 0{,}0144\,\Theta_1' - 0{,}3589\,\Theta_2' + 0{,}2222\,\Theta_3' \\ &+ 0{,}0018\,\Theta_4' - 0{,}0004\,\Theta_5' + 0{,}0076\,\Theta_6' - 0{,}0004\,\Theta_7' - 0{,}0003\,\Theta_8'.\end{aligned}\right\}(1)$$

Hierbei sind die linearen Längen, welche den Ergebnissen der Gradmessungen entsprechen, noch mit $1 + \frac{\Theta_i}{100000}$ multipliziert, wenn der Index i nach folgender Übersicht den einzelnen Operationen angehört:

Index								
Index 0	Englische	Gradmessung	von	49,9°	bis	60,8°	nördl.	Br.
„ 1	Französische	„	„	38,7	„	51,0	„	„
„ 2	Russische	„	„	45,3	„	70,7	„	„
„ 3	Indische	„	„	8,1	„	29,5	„	„
„ 4	Ältere indische	„	„	11,7	„	13,3	„	„
„ 5	Ostpreufsische	„	„	54,2	„	55,7	„	„
„ 6	Peruanische	„	„	0,0	„	3,1	südl.	„
„ 7	Hannoverische	„	„	51,5	„	53,5	nördl.	„
„ 8	Dänische	„	„	53,4	„	54,9	„	„

Die Formel giebt nun ein sehr gutes Mittel, den Genauigkeitsgrad der Bestimmung von $\frac{1}{2n} = 293{,}76$ zu schätzen.

Sie zeigt u. a., dafs $\Theta_3' = -30$ in $\frac{1}{2n}$ bereits 7 Einheiten

Änderung hervorbringen würden. Ein solcher Betrag von Θ_3' kann allerdings kaum noch als Einflufs der Höhe N des Geoids über dem Ellipsoid vermutet werden, denn er erfordert einen Wert N im Betrage von $a_0 \cdot \frac{3}{10000}$, d. i. ca. $1{,}9^{km}$. Zu seiner Erklärung genügt aber auch die sehr plausible Differenz der Lotablenkungen von 24″ für die Endpunkte des 21,4° langen grofsen indischen Bogens, falls sich diese 24″ gleichmäfsig über denselben verteilen und eine Verflachung bedeuten.*) Einer solchen entspricht dann eine Verkürzung des Bogens um $\frac{24}{21{,}4 \cdot 60 \cdot 60}$ seines Betrages, also ein $\Theta_3' = -31$.

Die begründeten Vorwürfe *Ph. Fischers* werden einigermafsen (so gut es die Verhältnisse zulassen) beseitigt sein, wenn die Gradmessungen eine gleichmäfsigere Ausdehnung und Verteilung erlangt haben werden als gegenwärtig, und wenn zur Bestimmung des Erdellipsoids, solange als die Gradmessungen noch nicht zahlreich sind, diejenigen ausgeschlossen werden, für welche starke Unregelmäfsigkeiten nach der äufseren Figur der Erde zu erwarten sind. In Bezug auf die Würdigung der indischen Gradmessung aber darf man nie vergessen, dafs sie zunächst unternommen wurde, um die Figur des Geoids in Indien zu studieren (vergl. unser Referat in der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* Bd. 8, S. 14).

Wir gedenken hier auch des Versuches, den General *v. Schubert* und andere durchgeführt haben, die geographischen Breiten der Gradmessungsstationen von den lokalen Unregelmäfsigkeiten der Lotrichtung durch Berechnung der Massenanziehung zu befreien (*Astronom. Nachr.*, Bd. 52, No. 1245—47; vergl. auch S. 546). Mit Rücksicht auf unterirdische Massenunregelmäfsigkeiten ist es aber erfahrungsmäfsig weit besser, lokale Anomalieen mittelst dicht benachbarter astronomischer Stationen zu studieren und zu beseitigen.

§ 12. Beweiskraft der Gradmessungen für die Existenz der näherungsweise rotationsellipsoidischen Gestalt des Geoids.

Bisher ist die Frage noch nicht erörtert worden, ob aus der Thatsache, dafs die Gradmessungen bis auf kleine Abweichungen einer Rotationsfläche, insbesondere einem abgeplatteten Rotationsellipsoid entsprechen, auch notwendig folgt, dafs das Geoid bis auf kleine Abweichungen eine Rotationsfläche, insbesondere ein abgeplattetes Rotationsellipsoid sei. Wir haben nämlich nur nach dem abgeplatteten Rotationsellipsoid gefragt, welches entweder *einem*

*) Vergl. *Pratt, A Treatise on Attractions etc. and the Figure of the Earth,* Cambridge 1860 S. 56.

Komplex zusammenhängender Messungen am besten entspricht (dem Referenzellipsoid), oder *mehreren* solchen Komplexen, die unter sich nicht zusammenhängen. Für letzteren Fall ist dann in den letzten vorhergehenden Paragraphen untersucht, inwieweit die Ergebnisse dem Erdellipsoid entsprechen, dessen Existenz durch Betrachtungen und Messungen nicht-geometrischer Natur als erwiesen vorausgesetzt wurde. Wenn es aber auch ganz zweifellos ist, dafs man die Frage der Bestimmung eines dem Geoid im ganzen möglichst entsprechenden Rotationsellipsoids nicht vom rein geometrischen Standpunkt aus allein behandeln darf, um zu den begründetsten Resultaten zu gelangen, so hat es doch auch ein Interesse, sich mit *der* Frage zu beschäftigen, ob die geometrischen Messungen allein schon imstande sind, die näherungsweise rotationsellipsoidische Gestalt des Geoids zu *beweisen.* Denn wenn wir etwas weniger genau astronomisch zu messen imstande wären, als es wirklich der Fall ist, so würden ja die Gradmessungen innerhalb der Beobachtungsfehler einem Rotationsellipsoid vollständig anzupassen sein.

Nehmen wir also einmal an, die Gradmessungen genügten mathematisch streng einem abgeplatteteten Rotationsellipsoid, so ist immer noch zu zeigen, dafs umgekehrt auch wirklich das Geoid gerade diese Gestalt hat und keine andere.

Die Aufgabe wird sich verschieden gestalten, je nach der Annahme über das Ergebnis der Gradmessungen. Am vollständigsten würde dieses sein, wenn es für hinreichend viele Orte die Krümmung in allen Azimuten feststellte. Entspricht aber die Krümmung allenthalben der Kugel oder dem Ellipsoid, so hat dann das Geoid sicher diese Form, weil man unter der Voraussetzung, dafs das Geoid eine stetig gebogene Fläche ist, aus gegebenen Krümmungsradien nur *eine* Fläche konstruieren kann.*)

---

*) In der Abhandlung: *Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben* (Journal für reine und angewandte Mathematik von *Crelle* Bd. 64 S. 193) hat *Christoffel* 1864 gezeigt, wie schon allein die Messung der Summe der beiden Hauptkrümmungsradien in hinreichend vielen Punkten der Fläche unter Voraussetzung einer stetig gebogenen, allenthalben gewölbten Form zur Kenntnis derselben führen kann, und wie insbesondere der Thatsache, dafs jene Summe dem bekannten Ausdruck fürs Rotationsellipsoid entspräche, Beweiskraft für die Existenz dieser Form innewohnen würde. Da aber die Messungen von den Geodäten anders angeordnet werden und das von *Christoffel* vorausgesetzte Studium lokaler Terrains sehr schwierig ist, so schien es uns angemessen, den Nachweis zu liefern, dafs auch die übliche Procedur der meridionalen Breitengradmessungen Material an die Hand giebt, rein geometrisch ohne eigentliche Hypothesen die Existenz einer Rotationsgestalt zu prüfen.

Im grofsen und ganzen genommen hat nun das Geoid sicher Kugelgestalt. Dieses folgt schon allein aus den Umfahrungen der Erde zu Wasser und Land, welche eben konstatieren, dafs die Krümmungsverhältnisse stets der Kugelgestalt im allgemeinen entsprechen. Zur genaueren Untersuchung fehlt es aber an Material. Die Gradmessungen sind in der Mehrzahl nur als Breitengradmessungen ausgeführt, weil sie sich in dieser Form am leichtesten bewerkstelligen lassen. Es fehlt also die Untersuchung der Krümmung in allen Azimuten;

Um die *Christoffel*sche Methode hier einigermafsen zu erläutern, denken wir uns dieselbe auf die Bestimmung einer ebenen, geschlossenen, nach aufsen allenthalben konvexen Kurve (etwa der Meridiankurve eines Rotationskörpers) angewandt. Sei B der Winkel der nach innen gerichteten Normale im Punkte (x, y) mit der x-Axe und ϱ der Krümmungsradius, so hat man

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\,ds \,.\, \sin B \\ dy &= +\,ds \,.\, \cos B \end{aligned}\right\} \quad ds = \varrho\, dB$$

und hieraus

$$x = -\int \varrho \sin B\, dB\,, \qquad y = +\int \varrho \cos B\, dB\,.$$

Zum Zwecke der Integration mufs ϱ als Funktion von B aus den Messungen hergestellt werden, wozu die interpolatorische Darstellung in Form einer periodischen Reihe dient.

Man kann hier die Bemerkung machen, dafs es einfacher und auch genauer ist, ϱ gar nicht abzuleiten, sondern bei den unmittelbaren Ergebnissen der Messungen, den Bögen s und den zugehörigen B der Endpunkte stehen zu bleiben, und demgemäfs s interpolatorisch als periodische Funktion von B darzustellen. Dann folgt

$$x = -\int \sin B\, ds\,, \qquad y = +\int \cos B\, ds\,.$$

Für Kurvenbestimmungen möchten wir dieses Verfahren, welches sich auch völlig dem üblichen Vorgange bei Breitengradmessungen anschliefst, vorziehen. Ebenso möchten wir für Flächenbestimmungen aus praktischen Gründen dem entsprechenden Verfahren des 12. Kapitels d. h. der Zugrundelegung einer einfachen Fläche mit Einführung von Lotabweichungen u. s. f. den Vorzug geben.

[Wir erwähnen beiläufig, dafs bei Benutzung der Entwicklungen in der genannten Abhandlung zu anderen Zwecken, als denen des Verfassers (also etwa zur Bestimmung der Gestalt aus Krümmungsmessungen in bestimmten Azimuten), die Formeln auf der 5. Seite unten nicht anwendbar sind, was nicht daselbst hervorgehoben ist. Sie gelten nur, wenn es sich, wie in der Abhandlung, um die Hauptkrümmungen handelt, also um die Krümmung in Ebenen, die die Normalen unendlich benachbarter Punkte der Fläche vollständig enthalten; sie gelten aber nicht für die Krümmung in beliebigen Ebenen. In der That darf man in jenen Formeln nicht $d\varrho$ oder $d\varphi$ gleich null setzen, denn es folgt allemal $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ = null, was den Voraussetzungen widerspricht.]

es fehlt aber überhaupt noch sehr an Krümmungsmessungen, so dafs wir nicht einmal mit einiger Sicherheit behaupten können, es sei eine allgemeine Eigenschaft des Geoids, gleichlange Gradlängen auf den geographischen Meridianen unter verschiedenen geographischen Längen zu besitzen. Zur Prüfung der Zulässigkeit einer solchen Behauptung würden in der That sehr viele Breitengradmessungen gehören.

Günstiger gestaltet sich die Sache in Rücksicht auf die Azimutmessungen, die immer gelegentlich der Breitengradmessungen angestellt werden. Unter gewissen Voraussetzungen können diese dazu dienen, das Zusammenfallen der geographischen Meridiane (d. h. der Linien gleicher geographischer Länge) mit den astronomischen Meridianebenen zu konstatieren, woraus, wie wir sehen werden, auch der Rotationscharakter resultiert. Da hierbei jedes Paar gegenseitiger Azimutmessungen einen Beitrag zur Untersuchung jener Eigenschaft bietet, so geben offenbar derartige Messungen in Azimut viel mehr beweiskräftiges Material als gleichviele Messungen in Breite.

Im Folgenden wollen wir nun zunächst einen *idealen* Fall diskutieren, der denjenigen Messungen sehr nahe entspricht, die aus praktischen Gründen am häufigsten ausgeführt werden, nämlich den meridionalen Breitengradmessungen mit mehreren Azimutbestimmungen, und zwar denken wir uns im einzelnen Falle immer zwei Punkte der Fläche, für welche direkt durch astronomische Messungen konstatiert wird, dafs sie gegenseitig im Azimut null liegen und daher eine gemeinsame Meridianebene, sowie die geographische Längendifferenz null haben. Solcher Punktpaare soll eine hinreichende Anzahl vorhanden sein und zwar so viele, wie bei Voraussetzung eines stetigen Verlaufs der Fläche nötig sind, um es als eine allgemeine Eigenschaft der letzteren erscheinen zu lassen, dafs die Meridianebene irgend eines Punktes auch Meridianebene aller benachbarten Punkte der Fläche ist, durch welche sie hindurchgeht.

Ohne vorläufig auf die Krümmungsmessungen selbst Rücksicht zu nehmen, wollen wir zuerst untersuchen, welchen Beitrag die Konstatierung der eben erwähnten Eigenschaft der Fläche zu ihrer Charakterisierung liefert.

Verfolgt man aber die Durchschnittspunkte der Meridianebene eines Punktes mit der Fläche der Reihe nach, so sieht man, dafs alle Meridianebenen dieser Durchschnittspunkte zusammenfallen werden, dafs also die geographischen Meridiane ebene Kurven sein müssen, deren Ebenen mit den astronomischen Meridianebenen ihrer Punkte identisch sind.

Nunmehr liegt bereits die Vermutung nahe, die gesuchte Fläche

müsse eine Rotationsfläche sein. Dieses läfst sich in der That wie folgt zeigen.

Wir beziehen die Fläche auf drei rechtwinklige Koordinatenaxen und nehmen die z-Axe parallel zur Umdrehungsaxe der Erde, daher die xy-Ebene parallel zur Äquatorebene. Die zx-Ebene diene zum Ausgang der Zählung geographischer Längen L. Sind nun im Punkte P die geographische Breite gleich B und die Länge gleich L, und bezeichnet man die Neigungswinkel der Normalen in P zu den drei Axen mit λ, μ, ν, so ist

$$\cos\lambda = \cos B\cos L \quad \cos\mu = \cos B\sin L \quad \cos\nu = \sin B, \qquad (1)$$

wie man unmittelbar durch Betrachtung der Linienverhältnisse eines rechtwinkligen Parallelepipeds findet, dessen eine Diagonale parallel zur Normale in P und dessen Kanten parallel zu den drei Axen sind. Andrerseits findet man in ähnlicher Weise, dafs die Cosinus der Neigungswinkel eines Linienelements ds der Fläche zu den drei Axen der Reihe nach sind:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Geht aber dieses Element von P aus, so steht es zur Normale senkrecht und man hat daher nach einem bekannten Satze:

$$\frac{dx}{ds}\cos\lambda + \frac{dy}{ds}\cos\mu + \frac{dz}{ds}\cos\nu = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (1) und unter Weglassung des gemeinsamen Nenners ds:

$$dx\cos B\cos L + dy\cos B\sin L + dz\sin B = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung ist die Bedingungsgleichung dafür, dafs der Übergang von P zu einem unendlich nahen Punkte der Fläche stattfindet. Bewegen wir uns aber in der Meridianebene von P um ds, so bleiben die Meridianebene und L konstant, d. h. es verschiebt sich die Projektion von P auf die xy-Ebene, wo die Meridianebene als Linie im Neigungswinkel L gegen die x-Axe auftritt, in dieser Linie selbst und man hat daher:

$$dx : dy = \cos L : \sin L.$$

Um auszudrücken, dafs für dx und dy L konstant, also nur B veränderlich ist, schreiben wir besser nach gemeinsamer Division mit dB und unter Anwendung des Zeichens partieller Differentiation:



$$\frac{\partial x}{\partial B} : \frac{\partial y}{\partial B} = \cos L : \sin L. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist mit (2) zu kombinieren, wobei es sehr passend erscheint, x, y und z als Funktionen von B und L aufzufassen und ganz von einer Gleichung zwischen x, y und z abzusehen. In Gleichung (2) hat man nun im allgemeinen zu setzen:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL,$$

u. s. f.

sie giebt daher, je nachdem man nur B oder nur L variiert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B}\cos B\cos L + \frac{\partial y}{\partial B}\cos B\sin L + \frac{\partial z}{\partial B}\sin B = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial L}\cos B\cos L + \frac{\partial y}{\partial L}\cos B\sin L + \frac{\partial z}{\partial L}\sin B = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Insofern man sich aber x, y und z als Funktionen von B und L denkt, sind diese Gleichungen Indentitäten, weil zwischen B und L keine Gleichung besteht. Differenzieren wir nun links nach B oder L, so entstehen wieder verschwindende Ausdrücke. Wir benutzen indes nur die Differentiation der 1. Gleichung nach L und die der 2. Gleichung nach B, weil nur für diesen Fall in beiden Gleichungen dieselben höheren Differentialquotienten auftreten. Es wird erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial B\,\partial L}\cos B\cos L + \frac{\partial^2 y}{\partial B\,\partial L}\cos B\sin L + \frac{\partial^2 z}{\partial B\,\partial L}\sin B \\ &-\frac{\partial x}{\partial B}\cos B\sin L + \frac{\partial y}{\partial B}\cos B\cos L \end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial L\,\partial B}\cos B\cos L + \frac{\partial^2 y}{\partial L\,\partial B}\cos B\sin L + \frac{\partial^2 z}{\partial L\,\partial B}\sin B \\ &-\frac{\partial x}{\partial L}\sin B\cos L - \frac{\partial y}{\partial L}\sin B\sin L + \frac{\partial z}{\partial L}\cos B \end{aligned}\right\} = 0.$$

Wenn wir nun voraussetzen, dafs wir es mit einer Fläche zu thun haben, deren Krümmung sich stetig ändert, so wird

$$\frac{\partial^2 x}{\partial B\,\partial L} = \frac{\partial^2 x}{\partial L\,\partial B}, \tag{5}$$

u. s. f.

Es giebt alsdann die Subtraktion beider vorhergehenden Gleichungen:

$$-\frac{\partial x}{\partial B}\cos B\sin L + \frac{\partial y}{\partial B}\cos B\cos L$$

$$= -\frac{\partial x}{\partial L}\sin B\cos L - \frac{\partial y}{\partial L}\sin B\sin L + \frac{\partial z}{\partial L}\cos B.$$

Fügt man zur rechten Seite dieser Gleichung die linke Seite der 2. Gleichung (4) nach vorheriger Multiplikation mit tan B, so findet sich leicht:

$$\frac{\partial z}{\partial L} = -\frac{\partial x}{\partial B}\cos^2 B \sin L + \frac{\partial y}{\partial B}\cos^2 B \cos L. \tag{6}$$

Die drei Gleichungen (4) und (6) gelten allgemein; durch Einführung der speziellen Bedingung (3) aber nehmen sie die folgende Form an:

$$\frac{\partial z}{\partial B}\sin B = -\frac{\partial x}{\partial B}\cos B \sec L, \tag{7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial L}\sin B = -\frac{\partial x}{\partial L}\cos B \cos L - \frac{\partial y}{\partial L}\cos B \sin L, \tag{8}$$

$$\frac{\partial z}{\partial L} = 0. \tag{9}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dafs zufolge der Bedingung (3)

$$z \textit{ eine Funktion von } B \textit{ allein} \tag{10}$$

ist. Die Meridianschnitte sind hiernach (ebene) *kongruente* Kurven; ferner sind die Parallelen (d. h. die Linien gleicher Breite B) *ebene* Kurven, deren Ebenen normal zur Umdrehungsaxe stehen. Man erkennt ferner auch, dafs in jedem Punkte das Linienelement des Parallels rechtwinklig zu der Meridianebene liegt, denn es liegt in der Oberfläche und in der Ebene des Parallels, und beide stehen in P normal zur Meridianebene.

Nennen wir R den Krümmungsradius des Parallels in P, so hat man jetzt für das Bogenelement ds desselben mit Rücksicht auf das soeben Gesagte die Gleichung:

$$ds = R dL,$$

und hieraus, da für ds die Breite B konstant ist:

$$R = \frac{\partial s}{\partial L}. \tag{11}$$

Nun ist aber für das Element ds die Neigung zur x-Axe gleich $L + 90^0$, daher $ds = dx \cos(L + 90^0) + dy \sin(L + 90^0)$ oder besser:

$$\frac{\partial s}{\partial L} = -\frac{\partial x}{\partial L}\sin L + \frac{\partial y}{\partial L}\cos L. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt eine Beziehung von R zu $\frac{\partial x}{\partial L}$ und $\frac{\partial y}{\partial L}$,

welche letztere beiden nach Maſsgabe von (8) und (9) von einander abhängen. Man hat darnach:

$$\left.\begin{aligned} R &= -\frac{\partial x}{\partial L}\sin L + \frac{\partial y}{\partial L}\cos L \\ 0 &= \quad \frac{\partial x}{\partial L}\cos L + \frac{\partial y}{\partial L}\sin L\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Eliminiert man $\frac{\partial y}{\partial L}$ aus beiden, so wird erhalten:

$$R = -\frac{\partial x}{\partial L}\csc L \tag{14}$$

und es ist:

$$\frac{\partial R}{\partial B} = -\frac{\partial^2 x}{\partial B\,\partial L}\csc L\,.$$

Die Differentiation der mit $\cos L$ multiplizierten Gleichung (7) nach L giebt aber, da wegen (9)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial B\,\partial L} = 0$$

ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial B\,\partial L}\csc L = \frac{\partial z}{\partial B}\tan B$$

und man hat somit:

$$\frac{\partial R}{\partial B} = -\frac{\partial z}{\partial B}\tan B\,. \tag{15}$$

Diese Gleichung zeigt, in Verbindung mit (10), daſs $\frac{\partial R}{\partial B}$ eine Funktion von B allein ist, daſs daher sein muſs

$$R = f(B) + \varphi(L), \tag{16}$$

worin f und φ Funktionszeichen bedeuten.

Soll die Fläche eine Rotationsfläche sein, so muſs $\varphi(L)$ verschwinden oder konstant sein.

Dieses erfordert ein Unbestimmtwerden von L mindestens in *einem* Punkte der Fläche; wenn nämlich $\varphi(L)$ für unbestimmte Werte von L dasselbe giebt, ist es keine Funktion von L mehr.

Unsere Fläche hat nun mindestens 2 solche Punkte, denn das Geoid ist zweifellos (s. o.) kugelartig geschlossen. Denken wir uns aber die zur z-Axe normale Ebene der Parallelen in Bewegung und etwa von auſsen her an die Fläche herantretend, so ist leicht zu sehen, daſs die angegebene Art des Geschlossenseins ein Zusammenschrumpfen des Parallels auf null an zwei Orten fordert, daſs ferner um diese Punkte herum unendlich kleine Parallelen liegen und also durch diese Punkte unendlich viele Meridiane gehen müssen.

Die *Messungen des Azimuts* gelegentlich der Breitengradmessungen genügen somit allein schon die Frage zu entscheiden, ob die Messungen auf einer *Rotationsfläche* erfolgen oder nicht, ohne weitere *Voraussetzung* als die, *dafs die Fläche stetig gebogen und gekrümmt, sowie kugelartig geschlossen sei.* Nach allgemeinen Sätzen der Potentialtheorie ist aber (abgesehen von lokalen Krümmungsunstetigkeiten) im grofsen und ganzen ein stetiger Verlauf in Bezug auf Biegung und Krümmung vorhanden und die Fläche geschlossen, ohne sich selbst zu schneiden. Der kugelartige Charakter (der einfache Zusammenhang) folgt, wie schon bemerkt, aus den rohen Krümmungsmessungen in allen Azimuten durch die Bereisungen der Fläche (abgesehen von naheliegenden Beweismitteln anderer Art, wie z. B. der Form des Erdschattens).*)

Die Krümmungsmessungen im Meridian geben, nachdem der Rotationscharakter nachgewiesen ist, die Form der Meridiankurve ganz unzweideutig, falls in den Polen die Breite 90° beträgt, was durch die stetige Biegung gefordert wird.

Die praktischen Verhältnisse erheischen allerdings *die* Abweichung von unserem Idealfalle, dafs die Azimutmessungen nicht genau gegenseitig für Punkte desselben geographischen Meridians erfolgen können. Um die Azimute zu vergleichen, ist daher die Einführung von Näherungswerten für die Krümmungsverhältnisse notwendig. Allein dieses ist ganz unbedenklich, wenn die zu vergleichenden astronomischen Stationen immer nur einen kleinen geographischen Längenunterschied besitzen und wenn angenommen werden darf, dafs die nördlicher gelegene von zweien benachbarten ebenso oft östlich wie westlich fällt. Ein Fehler jener Werte wird dann ebenso wie die lokalen Unregelmäfsigkeiten Abweichungen von zufälligem Charakter erzeugen.

Diese lokalen Unregelmäfsigkeiten bedingen nun auch in Verbindung mit der Existenz der unvermeidlichen Beobachtungsfehler eine Ausdehnung der Azimutmessungen auf möglichst viele Teile der Fläche, ebenso wie der Breitengradmessungen überhaupt auf viele Meridiane. Was sich zeigende geringe systematische Abweichungen anlangt, so weisen diese auf geringe Abweichungen von der Rotationsgestalt hin, man braucht aber nicht zu fürchten, dafs dieselben diesen Gesamtcharakter der Fläche ganz verwischen.

*) Könnte die Erde Ringform haben, so würden Azimutmessungen allein nicht genügen, die Rotationsgestalt zu erweisen, denn L wird für Ringe an keiner Stelle unbestimmt, weil die Parallelen nirgends auf null zusammenschrumpfen.



§ 13. Fortsetzung: Breitengradmessungen. Wir behandeln jetzt noch den bereits oben berührten, aber als von geringer praktischer Bedeutung erklärten idealen Fall, dafs durch zahlreiche Breitengradmessungen es als eine allgemeine Eigenschaft des Geoids erkannt worden sei, auf allen geographischen Meridianen gleichlange Bögen zwischen je zwei Parallelen zu besitzen. Mathematisch präzisiert heifst dies: es ist

$$\frac{\partial s}{\partial B} \text{ eine Funktion von } B \text{ allein.} \tag{1}$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{\partial s}{\partial B}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial B}\right)^2. \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung eliminieren wir x und y mittelst der ersten Gleichung (4) und der Gleichung (6) des vorigen Paragraphen, welche ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial B} &= -\frac{\partial z}{\partial B}\tan B\cos L - \frac{\partial z}{\partial L}\sec^2 B\sin L \\ \frac{\partial y}{\partial B} &= -\frac{\partial z}{\partial B}\tan B\sin L + \frac{\partial z}{\partial L}\sec^2 B\cos L. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hiermit folgt aus (2) und (1), wenn F eine beliebige Funktion andeutet und anstatt B die Poldistanz $P = 90^0 - B$ eingeführt wird:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial P}\right)^2 \sin^2 P + \left(\frac{\partial z}{\partial L}\right)^2 = F(P). \tag{4}$$

Um diese Gleichung sogleich mit Rücksicht auf die Bedingung zu integrieren, dafs unsere Fläche wenigstens zwei Punkte hat, wo P gleich null ist, beschränken wir uns vorläufig darauf, ein um einen dieser Punkte herum liegendes so kleines Gebiet zu betrachten, dafs für dasselbe eine konvergente Entwicklung von z nach Potenzen von P möglich ist. Dabei verschieben wir den Koordinatenanfang in diesen Punkt und setzen demgemäfs

$$z = P^2 L_2 + P^3 L_3 + P^4 L_4 + \cdots, \tag{5}$$

worin L_2, L_3, $L_4 \cdots$ Funktionen von L allein sind. Das Glied mit der 1. Potenz von P ist weggelassen, da $\frac{\partial z}{\partial P}$ für $P = 0$ nach unseren Voraussetzungen über die Fläche gleich null werden mufs. Diese Voraussetzungen bedingen auch, dafs L_2 für alle Werte von L entweder nur positiv oder nur negativ ist. Denn sonst würde es keine zur z-Axe normale Ebene geben, welche unendlich nahe am ausgewählten Punkt die Fläche nicht schneidet und es würde also der

Punkt nicht zu jenen zwei notwendig vorhandenen Punkten gehören, von denen einer Koordinatenanfang werden sollte.

Wir bilden nun die nachstehenden Ausdrücke:

$$\frac{\partial z}{\partial P} = 2PL_2 + 3P^2L_3 + 4P^3L_4 \cdots$$

$$\sin P = P - \frac{1}{6}P^3 + \cdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial P}\sin P = 2P^2L_2 + 3P^3L_3 + \left(4L_4 - \frac{1}{3}L_2\right)P^4 + \cdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial L} = P^2L_2' + P^3L_3' + P^4L_4' + \cdots.$$

In der letzten Reihe bezeichnet der Strich oben an L_2, $L_3 \cdots$ die erste Derivation nach L. Führen wir vorstehende Formeln in (4) ein, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l} (4L_2^2 + L_2'^2)P^4 + (12L_2L_3 + 2L_2'L_3')P^5 \\ + \left(-\frac{4}{3}L_2^2 + 16L_2L_4 + 9L_3^2 + 2L_2'L_4' + L_3'^2\right)P^6 + \cdots = F(P). \end{array}\right\}(6)$$

Dieser Gleichung wird nur genügt, wenn die Koefficienten von P^4, P^5, $P^6 \ldots$ einzeln konstant sind. Zunächst mufs sein:

$$4L_2^2 + L_2'^2 = k^2, \tag{7}$$

k konstant. Hieraus folgt entweder $L_2 = \mathit{Constans}$ oder

$$dL = \frac{\pm\, dL_2}{\sqrt{k^2 - 4L_2^2}}, \quad L_2 = \pm\frac{k}{2}\sin 2L. \tag{8}$$

Von diesen beiden Lösungen ist nur die erste brauchbar, denn die zweite widerspricht bei $k \gtrless$ null (abgesehen von der Annahme $L_2 = \pm \text{ val abs } \frac{k}{2}\sin 2L$, nach welcher die Fläche Kanten haben würde) der Bedingung, dafs L_2 nur positiv oder nur negativ sein darf; bei $k =$ null aber würde der Krümmungsradius im Koordinatenanfange gleich null werden und somit die Richtung der Normale daselbst eine Unbestimmtheit erlangen.

Somit bleibt nur die Möglichkeit, $L_2 = \mathit{Constans}$ zu setzen. Da aber der Koefficient von P^5 in (6) auch konstant sein mufs, wird jetzt notwendig auch L_3 konstant. Und so zeigt jeder folgende Koefficient die Konstanz eines folgenden Wertes in der Reihe L_4, L_5, ... Demnach ergiebt sich, dafs z am Koordinatenanfang nur eine Funktion von P und damit nur eine Funktion der geographischen Breite B allein sein kann.

Unsere Fläche ist sonach in der Nähe der kritischen zwei Punkte eine Rotationsfläche; sie ist es aber überhaupt, da sie stetig sein soll und in jedem beliebig kleinen, jedoch endlichen Teil einer solchen Fläche bereits alle Eigenschaften zum Ausdruck gelangen. Man kann nämlich nahe der Grenze des Gebiets, wo (5) zu konvergieren aufhört, einen neuen Ausgangspunkt einer *Taylor*schen Entwicklung annehmen, die zum Teil im ersten Gebiet, zum Teil noch aufserhalb konvergiert. Auch hier kann nun z nur eine Funktion von B allein sein. In dieser Weise aber läfst sich nach und nach die ganze Fläche umfassen.

Die Voraussetzungen bei vorstehender Lösung der Aufgabe waren wesentlich dieselben, als bei der vorigen Aufgabe. Nur fordert die Entwicklung (5) Stetigkeit und Endlichkeit nicht nur für den ersten und zweiten Differentialquotienten (d. h. in Biegung und Krümmung), sondern auch für alle höheren Differentialquotienten. Für das Geoid aber kann man, abgesehen von lokalen Abweichungen, diese Bedingung aus denselben Gründen für die höheren Differentialquotienten als erfüllt betrachten, wie für die beiden ersten allein.

Tafel

für

$$\log W = \log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B},$$

die geographische Breite B von 47° bis 57°;
$\log e^2 = 7{,}8244104.15 - 10$

Anm.: Die 11. Decimalstelle ist nur beigesetzt, um auch für das Dreifache und Vierfache von log W die 10. Stelle höchstens 1 Einheit unsicher zu erhalten. Sie selbst kann im Maximum wohl bis zu 3 Einheiten irrig sein.

B	log W	1. Diff.	2. Diff.	B	log W	1. Diff.	2. Diff.
47° 0′	9,9992234.024$_3$	21.101$_4$	4	49°30′	9,9991603.561$_3$	20.895$_9$	9
5	2212.922$_9$	21.097$_2$	4	35	1582.665$_4$	20.886$_4$	10
10	2191.825$_7$	21.092$_7$	5	40	1561.779$_0$	20.876$_5$	10
15	2170.733$_0$	21.088$_1$	5	45	1540.902$_5$	20.866$_6$	10
20	2149.644$_9$	21.083$_3$	5	50	1520.035$_9$	20.856$_5$	10
25	2128.561$_6$	21.078$_4$	5	55	1499.179$_4$	20.846$_1$	10
47°30′	9,9992107.483$_2$	21.073$_2$	5	50° 0′	9,9991478.333$_3$	20.835$_7$	10
35	2086.410$_0$	21.067$_8$	5	5	1457.497$_6$	20.825$_1$	11
40	2065.342$_2$	21.062$_2$	6	10	1436.672$_5$	20.814$_2$	11
45	2044.280$_0$	21.056$_7$	6	15	1415.858$_3$	20.803$_1$	11
50	2023.223$_3$	21.050$_8$	6	20	1395.055$_2$	20.791$_9$	11
55	2002.172$_5$	21.044$_7$	6	25	1374.263$_3$	20.780$_5$	11
48° 0′	9,9991981.127$_8$	21.038$_4$	6	50°30′	9,9991353.482$_8$	20.768$_8$	12
5	1960.089$_4$	21.032$_0$	6	35	1332.714$_0$	20.757$_2$	12
10	1939.057$_4$	21.025$_5$	7	40	1311.956$_8$	20.745$_3$	12
15	1918.031$_9$	21.018$_8$	7	45	1291.211$_5$	20.733$_4$	12
20	1897.013$_1$	21.011$_8$	7	50	1270.478$_1$	20.721$_3$	12
25	1876.001$_3$	21.004$_7$	7	55	1249.756$_8$	20.708$_7$	13
48°30′	9,9991854.996$_6$	20.997$_4$	7	51° 0′	9,9991229.048$_1$	20.696$_0$	13
35	1833.999$_2$	20.989$_8$	8	5	1208.352$_1$	20.683$_2$	13
40	1813.009$_4$	20.982$_3$	8	10	1187.668$_9$	20.670$_2$	13
45	1792.027$_1$	20.974$_5$	8	15	1166.998$_7$	20.657$_1$	13
50	1771.052$_6$	20.966$_3$	8	20	1146.341$_6$	20.643$_7$	13
55	1750.086$_3$	20.958$_1$	8	25	1125.697$_9$	20.630$_3$	13
49° 0′	9,9991729.128$_2$	20.949$_7$	8	51°30′	9,9991105.067$_6$	20.616$_7$	14
5	1708.178$_5$	20.941$_3$	8	35	1084.450$_9$	20.603$_0$	14
10	1687.237$_2$	20.932$_6$	9	40	1063.847$_9$	20.589$_0$	14
15	1666.304$_6$	20.923$_6$	9	45	1043.258$_9$	20.574$_8$	14
20	1645.381$_0$	20.914$_4$	9	50	1022.684$_1$	20.560$_3$	15
25	1624.466$_6$	20.905$_3$	9	55	1002.123$_8$	20.545$_8$	15
49°30′	9,9991603.561$_3$		9	52° 0′	9,9990981.578$_0$		15

B	log W	1. Diff.	2. Diff.
52° 0′	9,9990981.578$_0$	20.531$_0$	15
5	0961.047$_0$	20.516$_1$	15
10	0940.530$_9$	20.501$_1$	15
15	0920.629$_8$	20.486$_0$	15
20	0899.543$_8$	20.470$_6$	15
25	0879.073$_2$	20.455$_0$	16
52°30′	9,9990858.618$_2$	20.439$_4$	16
35	0838.178$_8$	20.423$_5$	16
40	0817.755$_3$	20.407$_1$	16
45	0797.348$_2$	20.390$_9$	16
50	0776.957$_3$	20.374$_5$	16
55	0756.582$_8$	20.358$_0$	17
53° 0′	9,9990736.224$_8$	20.341$_3$	17
5	0715.883$_5$	20.324$_2$	17
10	0695.559$_3$	20.307$_0$	17
15	0675.252$_3$	20.289$_6$	17
20	0654.962$_7$	20.272$_3$	17
25	0634.690$_4$	20.254$_7$	18
53°30′	9,9990614.435$_7$	20.236$_9$	18
35	0594.198$_8$	20.218$_9$	18
40	0573.979$_9$	20.200$_8$	18
45	0553.779$_1$	20.182$_4$	18
50	0533.596$_7$	20.163$_8$	19
55	0513.432$_9$	20.145$_0$	19
54° 0′	9,9990493.287$_9$	20.126$_3$	19
5	0473.161$_6$	20.107$_5$	19
10	0453.054$_1$	20.088$_2$	19
15	0432.965$_9$	20.068$_7$	20
20	0412.897$_2$	20.049$_1$	20
25	0392.848$_1$	20.029$_5$	20
54°30′	9,9990372.818$_6$		20

B	log W	1. Diff.	2. Diff.
54°30′	9,9990372.818$_6$	20.009$_7$	20
35	0352.808$_9$	19.989$_7$	20
40	0332.819$_2$	19.969$_5$	20
45	0312.849$_7$	19.949$_1$	20
50	0292.900$_6$	19.928$_4$	21
55	0272.972$_2$	19.907$_7$	21
55° 0′	9,9990253.064$_5$	19.887$_0$	21
5	0233.177$_5$	19.866$_0$	21
10	0213.311$_5$	19.844$_7$	21
15	0193.466$_8$	19.823$_3$	21
20	0173.643$_5$	19.801$_8$	22
25	0153.841$_7$	19.780$_0$	22
55°30′	9,9990134.061$_7$	19.757$_9$	22
35	0114.303$_8$	19.735$_8$	22
40	0094.568$_0$	19.713$_8$	22
45	0074.854$_2$	19.691$_4$	22
50	0055.162$_8$	19.668$_9$	23
55	0035.493$_9$	19.646$_2$	23
56° 0′	9,9990015.847$_7$	19.623$_1$	23
5	9,9989996.224$_6$	19.600$_1$	23
10	9976.624$_5$	19.577$_0$	23
15	9957.047$_5$	19.553$_5$	24
20	9937.494$_0$	19.529$_9$	24
25	9917.964$_1$	19.506$_2$	24
56°30′	9,9989898.457$_9$	19.482$_3$	24
35	9878.975$_6$	19.458$_2$	24
40	9859.517$_4$	19.434$_0$	24
45	9840.083$_4$	19.409$_6$	24
50	9820.673$_8$	19.385$_2$	24
55	9801.288$_6$	19.360$_3$	25
57° 0′	9,9989781.928$_3$		25

Tafel

für

$$\log W = \log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \text{ und } \log w = \log \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta},$$

die geographische Breite B und die reduzierte Breite β von 0 bis 90°;
$\log e^2 = 7{,}8244104.15 - 10$.

B	log W			B	log W		
0° 0′	0,0000000.0	0.1	90° 0′	5° 0′	9,9999889.9	7.4	85° 0′
10	9,9999999.9	0.4	50	10	9882.5	7.7	50
20	9999.5	0.6	40	20	9874.8	7.9	40
30	9998.9	0.9	30	30	9866.9	8.2	30
40	9998.0	1.1	20	40	9858.7	8.4	20
50	9996.9	1.3	10	50	9850.3	8.7	10
1° 0′	9,9999995.6	1.6	89° 0′	6° 0′	9,9999841.6	8.8	84° 0′
10	9994.0	1.9	50	10	9832.8	9.2	50
20	9992.1	2.1	40	20	9823.6	9.3	40
30	9990.0	2.3	30	30	9814.3	9.6	30
40	9987.7	2.5	20	40	9804.7	9.9	20
50	9985.2	2.9	10	50	9794.8	10.1	10
2° 0′	9,9999982.3	3.0	88° 0	7° 0′	9,9999784.7	10.3	83° 0′
10	9979.3	3.3	50	10	9774.4	10.5	50
20	9976.0	3.6	40	20	9763.9	10.8	40
30	9972.4	3.8	30	30	9753.1	11.1	30
40	9968.6	4.0	20	40	9742.0	11.2	20
50	9964.6	4.3	10	50	9730.8	11.5	10
3° 0′	9,9999960.3	4.5	87° 0′	8° 0′	9,9999719.3	11.8	82° 0′
10	9955.8	4.8	50	10	9707.5	12.0	50
20	9951.0	5.0	40	20	9695.5	12.2	40
30	9946.0	5.3	30	30	9683.3	12.4	30
40	9940.7	5.5	20	40	9670.9	12.7	20
50	9935.2	5.7	10	50	9658.2	12.9	10
4° 0′	9,9999929.5	6.0	86° 0′	9° 0′	9,9999645.3	13.2	81° 0′
10	9923.5	6.2	50	10	9632.1	13.3	50
20	9917.3	6.5	40	20	9618.8	13.6	40
30	9910.8	6.7	30	30	9605.2	13.9	30
40	9904.1	7.0	20.	40	9591.3	14.1	20
50	9897.1	7.2	10	50	9577.2	14.3	10
5° 0′	9,9999889.9		85° 0′	10° 0′	9,9999562.9		80° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
10° 0′	9,9999562.9	14.5	80° 0′	17° 0′	9,9998760.8	23.7	73° 0′
10	9548.4	14.8	50	10	8737.1	23.9	50
20	9533.6	15.0	40	20	8713.2	24.1	40
30	9518.6	15.2	30	30	8689.1	24.3	30
40	9503.4	15.5	20	40	8664.8	24.5	20
50	9487.9	15.6	10	50	8640.3	24.7	10
11° 0′	9,9999472.3	15.9	79° 0′	18° 0′	9,9998615.6	24.9	72° 0′
10	9456.4	16.2	50	10	8590.7	25.1	50
20	9440.2	16.3	40	20	8565.6	25.3	40
30	9423.9	16.6	30	30	8540.3	25.5	30
40	9407.3	16.8	20	40	8514.8	25.7	20
50	9390.5	17.1	10	50	8489.1	25.8	10
12° 0′	9,9999373.4	17.3	78° 0′	19° 0′	9,9998463.3	26.1	71° 0′
10	9356.1	17.4	50	10	8437.2	26.3	50
20	9338.7	17.8	40	20	8410.9	26.4	40
30	9320.9	17.9	30	30	8384.5	26.7	30
40	9303.0	18.1	20	40	8357.8	26.8	20
50	9284.9	18.4	10	50	8331.0	27.0	10
13° 0′	9,9999266.5	18.6	77° 0′	20° 0′	9,9998304.0	27.3	70° 0′
10	9247.9	18.8	50	10	8276.7	27.4	50
20	9229.1	19.1	40	20	8249.3	27.6	40
30	9210.0	19.2	30	30	8221.7	27.7	30
40	9190.8	19.5	20	40	8194.0	28.0	20
50	9171.3	19.7	10	50	8166.0	28.1	10
14° 0′	9,9999151.6	19.9	76° 0	21° 0′	9,9998137.9	28.4	69° 0′
10	9131.7	20.1	50	10	8109.5	28.5	50
20	9111.6	20.4	40	20	8081.0	28.6	40
30	9091.2	20.5	30	30	8052.4	28.9	30
40	9070.7	20.8	20	40	8023.5	29.0	20
50	9049.9	21.0	10	50	7994.5	29.3	10
15° 0′	9,9999028.9	21.2	75° 0′	22° 0′	9,9997965.2	29.4	68° 0′
10	9007.7	21.4	50	10	7935.8	29.6	50
20	8986.3	21.6	40	20	7906.2	29.7	40
30	8964.7	21.8	30	30	7876.5	29.9	30
40	8942.9	22.1	20	40	7846.6	30.1	20
50	8920.8	22.2	10	50	7816.5	30.3	10
16° 0′	9,9998898.6	22.5	74° 0′	23° 0′	9,9997786.2	30.5	67° 0′
10	8876.1	22.6	50	10	7755.7	30.6	50
20	8853.5	22.9	40	20	7725.1	30.8	40
30	8830.6	23.1	30	30	7694.3	30.9	30
40	8807.5	23.3	20	40	7663.4	31.1	20
50	8784.2	23.4	10	50	7632.3	31.3	10
17° 0′	9,9998760.8		73° 0′	24° 0′	9,9997601.0		66° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
24° 0′	9,9997601.0	31.5	66° 0′	31° 0′	9,9996152.1	37.4	59° 0′
10	7569.5	31.6	50	10	6114.7	37.4	50
20	7537.9	31.7	40	20	6077.3	37.6	40
30	7506.2	32.0	30	30	6039.7	37.7	30
40	7474.2	32.1	20	40	6002.0	37.8	20
50	7442.1	32.2	10	50	5964.2	37.9	10
25° 0′	9,9997409.9	32.4	65° 0′	32° 0′	9,9995926.3	38.0	58° 0′
10	7377.5	32.6	50	10	5888.3	38.2	50
20	7344.9	32.7	40	20	5850.1	38.2	40
30	7312.2	32.9	30	30	5811.9	38.3	30
40	7279.3	33.0	20	40	5773.6	38.5	20
50	7246.3	33.2	10	50	5735.1	38.5	10
26° 0′	9,9997213.1	33.4	64° 0′	33° 0′	9,9995696.6	38.6	57° 0′
10	7179.7	33.5	50	10	5658.0	38.8	50
20	7146.2	33.6	40	20	5619.2	38.8	40
30	7112.6	33.8	30	30	5580.4	39.0	30
40	7078.8	33.9	20	40	5541.4	39.0	20
50	7044.9	34.1	10	50	5502.4	39.1	10
27° 0′	9,9997010.8	34.2	63° 0′	34° 0′	9,9995463.3	39.2	56° 0′
10	6976.6	34.4	50	10	5424.1	39.3	50
20	6942.2	34.5	40	20	5384.8	39.4	40
30	6907.7	34.7	30	30	5345.4	39.5	30
40	6873.0	34.8	20	40	5305.9	39.6	20
50	6838.2	34.9	10	50	5266.3	39.7	10
28° 0′	9,9996803.3	35.1	62° 0′	35° 0′	9,9995226.6	39.7	55° 0′
10	6768.2	35.2	50	10	5186.9	39.8	50
20	6733.0	35.3	40	20	5147.1	40.0	40
30	6697.7	35.5	30	30	5107.1	39.9	30
40	6662.2	35.6	20	40	5067.2	40.1	20
50	6626.6	35.8	10	50	5027.1	40.2	10
29° 0′	9,9996590.8	35.8	61° 0′	36° 0′	9,9994986.9	40.2	54° 0′
10	6555.0	36.0	50	10	4946.7	40.3	50
20	6519.0	36.2	40	20	4906.4	40.4	40
30	6482.8	36.2	30	30	4866.0	40.4	30
40	6446.6	36.4	20	40	4825.6	40.5	20
50	6410.2	36.5	10	50	4785.1	40.6	10
30° 0′	9,9996373.7	36.7	60° 0′	37° 0′	9,9994744.5	40.7	53° 0′
10	6337.0	36.7	50	10	4703.8	40.7	50
20	6300.3	36.9	40	20	4663.1	40.8	40
30	6263.4	37.0	30	30	4622.3	40.9	30
40	6226.4	37.1	20	40	4581.4	40.9	20
50	6189.3	37.2	10	50	4540.5	41.0	10
31° 0′	9,9996152.1		59° 0′	38° 0′	9,9994499.5		52° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
38° 0′	9,9994499.5		52° 0′	45° 0′	9,9992741.3		45° 0′
10	4458.5	41.0	50	10	2699.0	42.3	50
20	4417.4	41.1	40	20	2656.7	42.3	40
30	4376.2	41.2	30	30	2614.4	42.3	30
40	4335.0	41.2	20	40	2572.1	42.3	20
50	4293.8	41.2	10	50	2529.8	42.3	10
39° 0′	9,9994252.4	41.4	51° 0′	46° 0′	9,9992487.5	42.3	44° 0′
10	4211.1	41.3	50	10	2445.2	42.3	50
20	4169.7	41.4	40	20	2403.0	42.2	40
30	4128.2	41.5	30	30	2360.7	42.3	30
40	4086.7	41.5	20	40	2318.5	42.2	20
50	4045.1	41.6	10	50	2276.2	42.3	10
40° 0′	9,9994003.5	41.6	50° 0′	47° 0′	9,9992234.0	42.2	43° 0′
10	3961.8	41.7	50	10	2191.8	42.2	50
20	3920.1	41.7	40	20	2149.6	42.2	40
30	3878.4	41.7	30	30	2107.5	42.1	30
40	3836.6	41.8	20	40	2065.3	42.2	20
50	3794.8	41.8	10	50	2023.2	42.1	10
41° 0′	9,9993752.9	41.9	49° 0′	48° 0′	9,9991981.1	42.1	42° 0′
10	3711.1	41.8	50	10	1939.1	42.0	50
20	3669.1	42.0	40	20	1897.0	42.1	40
30	3627.2	41.9	30	30	1855.0	42.0	30
40	3585.2	42.0	20	40	1813.0	42.0	20
50	3543.2	42.0	10	50	1771.1	41.9	10
42° 0′	9,9993501.2	42.0	48° 0′	49° 0′	9,9991729.1	42.0	41° 0′
10	3459.1	42.1	50	10	1687.2	41.9	50
20	3417.0	42.1	40	20	1645.4	41.8	40
30	3374.9	42.1	30	30	1603.6	41.8	30
40	3332.7	42.2	20	40	1561.8	41.8	20
50	3290.6	42.1	10	50	1520.0	41.8	10
43° 0′	9,9993248.4	42.2	47° 0′	50° 0′	9,9991478.3	41.7	40° 0′
10	3206.2	42.2	50	10	1436.7	41.6	50
20	3164.0	42.2	40	20	1395.1	41.6	40
30	3121.8	42.2	30	30	1353.5	41.6	30
40	3079.5	42.3	20	40	1312.0	41.5	20
50	3037.3	42.2	10	50	1270.5	41.5	10
44° 0′	9,9992995.0	42.3	46° 0′	51° 0′	9,9991229.0	41.5	39° 0′
10	2952.7	42.3	50	10	1187.7	41.3	50
20	2910.5	42.2	40	20	1146.3	41.4	40
30	2868.2	42.3	30	30	1105.1	41.2	30
40	2825.9	42.3	20	40	1063.8	41.3	20
50	2783.6	42.3	10	50	1022.7	41.1	10
45° 0′	9,9992741.3	42.3	45° 0′	52° 0′	9,9990981.6	41.1	38° 0′
	log w		β		log w		β

B	log *W*			*B*	log *W*		
52° 0′	9,9990981.6		38° 0′	59° 0′	9,9989325.1		31° 0′
10	0940.5	41.1	50	10	9287.8	37.3	50
20	0899.5	41.0	40	20	9250.5	37.3	40
30	0858.6	40.9	30	30	9213.4	37.1	30
40	0817.8	40.8	20	40	9176.4	37.0	20
50	0777.0	40.8	10	50	9139.5	36.9	10
53° 0′	9,9990736.2	40.8	37° 0′	60° 0′	9,9989102.8	36.7	30° 0′
10	0695.6	40.6	50	10	9066.2	36.6	50
20	0655.0	40.6	40	20	9029.6	36.6	40
30	0614.4	40.6	30	30	8993.3	36.3	30
40	0574.0	40.4	20	40	8957.0	36.3	20
50	0533.6	40.4	10	50	8920.9	36.1	10
54° 0′	9,9990493.3	40.3	36° 0′	61° 0′	9,9988884.9	36.0	29° 0′
10	0453.1	40.2	50	10	8849.0	35.9	50
20	0412.9	40.2	40	20	8813.3	35.7	40
30	0372.8	40.1	30	30	8777.7	35.6	30
40	0332.8	40.0	20	40	8742.2	35.5	20
50	0292.9	39.9	10	50	8706.8	35.4	10
55° 0′	9,9990253.1	39.8	35° 0′	62° 0′	9,9988671.6	35.2	28° 0′
10	0213.3	39.8	50	10	8636.6	35.0	50
20	0173.6	39.7	40	20	8601.7	34.9	40
30	0134.1	39.5	30	30	8566.9	34.8	30
40	0094.6	39.5	20	40	8532.2	34.7	20
50	0055.2	39.4	10	50	8497.7	34.5	10
56° 0′	9,9990015.8	39.4	34° 0′	63° 0′	9,9988463.4	34.3	27° 0′
10	9,9989976.6	39.2	50	10	8429.1	34.3	50
20	9937.5	39.1	40	20	8395.1	34.0	40
30	9898.5	39.0	30	30	8361.1	34.0	30
40	9859.5	39.0	20	40	8327.4	33.7	20
50	9820.7	38.8	10	50	8293.7	33.7	10
57° 0′	9,9989781.9	38.8	33° 0′	64° 0′	9,9988260.3	33.4	26° 0′
10	9743.3	38.6	50	10	8226.9	33.4	50
20	9704.7	38.6	40	20	8193.8	33.1	40
30	9666.3	38.4	30	30	8160.7	33.1	30
40	9628.0	38.3	20	40	8127.9	32.8	20
50	9589.7	38.3	10	50	8095.2	32.7	10
58° 0′	9,9989551.6	38.1	32° 0′	65° 0′	9,9988062.6	32.6	25° 0′
10	9513.6	38.0	50	10	8030.2	32.4	50
20	9475.7	37.9	40	20	7998.0	32.2	40
30	9437.9	37.8	30	30	7965.9	32.1	30
40	9400.2	37.7	20	40	7934.0	31.9	20
50	9362.6	37.6	10	50	7902.2	31.8	10
59° 0′	9,9989325.1	37.5	31° 0′	66° 0′	9,9987870.7	31.5	24° 0′
	log *w*		*β*		log *w*		*β*

B	log W			B	log W		
66° 0′	9,9987870.7		24° 0′	73° 0′	9,9986705.1		17° 0′
10	7839.2	31.5	50	10	6681.4	23.7	50
20	7808.0	31.2	40	20	6658.0	23.4	40
30	7776.9	31.1	30	30	6634.8	23.2	30
40	7746.0	30.9	20	40	6611.8	23.0	20
50	7715.2	30.8	10	50	6589.0	22.8	10
67° 0′	9,9987684.6	30.6	23° 0′	74° 0′	9,9986566.5	22.5	16° 0′
10	7654.2	30.4	50	10	6544.1	22.4	50
20	7624.0	30.2	40	20	6521.9	22.2	40
30	7593.9	30.1	30	30	6500.0	21.9	30
40	7564.0	29.9	20	40	6478.2	21.8	20
50	7534.3	29.7	10	50	6456.7	21.5	10
68° 0′	9,9987504.7	29.6	22° 0′	75° 0′	9,9986435.4	21.3	15° 0′
10	7475.4	29.3	50	10	6414.2	21.2	50
20	7446.2	29.2	40	20	6393.3	20.9	40
30	7417.2	29.0	30	30	6372.7	20.6	30
40	7388.3	28.9	20	40	6352.2	20.5	20
50	7359.7	28.6	10	50	6332.0	20.2	10
69° 0′	9,9987331.2	28.5	21° 0′	76° 0′	9,9986312.0	20.0	14° 0′
10	7302.9	28.3	50	10	6292.2	19.8	50
20	7274.8	28.1	40	20	6272.6	19.6	40
30	7246.9	27.9	30	30	6253.2	19.4	30
40	7219.2	27.7	20	40	6234.0	19.2	20
50	7191.7	27.5	10	50	6215.1	18.9	10
70° 0′	9,9987164.3	27.4	20° 0′	77° 0′	9,9986196.4	18.7	13° 0′
10	7137.1	27.2	50	10	6177.9	18.5	50
20	7110.2	26.9	40	20	6159.6	18.3	40
30	7083.4	26.8	30	30	6141.6	18.0	30
40	7056.8	26.6	20	40	6123.8	17.8	20
50	7030.4	26.4	10	50	6106.2	17.6	10
71° 0′	9,9987004.2	26.2	19° 0′	78° 0′	9,9986088.8	17.4	12° 0′
10	6978.2	26.0	50	10	6071.7	17.1	50
20	6952.3	25.9	40	20	6054.8	16.9	40
30	6926.7	25.6	30	30	6038.1	16.7	30
40	6901.3	25.4	20	40	6021.6	16.5	20
50	6876.1	25.2	10	50	6005.4	16.2	10
72° 0′	9,9986851.0	25.1	18° 0′	79° 0′	9,9985989.4	16.0	11° 0′
10	6826.2	24.8	50	10	5973.6	15.8	50
20	6801.6	24.6	40	20	5958.0	15.6	40
30	6777.1	24.5	30	30	5942.7	15.3	30
40	6752.9	24.2	20	40	5927.6	15.1	20
50	6728.9	24.0	10	50	5912.7	14.9	10
73° 0′	9,9986705.1	23.8	17° 0′	80° 0′	9,9985898.1	14.6	10° 0′
	log w		β		log w		β

B	log W			B	log W		
80° 0′	9,9985898.1	14.4	10° 0′	85° 0′	9,9985569.0	7.2	5° 0′
10	5883.7	14.1	50	10	5561.8	7.0	50
20	5869.6	14.0	40	20	5554.8	6.8	40
30	5855.6	13.7	30	30	5548.0	6.5	30
40	5841.9	13.4	20	40	5541.5	6.3	20
50	5828.5	13.3	10	50	5535.2	6.0	10
81° 0′	9,9985815.2	13.0	9° 0′	86° 0′	9,9985529.2	5.8	4° 0′
10	5802.2	12.7	50	10	5523.4	5.5	50
20	5789.5	12.6	40	20	5517.9	5.3	40
30	5776.9	12.2	30	30	5512.6	5.1	30
40	5764.7	12.1	20	40	5507.5	4.8	20
50	5752.6	11.8	10	50	5502.7	4.5	10
82° 0′	9,9985740.8	11.6	8° 0′	87° 0′	9,9985498.2	4.3	3° 0′
10	5729.2	11.3	50	10	5493.9	4.1	50
20	5717.9	11.1	40	20	5489.8	3.8	40
30	5706.8	10.9	30	30	5486.0	3.6	30
40	5695.9	10.6	20	40	5482.4	3.3	20
50	5685.3	10.4	10	50	5479.1	3.1	10
83° 0′	9,9985674.9	10.2	7° 0′	88° 0′	9,9985476.0	2.9	2° 0′
10	5664.7	9.9	50	10	5473.1	2.6	50
20	5654.8	9.6	40	20	5470.5	2.3	40
30	5645.2	9.5	30	30	5468.2	2.1	30
40	5635.7	9.1	20	40	5466.1	1.9	20
50	5626.6	9.0	10	50	5464.2	1.6	10
84° 0′	9,9985617.6	8.7	6° 0′	89° 0′	9,9985462.6	1.3	1° 0′
10	5608.9	8.4	50	10	5461.3	1.1	50
20	5600.5	8.3	40	20	5460.2	0.9	40
30	5592.2	7.9	30	30	5459.3	0.6	30
40	5584.3	7.8	20	40	5458.7	0.4	20
50	5576.5	7.5	10	50	5458.3	0.1	10
85° 0′	9,9985569.0		5° 0′	90° 0′	9,9985458.2		0° 0′
	log w		β		log w		β

DIE

MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN

THEORIEEN

DER

HÖHEREN GEODÄSIE.

(2)

DIE

MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN

THEORIEEN

DER

HÖHEREN GEODÄSIE.

II. TEIL:

DIE PHYSIKALISCHEN THEORIEEN,

MIT UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE MATHEMATISCHE ERDGESTALT AUF GRUND DER BEOBACHTUNGEN.

VON

DR. F. R. HELMERT,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND ZWEI LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Vorwort.

Die physikalischen Methoden der höheren Geodäsie erfreuten sich in dem letzten Jahrzehnt einer lebhaften, immer mehr gesteigerten Beachtung. In Erkenntnis ihrer Wichtigkeit faſste ich daher den Entschluſs zu einer systematischen Darstellung der grundlegenden Theorieen, mit deren Ausarbeitung ich bereits 1877 begann. Die Vollendung und Herausgabe verzögerte sich durch die inzwischen erkannte Notwendigkeit, eine Darstellung der mathematischen Theorieen vorauszuschicken, und hatte um so weniger Eile, als 1878 *H. Bruns* in seiner Abhandlung „die Figur der Erde“ einen überaus lichtvollen Grundriſs der Sache gab. Es schien mir schlieſslich sehr wünschenswert, die ausführliche Bearbeitung der Theorieen durch praktische Resultate für die Erdgestalt zu ergänzen, um dem nun vorliegenden Buche nach Möglichkeit Wert zu verleihen.

Dasselbe zerfällt in acht Kapitel. Die drei ersten Kapitel geben vom Standpunkte der Potentialtheorie aus analytische Untersuchungen über die Figur der Erde, woran sich im vierten Kapitel synthetische Betrachtungen über den Einfluſs gegebener Störungsmassen anschlieſsen; im fünften Kapitel folgen alsdann kritische Untersuchungen über die bis dahin vorausgesetzte Unveränderlichkeit der Erdgestalt. Die Aufschlüsse, welche die Astronomie über Figur und Inneres der Erde gewährt, werden im sechsten Kapitel besprochen, und ein siebentes und achtes Kapitel erörtern die allgemeinen Grundlagen des geometrischen und des trigonometrischen Nivellements.

Die Theorie der Figur der Erde beginnt im ersten Kapitel mit der analytischen Formulierung des Begriffes der Beschleunigung der Schwerkraft und der Einführung des Potentiales derselben, worauf die allgemeinen Eigenschaften der Niveauflächen, insbesondere ihre von *H. Bruns* entdeckten Krümmungs-Diskontinuitäten behandelt werden.

Das zweite Kapitel stellt die Relationen für verschiedene geodätische Elemente auf, welche der allgemeinen sphäroidischen Form der Niveauflächen, der Normalform (S. 89), entsprechen. Hier findet insbesondere das *Clairautsche Theorem* seine Darstellung in einfacher (S. 76) und erweiterter Form (S. 78). Der Wichtigkeit dieses Theoremes wegen hielt ich es für angemessen, eingehend seine Geschichte zu geben; daſs sich daran einige Betrachtungen über rotierende Flüssigkeitssphäroide schlieſsen, wird wohl nicht unpassend erscheinen.

Für die allgemeine Abplattung des Erdsphäroides gelange ich durch Diskussion von 122 Pendellängen zu dem Werte 1 : 299,26 ± 1,26. Bei der Ableitung desselben weiche ich von früheren Rechnern erheblich ab. Zunächst bei der Reduktion aufs Meeresniveau. Ich vervollständige die übliche Reduktion durch einen Zusatz, welcher der

Kondensation der (sichtbaren) Störungsmassen der Erdoberfläche auf eine zur Meeresfläche parallele Fläche in drei Meilen Tiefe entspricht und erlange dadurch erstens den Vorteil, dafs die Bedenken über die Anwendbarkeit des Ergebnisses des Clairautschen Theoremes auf die wirkliche Abplattung der Erde schwinden (S. 237), und erziele zweitens eine geradezu überraschende Übereinstimmung zwischen den Pendellängen auf dem Festland und denen an den Küsten einerseits, wie für die nach Zonen geographischer Breite von 10 zu 10° gruppierten Pendellängen andererseits (S. 226 u. 240), so dafs an der grofsen Sicherheit des Endresultates nicht zu zweifeln ist. Es wird den Leser allerdings vielleicht im ersten Augenblick befremden, wenn er erfährt, dafs ich die Pendellängen für die kleinen oceanischen Inseln von der Rechnung ausgeschlossen habe. Da aber, wie ich wohl zuerst zeige, im Mittel der Nord- und Südhälfte der Erdoberfläche in jeder Breite die Ausdehnungen von Festland und von Meer nach der geographischen Länge in nahezu gleichem Verhältnis stehen, und da ferner die Inselstationen in verschiedenen Breiten im Vergleiche zu Festland- und Küstenstationen wesentlich dasselbe Verhalten zeigen, so entspricht das Verfahren lediglich der Forderung der Theorie nach gleichmäfsiger Verteilung der Pendelstationen über die Erdoberfläche, und die Vernachlässigung der Inselstationen ist nur eine scheinbare (S. 238 und 242).

Die kontinentalen Undulationen des Geoides gegen seine Normalform hat man in neuerer Zeit vielfach aus den Anomalieen der Schwerkraft nach einer einfachen Proportionalität berechnet. Dafs dieses Verfahren zu groben Irrtümern führen kann und theoretisch unhaltbar ist, wird durch Vervollständigung der betreffenden Formel (S. 261 u. 262) nachgewiesen. Aus einzelnen Werten jener Anomalieen würde man darnach nur „die Dicke der ideellen störenden Schicht“ unterhalb der Station finden können, wenn bereits die Störung des geoidischen Radiusvektors daselbst ermittelt wäre, wozu nach *Stokes* (S. 249) die Kenntnis der Schwerkraft auf der ganzen Erdoberfläche erforderlich ist.

Um nun doch mit dem vorhandenen Beobachtungsmaterial einigen Aufschlufs über die kontinentalen Undulationen zu erhalten, ermittele ich im vierten Kapitel (S. 313 u. ff.) die Störungswirkung der fünf als abgestumpfte, 4000^m dicke Kreiskegel betrachteten Kontinente der Erde auf einer homogen geschichteten Erdkugel. Ich begnüge mich dabei nicht mit der Ausrechnung der radialen Störungen (Tafel I), sondern bestimme auch durch dieselben mit Hilfe eines aus der Potentialtheorie geschöpften Theoremes die Störungen der Schwerkraft, wonach sich zeigt, dafs der behandelte Fall dem Zustande der Erde (abgesehen von ihrer Abplattung) nicht entsprechend ist, dafs man vielmehr zur Herbeiführung der Übereinstimmung in der Erdrinde noch ideelle (d. h. eventuell denjenigen in dem Erdinneren äquivalente) Störungsmassen annehmen mufs. Von den zwei möglichen Fällen: relativer Dichtigkeitsüberschufs der Erdkruste unter den oceanischen Inseln oder relativer Dichtigkeitsmangel unter den Konti-

nenten, besitzt der letztere die gröſsere Wahrscheinlichkeit, da es für ihn allein und zwar durch die unter den groſsen Gebirgen Himalaya und Kaukasus (S. 228) konstatierten Massendefekte ein Analogon giebt. Damit aber gelange ich zu dem Endresultat, daſs die Figur der Erde einem einfachen Sphäroid im allgemeinen viel näher kommt als die Störungen der Kontinentalmassen allein (Tafel I) erwarten lassen (S. 365).

Unter diesen Umständen ist der Wert der Gradmessungen zur Bestimmung der allgemeinen Abplattung der Erde erheblich gröſser als für den Fall des Bestehens groſser kontinentaler Undulationen des Geoides unterhalb der Kontinente. Mit Rücksicht auf die gegenwärtige Ausbreitung und ungünstige Verteilung der Gradmessungen kann es aber trotzdem nicht befremden, daſs der aus ihnen nach *Clarke* folgende Abplattungswert 1 : 294 von dem oben angegebenen ziemlich stark abweicht. Dieser findet auch eine gute Bestätigung sowohl in den Mondstörungen (sechstes Kapitel S. 473) als in der Präzessionskonstanten. Man müſste diese letztere vermutlich erheblich ändern, wollte man an dem von manchen acceptierten Abplattungswerte 1 : 289 festhalten und zugleich der Existenz eines Dichtigkeitsgesetzes für das Erdinnere in Form einer einfachen Potenzreihe groſse Wahrscheinlichkeit zuschreiben, da mit dieser Abplattung und dem Beobachtungswert der Präzessionskonstanten ein Gesetz von solcher Form nicht zu bestehen scheint (S. 488 u. 489).

Nächst den oben erwähnten Untersuchungen enthalten das dritte und vierte Kapitel noch allgemeine Sätze über die kontinentalen Undulationen des Geoides und spezielle Betrachtungen über die Störungswirkungen gegebener Massen der Erdkruste von verschiedener Form.

Der Anfang des fünften Kapitels entwickelt die Störungen des Lotes durch Mond und Sonne; weiterhin werden besonders die kleinen Bewegungen der Erdaxe im Erdkörper, namentlich unter dem Einfluſs der Verschiebung von Massen auf der Erdoberfläche, an der Hand der Theorie und Erfahrung behandelt. Im sechsten Kapitel sind u. a. einige Blätter der Untersuchung gewidmet, inwieweit sich der Theorie nach aus Beobachtungen der lokalen Mondparallaxen die geozentrischen Koordinaten eines Erdortes bestimmen lassen, wenn angenommen wird, daſs die Mondbewegung aus den Mondtafeln nur für je einen halben Tag genau entnommen werden kann. Darnach ist im allgemeinen nur eine unvollständige Lösung dieses Problemes der Ortsbestimmung möglich.

Bei der Theorie des geometrischen Nivellements im siebenten Kapitel gelange ich zu der Forderung, daſs in Ermangelung strenger Reduktion mittelst der beobachteten Intensität der Schwerkraft bei Berechnung der Meereshöhen wenigstens die Variation der Schwere mit der geographischen Breite berücksichtigt werde und daſs man sich hiervon durch die Unmöglichkeit der Berücksichtigung der Anomalieen der Schwere nicht abhalten lassen darf, indem der Einfluſs der letzteren in den Resultaten ausgedehnter Nivellements weniger zu fürchten ist, als derjenige der Variation mit der Breite. Beispiels-

weise enthält das unmittelbare Ergebnis eines Nivellements von der Ostsee nach dem Mittelmeer wegen dieser Variation Fehler, die je nach dem genommenen Wege bis zu mehreren Decimetern ansteigen können und sämtlich gleiches Vorzeichen haben. Der Einflufs der Anomalieen der Schwerkraft aber dürfte in diesem Falle kaum mehr als einige Centimeter betragen, welche in den auf verschiedenen Wegen erhaltenen Resultaten nicht notwendig in gleichem Sinne auftreten.

Bei der Theorie der Refraktion im achten Kapitel habe ich mich darauf beschränkt, solche Formeln abzuleiten, welche voraussetzen, dafs das Gesetz für die Änderung der Temperatur mit der Höhe durch eine stark konvergente Reihe nach *Taylor* darstellbar ist. Für diesen Fall sind die Formeln allgemein gültig, so dafs man die Konstanten aus zweckmäfsig angeordneten Beobachtungen bestimmen kann. Ein Zahlenbeispiel ist den von *v. Bauernfeind* publizierten Messungen entnommen. Übrigens trifft gerade in diesem Beispielsfalle, trotzdem mit Tagesmitteln gerechnet ist, die Voraussetzung nicht zu. Obwohl ich nun auch einige Erwägungen darüber anstelle, wie solchen anormalen Verhältnissen beizukommen wäre, glaube ich doch, dafs man bei Anwendung des trigonometrischen Verfahrens zur Bestimmung des Geoides nach *Villarceau* und *Bruns* am besten allen theoretischen Erwägungen durch Einschränkung auf mäfsige Höhendifferenzen und kurze Distanzen, etwa 15 bis 20 Kilometer, aus dem Wege geht und mit der Kreishypothese rechnet. Wie man aber auch die Anordnung treffen möge, ein sehr mühsames Verfahren bleibt diese Methode des Detail-Studiums der Geoidform immer, und man wird seine Anwendung sicherlich möglichst beschränken. Ich bin überzeugt, dafs man durch die Methode der Lotabweichungen (Bd. 1 S. 564 u. ff.) die Form des Geoides ebenso genau und weit rascher findet, wenn man hauptsächlich Meridianprofile durch dichtgedrängte Breitenstationen bearbeitet, und habe für diese empfehlenswerte Methode den Namen *astronomisches Nivellement* vorgeschlagen (S. 599).

Bei der Bearbeitung des Buches bin ich von mehreren Seiten durch Darleihen von Originalwerken und schriftliche Notizen unterstützt worden, was allein es ermöglicht hat, den mir notwendig scheinenden Grad von Vollständigkeit zu erreichen.

Für diese freundliche Unterstützung danke ich auch an dieser Stelle.

Die Tafel I hat Herr *Hegemann*, jetzt vereideter Geometer, während seiner Studienzeit hierselbst nach meinen Rechnungen entworfen, während Tafel II von Herrn *Fenner*, Ingenieur und Assistent der Geodäsie an der Aachener technischen Hochschule, berechnet und gezeichnet ist. Derselbe hat sich auch bei der Revision der Druckbogen in für mich sehr dankenswerter Weise beteiligt.

Aachen, September 1884.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

1. Kapitel. Allgemeine Eigenschaften der Niveauflächen.

2. Kapitel. **Bestimmung der Abplattung aus Schweremessungen.**

4. Kapitel. Synthetische Untersuchungen über den Einfluſs gegebener Massen auf die Niveauflächen in der Nähe der Erdoberfläche.



5. Kapitel. Zeitliche Änderungen der Niveauflächen.

8. Kapitel. Die trigonometrische Höhenmessung.

Mit Bemerkungen über die Lateralrefraktion und die Aberration.

Berichtigungen und Zusätze.

Zu Bd. I.

S. XV 3. u. 4. Z. v. u. ist λ_6 anstatt λ_σ zu lesen.
S. 5 Anm. Vergl. dazu auch S. 613 und Bd. 2 S. 16 u. ff.
S. 8 § 6. Vergl. dazu Bd. 2 S. 47 § 27.
S. 16 o. Vergl. dazu Bd. 2 S. 364 § 38.
S. 16 u. Über maximale Lotablenkung s. Bd. 2 S. 346.
S. 17. Über Krümmungsänderungen der Niveauflächen vergl. Bd. 2 Kap. 4 die §§ 1 bis 16.
S. 22 § 5 2. Absatz. Vergl. Bd. 2 Kap. 1 die §§ 22 bis 25.
S. 80 mufs der Schlufssatz von § 8 lauten: „falls das gegebene Gegenstück demjenigen der beiden anderen gegebenen Stücke gegenüberliegt, welches den gröfseren Sinus hat“.
S. 137 ist im Absatz hinter Gleichung (8) die Bemerkung über die Lage der grofsen Axe als irrig zu streichen.
S. 138 ist in der 1. Gl. von o. überall sin U anstatt cos U zu setzen.
S. 158 ist inmitten bei dem Kleingedruckten $\mathfrak{k}$ anstatt k zu lesen.
S. 314 ist in (7*) M'^4 für M^4 zu setzen.
S. 375 (13) soll der Nenner in der 2. Z. lauten: $30240 a_0^4$.
S. 393 u. soll überall $\mathfrak{k}$ anstatt k stehen.
S. 459 fehlt in der 2. Formel (1) rechter Hand der Faktor sec η'.
S. 463 (2) lies in der 1. Z. $(B_1 - F)^2$ anstatt $(\div)^2$ und in der 2. Z. $[1{,}4873099.71] : W_m^3$.
S. 570 Fig. 45 ist das Wort *Harzburg* bei *Fallstein* zu streichen und vor *Ilsenburg* anzubringen.
S. 595 lies in der 2. Z. vor (2) $m + 1$ anstatt m.

Zu Bd. II.

S. 87 Anm. u. 1. Z. (*London*) soll hinter L_0 stehen.
S. 94 2. Z. v. u. lies $dg : dh$ anstatt dg.
S. 173 4. Z. v. u. lies § 32 anstatt § 34.
S. 225 Fig. 81 lies cot ν anstatt cot v.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Niveauflächen.

§ 1. **Das Prinzip von d'Alembert.** Wir beziehen die Erde auf ein System rechtwinkeliger Koordinaten x, y und z. Im Punkte (xyz) befinde sich das Masseneleme nt dm, auf dessen Masseneinheit die Kräfte X, Y und Z bezw. in Richtung der positiven Axen der x, y und z wirken. Alsdann ist für das Element dm die bewegende Kraft parallel zu den genannten Axen bezw. gleich

$$Xdm, \quad Ydm, \quad Zdm. \tag{1}$$

Nun ist aber die Beschleunigung des Punktes (xyz) parallel zu den drei Koordinatenaxen bezw. gleich

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

wobei dt das Differential der Zeit bezeichnet; es sind daher die Komponenten der bei der Bewegung des im Punkte (xyz) lagernden Massenelements dm wirklich zur Geltung gelangenden bewegenden Kraft bezw. gleich

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,dm, \quad \frac{d^2y}{dt^2}\,dm, \quad \frac{d^2z}{dt^2}\,dm. \tag{2}$$

Die nicht zur Geltung gelangenden Differenzen der einander entsprechenden Ausdrücke (1) und (2), nämlich die Ausdrücke

$$\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) dm,$$

$$\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) dm,$$

$$\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) dm$$

werden die verlornen Kräfte genannt, wobei die Bezeichnung im algebraischen Sinne aufzufassen ist, da sie auch negativ sein können. Diese verlornen Kräfte müssen nach dem Prinzip von *d'Alembert* für den Komplex aller Massenelemente der Erde zusammengenommen im Gleichgewicht stehen und zwar gelangt man in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu der folgenden analytischen Formulierung des *d'Alembert*schen Prinzips:

Es erfolgt die Bewegung dergestalt, dafs in jedem Zeitmoment die Gleichung

$$\Sigma \left\{ \begin{aligned} &\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta x \\ + &\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta y \\ + &\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta z \end{aligned} \right\} = 0, \tag{3}$$

in welcher die Summierung über alle Massenelemente erstreckt werden mufs, erfüllt ist. δx, δy und δz bezeichnen hierbei die Axenprojektionen unendlich kleiner, sogenannter virtueller Verrückungen δs der Angriffspunkte (xyz) der Kräfte, die nur den geometrisch-physikalischen Bedingungen für die gegenseitige Lage der Teile der Erde entsprechen müssen, die aber sonst willkürlich sind und daher mit den wirklichen Bewegungen im allgemeinen nicht zusammenfallen.

Betrachten wir insbesondere die Erde als einen starren Körper, so haben die δs nur den Bedingungen für die unveränderte gegenseitige Entfernung der Punkte zu genügen; insoweit dies der Fall ist, erfolgt die Bewegung in der Art, dafs Gleichung (3) für jedes System der virtuellen Verschiebungen δs erfüllt wird.

Im Sinne der Mechanik sagt die Gleichung (3): Die mechanische Arbeit der verlornen Kräfte für die ganze Erde zusammengenommen ist in jedem Augenblicke für jedes System virtueller Verschiebungen der Angriffspunkte gleich null.

Wir wenden die Gleichung (3) dazu an, um die Bewegung der Teile der Erde zu zerfällen in eine allen Teilen gemeinsame und mit derjenigen des Erdschwerpunktes übereinstimmende, sowie in eine relative um diesen Punkt.

§ 2. **Bewegung des Erdschwerpunkts.** Wie auch die Konstitution der Erde sei: zu den möglichen virtuellen Verschiebungen gehört jedenfalls auch eine solche der ganzen Erde um einen für alle Punkte gemeinsamen Betrag δx parallel zur x-Axe. Dabei sind die δy und δz gleich null, sodafs in der obigen Gleichung (3) die 2. und 3. Glieder verschwinden. Aufserdem kann man den gemeinsamen Faktor δx wegdividieren und erhält:

$$\Sigma\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\, dm\right) = \Sigma(X dm). \tag{1}$$

Eine virtuelle Verschiebung parallel zur y-Axe führt zu der Gleichung:

$$\Sigma\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\, dm\right) = \Sigma(Y dm), \tag{2}$$

eine solche parallel zur z-Axe zu

$$\Sigma\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\, dm\right) = \Sigma(Z dm). \tag{3}$$

Bestimmt man nun einen mittleren Punkt ($\xi\eta\zeta$) der Erde nach den Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi\,\Sigma dm &= \Sigma(x\,dm) \\ \eta\,\Sigma dm &= \Sigma(y\,dm) \\ \zeta\,\Sigma dm &= \Sigma(z\,dm), \end{aligned} \tag{4}$$

wobei ξ das x, η das y, ζ das z des Punktes bezeichnet, so heifst dieser Punkt der *Schwerpunkt* der Erde. Zweimalige Differentiation der (4) giebt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2}\,\Sigma dm &= \Sigma\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dm\right) \\ \frac{d^2\eta}{dt^2}\,\Sigma dm &= \Sigma\left(\frac{d^2y}{dt^2}\,dm\right) \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}\,\Sigma dm &= \Sigma\left(\frac{d^2z}{dt^2}\,dm\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Bezeichnen wir Σdm mit M, als *Masse der Erde*, so folgt aus (5) und (1) bis (3):

$$\begin{aligned} M\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma(X\,dm) \\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma(Y\,dm) \\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Sigma(Z\,dm). \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Bewegung des Schwerpunktes. Er bewegt sich darnach so, als ob alle Kräfte — parallel nach ihm verschoben — direkt auf ihn wirkten und alle Masse in ihm lagerte.

Hierbei brauchen übrigens nur die äufseren Kräfte, also die Anziehungen der Himmelskörper, berücksichtigt zu werden, da die innern Kräfte d. h. diejenigen bewegenden Kräfte, welche innerhalb der Erde durch gegenseitige Einwirkung der Massenelemente entstehen, wie alle gegenseitigen Wirkungen paarweise entgegengesetzt gleich sind, mithin sich in den Summen auf der rechten Seite der Gleichungen (6) aufheben.

Sehen wir nun von den Bewegungen der Massenelemente relativ zum Erdschwerpunkt ab, so haben sie alle dieselbe Bewegung wie dieser d. h. sie bewegen sich in jedem Augenblicke parallel. Irgend eine Meridianebene hat daher bei dieser Voraussetzung stets parallele Lagen inne und erleidet in sich keinerlei Drehung.

Es ist nicht immer richtig aufgefafst worden, dafs nun umgekehrt jegliche Drehung der Erde im Sinne der Dynamik bereits zu den relativen Bewegungen der Teile der Erde um ihren Schwerpunkt gehört. Man darf also nicht ausser der Bewegung des Schwerpunkts und der entsprechenden Parallelverschiebung der Erde nach den

Gleichungen (6) sowie aufser der Drehung der Erde um ihren Schwerpunkt noch eine Drehung um einen andern Punkt annehmen.

Man darf also auch nicht die Drehbewegung der Erde um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond noch besonders in betracht ziehen wollen. Allerdings läfst sich die Bewegung der Erde so zerlegen, dafs die letztgenannte Bewegung als Komponente auftritt, aber dieses erzeugt eine ganz unnötige Komplikation: die Zerlegung nach § 2 ist die einfachste und daher allein übliche.

§ 3. **Relative Bewegung gegen den Erdschwerpunkt.** Parallel zu den in § 1 angenommenen festen Koordinatenaxen der x, y und z legen wir jetzt durch den Erdschwerpunkt Axen der x', y' und z'. Dann ist

$$\begin{aligned} x &= x' + \xi \\ y &= y' + \eta \\ z &= z' + \zeta. \end{aligned} \tag{1}$$

Hiermit geht die Gleichung (3) § 1 S. 2 über in die Gestalt

$$\Sigma \left\{ \begin{aligned} &\left(X - \frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta x' + \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta\xi \\ &+ \left(Y - \frac{d^2y'}{dt^2} - \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta y' + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta\eta \\ &+ \left(Z - \frac{d^2z'}{dt^2} - \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta z' + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) dm \,.\, \delta\zeta \end{aligned} \right\} = 0, \tag{2}$$

welche Gleichung sich aber wesentlich vereinfacht. Zunächst fallen die Produkte mit $\delta\xi$, $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ weg, weil diese Faktoren konstant sind, sich mithin die ersten Faktoren der bezüglichen Produkte addieren und zufolge der Gleichungen (1), (2) und (3) des § 2 gegenseitig aufheben.

Um eine weitere Vereinfachung zu erkennen, setzen wir die Relationen (1) in die (4) des vorigen Paragraphen und erhalten sofort

$$\begin{aligned} \Sigma(x'\,dm) &= 0 \\ \Sigma(y'\,dm) &= 0 \\ \Sigma(z'\,dm) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} \Sigma(dm \,.\, \delta x') &= 0 \\ \Sigma(dm \,.\, \delta y') &= 0 \\ \Sigma(dm \,.\, \delta z') &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

In dem ersten Teile von (2) verschwinden daher die von ξ, η und ζ abhängenden Glieder, weil sie sich in die nachstehende Form bringen lassen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}\,\Sigma(dm \,.\, \delta x') + \frac{d^2\eta}{dt^2}\,\Sigma(dm \,.\, \delta y') + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\,\Sigma(dm \,.\, \delta z').$$

Zugleich erkennt man, dafs von allen Werten X, Y und Z beziehungs-

weise konstante Teile abgezogen werden dürfen. Wir schreiben daher anstatt (2):

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} \left(X' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) dm \, . \, \delta x' \\ + \left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right) dm \, . \, \delta y' \\ + \left(Z' - \frac{d^2z'}{dt^2}\right) dm \, . \, \delta z' \end{array} \right\} = 0 \qquad (5)$$

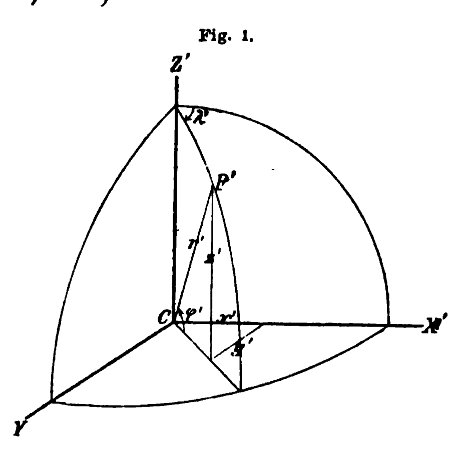
und verstehen nun unter X', Y' und Z' die Kräfte, welche auf die Masseneinheit eines Elementes wirken, dessen rechtwinkelige Koordinaten in Bezug auf den Erdschwerpunkt x', y' und z' sind — nach Abzug der entsprechenden Kräfte, welche die Bewegung dieses Punktes erzeugen; vergl. S. 3 (6).

Von den Gleichungen (5) kann man ausgehen, um die zum Erdschwerpunkt relative Bewegung der Erde zu untersuchen. Dieses weiter zu verfolgen, ist zunächst nicht unsere Aufgabe; wir halten uns vielmehr vorerst an die durch die Erfahrung sicher konstatierten Thatsachen und behalten uns für das fünfte Kapitel § 2 u. ff. Erörterungen über die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt, sowie über die Erfahrungen in dieser Hinsicht vor.

§ 4. **Die Zentrifugalkraft.** Zufolge der Erfahrung kann man mit aufserordentlich grofser Annäherung annehmen, dafs die Erde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine in ihr feste Axe durch den Erdschwerpunkt von unveränderter Richtung rotiert. Diese Drehaxe nennt man die Erdaxe (Bd. 1, S. 7).

Wir nehmen sie als z'-Axe, sodafs die $x'y'$-Ebene Äquatorebene*) wird, und berechnen die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten eines Punktes $(x' y' z')$ nach der Zeit nach Mafsgabe der Rotation. Die *Winkelgeschwindigkeit* der letzteren sei gleich ω.

Fig. 1.



Zunächst gehen wir zu Polarkoordinaten über, Fig. 1. r' sei der Radiusvektor des Punktes $(x' y' z')$, λ' der Winkel zwischen der $x'z'$-Ebene und einer Ebene durch die z'-Axe und den Radiusvektor, wachsend nach

*) Nach S. 7 des 1. Bandes ist die Aequatorebene die zur Erdaxe normale Ebene durch den Erdschwerpunkt. Dieser Definition steht allerdings entgegen, dafs die Äquatorebene nach Bd. 1 S. 8 keineswegs die Ebene des geographischen Äquators ist, indessen gestattet sie den sonst brauchbaren Begriff beizubehalten.

der $y'z'$-Ebene zu, φ' der Winkel, unter welchem r' gegen die $x'y'$-Ebene geneigt ist, wachsend nach der positiven Seite der z'-Axe hin. Dann ist

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos\varphi' \cos\lambda' \\ y' &= r' \cos\varphi' \sin\lambda' \\ z' &= r' \sin\varphi' . \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus folgt, da bei der Rotation $r'\cos\varphi'$ und $r'\sin\varphi'$ konstant bleiben, $d\lambda' : dt$ aber gleich ω ist:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -r' \cos\varphi' \sin\lambda' . \omega = -y'\omega \\ \frac{dy'}{dt} &= +r' \cos\varphi' \cos\lambda' . \omega = +x'\omega \\ \frac{dz'}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

womit sich weiter findet:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2x'}{dt^2} &= x'\omega^2 \\ -\frac{d^2y'}{dt^2} &= y'\omega^2 \\ -\frac{d^2z'}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Diese drei Beschleunigungen $x'\omega^2$, $y'\omega^2$ und null lassen sich als Komponenten einer auf die Masseneinheit wirkenden Kraft auffassen, welche Zentrifugalkraft genannt wird, weil unter ihrem Einfluſs der Punkt $(x'y'z')$ sich von der Axe entfernen würde.

§ 5. **Die Schwerkraft.** Nach Gleichung (5) § 3 S. 5 gehen bei der relativen Bewegung eines im Punkte $(x'y'z')$ befindlichen Massenteilchens für die Masseneinheit die bewegenden Kräfte

$$X' - \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad Z' - \frac{d^2z'}{dt^2} \tag{1}$$

verloren, welche bei der Voraussetzung gleichförmiger Rotation nach den Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen übergehen in:

$$X' + x'\omega^2, \quad Y' + y'\omega^2, \quad Z'. \tag{2}$$

Diese Kräfte veranlassen einen Druck des Teilchens gegen seine Umgebung. Insoweit X', Y' und Z' von der Gravitation, der Anziehung der Massen auf das Teilchen, herrühren, nennt man die Resultante der Kräfte (1) oder (2) die *Schwerkraft*, welche wir mit g bezeichnen.

Die Ausdrücke (1) würden in dem jetzt nicht weiter zu betrachtenden Falle zur Geltung kommen, daſs die Rotationsbewegung von der oben vorausgesetzten etwas abweicht (vergl. 5. Kap. § 21), doch wird von dem Einfluſs einer etwa vorhandenen relativen Bewegung des Punktes $(x'y'z')$ gegen die Erde im ganzen auf die 2. Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit bei der Definition der Schwerkraft jedenfalls abgesehen.

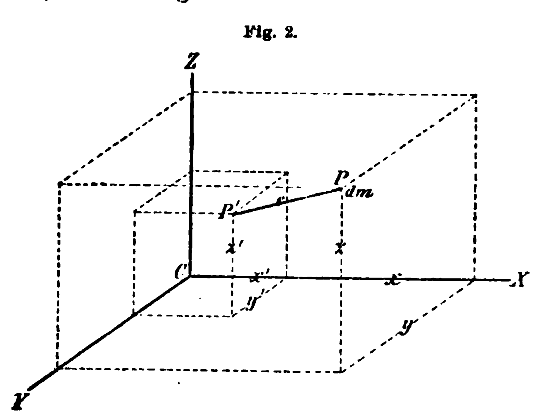
Entsprechend der für die Ausdrücke (2) vorausgesetzten gleichförmigen Rotation um eine konstant gerichtete Schweraxe betrachten wir die Erde als einen Körper, dessen Teile in relativer Ruhe zu einander sich befinden.

Auch sehen wir bei Bildung der Ausdrücke (2) von denjenigen Bestandteilen in X', Y' und Z' ab, welche von der Anziehung der Himmelskörper herrühren und deshalb im allgemeinen veränderlich sind. (Vergl. hierzu 5. Kap. § 1.)

Um nun Ausdrücke für X', Y' und Z', welche der Anziehung der Erdmasse entsprechen, zu gewinnen, bezeichnen wir die rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes der Erde im allgemeinen in Bezug auf die drei durch den Erdschwerpunkt gelegten Axen (§ 4 S. 5) mit x, y und z ohne oberen Strich; für die Koordinaten des Punktes, wo das von der Erde angezogene Massenteilchen lagert, behalten wir dagegen denselben bei.

Wir nehmen ferner an, dafs infolge der Gravitation die Masse 1 einer anderen in der Entfernung 1 befindlichen Masse 1 die Beschleunigung k^2 erteile und bezeichnen die Entfernung des anziehenden Massenelements dm im Punkte $(xyz) = P$ von dem Punkte $(x'y'z') = P'$ mit e, Fig. 2.

Fig. 2.



Dann ist die Beschleunigung eines im letzteren Punkte befindlichen Massenteilchens infolge der Anziehung des Elements dm in P gleich

$$\frac{k^2 dm}{e^2}. \tag{3}$$

Die Komponenten dieser Beschleunigung für die drei Koordinatenaxen sind nach Grösse und Richtung

$$\begin{array}{ll} \frac{k^2 dm}{e^2} \cdot \frac{x - x'}{e} & \text{in Richtung der pos. } x\text{-Axe} \\ \frac{k^2 dm}{e^2} \cdot \frac{y - y'}{e} & \text{,, ,, ,, ,, } y\text{-Axe} \\ \frac{k^2 dm}{e^2} \cdot \frac{z - z'}{e} & \text{,, ,, ,, ,, } z\text{-Axe;} \end{array} \tag{4}$$

denn projiziert man die Distanz e auf die drei Axen, so ergeben sich die Differenzen $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, deren Quotienten mit e den Cosinus der Neigungswinkel von e gegen die drei Axen, d. h. den

Richtungscosinus von e, in der Art entsprechen, daſs das Vorzeichen der Quotienten zugleich die Richtung vom angezogenen nach dem anziehenden Teilchen markiert, wie die Konstruktion von e aus $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ zeigt.

Bilden wir nun für jede der Komponenten (4) die Summe für alle Teile der Erde, so ergeben sich die Gesamtbeschleunigungen parallel zu den drei Axen d. h. die bewegenden Kräfte X', Y' und Z' für die im Punkte $(x'y'z')$ befindliche Masseneinheit. Die Summierung bewirken wir nach der Methode der Integralrechnung, indem wir uns in bekannter Weise entsprechend dem gewählten Koordinatensystem die Erde in Elemente zerlegt denken. Bezeichnen wir die Komponenten der Schwerkraft in Richtung der drei Koordinatenaxen mit g_x, g_y und g_z, so erhalten wir mit Rücksicht auf (2) die Ausdrücke wie folgt:

$$\begin{aligned} g_x &= k^2 \int \frac{x - x'}{e} \frac{dm}{e^2} + x'\omega^2 \\ g_y &= k^2 \int \frac{y - y'}{e} \frac{dm}{e^2} + y'\omega^2 \\ g_z &= k^2 \int \frac{z - z'}{e} \frac{dm}{e^2}, \end{aligned} \qquad (5)$$

wobei die Integration über die ganze Erde auszudehnen ist.

Mit der Aufstellung der Ausdrücke (5) verschwindet auch eine Ungenauigkeit der Ausdrucksweise, die wir uns bisher der Kürze halber erlaubt haben. Nämlich diese: von einem Massenteilchen zu sprechen, das in einem Punkte lagert. Zwar sind vorstehende Integralausdrücke so angesetzt, als ob das unendlichkleine Element dm im Punkte (xyz) sich befände, während es ihm nur angrenzt; aber bekanntlich giebt dies im Integralwerte keinen Fehler, wenn es sich durch geeignete Transformation vermeiden läſst, daſs der Ausdruck unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich groſs wird.

Manche Autoren bezeichnen mit Schwerkraft nur den von der Anziehung herrührenden Teil von g. Dieselben nennen g die *scheinbare* Schwerkraft. *Clairaut* unterscheidet *pesanteur* und *gravité*, also Gewicht und Schwere, ersteres das Resultat der Zusammenwirkung von Schwerkraft und Zentrifugalkraft.

§ 6. **Das Potential W der Schwerkraft g.** Die vorstehenden drei Ausdrücke für die Komponenten der Schwerkraft lassen sich als partielle Differentialquotienten einer einzigen Funktion W darstellen, welche durch die Gleichung

$$W = k^2 \int \frac{dm}{e} + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\omega^2 \qquad (1)$$

definiert ist und das Potential der Schwerkraft im Punkte $(x'y'z')$ heiſst.

Um dieses nachzuweisen, differenzieren wir den Ausdruck

$$\frac{1}{e} = \left((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

partiell nach x' und erhalten sofort

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'} = \frac{x - x'}{e^3}$$

und

$$\frac{\partial\left(\frac{k^2 dm}{e}\right)}{\partial x'} = k^2 \frac{x - x'}{e} \frac{dm}{e^2}.$$

Hiermit folgt aber ohne Schwierigkeit, daſs wirklich der partielle Differentialquotient von W nach x gleich g_x ist; in gleicher Weise erledigen sich g_y und g_z. Wir haben also:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x'} \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y'} \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z'}. \end{aligned} \tag{2}$$

Um für eine Axe der u', welche mit den Axen der x', y' und z' bezw. die Winkel α, β und γ bildet, die rechtwinkelige Komponente g_u von g zu erhalten, bilden wir zunächst durch einfache Projektion:

$$g_u = g_x \cos\alpha + g_y \cos\beta + g_z \cos\gamma. \tag{3}$$

Dieser Ausdruck für g_u läſst sich aber auf eine andere Form bringen. Denken wir uns nämlich in das Potential W anstatt x', y' und z' drei andere Koordinaten irgend welcher Art eingeführt, die so beschaffen sind, daſs eine partielle Änderung $\partial u'$ den Punkt $(x'y'z')$ linear um $\partial u'$ in der durch α, β, γ bezeichneten Richtung verschiebt, so hat man für eine solche Verschiebung $\partial u'$ die drei in die Richtung der früher benutzten Axen fallenden Komponenten

$$\begin{aligned} \partial x' &= \partial u' \cos\alpha \\ \partial y' &= \partial u' \cos\beta \\ \partial z' &= \partial u' \cos\gamma. \end{aligned}$$

Führt man die hieraus folgenden Ausdrücke für die Cosinus der drei Winkel, sowie aus (2) die Ausdrücke für die Komponenten von g in (3) ein, so folgt:

$$g_u = \frac{\partial W}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u'} + \frac{\partial W}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial u'} + \frac{\partial W}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u'}$$

oder

$$g_u = \frac{\partial W}{\partial u'}. \tag{4}$$

§ 7. Die Gleichung der Niveauflächen. Nach Bd. 1 S. 5 sind die Niveauflächen dadurch definiert, daſs sie in jedem ihrer Punkte

normal zu der daselbst vorhandenen Schwerkraft stehen. Nun ist die bei rechtwinkeliger Zerlegung von g normal zu dessen Richtung sich ergebende Komponente jedenfalls null. Verstehen wir also in der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen unter $\partial u'$ jetzt ein vom Punkte $(x'\ y'\ z')$ beschriebenes Linienelement einer Niveaufläche, so ist g_u gleich null. Man hat daher für eine Niveaufläche

$$\frac{\partial W}{\partial s} = 0. \tag{1}$$

Hieraus folgt sofort, dafs für alle Punkte einer Niveaufläche das Potential W der Schwerkraft g eine Konstante ist. Die Gleichung einer Niveaufläche lautet daher allgemein

$$W = \text{Konstante}. \tag{2}$$

§ 8. **Abstand benachbarter Niveauflächen.** Der normale Abstand zweier unendlich nahe an einanderliegenden Niveauflächen fällt in die Richtung der Schwerkraft g. Verstehen wir nun in Gleichung (4) § 6 unter $\partial u'$ ein vom Punkte (x', y', z') normal zu einer Niveaufläche beschriebenes Linienelement ∂h und rechnen ∂h negativ oder positiv, je nachdem W zu- oder abnimmt, so dafs ∂h nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche eine Höhenänderung vorstellt, so wird, da die ganze Schwerkraft g in die Richtung von ∂h fällt,

$$g = -\frac{\partial W}{\partial h}. \tag{1}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf den vorigen Paragraphen, dafs der totale Unterschied der Potentialwerte der Schwerkraft für unendlich benachbarte Niveauflächen gleich ist dem Produkt aus der Schwerkraft g in den normalen Abstand der Niveauflächen:

$$dW = -g\,dh. \tag{2}$$

Dieses Produkt $g\,dh$ ist also für dieselben beiden, einander unendlich benachbarten Niveauflächen konstant.

Man erkennt zugleich, dafs Niveauflächen im allgemeinen keine Parallelflächen sind, denn g wird im allgemeinen entlang einer Niveaufläche nicht konstant sein.

So ist thatsächlich auf der Erde für das Meeresniveau die Schwerkraft etwas veränderlich und zwar hauptsächlich mit der geographischen Breite. Die hieraus entspringende Folgerung für das gegenseitige Verhalten der Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche werden wir im Detail im 2. Kap. § 18 ziehen.

In seinem Werke „Figure de la Terre“ führt 1743 *Clairaut* S. 40 § 19 u. ff. die Ausdrücke Niveaufläche (surface courbe de Niveau), Niveaukurve (courbe de Niveau) und Niveauschicht (couche de Niveau) ein. Er zeigt S. 41, dafs der Abstand zweier Niveauflächen, welche eine unendlich dünne Niveauschicht begrenzen, überall umgekehrt proportional der Schwerkraft ist. Als Gleichung einer Niveaufläche findet er S. 101 § 52:

$$\int (X'dx' + Y'dy' + Z'dz') + \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\,\omega^2 = \mathit{Konst.}, \tag{3}$$



worin X', Y' und Z' die Komponenten der Anziehungskraft im Punkte $(x'\,y'\,z')$ der Niveaufläche bezeichnen. Bei Flüssigkeiten kann Gleichgewicht nur bestehen, wie er ferner S. 99 § 48 nachweist, wenn $X'dx' + Y'dy' + Z'dz'$ ein vollständiges Differential ist, also die ebenfalls von ihm aufgefundenen Bedingungen

$$\frac{\partial X'}{\partial y'} = \frac{\partial Y'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial X'}{\partial z'} = \frac{\partial Z'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial z'} = \frac{\partial Z'}{\partial y'} \tag{4}$$

erfüllt werden.

§ 9. **Das Potential W hat in jedem Punkte P' des Raumes nur einen einzigen Wert.** Die hohe Bedeutung, welche nach den letzten beiden Paragraphen der Funktion W zukommt, macht deren eingehende Untersuchung erforderlich. Wir setzen nach Gleichung (1) § 6 S. 8 für das Potential der Schwerkraft im Punkte $(x'\,y'\,z') = P$ die Gleichung an:

$$W = V + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\,\omega^2\,, \tag{1}$$

wobei

$$V = k^2 \int \frac{dm}{e} \tag{2}$$

das Potential der Anziehung allein bedeutet. Wir untersuchen zuerst V.

Es handelt sich aber für uns hauptsächlich um Punkte in der Nähe der physischen Erdoberfläche, also um Punkte, welche bei Berücksichtigung des Luftmeeres jedenfalls noch im Innern der Erde liegen. Für die dem Punkte P' benachbarten Massenelemente dm ist aber e gleich null, $1:e$ also unendlich und es scheint daher der mathematische Ausdruck (2) für V gerade in dem für uns wichtigsten Falle unbrauchbar zu werden. Mindestens läfst er nicht sofort erkennen, dafs das Potential der unendlich benachbarten Massenelemente nicht unendlich grofs, sondern gleich null ist.

Nehmen wir aber P' als Mittelpunkt eines Systems konzentrischer Kugelflächen im Abstand de, sowie als Spitze eines Kegels, der auf der Kugel vom Radius 1 das Flächenelement $d\sigma$ ausschneidet, so bildet sich zwischen diesem Kegel und den Kugelflächen mit den Radien e und $e + de$ ein Raumelement vom Inhalt

$$e^2\,d\sigma\,.\,de$$

Wir haben daher, falls Θ die Dichtigkeit daselbst bezeichnet:

$$dm = \Theta\,e^2\,de\,d\sigma\,. \tag{3}$$

Hiermit wird für V erhalten:

$$V = k^2 \iint \Theta\,e\,de\,d\sigma\,, \tag{4}$$

ein Ausdruck, bei welchem alle Bedenken schwinden, da Θe überall endlich ist. Insbesondere wird der Beitrag v der näheren Um-

gebung von P' zu V um so kleiner, je mehr wir sie beschränken. Ist innerhalb einer zu P' konzentrischen Kugel vom Radius ε der Maximalwert der Dichtigkeit gleich Θ_{max}, so ist für diese Kugel

$$v \leq k^2\, \Theta_{max} \iint e\,de\,d\sigma\,,$$

die Integration für e von null bis ε, für σ über die ganze Kugelfläche vom Radius 1 erstreckt. Es wird also

$$v \leq 2\pi k^2\, \Theta_{max}\, \varepsilon^2\,. \tag{5}$$

Hiernach nimmt in der That v mit ε ab und verschwindet mit ihm, wie es sein mufs.

Der Ausdruck (4) zeigt nun auch, dafs V stets einen bestimmten, positiven Wert hat. Integriert man zunächst nach σ, so handelt es sich um Bildung von

$$\int \Theta\, d\sigma \quad \text{oder} \quad \left\{ \int \Theta\, e^2\, d\sigma : \int e^2\, d\sigma \right\} \cdot \int d\sigma.$$

Dies ist aber, wenn P' innerhalb der Erde liegt, gleich der mittleren Dichte Θ_e im Abstand e mal der Kugelfläche vom Radius 1, also gleich

$$4\pi\, \Theta_e\,.$$

Man hat daher

$$V = 4\,\pi k^2 \int \Theta_e\, e\, de\,. \tag{6}$$

Denkt man sich hier e als Abscisse, $\Theta_e\, e$ als Ordinate, so erscheint V als das $4\,\pi k^2$-fache einer endlichen, ganz bestimmten, positiven Fläche.

Für Lagen von P' innerhalb der Erde hat aber nicht nur V, sondern, wie ein Blick auf (1) zeigt, auch W stets einen bestimmten endlichen positiven Wert. Es gilt dies überhaupt für jede Lage von P' in endlicher Entfernung vom Erdschwerpunkt. Bei der Bildung von Θ_e zu (6) ist nur zu beachten, dafs die den Punkt P' im Abstand e umgebende Kugelfläche aufserhalb der Erde die Dichtigkeit null antrifft.

Da nun W in jedem Punkte nur einen einzigen Wert hat, so kann durch einen Punkt auch nur eine einzige Niveaufläche hindurchführen. Man kann dies auch in folgender Weise ausdrücken:

Verschiedene Niveauflächen schneiden oder berühren sich nicht.

Für Punkte P', welche aufserhalb der Erde sich befinden und also nicht mit ihr rotieren, hat nur V reelle Bedeutung. Rückt P' in unendliche Entfernung, so wird nach (2) V gleich null, nämlich kleiner als k^2 mal der Erdmasse, dividiert durch den Abstand des dem Punkte P' nächstgelegenen Elements der Erde, welcher aber auch unendlich grofs ist.

§ 10. Die Schwerkraft g hat in jedem Punkte einen bestimmten endlichen Wert und eine bestimmte Richtung, ausgenommen für g = null. Behufs weiterer Untersuchung von W betrachten wir seine Differentialquotienten, d. h. die Komponenten der

Schwerkraft. Fassen wir beispielsweise g_x ins Auge, so ist nach (5) § 5 S. 8 mit Rücksicht auf (2) § 6 S. 9 und (1) § 9 S. 11 im Punkte $(x' y' z') = P'$

$$g_x = \frac{\partial V}{\partial x'} + x' \omega^2 \tag{1}$$

mit

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = k^2 \int \frac{x - x'}{e} \frac{dm}{e^2} . \tag{2}$$

Wie im vorigen Paragraphen nehmen wir P' als Mittelpunkt konzentrischer Kugeln und setzen nach (3) daselbst

$$dm = \Theta e^2 de d\sigma .$$

Dann folgt

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = k^2 \iint \frac{x - x'}{e} \Theta de d\sigma . \tag{3}$$

Beachtet man nun, dafs $(x - x') : e$ der Cosinus des Neigungswinkels von e gegen die x-Axe ist, dafs also die Ungleichheit besteht:

$$-1 \leqq \frac{x - x'}{e} \leqq +1 ,$$

so erkennt man, dafs in (3) unter dem Integralzeichen nichts unendlich wird. Ähnlich wie für V im vorigen Paragraphen kann man sich jetzt mit Rücksicht auf die endlichen Grenzen der Integration überzeugen, dafs das Integral in (3) einen bestimmten endlichen Wert haben mufs, der jedoch wegen $(x - x') : e$ positiv oder negativ sein kann.

Für die unendlich nahe Umgebung von P' ist, wie es sein mufs, der Beitrag zu $\partial V : \partial x'$ unendlich klein. Setzt man nämlich in (3) für $(x - x') : e$ den zu grofsen Wert $+1$ und für Θ den Maximalwert Θ_{max} der Umgebung bis zum Abstande ε, so ergiebt sich der zu grofse absolute Wert des betreffenden Beitrages gleich $4\pi k^2 \Theta_{max} . \varepsilon$, welcher Ausdruck mit ε unendlich klein wird.

Ebenso wie $\frac{\partial V}{\partial x'}$ verhält sich nach (1) g_x selbst. Das gleiche Verhalten zeigen aber auch g_y und g_z: Alle Komponenten von g haben bestimmte endliche Werte, die positiv oder negativ oder auch null sein können.

Die Cosinus der Neigungswinkel von g zu den Axen sind gleich

$$\frac{g_x}{g} , \quad \frac{g_y}{g} , \quad \frac{g_z}{g} \tag{4}$$

wobei

$$g = + \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \tag{5}$$

ist; sie haben daher bestimmte, zwischen -1 und $+1$ gelegene Werte und die Schwerkraft hat eine unzweideutig bestimmte Richtung, solange nur g von null verschieden ist.

§ 11. **W ist eine stetige Function des Ortes.** Nach den letzten beiden Paragraphen hat V in jedem Punkte nur einen Wert und die Differentialquotienten von V sind endlich. Verschiebt sich der Punkt $(x' y' z') = P'$, so ist V in der Endlage $(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$ gleich

$$V + \frac{\partial V}{\partial x'} dx' + \frac{\partial V}{\partial y'} dy' + \frac{\partial V}{\partial z'} dz',$$

mithin von dem Werte V in P' nur unendlich wenig verschieden.

Hieraus folgt, dafs V eine stetig veränderliche Funktion ist. Dasselbe gilt für W, wie ein Blick auf (1) § 9 S. 11 zeigt.

§ 12. **Die Schwerkraft ändert sich nach Grösse und Richtung stetig.** Wir nehmen zunächst an, dafs P' aufserhalb der Erde sich befinde, mithin für alle Massenelemente $e >$ null ist.

Ist aber $e >$ null, so ist leicht zu sehen, dafs überhaupt alle Differentialquotienten von V beliebig hoher Ordnung endliche Werte haben. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von V nach (2) § 9 S. 11 kommt die wiederholte Differentiation von V hinaus auf diejenige von $\frac{1}{e}$, d. i.

$$\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Differenziert man hier wiederholt nach x', y' und z', so entstehen Aggregate von Quotienten aus Vielfachen von $(x - x')$, $(y - y')$ und $(z - z')$ sowie ihrer höhern Potenzen im Zähler, mit e und seinen höhern Potenzen im Nenner. Wegen $e >$ null sind dies durchaus bestimmte endliche Werte, die sich mit dem Ort stetig ändern, und es geben daher auch die zur Bildung der successiven Differentialquotienten von V erforderlichen Integrationen bestimmte endliche Werte.

So lange wir also den Punkt P' als einen aufserhalb der Erdmasse gelegenen Punkt betrachten können, haben alle Differentialquotienten von V und damit nach (1) § 9 S. 11 auch diejenigen von W bestimmte endliche Werte. Hiermit läfst sich aber wie im vorigen Paragraphen für jeden Differentialquotienten von W die Stetigkeit nachweisen, welches Ergebnis uns zunächst bezüglich der ersten Differentialquotienten interessiert.

Ist jedoch P' ein innerer Punkt, so gilt Vorstehendes erst nach Ausschlufs der diesen Punkt umgebenden Masse. Wir fixieren die auszuschliefsende Masse dadurch näher, dafs wir um P' eine geschlossene Fläche ziehen, welche sie begrenzt.*) Für diese Masse sei V mit v bezeichnet. Nach (3) § 10 S. 13 ist nun

*) Der Nachweis der Stetigkeit für einen innern Punkt ist im wesentlichen nach S. 11—12 von „*P. G. Lejeune-Dirichlet*, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. Herausgegeben von *Dr. F. Grube*, Leipzig, Teubner 1876 (4 M)."



$$\frac{\partial v}{\partial x'} = k^2 \int\int \frac{x - x'}{e}\, \Theta\, de\, d\sigma\,,$$

wobei sich die Integration über die betreffende Masse auszudehnen hat. Setzen wir hierin für $(x - x') : e$ die Einheit und für Θ den vorkommenden Maximalwert, so folgt der absolute Wert von

$$\frac{\partial v}{\partial x'} < k^2\, \Theta_{max} \int de \int d\sigma\,.$$

Das Integral für $d\sigma$ ist gleich 4π, dasjenige von de ist $< \varepsilon$, wenn ε der gröfste Abstand der umschliefsenden Grenzfläche von P' ist. Wir haben also den absoluten Wert von

$$\frac{\partial v}{\partial x'} < 4\pi k^2\, \Theta_{max}\,.\,\varepsilon\,.$$

Verschiebt sich nun P' innerhalb des abgegrenzten Raumes unendlich wenig, so kann sich $\frac{\partial v}{\partial x'}$ keinesfalls um mehr als das Doppelte von $4\pi k^2\, \Theta_{max}\,.\,\varepsilon$ ändern; im Gegenteil wird die Änderung immer kleiner sein. Da wir aber die den Punkt P' umschliefsende Fläche beliebig nahe an ihn legen können, ohne dafs an den vorstehenden Betrachtungen sich etwas ändert, so können wir uns ε beliebig klein denken und wir erkennen somit, dafs $\frac{\partial v}{\partial x'}$ und seine Änderung bei unendlich kleiner Verschiebung von P' keinen angebbaren endlichen Betrag besitzen.

Dieses zeigt, dafs bei beliebiger Lage von P' die ersten Differentialquotienten von V und W nach x', und ebenso diejenigen nach y' und z', für unendlich kleine Verschiebungen von P' sich nur unendlich wenig ändern, dafs also g_x, g_y und g_z stetige Funktionen des Ortes sind.

Man erkennt hieraus weiter, dafs dieselbe Eigenschaft für die Schwerkraft g selbst nach Gröfse und Richtung vorhanden ist; denn g läfst sich darstellen als Diagonale eines rechtwinkeligen Parallelepipeds mit den Seiten g_x, g_y und g_z, deren stetige Änderungen auch g nach Gröfse und Richtung stetig ändern, falls nur $g >$ null ist.

§ 13. **Der Lauf der Niveauflächen für $g >$ null.** Nach dem Vorhergehenden hat die Schwerkraft, wenn sie nur nicht null ist, in jedem Punkte eine bestimmte Richtung: die *Lotrichtung*, die sich bei unendlich kleinen Verschiebungen nur unendlich wenig ändert. Dasselbe gilt auch für das Flächenelement der Niveaufläche, indem es zur Richtung der Schwerkraft normal steht. Man kann daher sagen, abgesehen vom Falle $g =$ null:

Eine Niveaufläche verläuft stetig gebogen ohne Kanten und Spitzen, und sie kann sich nicht selbst schneiden.

Man kann auch noch hinzufügen, dafs eine Niveaufläche *nicht sich selbst berühren* und auch *keine Schneiden* besitzen kann.



Sobald nämlich $g >$ null ist, läfst sich nach § 8 S. 10 unendlich nahe an der Niveaufläche auf jeder Seite derselben eine andere, mit einem verschiedenen, wenn auch unendlich wenig verschiedenen W konstruieren, deren eine nun aber in der Nähe der Schneide oder Berührungsstelle notwendig die gegebene Fläche schneiden würde. Dies ist aber nach § 9 S. 12 unmöglich.

Um nun noch den Lauf der Niveauflächen im ganzen zu beurteilen, denken wir uns eine Niveaufläche bis zu einer Linie in derselben fortgesetzt und fragen, ob in irgend einer solchen Linie die Fläche enden kann. Ist P' ein Punkt der Linie, so umschliefsen wir P' mit einer hinreichend kleinen Kugelfläche, welche den vorhandenen Niveauflächenteil schneidet. Auf der Kugelfläche können wir nun geschlossene Linien ziehen, welche die Durchschnittslinie beider Flächen kreuzen. Durchläuft ein Punkt eine solche Linie, von der Niveaufläche ausgehend, so nimmt W anfangs zu oder ab, zum Schlufs ebenfalls bezw. zu oder ab. Weil aber W wieder den Anfangswert annimmt, mufs es auf der betreffenden Linie irgendwo aufser in dem bereits vorhandenen Teil der Niveaufläche mindestens einmal noch gerade so grofs sein.

Man erkennt leicht, dafs die Hilfskugel die Niveaufläche mindestens in *einer* geschlossenen Linie schneiden wird.

Bei hinreichender Kleinheit des Kugelradius wird es nur *eine* Linie sein und zwar annäherungsweise ein gröfster Kreis. Ist g gleich null so können andere Verhältnisse eintreten. Jedenfalls kann eine Niveaufläche für $g >$ null keinen Rand haben:

Eine Niveaufläche ist entweder unendlich oder geschlossen.

Im ersten Falle läuft sie ins Unendliche, denn im Endlichen würde sich die Fläche stellenweise unendlich dicht zusammendrängen, was mit § 8 S. 10 nur dann nicht in Widerspruch steht, wenn g an der betreffenden Stelle gleich null ist.

§ 14. **Die Niveauflächen der Erde** verlaufen in der Nähe der physischen Erdoberfläche, wo erfahrungsmäfsig die Schwerkraft nicht null ist, nach dem vorigen Paragraphen jedenfalls stetig gebogen, ohne Kanten und Spitzen, und ohne sich selbst zu schneiden. Ob sie aber geschlossene Flächen sind oder nicht, und welcher Art eventuell der Zusammenschlufs ist, läfst sich ohne weiteres nicht sagen, da uns immer nur Teile von Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche zur Anschauung kommen.

Im allgemeinen kann man nun in dieser Beziehung Folgendes anführen.

Wir denken uns um eine Masse M eine einhüllende Kugel vom Durchmesser D geschlagen und das Potential v der Anziehung aufserhalb der Kugel in betracht gezogen. Man bemerkt leicht, dafs dasselbe auf jedem Radius von der Oberfläche nach aufsen fortwährend

abnimmt, da für irgend ein Massenelement die Entfernung e fortwährend wächst. Denkt man sich nun auf irgend einem Radius zwei Punkte J und A, in Bezug auf welche bezw. die $e \leq D$ und $\geq D$ sind, so wird $v_J > \frac{M}{D}$ und $v_A < \frac{M}{D}$ sein. Zwischen J und A giebt es somit auf jedem Radius einen Punkt der Niveaufläche $v = \frac{M}{D}$ und diese ist daher kugelartig geschlossen.

Da v nach aufsen ab-, nach innen bis zur Oberfläche der Kugel sicher zunimmt, so sind hiernach alle Niveauflächen aufserhalb dieser Oberfläche kugelartig geschlossen und umhüllen sich schalenartig. Nach innen zu geht dies so weit, als die Anziehung bei der Bewegung von aufsen nach innen nicht durch null hindurch geht, da ein Schneiden von Niveauflächen sonst nicht vorkommen kann.

Rotiert die Masse M wie die Erde, so tritt zum Potential der Anziehung dasjenige der Zentrifugalkraft. Solange dasselbe relativ klein ist, entspricht der Berücksichtigung der Rotation nur eine geringe Verschiebung der Niveauflächen bestimmten Potentialwertes nach aufsen, ohne dafs an der oben angegebenen Konfiguration etwas geändert würde.

Bei der Erde hat man es in der Nähe ihrer Oberfläche nur mit einem kleinen Einflufs der Zentrifugalkraft zu thun. Um dieses nachzuweisen, könnte man nach ganz rohen Annahmen die Potentiale der Anziehung und Zentrifugalkraft berechnen und vergleichen. Wir wollen indessen darauf nicht eingehen, sondern andere allgemein bekannte Thatsachen erwähnen, die zu demselben Resultate führen.

Wir wissen aus der Beobachtung des Erdschattens bei Mondfinsternissen oder aus anderen Erfahrungen (vergl. 6. Kap. § 1), dafs die physische Erdoberfläche jedenfalls näherungsweise Kugelform hat. Da nun $^8/_{11}$ der physischen Erdoberfläche von dem zusammenhängenden Weltmeere gebildet werden, dessen Oberfläche nur wenig von einer Niveaufläche abweicht, so unterliegt es keinem Bedenken, sich eine Niveaufläche in der Nähe der Erdoberfläche vorzustellen, etwa das Geoid (Bd. 1 S. 5), welche Niveaufläche nun auch, soweit die Meeresfläche reicht, näherungsweise Kugelform hat. Es kommt dabei ein Umstand sozusagen stillschweigend in betracht, auf den wir bei dem Versuch aufmerksam werden, diese Niveaufläche unterhalb des Landes, welches aus dem Meere emporsteigt, fortzusetzen. Es ist dies die durch Beobachtung festgestellte Thatsache, dafs überall auf der physischen Erdoberfläche die Richtung der Schwerkraft im grofsen und ganzen normal zu ihr steht, also wesentlich gegen einen mittleren Punkt der Erde konvergiert. Zwar liegen nicht von allen Punkten der Erdoberfläche Beobachtungen vor, aber doch von sehr vielen: man kann etwa 98% der Oberfläche als bereist betrachten, und über die Lücken gestattet uns die oben entwickelte Theorie hinweg zu sehen.

Denn sie lehrt uns, dafs die Konvergenz der Lotrichtungen nur eine Folge der Anziehungskraft der Erde sein kann, gegen welche die Zentrifugalkraft in erster Annäherung verschwindet.

Hiermit steht die an zahlreichen Punkten der Erdoberfläche gemachte Wahrnehmung im Einklang, dafs die Schwerkraft g daselbst in erster Annäherung konstant ist.

Wollen wir nun eine Niveaufläche in der Nähe der physischen Erdoberfläche beschreiben, so kann diese selbst als Ausgang dienen. Die Niveaufläche kann sich nicht weit von ihr (im Verhältnis zum Erdradius) entfernen, da sie ja angenähert normal zu den Lotrichtungen steht. Gehen wir von einem Punkte mit dem Potentialwert W_0 aus auf der physischen Erdoberfläche vorwärts, so gehört zu jedem Differential des Weges ein dh und ein $dW = -g\,dh$; für einen endlichen Weg ist die Änderung von W gleich dem über denselben zu erstreckenden

$$\int(-g\,dh).$$

Vom Endpunkt des Weges aus können wir uns in der *Lotlinie* (Kraftlinie, Bd. 1 § 3 S. 5) vorwärts bewegen, bis der Ausgangswert W_0 wieder erreicht ist. Wegen der genäherten Konstanz von g gehört dazu angenähert der vertikale Weg

$$-\int dh,$$

eine im Verhältnis zum Erdradius jedenfalls kleine Gröfse.

Einen zweiten Punkt mit dem Potentialwert W_0 giebt es in derselben Lotlinie in der Nähe der physischen Erdoberfläche sicher nicht, da g hier entschieden nach innen gerichtet ist, also W nach innen zunimmt.

Die Niveauflächen, welche sich teilweise in der Nähe der physischen Erdoberfläche befinden, umschliefsen hiernach die Erde in der Nähe der physischen Erdoberfläche vollständig. Ihre Form ist die einer etwas durch stetige Verbiegungen deformierten Kugelfläche. Es sind also *kugelartige Flächen*, geschlossene Flächen einfachen Zusammenhanges. Flächen abnehmenden Potentialwertes umschliefsen sich schalenartig.

Die Möglichkeit der Tracierung von Kanälen quer durch die Kontinente (Bd. 1 S. 5) ist eine unmittelbare Folge der angegebenen Eigenschaft der Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche.

In gröfserer Entfernung von der Erde ändern sich die Verhältnisse; hierüber wird § 22 des nächsten Kapitels sich verbreiten. Dagegen besteht im Erdinnern überall die schalenartige Aufeinanderfolge, was nicht ausschliefst, dafs ein Durchschneiden einzelner Niveauflächen mit sich selbst, da wo g null ist, stattfindet und dafs andere Niveauflächen in für sich geschlossene Teile zerfallen. Einige

Bemerkungen über die Schwerkraft im Erdinnern bringt das sechste Kapitel, § 13.

Nimmt man an, daſs das Luftmeer die physische Erdoberfläche vollständig umhüllt und in relativer Ruhe ist, so werden nach hydrostatischem Gesetz die Flächen gleicher Dichtigkeit der Luft Niveauflächen sein und man würde somit darauf hingeführt, daſs die Niveauflächen in der Nähe der Erdoberfläche geschlossen sind. Allein da zur Zeit für die Nähe der Pole Beobachtungen fehlen, so ist jene Annahme unzulässig und es bedarf jedenfalls immer noch einer Untersuchung ihres Verhaltens an den Polen. Auch die Herbeiziehung des Luftmeeres gewährt somit nicht die Möglichkeit, ohne eine besondere Untersuchung behaupten zu können, daſs die Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche geschlossen sind; mit Rücksicht auf § 8 S. 10 läſst sich nur die Möglichkeit der Kanaltracierung insoweit folgern, als die physische Erdoberfläche bekannt ist. — Übrigens hat es ein Interesse, die in Rede stehende Angelegenheit, wie oben geschehen, ohne Herbeiziehung des Luftmeeres zu behandeln.*)

§ 15. **Die zweiten Differentialquotienten von W.** Es genügt zunächst, nur den zweiten Differentialquotienten nach x' zu betrachten. Nach § 6 S. 9 ist aber

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'} = \frac{x - x'}{e^3}.$$

Daher ist auch

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'^2} = -\frac{1}{e^3} + 3\,\frac{x-x'}{e^2}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'} = -\frac{1}{e^3} + 3\,\frac{(x-x')^2}{e^5}.$$

Hieraus findet sich mit Rücksicht auf (1) und (2) § 9 S. 11 der gesuchte zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} = k^2 \int \frac{-e^2 + 3\,(x-x')^2}{e^3}\,\frac{dm}{e^2} + \omega^2. \tag{1}$$

Setzt man endlich hierin wie in § 9 S. 11 $dm = \Theta\, e^2\, de\, d\sigma$, so folgt:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} = k^2 \int\!\!\int \frac{-e^2 + 3\,(x-x')^2}{e^3}\,\Theta\, de\, d\sigma + \omega^2. \tag{2}$$

Solange der Punkt $(x'\, y'\, z') = P'$ auſserhalb der Erde liegt, ist, wie schon § 12 S. 14 bemerkt, dieser Ausdruck ein bestimmter Wert. Liegt jedoch P' innerhalb der Erde (d. i. der gerade für uns wichtigste Fall), so wird der Ausdruck (2) unbrauchbar. Er zerfällt nämlich alsdann in die Differenz zweier Integrale, die wegen der Integral-

*) Auf grund der Potentialtheorie wurden die Eigenschaften der Niveauflächen klargestellt in den beiden Abhandlungen von *H. Bruns*: „Über einen Satz der Potentialtheorie" Crelles Journal 1876, Bd. 81, S. 349 u. ff. und „Die Figur der Erde" Publikation des königl. preuſs. geodät. Instituts, 1878. Welches die Erfahrungen sind, zufolge deren die Niveauflächen der physischen Erdoberfläche sich als geschlossen und nahezu kugelförmig ergeben, wird jedoch nicht erörtert, jedenfalls weil für die betreffende Abhandlung die Untersuchung anderer Fragen in den Vordergrund zu treten hatte.

grenze e gleich null beide unendlich grofs werden, wovon man sich für den Fall einer homogenen, P' konzentrisch umschliefsenden Kugel leicht überzeugen kann. Ausdruck (2) läfst somit in diesem Falle den Wert des zweiten Differentialquotienten nicht erkennen.

Um nun zu einem auch für innere Punkte brauchbaren Ausdruck zu gelangen, bringen wir zunächst den Ausdruck für $\frac{\partial V}{\partial x'}$, d.i. nach (2) § 10 S. 13:

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = k^2 \int \frac{x - x'}{e^3}\, dm \tag{3}$$

in eine andere Gestalt.

Es ist hierbei darauf aufmerksam zu machen, dafs man bei (3), wie bei Bildung von V, an die spezielle, § 4 S. 5 eingeführte Lage der rechtwinkeligen Koordinatenaxen nicht gebunden ist; nur für W mufs diese Lage wegen des Potentials der Zentrifugalkraft festgehalten werden, wenn der Ausdruck (1) § 9 S. 11 bestehen bleiben soll.

§ 16. **Transformation der Ausdrücke für die ersten Differentialquotienten von V.***) Wir betrachten zunächst einen Körper, in welchem erstens die Dichtigkeit der Masse eine stetige Funktion des Ortes ist und zweitens die ersten Differentialquotienten der Dichtigkeit nach den Koordinaten endlich und stetig sind. Wir nennen seine Potentialfunktion der Anziehung v, beziehen ihn auf ein rechtwinkeliges Axensystem und bezeichnen die Koordinaten des angezogenen Punktes P' wie früher mit x', y' und z', diejenigen eines Massenelementes des Körpers aber mit x, y und z. Indem wir unter Annahme der Dichtigkeit Θ im Punkte (x, y, z) somit $dm = \Theta\, dx\, dy\, dz$ zu setzen haben, wird nach (3) des vorigen Paragraphen mit Rücksicht auf die Schlufsbemerkung daselbst:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = k^2 \int\int\int \frac{x - x'}{e^3}\, \Theta\, dx\, dy\, dz\,. \tag{1}$$

Aus $e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ folgt aber

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x} = - \frac{x - x'}{e^3}\,,$$

womit sich (1) auf folgende Form bringen läfst:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = - k^2 \int\int dy\, dz \int \Theta\, \frac{\partial \left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x}\, dx\,. \tag{2}$$

Um das hierin auftretende Integral nach x umzuformen, beachten wir, dafs

*) *Lejeune-Dirichlet*, Vorlesungen; S. 19—24.

$$\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{e}\right)}{\partial x} = \frac{1}{e}\,\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Theta\,\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x},$$

mithin

$$-\int \Theta\,\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x}\,dx = \int \frac{1}{e}\,\frac{\partial \Theta}{\partial x}\,dx + \Sigma\,\frac{\Theta_1}{e_1} - \Sigma\,\frac{\Theta_2}{e_2}\,. \tag{3}$$

Hierin bedeutet Σ ein Summenzeichen und es beziehen sich die Indices 1 und 2 auf diejenigen Punkte, in welchen eine Parallele zur x-Axe, entlang welcher bei konstantem Wert von y und z integriert wird, die Oberfläche bezw. beim Eintritt und Austritt (x wachsend gedacht) schneidet.

Die Formel (3) gilt unzweifelhaft, sobald Θ und $\frac{1}{e}$, sowie ihre ersten Differentialquotienten endlich und stetig sind. Für Θ und seine ersten Differentialquotienten sind diese Eigenschaften nach der Voraussetzung vorhanden; für $\frac{1}{e}$ sind sie es, sobald $e >$ null ist. Ohne weiteres ist sonach (3) nur gültig für Lagen von P' aufserhalb des Körpers.

Liegt P' innerhalb, so schliefsen wir, um (3) zweifellos anwenden zu können, die Masse innerhalb einer zu P' konzentrischen Kugelfläche vom Radius ε aus. Trifft die Parallele zur x Axe, entlang welcher integriert wird, diese Kugelfläche, so tritt zu (3) rechter Hand noch das Gliederpaar

$$-\frac{\Theta_1'}{\varepsilon} + \frac{\Theta_2'}{\varepsilon}, \tag{3*}$$

worin die Indices 1′ und 2′ sich auf den Eintritts- und Austrittspunkt für die Kugelfläche beziehen.

Es sei nun $v = v_1 + v_2$ und zwar v_1 die Potentialfunktion der Anziehung für die äufsere Masse, v_2 diejenige für die Kugel ε. Dann folgt aus (2), (3) und (3*):

$$\frac{\partial v_1}{\partial x'} = \left\{\begin{array}{l} k_2 \displaystyle\iiint\limits_{ohne\ \varepsilon} \frac{1}{e}\,\frac{\partial \Theta}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \\ + k^2 \displaystyle\iint \Sigma\left(\frac{\Theta_1}{e_1} - \frac{\Theta_2}{e_2}\right) dy\,dz \\ - k^2 \displaystyle\iint \left(\frac{\Theta_1'}{\varepsilon} - \frac{\Theta_2'}{\varepsilon}\right) dy\,dz\,. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Das dreifache Integral erstreckt sich über die äufsere Masse, was durch die Bemerkung „*ohne* ε“ angedeutet ist; die Doppelintegrale betreffen beziehungsweise die äufsere Masse und die Kugel. Diese beiden Integrale sind Oberflächenintegrale, welche wir jetzt umwandeln.

Bezeichnen wir mit ds ein Oberflächenelement, dessen nach aufsen gerichtete Normale mit der x-Axe den Winkel α einschliefst, so wird $dy\,dz = \pm\,ds \cos\alpha$, je nachdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ

ist. Denkt man sich nun zunächst eine Parallele zur x-Axe, welche die Oberfläche des Körpers berührt, so ist $\cos\alpha =$ null; rückt die Parallele alsdann in den Körper herein, so erkennt man leicht, daſs für alle Indices 1 (Eintrittspunkte) $\cos\alpha$ negativ wird, für alle Indices 2 (Austrittspunkte) aber positiv. Mithin können wir im zweiten Integral sowohl für $\frac{\Theta_1}{e_1}\,dy\,dz$, als auch für $-\frac{\Theta_2}{e_2}\,dy\,dz$ setzen $-\frac{\Theta}{e}\,ds\cos\alpha$; die Integration erstreckt sich sodann über die ganze Oberfläche.

Ganz ähnlich wird es mit dem dritten Integral, bei welchem wir α aber auf die nach P' gerichtete Normale beziehen wollen, sodaſs $\cos\alpha$ für Eintrittsstellen positiv, für Austrittsstellen negativ wird. Wenn wir nun in (4) noch beiderseits $\frac{\partial v_2}{\partial x'}$ addieren und das erste Integral über den ganzen Raum des Körpers ausdehnen, zur Richtigstellung aber ein ebensolches Integral für die Kugel abziehen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = \left\{\begin{array}{l} k^2 \overset{\text{Körper}}{\iiint} \frac{1}{e}\,\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \\ -\,k^2 \overset{\text{Kugel}}{\iiint} \frac{1}{e}\,\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \\ -\,k^2 \overset{\text{Körperoberfl.}}{\int} \frac{\Theta\cos\alpha}{e}\,ds \;-\; k^2 \overset{\text{Kugeloberfl.}}{\int} \frac{\Theta\cos\alpha}{\varepsilon}\,ds \\ +\,\frac{\partial v_2}{\partial x'}\,. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Wir gehen nun dazu über, ε verschwinden zu lassen. Im zweiten Integral von (5) setzen wir für $dx\,dy\,dz$ wie in § 9 S. 11 $e^2\,de\,d\sigma$ und für $\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ den vorkommenden Maximalwert, den wir seinem absoluten Wert nach mit $\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_{max}$ bezeichnen. Dann ist

$$k^2 \overset{\text{Kugel}}{\iiint} \frac{1}{e}\,\frac{\partial\Theta}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \leqq k^2\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_{max} \iint e\,de\,d\sigma$$

$$\text{d. i.} \quad \leqq 2\pi k^2 \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_{max} \varepsilon^2,$$

was für ε gleich null verschwindet.

Im vierten Integral von (5) setzen wir $ds = \varepsilon^2 d\sigma$, nehmen für $\cos\alpha$ den Maximalwert 1 und für Θ den Maximalwert Θ_{max}; dann folgt der absolute Wert von

$$k^2 \overset{\text{Kugeloberfl.}}{\int} \frac{\Theta\cos\alpha}{\varepsilon}\,ds \leqq 4\pi k^2\,\Theta_{max}\,.\,\varepsilon\,,$$

was für $\varepsilon =$ null ebenfalls verschwindet.

$\frac{\partial v_2}{\partial x'}$ verschwindet für $\varepsilon =$ null nach § 10 S. 13 aber auch. Mithin wird endlich anstatt (5) erhalten:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = k^2 \iiint \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \, dx \, dy \, dz - k^2 \int \frac{\Theta \cos \alpha}{e} \, ds \,. \qquad (6)$$

Hierin bezieht sich das erste Integral auf den ganzen Raum des Körpers und das zweite auf seine Oberfläche. Es ist, wie man leicht erkennt, dasselbe Resultat, als ob bei der Entwicklung auf die Lage von P' im Innern des Körpers keine Rücksicht genommen wäre. Jedoch ist dann (6) nur für äufsere Lagen bewiesen.

Es gilt aber auch für Lagen von P' auf der Oberfläche des Körpers. In diesem Falle tritt nur in der Entwicklung an Stelle der Kugel ein Teil derselben, welcher von einem Stück Körper- und einem Stück Kugeloberfläche begrenzt wird. In (5) ist nun das zweite Integral über diesen Kugelteil, das dritte über die äufsere Oberfläche ohne den von der Kugel herausgeschnittenen Teil und das vierte über den innerhalb des Körpers liegenden Teil der Kugelfläche zu erstrecken. Man gelangt ohne Mühe wieder zu (6), wenn noch beachtet wird, dafs derjenige Teil des Oberflächenintegrals in (6), welcher von der Kugel in der Umgebung von P' ausgeschnitten wird, für $\varepsilon =$ null verschwindet, wie man mit Rücksicht darauf ersieht, dafs dem Oberflächenelement ds in der betreffenden Umgebung von P' die Form $e \, de \, d\psi$ gegeben werden kann, wobei $d\psi$ einer Drehung von e auf der Oberfläche entspricht.

Kehren wir nun zur Erde zurück, auf welche sich V bezieht. Dieselbe denken wir uns aus Teilen zusammengesetzt, innerhalb deren die Dichtigkeit sich stetig ändert und die sämtlichen Differentialquotienten der Dichtigkeit endlich und stetig sind. V setzt sich nun ebenfalls aus den v der einzelnen Teile zusammen, ebenso $\frac{\partial V}{\partial x'}$ aus den $\frac{\partial v}{\partial x'}$. Bildet man, indem man für $\frac{\partial v}{\partial x'}$ die Formel (6) anwendet, die Summe der Raumintegrale, so kann man sie in ein einziges Integral wie das erste in (6), ausgedehnt über die ganze Erde, zusammenziehen; nur ist bei der Integration auf die Unstetigkeitsflächen von Θ zu achten. Bildet man die Summe der Oberflächenintegrale, so erkennt man, dafs sich die Bestandteile derselben für die Grenzflächen je zweier benachbarter Teile wegen entgegengesetzter Richtung der Normale zu einem Integral zusammensetzen, welches von der sprungweisen Änderung $\Delta\Theta$ der Dichtigkeit in derjenigen Richtung der Normale abhängt, auf welche sich der Winkel α bezieht. Es bleibt dann noch das Oberflächenintegral (6) für die Oberfläche der ganzen Erde, für welches man ebenso wie für die Unstetigkeitsflächen ein $\Delta\Theta$ einführen kann, welches gleich $-\Theta$ in der Oberfläche ist, falls die Normale wie bisher nach aufsen gezogen wird.

Formel (6) können wir sonach, wenn nur für $-\Theta$ gesetzt wird $\Delta\Theta$, auf die ganze Erde bei beliebiger Lage von P' anwenden, und zwar offenbar nicht nur für die Ableitung von V nach x', sondern auch für diejenigen nach y' und z'.

Sind α, β und γ bezw. mit der Axe der x, y und z die Winkel der Normalen der Oberfläche und der Unstetigkeitsflächen der Dichtigkeit; ist ferner $\Delta\Theta$ die Änderung der Dichtigkeit bei Durchkreuzung der Oberfläche bezw. der Unstetigkeitsflächen in Richtung der Normale, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x'} &= k^2 \int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{e}\,\frac{\partial \Theta}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos\alpha}{e}\,ds \\ \frac{\partial V}{\partial y'} &= k^2 \int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{e}\,\frac{\partial \Theta}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos\beta}{e}\,ds \qquad (7) \\ \frac{\partial V}{\partial z'} &= k^2 \int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{e}\,\frac{\partial \Theta}{\partial z}\,dx\,dy\,dz + k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos\gamma}{e}\,ds. \end{aligned}$$

Hierin sind die Raumintegrale über die ganze Erde, die Flächenintegrale über ihre Oberfläche und die Unstetigkeitsflächen der Dichtigkeit auszudehnen.

§ 17. **Die zweiten und höheren Differentialquotienten von W haben bestimmte endliche Werte und ändern sich stetig, solange der Punkt P' sich nicht an einer Stelle, in welcher die Dichtigkeit Θ Singularitäten hat, befindet.**

Wir denken uns wieder, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen, die Erde in Abteilungen zerlegt, innerhalb deren die Dichtigkeit und alle beliebig hohen Differentialquotienten derselben endlich und stetig sind.

Die Ausdrücke (7) des vorigen Paragraphen können dann sicher Anwendung finden und sie lassen sich zunächst jedenfalls einmal differenzieren, solange P' sich nicht in einer Grenzfläche der Abteilungen befindet. Denn die Flächenintegrale lassen sich beliebig oft differenzieren, sobald e für keinen Flächenpunkt null wird, weil dann die Differentialquotienten von $\frac{1}{e}$ unter dem Integralzeichen alle endlich und stetig sind (vergl. § 12 S. 14).

Die Raumintegrale der Ausdrücke (7) lassen sich aber unmittelbar jedenfalls einmal differenzieren, da sie nichts anderes als Potentialfunktionen der Anziehung, die sich nach § 10 S. 13 differenzieren lassen, vorstellen, wobei nur die Dichtigkeit nicht Θ, sondern der betreffende erste Differentialquotient von Θ ist, welcher aber die wesentliche Eigenschaft, endlich zu sein, mit Θ teilt.

Es ist nun leicht zu erkennen, dafs jetzt auch abermals differenziert werden kann. Denn die ersten Differentialquotienten jedes der Raumintegrale lassen sich nach den Formeln (7) wieder als Aggregate von Raumintegralen und Flächenintegralen darstellen, wobei

nur an Stelle von Θ der betreffende Differentialquotient von Θ tritt. — U. s. f.

Leuchtet auf diese Weise ein, daſs alle Differentialquotienten von V bestimmte endliche Werte haben müssen, welcher Ordnung sie auch angehören, so ist nun, wie schon § 12 S. 14 in einem ähnlichen Fall bemerkt, die weitere Folge hiervon die Stetigkeit der Differentialquotienten.

Dieselben Eigenschaften wie die Differentialquotienten von V haben auch diejenigen von W, weil der von der Zentrifugalkraft herrührende Teil von W zu den zweiten und höheren Differentialquotienten von V nur konstante Beiträge oder null hinzufügt.

Hiermit ist der an die Spitze des Paragraphen gestellte Satz für jeden Differentialquotienten von angebbar hoher Ordnung bewiesen.

Das Vorstehende läſst unentschieden, wie sich die Differentialquotienten beim Durchgange von P' durch die Singularitätsstellen der Dichtigkeit gestalten. Aus der im Folgenden für die zweiten Differentialquotienten angestellten Untersuchung wird hervorgehen, daſs sie sich dabei unstetig ändern.

§ 18. Die zweiten Differentialquotienten von V beim Durchgange von P' durch Singularitätsstellen der Dichtigkeit.

Die zweiten Differentialquotienten von V und damit diejenigen von W würden auch hier mit stetig veränderlicher Lage von P' bestimmte endliche Werte in stetiger Änderung durchlaufen, wenn nicht die Flächenintegrale der Ausdrücke (7) des § 16 S. 24 für $e =$ null unendlich werdende Elemente erhielten. Nehmen wir nun an, daſs an der Stelle P_0 der Punkt P' eine Fläche durchdringt, in welcher Singularitäten von Θ auftreten und die wir kurz Grenzfläche nennen. Es hängt dann der Ausnahmezustand der zweiten Differentialquotienten nur von demjenigen Teile der Flächenintegrale ab, welcher sich auf die Umgebung von P_0 bezieht. Wir haben also nur diese ins Auge zu fassen; dabei ist die Begrenzung der Umgebung willkürlich.

Die Betrachtung würde sehr einfach werden, wenn wir diese Umgebung als eben voraussetzen wollten. Indessen erscheint vielleicht die Berechtigung zu dieser Voraussetzung zweifelhaft, obgleich man es bei der Zerlegung der Erde in Abteilungen von stetig verlaufender Dichtigkeit jedenfalls nur mit einer Annäherung zu thun hat. Wir stellen daher eine Untersuchung an die Spitze, wobei die Grenzfläche gekrümmt vorausgesetzt wird, ohne daſs in dieser Krümmung Singularitäten auftreten, was vollkommen den Verhältnissen genügt.*)

*) Im wesentlichen nach „*Bernhard Riemann*, Schwere, Elektricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen bearbeitet von *Karl Hattendorff*. Hannover 1876.“ S. 52—56.

Am Schlusse des § 19 geben wir aber auch noch die Ableitung des Resultates unter der vereinfachenden Voraussetzung der Ebenheit.

Den Punkt P_0 nehmen wir als Anfang der Koordinaten a, b, c eines rechtwinkeligen Axensystems und legen die a-Axe in die Normale der Grenzfläche an der Stelle P_0; die bc-Ebene ist alsdann Tangentialebene. In derselben denken wir uns Polarkoordinaten nach den Formeln

$$b = t \cos \psi \qquad c = t \sin \psi \tag{1}$$

eingeführt. Dementsprechend ist zu setzen für die Projektion des Flächenelementes ds auf die bc-Ebene der Ausdruck $t\, dt\, d\psi$. Es ist daher

$$\cos \alpha \, ds = t\, dt\, d\psi\,, \tag{2}$$

wenn wir mit α, β und γ wieder die Neigungswinkel der Normale des Flächenelements bezw. gegen die a-, b- und c-Axe bezeichnen. Zugleich bemerken wir, dafs $\Delta\Theta_0$ nunmehr bezeichnet den Sprung in Θ bei Überschreitung der Grenzfläche an der Stelle P_0 in Richtung der positiven a-Axe.

Denken wir uns nun V auf die Axen der a, b, c bezogen und bedeuten ferner a', b' und c' die Koordinaten von P', so kommt es an auf die Untersuchung von (vergl. § 16 (7) S. 24):

$$\begin{aligned} &k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos\alpha}{e}\, ds \text{ als Teil von } \frac{\partial V}{\partial a'} \\ &k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos\beta}{e}\, ds \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \frac{\partial V}{\partial b'} \\ &k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos\gamma}{e}\, ds \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \frac{\partial V}{\partial c'}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei die Integration über die Umgebung von P_0 auszudehnen ist.

Zunächst untersuchen wir den Differentialquotienten des ersten Ausdrucks, genommen nach a', also

$$k^2 \int \frac{a - a'}{e^3}\, \Delta\Theta \cos\alpha \, ds \text{ als Teil von } \frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}\,. \tag{4}$$

Das hierin auftretende Integral heifse J. Mit Rücksicht auf (2) wird, wenn T der Wert von t für den Rand der in betracht gezogenen Umgebung von P_0 ist:

$$J = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^T \frac{a - a'}{e^3}\, \Delta\Theta \, t\, dt\,. \tag{5}$$

Hierbei ist zu beachten, dafs ψ und t zwei von einander unabhängige Variable sind, welche a nach Mafsgabe der Gleichung der Grenzfläche bestimmen. Ferner ist unter Annahme von $b' = c' =$ null:

$$e^2 = t^2 + (a - a')^2\,. \tag{6}$$

Durch Differentiation nach t und Division mit e^3 folgt hieraus:

$$\frac{1}{e^2}\frac{\partial e}{\partial t}dt = \frac{t}{e^3}dt + \frac{a-a'}{e^3}\frac{\partial a}{\partial t}dt$$

und wegen $\qquad \frac{1}{e^2}\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial t} \qquad$ hieraus weiter:

$$\int\frac{a-a'}{e^3}\varDelta\Theta\, t\,dt = -\int\frac{(a-a')^2}{e^3}\varDelta\Theta\frac{\partial a}{\partial t}dt - \int(a-a')\varDelta\Theta\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial t}dt. \quad (7)$$

Das zweite Integral rechter Hand wandeln wir durch partielle Integration um. Es ist

$$\frac{\partial\left\{(a-a')\frac{\varDelta\Theta}{e}\right\}}{\partial t} = (a-a')\varDelta\Theta\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial t} + \frac{1}{e}\left\{\varDelta\Theta\frac{\partial a}{\partial t} + (a-a')\frac{\partial\varDelta\Theta}{\partial t}\right\};$$

hiermit wird

$$\int_0^T(a-a')\varDelta\Theta\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial t}dt = \left\{\begin{array}{l}\left\{\frac{(a-a')\varDelta\Theta}{e}\right\}_{t=T} - \left\{\frac{(a-a')\varDelta\Theta}{e}\right\}_{t=0} \\ -\int_0^T\left\{\frac{\varDelta\Theta}{e}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a-a'}{e}\frac{\partial\varDelta\Theta}{\partial t}\right\}dt.\end{array}\right\} \quad (8)$$

Diese Transformation ist sicher zulässig, wenn $(a-a')$, $\varDelta\Theta$ und $\frac{1}{e}$ nebst ihren ersten Differentialquotienten nach t innerhalb der Integrationsgrenzen endlich und mit t stetig veränderlich sind. Für $a-a'$ ist diese Bedingung durch Einschränkung der Umgebung sicher erfüllbar, wenn die Fläche in der Umgebung von P_0 stetig gebogen ist. $\varDelta\Theta$ ist als Unterschied zweier endlichen und stetigen Funktionen Θ auf jeder Grenzfläche endlich und stetig. Dasselbe gilt für seine ersten Differentialquotienten. $\frac{1}{e}$ mit seinen Differentialquotienten ist endlich und stetig, solange P' nicht nach P_0 selbst fällt.

Die Formel (8) führen wir in (7) ein. In den Integralen tritt dabei eine Vereinfachung ein, da die beiden, $\frac{\partial a}{\partial t}$ enthaltenden Integrale, auf den Nenner e^3 gebracht, sich wegen (6) zusammenziehen lassen. Wir erhalten:

$$\int_0^T\frac{a-a'}{e^3}\varDelta\Theta\,t\,dt = \left\{\begin{array}{l}-\frac{(A-a')\varDelta\Theta_A}{E} \mp \varDelta\Theta_0 \\ +\int_0^T\frac{a-a'}{e}\frac{\partial\varDelta\Theta}{\partial t}dt + \int_0^T\varDelta\Theta\frac{t^2}{e^3}\frac{\partial a}{\partial t}dt\end{array}\right\},$$

wenn für $t = T$ bezeichnet werden a, e und $\varDelta\Theta$ mit A, E und $\varDelta\Theta_A$ und wenn ferner berücksichtigt wird, dafs für $t =$ null $a' = e$ ist, falls P' auf der positiven a-Axe liegt, dafs dagegen $-a' = e$ ist, falls P' auf der negativen a-Axe liegt. Das obere Zeichen in vorstehender Formel,

für welche P' nun jedenfalls in der Normale von P_0 gedacht ist, gilt für a' positiv, das untere für a' negativ.

Führen wir die zuletzt erhaltene Formel in (5) ein, so wird

$$J = \left\{ \begin{array}{l} \mp 2\pi \, \varDelta\Theta_0 \quad {a' \, pos. \atop a' \, neg.} \\ -\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(A - a')\,\varDelta\Theta_A}{E}\, d\psi \\ +\displaystyle\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^T \frac{a - a'}{e}\, \frac{\partial \varDelta\Theta}{\partial t}\, dt \\ +\displaystyle\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^T \varDelta\Theta\, \frac{t^2}{e^3}\, \frac{\partial a}{\partial t}\, dt . \end{array} \right\} \tag{9}$$

§ 19. **Fortsetzung:** $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$. Wir können nunmehr untersuchen, wie sich der von der Umgebung von P_0 abhängende Teil von $\partial^2 V : \partial a'^2$ beim Durchgange von P' durch P_0 verhält. Nach (4) und (5) des vorigen Paragraphen ist $k^2 J$ dieser Teil. Betrachten wir vorerst die drei Integrale in (9), so zeigt sich, dafs sie sich bei Verschiebungen von P' in der a-Axe, auch durch P_0 hindurch, stetig ändern.

Bei dem ersten Integral ist dies sofort ersichtlich, da a' und $\frac{1}{E}$ endlich sind und sich mit a' stetig ändern.

Bei dem zweiten Integral ist dasselbe der Fall, insoweit wir nicht von null bis T, sondern von r bis T integrieren, wobei r kleiner als T ist, aber nicht null genommen werden darf. Da aber $\frac{a - a'}{e}$ absolut genommen < 1 ist, so ist der absolute Wert des verbleibenden Restes des zweiten Integrals, nämlich

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r \frac{a - a'}{e}\, \frac{\partial \varDelta\Theta}{\partial t}\, dt\,, \tag{1}$$

kleiner als der absolute Wert desjenigen Doppelintegrals, welches wir erhalten, wenn $\frac{a - a'}{e}$ gleich 1 und für $\frac{\partial \varDelta\Theta}{\partial t}$ sein gröfster absoluter Wert im Integrationsbereich gesetzt wird, also kleiner als der absolute Wert von

$$\left(\frac{\partial \varDelta\Theta}{\partial t}\right)_{max} \cdot \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r dt$$

oder

$$2\pi r \left(\frac{\partial \varDelta\Theta}{\partial t}\right)_{max} . \tag{1*}$$

Diese Formel zeigt, dafs die unendlich nahe Umgebung von P_0 nur unendlich wenig zu dem zweiten Integral in (9) beiträgt. Mit-

hin kann diese Umgebung bei einer Verschiebung von P', auch durch P_0 hindurch, insoweit das zweite Integral von (9) in betracht kommt, nichts Endliches beitragen.

Bei dem dritten Integral von (9) integrieren wir auch von null bis r und von r bis T; der letztere Teil ist dann unzweifelhaft auch bei Durchdringung der Grenzfläche in P_0 stetig veränderlich. Das Verhalten des ersten Teiles hängt ab von $\frac{\partial a}{\partial t}$. Wir haben bereits angenommen, dafs die Grenzfläche an der Stelle P_0 eine bestimmte Normale hat und überhaupt in der Umgebung von P_0 von $t = 0$ bis T stetig gekrümmt ist. Dann können wir setzen

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \mu t, \tag{2}$$

wenn μ den zweiten Differentialquotienten von a nach t für eine nicht näher bekannte, im Intervall $t = 0$ bis r gelegene Stelle bezeichnet. μ ist ein endlicher Wert, wenn das Krümmungsmafs der Grenzfläche innerhalb des Integrationsgebiets nirgends unendlich grofs wird (Bd. 1, S. 59, § 15). Sollte letzteres doch der Fall sein, so kann die betreffende Stelle durch Verkleinerung von r ausgeschlossen werden mit Ausnahme des Falles, dafs P_0 selbst ein unendlich grofses Krümmungsmafs hat. Diesen Fall, der ja nur ein Ausnahmefall sein kann, betrachten wir nicht weiter.*)

Die nächste Umgebung von P_0 liefert zu dem dritten Integral von (9) unter Annahme von (2) den Beitrag

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r \varDelta\Theta\, \mu \frac{t^3}{e^3}\, dt\,. \tag{3}$$

Nun ist $t < e$. Setzen wir jetzt für $t^3 : e^3$ die Einheit, für $\varDelta\Theta$ den Maximalwert im Integrationsbezirk, ebenso für μ den Maximalwert in den verschiedenen Richtungen, so erhalten wir zu viel. Der Beitrag ist somit absolut genommen kleiner als der absolute Wert von

$$2\pi\, r\, (\mu\, \varDelta\Theta)_{max}\,. \tag{3*}$$

Die unendlich nahe Umgebung trägt somit nur unendlich wenig bei, insoweit das dritte Integral in betracht kommt.

Wenn nun P' unendlich nahe an P_0 auf der negativen Seite der a-Axe (der Grenzflächennormale) liegt und durch P_0 hindurch nach einem der Grenzfläche unendlich nahen Punkte der positiven Seite geht, so beträgt die Änderung von $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$ wegen der drei Integrale

*) Vergl. übrigens „*C. F. Gauss*, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstofsungskräfte. Art. 15 und 16. Leipzig 1840.“ (*Gauss' Werke*, Bd. 5.)

in (9) nur unendlich wenig, dagegen wegen des ersten Teiles von (9) $-4\pi k^2 \varDelta\Theta_0$, wobei $\varDelta\Theta_0$ die entsprechende Dichtigkeitsänderung ist. Wir haben hierin die Änderung des durch (4) S. 26 gegebenen Teiles von $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$. Die andern Teile von $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$ ändern sich stetig und also im betrachteten Falle unendlich wenig.

Daher ist also die Änderung von $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$ bei dem normalen Durchgange durch eine Grenzfläche an einer Stelle P_0, wo plötzlich die Dichtigkeit um $\varDelta\Theta_0$ sich ändert, wenn in der Umgebung dieses Punktes die Grenzfläche stetig gekrümmt ist und ein endliches Krümmungsmafs besitzt, gleich

$$\varDelta \frac{\partial^2 V}{\partial a'^2} = -4\pi k^2 \varDelta\Theta_0 . \tag{4}$$

Nehmen wir innerhalb der Integrationsgrenzen die Grenzfläche als eben und die Gröfse $\varDelta\Theta$ konstant an, so giebt (4) S. 26:

$$-a' k^2 \varDelta\Theta_0 \int\int \frac{t\, dt\, d\psi}{\sqrt{t^2 + a'^2}^3}$$

d. i.

$$2\pi k^2 \varDelta\Theta_0 \left(\frac{a'}{\sqrt{T^2 + a'^2}} - \frac{a'}{\sqrt{a'^2}} \right),$$

worin die $\sqrt{a'^2}$ immer positiv zu nehmen ist. Ist a' unendlich klein, so verschwindet der erste Teil, es bleibt nur der zweite, welcher gleich -1 ist für positives a', $+1$ für negatives a', und man gelangt wieder zu dem Resultat (4).

Da man nun, um im allgemeinen die Voraussetzungen plausibel erscheinen zu lassen, sich T unendlich klein zu denken hat, so ist in den Schriften, welche vorstehende kurze Darstellungsweise acceptieren, hervorgehoben, man müsse sich a' immer im Verhältnisse zu T unendlich klein denken (also unendlich klein zweiter Ordnung). Die Darstellung des § 18 und § 19 vermeidet eine solche Vorstellung und die Zweifel, die mit jener verknüpft sind.

§ 20. **Die übrigen zweiten Differentialquotienten** erleiden bei dem normalen Durchgange durch eine Grenzfläche keinen Sprung. Hierzu betrachten wir zwei charakteristische Beispiele:

$$k^2 \int \frac{a - a'}{e^3} \varDelta\Theta \cos\beta\, ds \quad \text{als Teil von} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial a' \partial b'} \tag{1}$$

und

$$k^2 \int \frac{b - b'}{e^3} \varDelta\Theta \cos\beta\, ds \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial b'^2}, \tag{2}$$

die Integration bezogen auf die Umgebung von P_0.

Würden wir voraussetzen, dafs innerhalb derselben die Grenzfläche als eben anzusehen sei, so wäre $\cos\beta =$ null und es würde mithin ein Sprung in den betreffenden Differentialquotienten beim Durchgange von P' durch P_0 hindurch nicht entstehen. Dasselbe Resultat ist indessen auch leicht zu erzielen, wenn wir die Grenzfläche gekrümmt annehmen.

Auf den Ausdruck (1) ist nämlich die betreffende Entwicklung der Paragraphen 18 und 19 sofort anwendbar, wenn man für $\varDelta\Theta$ setzt $\varDelta\Theta \sec\alpha \cos\beta$. Da $\cos\beta$ im Punkte P_0 in null übergeht, so tritt in (4) des vorigen Paragraphen an Stelle von $\varDelta\Theta_0$ null und es ergiebt sich beim normalen Durchgange durch P_0 die Änderung

$$\varDelta \frac{\partial^2 V}{\partial a' \partial b'} = 0 .$$

Ebenso ist (3)

$$\varDelta \frac{\partial^2 V}{\partial a' \partial c'} = 0 .$$

Betrachten wir das in (2) auftretende Integral, welches wir J' nennen wollen, so wird zunächst durch Substitution von $t\, dt\, d\psi \sec\alpha$ für ds nach S. 26 § 18 (2) erhalten:

$$J' = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^T \frac{b - b'}{e^3} \varDelta\Theta \sec\alpha \cos\beta\; t\, dt . \tag{4}$$

Hierbei haben wir nun noch zu beachten, daſs $b' =$ null ist, wenn wir wieder festsetzen, daſs P' auf der a-Axe liegt. Mit Rücksicht auf eine bekannte Relation der analytischen Geometrie, wonach

$$\cos\beta = - \frac{\frac{\partial a}{\partial b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial c}\right)^2}}$$

wird, können wir ferner annehmen, daſs

$$\cos\beta = \lambda t \tag{5}$$

sei, wenn λ einen endlichen, von ψ und t abhängenden Wert bezeichnet. Denn wegen der vorausgesetzten stetigen Krümmung und des endlichen Krümmungsmaſses der Grenzfläche in der gehörig eingeschränkten Umgebung von P_0 ist

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \lambda_1 b + \lambda_2 c = (\lambda_1 \cos\psi + \lambda_2 \sin\psi) \,.\, t ,$$

wobei λ_1 und λ_2 zweite Differentialquotienten von a nach b und c für eine nicht näher bekannte, im Integrationsbereiche gelegene Stelle bedeuten. Diese Relation aber führt an der Hand des allgemeinen Ausdrucks für $\cos\beta$ leicht zu (5).

Es wird nun

$$J' = \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^T \lambda\, \varDelta\Theta \sec\alpha \frac{t^3}{e^3}\, dt . \tag{6}$$

Nehmen wir das innere Integral nur von $r >$ null bis T, so ändert sich der entsprechende Teil von J bei Verschiebung von P' stetig, auch wenn dieselbe P' durch P_0 hindurchführt. Um zu erkennen, welchen Einfluſs derjenige Teil von J' hat, welcher bei der Integration von $t =$ null bis r entsteht, beachten wir, daſs $t < e$ ist. Setzen

wir nun für $t^3 : e^3$ und für $\cos\psi$ die Einheit, sowie für $\lambda\,\Delta\Theta \sec\alpha$ seinen gröfsten absoluten Wert $(\lambda\,\Delta\Theta \sec\alpha)_{max}$ innerhalb des Integrationsbereiches, so wird der absolute Wert des betreffenden Teiles von J' kleiner als

$$2\pi\, r\,(\lambda\,\Delta\Theta \sec\alpha)_{max}\,. \tag{7}$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs die unendlich nahe Umgebung von P_0 zu J' nur unendlich wenig beiträgt und wir haben somit bei normalem Durchgange durch P_0 die Änderung

$$\Delta\,\frac{\partial^2 V}{\partial b'^2} = 0\,,$$

und ebenso ist (8)

$$\Delta\,\frac{\partial^2 V}{\partial c'^2} = 0:$$

§ 21. **Transformation der Koordinaten; Differentialgleichung für V und W.** Haben wir irgend ein rechtwinkeliges Axensystem, dessen u-Axe mit den Axen a, b, c bezw. die Winkel λ, μ, ν bildet, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial u'} = \frac{\partial V}{\partial a'}\frac{\partial a'}{\partial u'} + \frac{\partial V}{\partial b'}\frac{\partial b'}{\partial u'} + \frac{\partial V}{\partial c'}\frac{\partial c'}{\partial u'}\,,$$

insofern wir uns das V des Punktes P' als Funktion von a', b' und c' gegeben denken. Differenzieren wir abermals nach u', so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial u'^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}\left(\frac{\partial a'}{\partial u'}\right)^2 &+ \frac{\partial^2 V}{\partial b'^2}\left(\frac{\partial b'}{\partial u'}\right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial c'^2}\left(\frac{\partial c'}{\partial u'}\right)^2\\ &+ 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial a'\,\partial b'}\,\frac{\partial a'}{\partial u'}\,\frac{\partial b'}{\partial u'} + 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial a'\,\partial c'}\,\frac{\partial a'}{\partial u'}\,\frac{\partial c'}{\partial u'}\\ &+ 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial b'\,\partial c'}\,\frac{\partial b'}{\partial u'}\,\frac{\partial c'}{\partial u'}\,.\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Ergebnisse des § 20 verschwindet alles bis aufs erste Glied, wenn wir uns die Differenz der vorstehenden Gleichung für beide Seiten einer Grenzfläche gebildet denken, und es entsteht also beim normalen Durchgange durch dieselbe in $\partial^2 V : \partial u'^2$ ein Sprung

$$\Delta\,\frac{\partial^2 V}{\partial u'^2} = -\,4\pi k^2\,\Delta\Theta_0 \cos^2\lambda\,, \tag{1}$$

wobei berücksichtigt ist, dafs einer Verschiebung des Punktes P' in der u-Axe um $\partial u'$ entsprechen die Änderungen:

$$\partial u' \cos\lambda = \partial a',\quad \partial u' \cos\mu = \partial b',\quad \partial u' \cos\nu = \partial c'\,. \tag{2}$$

In gleicher Weise findet sich eine der Gleichung (1) entsprechende Formel für jede der beiden andern Axenrichtungen, die mit der u-Axe kombiniert sind, nur ist für λ der betreffende Neigungswinkel zur a-Axe, der Grenzflächennormale, zu setzen. Sind z. B. die drei Axen die früher benutzten der x, y, z und sind α, β, γ bezw. die Winkel der Grenzflächennormale mit diesen drei Axen, so wird

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} &= -4\pi k^2 \Delta\Theta_0 \cos^2\alpha \\ \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= -4\pi k^2 \Delta\Theta_0 \cos^2\beta \\ \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} &= -4\pi k^2 \Delta\Theta_0 \cos^2\gamma\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die bekannte Relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,,$$

dafs

$$\Delta \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = -4\pi k^2 \Delta\Theta_0 \tag{4}$$

ist. Diese Gleichung giebt zunächst den Unterschied von $\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}$ zu beiden Seiten einer Grenzfläche, Unstetigkeitsfläche der Dichtigkeit.

Man kann aus ihr eine andere Gleichung ableiten, wenn man zunächst bemerkt, dafs aufserhalb der Erde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = 0 \tag{5}$$

ist. In Bezug auf die Potentialfunktion eines beliebigen Körpers heifst (5) die *Gleichung von Laplace.* Aufserhalb der Erde können wir setzen, vergl. S. 19 § 15 (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} &= k^2 \int \frac{-e^2 + 3(x-x')^2}{e^3}\,\frac{dm}{e^2} + \omega^2 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} &= k^2 \int \frac{-e^2 + 3(y-y')^2}{e^3}\,\frac{dm}{e^2} + \omega^2 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} &= k^2 \int \frac{-e^2 + 3(z-z')^2}{e^3}\,\frac{dm}{e^2}\,, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} = 2\omega^2. \tag{6}$$

Läfst man ω weg, so geht W in V und (6) in (5) über; folglich gilt (5) aufserhalb.

Nehmen wir in (4) die Oberfläche als Grenzfläche und treten von aufsen nach innen ein, so ist $\Delta\Theta_0 = \Theta$ in der Oberfläche, und die Addition von (4) und (5) giebt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = -4\pi k^2 \Theta\,. \tag{7}$$

Diese Gleichung giebt den Wert von $\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}$ für einen der Oberfläche unendlich nahen Punkt, in dem die Dichtigkeit gleich Θ ist. Sie gilt aber auch für jeden andern Punkt, in welchem die Dichtigkeit regelmäfsig verläuft. Denn führt man unendlich nahe einem solchen einen Schnitt, der die Erde in zwei Teile teilt, so ist in Bezug auf den einen Teil P' ein äufserer Punkt und für das be-

treffende V gilt (5); in Bezug auf den andern Teil gilt dann (7), weil in diesem Teil P' ein innerer, der Oberfläche unendlich naher Punkt ist. Es gilt daher für das totale V wieder Gleichung (7).*)

Abgesehen von denjenigen Flächen, in welchen Θ Singularitäten hat, ist daher allgemein für einen Punkt P' mit den Koordinaten x', y' und z', sowie mit der Dichtigkeit Θ':

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = -4\pi k^2 \Theta' ;$$

ferner wegen (6):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} = -4\pi k^2 \Theta' + 2\omega^2 . \qquad (8)$$

Diese Differentialgleichung zeigt, dafs W nur innerhalb eines solchen Teiles der Erde, in welchem Θ' durch ein und dieselbe Funktion der Koordinaten darstellbar ist, einer einzigen Funktion der Koordinaten im gewöhnlichen Sinne der Analysis (einer analytischen Funktion) entspricht, dafs aber bei wechselnder Funktionsform für Θ' auch der analytische Ausdruck für W wechseln mufs.

Kehren wir noch einmal zurück zu der eingangs dieses Paragraphen eingeführten u-Axe und nehmen wir an, dafs sie durch Drehung des Axensystems abc um die c-Axe als Endlage der a-Axe hervorgegangen sei. Wir haben dann ein Axensystem, dessen Koordinatenanfang im Punkte P_0 der Grenzfläche liegt, gegen welche zwei der Axen geneigt sind, während die dritte, die c-Axe, dieselbe in P_0 tangiert. Differenzieren wir jetzt die Identität

$$\frac{\partial V}{\partial c'} = \frac{\partial V}{\partial c'}$$

nach u', so folgt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c' \partial u'} = \frac{\partial^2 V}{\partial c' \partial a'} \frac{\partial a'}{\partial u'} + \frac{\partial^2 V}{\partial c' \partial b'} \frac{\partial b'}{\partial u'} + \frac{\partial^2 V}{\partial c'^2} \frac{\partial c'}{\partial u'} ,$$

und hieraus ergiebt sich, wenn wieder die Differenz dieser Gleichung für beide Seiten der Grenzfläche gebildet wird, mit Rücksicht auf die Ergebnisse von § 20 bei normalem Durchgange durch eine Grenzfläche:

$$\varDelta \frac{\partial^2 V}{\partial c' \partial u'} = 0 . \qquad (9)$$

Wegen des Umstandes, dafs die zweiten Differentialquotienten der Potentialfunktion der Zentrifugalkraft entweder konstant oder null sind, gelten die Formeln (1) und (9), von denen wir nun Gebrauch machen werden, unmittelbar auch für W.

Laplace glaubte, dafs die Differentialgleichung (5) für V auch innerhalb des Körpers gelte, und *Méc. cél., t. I, l. II, p. 136—137* zeigt, wie er zu dieser Ansicht gelangt ist. Er übersieht nämlich, dafs die Differentiation unter dem Integralzeichen an Bedingungen geknüpft ist. Erst *Poisson* fand für das Innere des Körpers die richtige Differentialgleichung.

*) *Gustav Kirchhoff*, Mechanik. 2. Auflage, Leipzig 1877, S. 179 unten.

§ 22. Die Unstetigkeit in der Krümmung der Niveauflächen bei dem Durchgange derselben durch eine Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit. Wir betrachten eine Niveaufläche zunächst innerhalb eines Raumes, wo die Dichtigkeit keine Singularitäten hat. Dann ist die Vorbedingung für die Entwicklung von W nach *Taylors* Satz in eine endliche Reihe, nämlich die Bedingung der Endlichkeit und Stetigkeit der Funktion W und ihrer in betracht kommenden Differentialquotienten, erfüllt. Nach diesem auf drei Variable ausgedehnten Satze hat man für ein rechtwinkeliges, durch den Punkt P_0 gelegtes Koordinatensystem der $\xi\,\eta\,\zeta$, wenn in P_0 das Potential $W = W_0$ ist:

$$W = W_0 + (W_1\xi + W_2\eta + W_3\zeta) + \frac{1}{2}(W_{1\cdot1}\xi^2 + W_{2\cdot2}\eta^2 + W_{3\cdot3}\zeta^2)$$
$$+ (W_{1\cdot2}\xi\eta + W_{1\cdot3}\xi\zeta + W_{2\cdot3}\eta\zeta) + Gl_3\,. \tag{1}$$

Hierin bedeuten W_1, W_2, W_3 die ersten Differentialquotienten nach ξ, η, ζ, ferner $W_{1\cdot1}$, $W_{2\cdot2}$, $W_{3\cdot3}$ die zweiten Differentialquotienten nach ξ, η, ζ und endlich $W_{1\cdot2}$, $W_{1\cdot3}$, $W_{2\cdot3}$ die zweiten Differentialquotienten nach ξ und η, ξ und ζ und η und ζ, genommen für den Koordinatenanfang P_0. Der mit Gl_3 bezeichnete Rest der Entwicklung hat in Bezug auf die Koordinaten den dritten Grad; die in diese Koordinatenausdrücke multiplizierten Differentialquotienten dritter Ordnung gelten aber nicht für P_0, sondern für irgend welchen, nicht näher bekannten Punkt der geraden Linie zwischen P_0 und dem Punkt $P = (\xi\,\eta\,\zeta)$.*)

Die Entwicklung (1) kann immer dadurch zu einer brauchbaren gemacht werden, dafs man ξ, η, ζ auf ein dem Punkte P_0 überall hinreichend nahes Gebiet beschränkt — so nahe, dafs der Rest Gl_3, welcher aus einer endlichen Anzahl von Produkten endlicher Gröfsen (der 3. Differentialquotienten) in Potenzen und Produkte 3. Grades von ξ, η, ζ besteht, als verschwindend angesehen werden kann.

Für die Punkte P einer durch P_0 gelegten Niveaufläche ist W überall gleich W_0. Hierdurch vereinfacht sich (1); noch mehr aber, wenn wir die Normale der Fläche zur ζ-Axe nehmen. Dann verschwinden W_1 und W_2, wie die Differentiation von (1) zeigt, weil die beiden Differentialquotienten $\partial\zeta : \partial\xi$ und $\partial\zeta : \partial\eta$, entsprechend der tangentialen Lage der ξ- und η-Axe, für ξ, η und ζ gleich null verschwinden müssen. W_3 stellt nun nach § 8 (1) S. 10 die Schwerkraft g negativ genommen dar, wenn wir festsetzen, dafs die ζ-Axe die Flächennormale in der Richtung abnehmender W angiebt. Indem wir unsere Betrachtung auf die Nähe der physischen Erdoberfläche beschränken, ist der Wert von g d. i. $-W_3 >$ null und die Niveaufläche daher stetig gebogen.

*) Vergl. z. B. *Hattendorff*, Höhere Analysis, Bd 1, Hannover 1880. S. 287 und 288.

Wir erhalten jetzt als Gleichung der Niveaufläche in der Umgebung des Punktes P_0, bezogen auf P_0 als Koordinatenanfang und die Normale als ζ-Axe:

$$\left.\begin{array}{l} W_3\zeta + \frac{1}{2}(W_{1\cdot1}\xi^2 + W_{2\cdot2}\eta^2 + W_{3\cdot3}\zeta^2) \\ \quad + \quad (W_{1\cdot2}\xi\eta + W_{1\cdot3}\xi\zeta + W_{2\cdot3}\eta\zeta) + Gl_3 \end{array}\right\} = 0. \quad (2)$$

Sind aber ξ und η Gröfsen 1. Ordnung, so hat ζ hiernach die 2. Ordnung, $\xi\zeta$ und $\eta\zeta$ haben die 3. und ζ^2 die 4. Ordnung. Damit ist noch einfacher:

$$W_3\zeta + \frac{1}{2}(W_{1\cdot1}\xi^2 + W_{2\cdot2}\eta^2) + W_{1\cdot2}\xi\eta + Gl_3 = 0. \quad (3)$$

In der $\xi\eta$-Ebene führen wir nun Polarkoordinaten ϑ und α ein nach den Relationen:

$$\xi = \vartheta\cos\alpha \qquad \eta = \vartheta\sin\alpha. \quad (4)$$

Die Gleichung (3) giebt dann:

$$\zeta = -\vartheta^2 \frac{W_{1\cdot1}\cos^2\alpha + W_{2\cdot2}\sin^2\alpha + 2W_{1\cdot2}\sin\alpha\cos\alpha}{2W_3} + Gl_3. \quad (5)$$

Dies ist für konstantes α zugleich die Gleichung der Schnittkurve einer Normalebene in P_0. Ein Kreisbogen vom Radius ϱ_α, der die Schnittkurve in P_0 tangiert, hat die Gleichung*) $\vartheta^2 = -\zeta(2\varrho_\alpha + \zeta)$, woraus, wenn ϑ eine Gröfse 1. Ordnung ist, folgt:

$$\zeta = -\vartheta^2 \cdot \frac{1}{2\varrho_\alpha} + Gl_4. \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) stimmen für unendlich kleine ϑ, wo die Gl_3 und Gl_4 gegen ϑ^2 zu vernachlässigen sind, mit einander überein für

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{W_{1\cdot1}\cos^2\alpha + W_{2\cdot2}\sin^2\alpha + 2W_{1\cdot2}\sin\alpha\cos\alpha}{W_3}. \quad (7)$$

Diese Formel bestimmt den Krümmungsradius der durch α fixierten Normalebene der Niveaufläche in P_0 und zwar in dem Sinne, dafs bei positivem Werte von ϱ_α der Differentialquotient W_3 in Bezug auf die wachsende Richtung von ϱ_α zu verstehen ist.

Differenziert man den Ausdruck (7) für $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ nach α, so findet sich als Bedingungsgleichung des Maximums und Minimums:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2W_{1\cdot2}}{W_{1\cdot1} - W_{2\cdot2}}, \quad (8)$$

worin wir α sogleich einen Index angehangen haben, um es von dem allgemeinen Symbol zu unterscheiden. Eliminiert man nun $W_{1\cdot2}$ aus dem Zähler rechter Hand in der auf α_0 angewandten Gleichung (7) mittelst (8), unter gleichzeitiger Einführung der trigonometrischen Funktionen von $2\alpha_0$ für $\cos^2\alpha_0$, $\sin^2\alpha_0$ und $\sin\alpha_0\cos\alpha_0$, so folgt:

*) Vergl. Bd. 1 Fig. 2 S. 58. Es ist aber dort die ζ-Axe nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtet, während wir jetzt besser das Gegenteil annehmen.

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha_0}} = \frac{W_{1\cdot1} + W_{2\cdot2}}{2\,W_3} + \frac{W_{1\cdot1} - W_{2\cdot2}}{2\,W_3} \sec 2\alpha_0. \tag{9}$$

Diese Formel giebt die beiden extremen Werte von ϱ für die beiden um 90° verschiedenen, aus (8) zu berechnenden Werte von α_0. Nennen wir diese beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 und verstehen unter $2\alpha_0$ den positiven oder negativen *spitzen* Winkel, den (8) ergiebt und setzen endlich

so wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho_1} &= \frac{W_{1\cdot1} + W_{2\cdot2}}{2\,W_3} + \frac{W_{1\cdot1} - W_{2\cdot2}}{2\,W_3} \sec 2\alpha_0,\\ \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{W_{1\cdot1} + W_{2\cdot2}}{2\,W_3} - \frac{W_{1\cdot1} - W_{2\cdot2}}{2\,W_3} \sec 2\alpha_0.\end{aligned} \tag{10}$$

Hiernach besteht für das arithmetische Mittel der beiden Hauptkrümmungsradien, d. i. nach Bd. 1 S. 64 oben der Durchschnittswert aller $\frac{1}{\varrho_\alpha}$, oder der *Durchschnittswert der Krümmungsmaſse aller Normalschnitte* in P_0, die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \frac{W_{1\cdot1} + W_{2\cdot2}}{2\,W_3}; \tag{11}$$

ferner findet sich, wenn aus $1 : \varrho_1\,\varrho_2$ mittelst (8) sec $2\alpha_0$ unter Benutzung der Relation $\sec^2 = 1 + \tan^2$ eliminiert wird, für das *Krümmungsmaſs der Niveaufläche* in P_0 die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho_1\,\varrho_2} = \frac{W_{1\cdot1}\,W_{2\cdot2} - W_{1\cdot2}^2}{W_3^2}. \tag{12}$$

Die Hauptkrümmungsradien können noch dazu benutzt werden, um die Formel für $1 : \varrho_\alpha$ umzugestalten. Man gelangt dann wieder zu *Eulers Satz*, vergl. Bd. 1 S. 57 (1), worin aber zur Anwendung auf den vorliegenden Fall ϱ_m und ϱ_n mit ϱ_1 und ϱ_2 zu vertauschen sind und unter α nunmehr der Winkel zwischen den Ebenen von ϱ_1 und ϱ_α zu verstehen ist, welcher in obiger Entwicklung durch $\alpha - \alpha_0$ bezeichnet wird.

§ 23. **Fortsetzung.** Wir nehmen jetzt an, daſs durch den Punkt P_0 der Niveaufläche eine Grenzfläche zweier Räume hindurchführt, in welchen Θ stetig verläuft, während in der Grenzfläche Θ unstetig wird. Wir wissen nun bereits, daſs die Niveaufläche durch jene Unstetigkeitsfläche stetig gebogen hindurchgeht; aber wir werden an der Hand der Paragraphen 21 und 22 demnächst erkennen, daſs die Krümmung bei dem Durchgange der Niveaufläche durch die Unstetigkeitsfläche sich unstetig ändert.

Infolge der stetigen Biegung können wir ohne weiteres in jedem der beiden Räume für sich die Entwicklung des § 22 auf P_0 und seine Umgebung anwenden, wenn bei Berechnung der zweiten Differentialquotienten P_0 ein Mal als Punkt des einen Raumes, ein ander Mal als Punkt des andern Raumes aufgefaſst wird.

Wird nun die η-Axe tangential an die Unstetigkeitsfläche gelegt und schliefst die ξ-Axe mit der positiven Richtung der Normale dieser Fläche den Winkel $90^0 - \nu$ ein, ist also ν der Neigungswinkel der Unstetigkeitsfläche zur Niveaufläche in P_0, so ergeben sich nach § 21 (1) und (9), indem die c- und u-Axe daselbst jetzt als η- und ξ-Axe genommen werden, nachstehende Änderungen beim Durchgange durch die Unstetigkeitsfläche nach der Seite der positiven Normale:

$$\begin{aligned} \varDelta W_{1\cdot 1} &= \varDelta \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2} = - 4\pi k^2 \varDelta\Theta_0 \sin^2\nu \\ \varDelta W_{2\cdot 2} &= \varDelta \frac{\partial^2 W}{\partial c'^2} = 0 \\ \varDelta W_{1\cdot 2} &= \varDelta \frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial c'} = 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

Aufserdem ist, wie schon bemerkt, $W_3 = -g$ in beiden Räumen.

Man erhält jetzt als Sprünge in $\frac{1}{\varrho_\alpha}$, $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)$ und in $\cot 2\alpha_0$ beim Durchgange durch P_0 nach der Seite der positiven Normale nach § 22 (7), (8), (11) und (12) S. 36 u. 37:

$$\varDelta \frac{1}{\varrho_\alpha} = - \frac{\varDelta W_{1\cdot 1}}{g} \cos^2\alpha ,$$

$$\varDelta \left\{\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right\} = \frac{W_{2\cdot 2}\, \varDelta W_{1\cdot 1}}{g^2} ,$$

$$\varDelta \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\right\} = - \frac{\varDelta W_{1\cdot 1}}{2g} ,$$

$$\varDelta \cot 2\alpha_0 = \frac{\varDelta W_{1\cdot 1}}{2 W_{1\cdot 2}} .$$

Führt man den Wert von $\varDelta W_{1\cdot 1}$ nach (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \varDelta \frac{1}{\varrho_\alpha} &= + \frac{4\pi k^2}{g} \varDelta\Theta_0 \sin^2\nu \cos^2\alpha \\ \varDelta \left\{\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right\} &= - \frac{4\pi k^2\, W_{2\cdot 2}}{g^2} \varDelta\Theta_0 \sin^2\nu \\ \varDelta \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\right\} &= + \frac{4\pi k^2}{2g} \varDelta\Theta_0 \sin^2\nu \\ \varDelta \cot 2\alpha_0 &= - \frac{4\pi k^2}{2 W_{1\cdot 2}} \varDelta\Theta_0 \sin^2\nu . \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Formeln geben an, wie sich der reziproke Krümmungsradius im Azimut α, das Krümmungsmafs, der Durchschnittswert der reziproken Krümmungsradien und die Cotangente der Azimute der Hauptschnitte (die Azimute von der zur gemeinsamen Tangente der Unstetigkeitsfläche und Niveaufläche rechtwinkeligen Tangente der letzteren im üblichen Drehungssinne gerechnet) ändern, wenn die Niveaufläche durch eine Unstetigkeitsfläche im Neigungswinkel ν hindurchgeht und dabei an der betreffenden Stelle die Dichtigkeit um $\varDelta\Theta_0$

wächst. Die Art und Weise, wie die Differentialquotienten $W_{2.2}$ und $W_{1.2}$ zu verstehen sind, erhellt aus der zweiten und dritten Relation (1).

Die erste der Formeln (2) zeigt, dafs die Änderung in $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ für $\alpha = 90^0$ gleich null, für $\alpha = 0^0$ ein Maximum ist. Man kann daher sagen: *Bei dem Durchgange durch eine Unstetigkeitsfläche der Dichtigkeit ändert sich die Krümmung der Niveaufläche nicht in demjenigen Normalschnitte, welcher parallel ist zur gemeinsamen Tangente beider Flächen, dagegen ist die Aenderung der Krümmung ein Maximum in demjenigen Normalschnitte, welcher zu dieser Tangente rechtwinkelig steht.*

Um eine Vorstellung von dem Betrage dieser Änderung zu gewinnen, führen wir für die Schwerkraft g einen Näherungsausdruck ein. Abgesehen von Gliedern mit der Abplattung und der Zentrifugalkraft, kann man, wie das zweite Kapitel zeigen wird, g für die Erdoberfläche berechnen, als wäre die Gesamtmasse der Erde im Schwerpunkt vereinigt. Dieser Annäherung entsprechend betrachtet man dabei die physische Erdoberfläche als Kugelfläche.

Ist R der Radius der letzteren [vergl. Bd. 1, S. 68, § 21 (1)], so ist die Erdmasse $\frac{4}{3} R^3 \pi \Theta_m$, wenn Θ_m die mittlere Dichte der Erde ist, welche im Vergleich zu Wasser 5,6 beträgt. Wir haben daher

$$g = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R \,, \tag{3}$$

und es ist die maximale, sprungweise Änderung in $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ gleich

$$+ \frac{1}{R} \cdot \frac{3 \Delta\Theta_0}{\Theta_m} \,. \tag{4}$$

Eine Niveaufläche, die aus der Luft in eine senkrechte Felswand eintritt, erleidet für einen Normalschnitt normal zu letzterer in $\frac{1}{\varrho}$ einen Zuwachs, der rund gleich $\frac{3}{2R}$ ist, da hier $\Delta\Theta_0$ etwa $2{,}8 = \frac{1}{2}\Theta_m$ beträgt. Bezeichnet man das betreffende ϱ in der Luft mit ϱ_a, im Gestein mit ϱ_i, so hat man

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{3}{2R} \,. \tag{5}$$

Bei spezieller Untersuchung der Wirkung der Anziehungseffekte der Massen auf der physischen Erdoberfläche im vierten Kapitel werden wir diese Relation bestätigt finden.

Auf die Diskontinuitäten der Krümmung aufmerksam gemacht zu haben, ist das Verdienst von *H. Bruns.* In seinen beiden, S. 19 citierten Abhandlungen entwickelt er die Formeln (2) und in der *Figur der Erde* insbesondere auch den Ausdruck (4). Der Gang der Entwicklung ist jedoch ein wesentlich anderer. Namentlich wird vor allem auf grund der *Dirichlet*schen Kriterien für V (vergl. die oben citierten *Vorlesungen* S. 29) nachgewiesen, dafs in einem Raume, wo Θ regulär ist, d. h. sich innerhalb

endlicher Konvergenzbereiche nach Potenzen der rechtwinkeligen Koordinaten entwickeln läfst, auch W regulär ist. Wenn wir oben § 17 S. 24 gefunden haben, dafs in einem solchen Raume W und seine sämtlichen Differentialquotienten von angebbar hoher Ordnung endlich und stetig sind, so ist dies für den Nachweis der Existenz einer *unendlichen* Potenzreihe mit endlichem Konvergenzbezirk noch nicht zureichend, wohl aber reicht es aus für die Krümmungsuntersuchung, bei welcher nur eine *endliche Taylor*sche Entwicklung erforderlich wird [S. 35 § 22 (1)]. Über den praktischen Wert solcher Entwicklungen vergl. übrigens § 25.

Für diejenigen Leser, welche sich für den Beweis der Regularität von W interessieren, bemerken wir, dafs *Kirchhoff* in seiner *Mechanik* S. 184 § 4 V durch ein Oberflächenintegral darstellt, welches ebenfalls diesen Beweis liefert, wenn man sich den reziproken Radiusvektor so entwickelt denkt, wie es *W. Stahl* in *Crelles Journal* 1875 Bd. 79 S. 269 und 270 o. angiebt. Jene Darstellung von V ist sehr einfach, wenn der Satz von *Green* bereits bekannt ist.

Sie wird aber überflüssig, sobald man eine Niveaufläche aufserhalb der Erde (oder falls man die Luftmasse als unerheblich ansieht, eine Niveaufläche aufserhalb der physischen Erdoberfläche) betrachtet. Nehmen wir einen aufserhalb gelegenen Punkt P_0 als Koordinatenanfang und ist P' ein anderer aufserhalb gelegener beweglicher Punkt mit den Koordinaten x', y', z', für welchen V zu berechnen ist, bezeichnet man endlich mit x, y, z die Koordinaten eines Massenelementes dm der Erde, so ist

$$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

oder

$$e = r\sqrt{1 - \frac{2(xx' + yy' + zz') - (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{r^2}},$$

für $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Ist nun $r' = P_0P'$ hinreichend klein, so kann man $1 : e$ nach Potenzen des Subtrahenden unter der Wurzel entwickeln (d. h. nach Potenzen von $\frac{r'}{r}$, welche Entwicklung im zweiten Kapitel eingehend untersucht wird). Dadurch erhält man $1 : e$ als Potenzreihe in x', y' und z'; die Integration für

$$V = \int \frac{dm}{e}$$

ergiebt V als ebensolche Reihe und auf demselben Gebiete gültig, nämlich innerhalb einer um P' als Zentrum geschlagenen Kugelfläche, welche überall von der Erdoberfläche in mefsbarem Abstande bleibt.

§ 24. Wirkungssphäre der Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit. Nach der ersten Formel (2) des vorigen Paragraphen ist die sprungweise Änderung von $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ an einer Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit unabhängig von den Massen, welche Ursache der Unstetigkeit sind. Thatsächlich erzeugt ein Gesteinsbrocken bei gleichem v und α ganz dieselben Sprünge wie ein Gebirge desselben Gesteins. Nichtsdestoweniger besteht doch ein erheblicher Unterschied im Gesamteinflufs auf die Niveaufläche, also in der Wirkungssphäre. Wenn auch wegen der beiderseits der Unstetigkeitsfläche stetig verlaufenden Dichtigkeit die sprungweise Änderung von $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ schon in einiger Entfernung von

dieser Fläche durch allmählich eintretende Änderungen vorbereitet werden mufs, so ist doch unmittelbar so viel klar, dafs wenigstens innerhalb einer Unstetigkeiten erzeugenden Masse die Wirkungssphäre nicht gröfser sein kann als ihre Dimension entlang der betreffenden Niveaufläche. Aber auch aufserhalb der Masse mufs die Wirkungssphäre in Beziehung zu ihrer Gröfse stehen. Um hierin deutlicher zu sehen, stellen wir eine Betrachtung unter idealen einfachen Verhältnissen an, welche aber vollkommen ausreicht.

Indem wir von der Zentrifugalkraft und dem Luftmeere absehen, denken wir uns die Anziehung aufserhalb der Erde so beschaffen, als ob alle ihre Masse M in ihrem Schwerpunkte vereinigt wäre. Es wird dann das Potential

$$W = \frac{M}{R+H} = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{R+H} \tag{1}$$

für einen Punkt im Schwerpunktsabstand $R + H$. Dabei ist der Schwerpunktsabstand der physischen Erdoberfläche gleich R angenommen, die mittlere Dichtigkeit der Erde gleich Θ_m. Wenn nun W konstant gleich W_0 ist, so ist auch $R + H$ konstant: der Radius der entsprechenden kugelförmigen Niveaufläche. Zugleich erscheint die physische Erdoberfläche als Niveaufläche (Meeresfläche) und H als Höhe darüber.

Die Gleichung (1) wird rechter Hand einen Zuwachs erhalten, wenn wir uns noch eine kleine, in roher Annäherung kugelige Masse m auf der physischen Erdoberfläche zugefügt denken, wobei wir annehmen wollen, dafs der Schwerpunkt von m sehr nahe der ursprünglichen Niveaufläche liegt. Ist e der Abstand eines Punktes P aufserhalb dieser Masse von ihrem Schwerpunkt, so ist in erster Annäherung die Potentialfunktion der Anziehung dieser Masse auf P gleich $k^2 m : e$ und daher die Gleichung der Niveaufläche $W = W_0$ mit der jetzt veränderlichen Meereshöhe $H + h$, aufserhalb der Masse m, angenähert:

$$W = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{R+H+h} + \frac{k^2 m}{e} = W_0\,. \tag{2}$$

Mit Rücksicht auf die geringe Gröfse von $H + h$ gegen R folgt aus der Differenz von (2) und der auf W_0 angewandten Gleichung (1) angenähert:

$$\frac{m}{e} = \frac{4}{3}\pi \Theta_m R\, h$$

oder (3)

$$h = \frac{3}{4}\,\frac{m}{\pi\,\Theta_m R\, e}\,.$$

Zufolge dieser Formel tritt eine merkbare Hebung h der ursprünglich vorhandenen Niveaufläche in einer Entfernung e ein, welche direkt proportional der wirkenden Masse m ist. Wie also auch der

Verlauf der Krümmungsradien sein mag, eine merkbare Wirkung wird jedenfalls bei kleinen Massen auf einen kleineren Wirkungskreis als bei grofsen beschränkt sein, und zwar gilt die Regel: *Die Wirkungssphäre ist proportional der Masse.*

Wir können nun aber auch ermitteln, wie sich bei verschiedenen Massen die Entfernungen verhalten, in welchen eine gleiche Änderung von ϱ eintritt. Die Gleichung (2) zeigt, dafs die Niveaufläche eine Rotationsfläche in Bezug auf eine Linie durch die Schwerpunkte von m und der ursprünglichen Erdmasse M ist. Ein Schnitt durch diese Linie ist ein sogenannter Meridianschnitt der Rotationsfläche, also auch für alle Punkte der Schnittlinie Normalschnitt. Die Krümmungsradien des Meridianschnittes interessieren aber am meisten, weil sie augenscheinlich durch die lotablenkende Wirkung der Masse m am meisten beeinflufst werden. Denken wir uns nun im Anschlufs an § 22 S. 36 einen Punkt P_0 als Koordinatenanfang, die ζ-Axe in die Normale (nach aufsen) und die ξ-Axe in den Meridianschnitt (nach m hin) gelegt, so wird der Krümmungshalbmesser ϱ_a desselben für aufserhalb der Masse m befindliche Punkte aus Formel (7) S. 36 erhalten, indem $\alpha =$ null gesetzt wird. Also ist

$$\varrho_a = W_3 : W_{1\cdot 1}\,. \tag{4}$$

Hierzu berechnen wir $W_{1\cdot 1}$ aus (2), indem wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Meridianschnitts mit ξ und ζ, diejenigen des Schwerpunkts von m mit ξ_1 und ζ_1 und diejenigen des Schwerpunkts M der Erde mit ξ_0 und ζ_0 bezeichnen, demgemäfs also in (2) einführen:

$$\begin{aligned} R + H + h &= \sqrt{(\xi_0 - \xi)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2} \\ e &= \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Es folgt, wenn wir nach geschehener Differentiation ξ und ζ gleich null setzen, den Differentialquotienten also auf P_0 beziehen:

$$W_{1\cdot 1} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\right)_0 = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{(R+H+h)^3}\left(-1 + \frac{3\xi_0^2}{(R+H+h)^2}\right) + k^2\frac{m}{e^3}\left(-1 + \frac{3\xi_1^2}{e^2}\right), \tag{6}$$

wobei $e^2 = \xi_1^2 + \zeta_1^2$ ist.

Diese Formel läfst sich wesentlich vereinfachen, wenn wir uns auf Punkte P_0 beschränken, die in der Nähe der störenden Masse liegen. Dann ist der Faktor der zweiten Parenthese etwa von derselben Ordnung, wie derjenige der ersten Parenthese, wie man erkennt, wenn man sich m als Kugel vom Radius a denkt und beachtet, dafs $a : e$ nach unserer Annahme ein von 1 nicht allzu verschiedener Bruch sein wird. Im ersten Faktor dürfen wir den nach (3) kleinen Wert h gegen $R + H$ vernachlässigen und ebenso das Glied mit ξ_0^2;

denn $\xi_0 : (R + H + h)$ ist nichts anderes als der Arcus der Lotablenkung in P_0, welcher nur ein kleiner Bruch sein kann. Setzen wir zugleich $\xi_1^2 = e^2 - \zeta_1^2$, so folgt aus (6) in hinreichender Annäherung für Punkte, welche der störenden Masse nahe, jedoch aufserhalb derselben liegen:

$$W_{1\cdot 1} = -\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{(R+H)^3}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{m}{\pi\Theta_m e^3}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\zeta_1^2}{e^2}\right]\right\} \quad (7)$$

Ferner findet man mit Rücksicht darauf, dafs ζ_0 sehr nahe gleich $-(R + H + h)$ ist, ebenso genau:

$$W_3 = \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)_0 = -\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{(R+H)^2}. \quad (8)$$

Mithin ist nach (4)

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{R+H}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{m}{\pi\Theta_m e^3}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\zeta_1^2}{e^2}\right]\right\}. \quad (9)$$

Diese Formel zeigt, dafs die gleiche Änderung von $1 : \varrho_a$ für verschiedene Massen in solchen Entfernungen e eintritt, für welche $\frac{m}{e^3}$ gleichen Betrag hat; denn der Wert der eckigen Parenthese ist jedenfalls angenähert gleich 1. In Bezug auf Krümmungsänderung ist sonach die Wirkungssphäre der durchschnittlichen linearen Dimension der Masse näherungsweise proportional — ein Resultat, welches mit dem an der Hand von (3) gefundenen nicht in Widerspruch steht, weil dort eine integrale, hier nur eine differentiale Wirkung in betracht kommt.

Wie gering die Totalwirkung von Massen ist, die im gewöhnlichen Leben schon für bedeutend gelten, ersehen wir an der Wirkung eines Berges von der Form eines *Kubus von 100ᵐ Seite* und der Dichte $2{,}8 = \frac{1}{2}\Theta_m$.

Aus Formel (3) folgt als Hebung h einer Niveaufläche, die nahezu durch den Schwerpunkt von m geht, bei ihrem Eintritte in den Kubus rund $0{,}4^{mm}$. h wächst im Innern noch fort bis auf nicht ganz den doppelten Betrag beim Eintritt, welches Maximum natürlicherweise in der Mitte eintritt und dadurch hervorgerufen wird, dafs die Potentialfunktion der Anziehung des Kubus von der Oberfläche nach dem Zentrum des Kubus rund aufs Doppelte ansteigt. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man den Kubus durch eine Vertikalebene durch den Schwerpunkt in zwei kongruente Hälften teilt und beachtet, dafs zu dem innern Punkte die Hälften beide so nahe liegen, wie zu dem äufsern nur die eine.

Trotz dieser geringen Totalwirkung erleidet ϱ beträchtliche Änderungen. Nach (9) ist beim Eintritt in den Kubus angenähert $\varrho_a = -R$ und nach Formel (5) S. 39 springt ϱ an dieser Stelle innerhalb auf

den Wert $\varrho_i = +2R$. Diese Werte sind von der Seitenlänge des Kubus unabhängig. Abhängig von dieser ist aber die Dauer negativer ϱ_a. Denn ϱ_a springt von $-\infty$ auf $+\infty$ bei $e = 0{,}63$ Seitenlänge, im obigen Falle also bei $e = 63^m$.

§ 25. **Potenzreihen für Niveauflächen sind unpraktikabel.** In § 13 wurde gefunden, dafs die Biegung der Niveauflächen (für $g >$ null) jedenfalls stetig ist, wie auch die immer endliche Dichtigkeit verläuft. Folgende Paragraphen haben dagegen gezeigt, dafs die Krümmung an jeder Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit erheblich wechselt. In den Materialien der Erdkruste ändert sich nun die Dichtigkeit schon vielfach in sehr kleinen Räumen, so dafs faktisch auch die Krümmung vielfach wiederholten starken Änderungen in sehr kleinen Gebieten einer Niveaufläche unterliegt; indessen hierauf brauchen wir nach § 24 selbst bei feinen Untersuchungen keine Rücksicht zu nehmen. Denn wenn die totale Wirkung von kubischen Massen bis zu 100^m Seitenlänge so gering ist, wie dort berechnet, dann kann man sich in der That bei den feinsten Untersuchungen die wirkliche Massenordnung durch eine ideale ersetzt denken, welche deren Unstetigkeiten von geringerer Ausdehnung innerhalb gröfserer Räume, die in stetig gebogenen Grenzflächen aneinanderstofsen, ausgleicht. Man wird immer durch ähnliche Betrachtungen wie in § 24 überschlagen können, ob die durch die Anlage der Grenzflächen und durch die Interpolation der Dichtigkeit vernachlässigten, bezw. zugefügten Massen für die betreffende Untersuchung von Belang sind oder nicht, in welchem letzteren Falle dann der idealisierte Zustand für die betreffende Untersuchung ausreicht.

Innerhalb der einzelnen Räume sind aber nach § 17 S. 24 die Differentialquotienten von W endlich und stetig. Hier können wir daher W nach *Taylors* Satz in eine Reihe nach Potenzen der Koordinatendifferenzen entwickeln (vergl. die Anm. zu § 23 S. 39). Ebenso können wir die Gleichung einer Niveaufläche in Reihenform bringen und es ist ohne weiteres ersichtlich, dafs hier auch Entwicklungen wie in Bd. 1 S. 573 u. ff. möglich sein werden.

Diese Entwicklungen haben praktischen Wert aber nur dann, wenn sie auf wenige Glieder eingeschränkt werden dürfen. Aufserdem wird man solche Entwicklungen eben nur innerhalb eines Raumes benutzen können, für welchen die stetige Interpolation der Dichtigkeit gerade noch als ausreichend erscheint; denn für verschiedene Räume sind nach § 21 S. 34 die analytischen Ausdrücke für W verschieden, also auch die Reihen. Wir fanden nun zwar im vorigen Paragraphen, dafs kubische Massen bis zu 100^m Seitenlänge wenig Gesamtwirkung haben; dieselbe Rechnung würde aber zeigen, dafs mit wachsender Ausdehnung die Wirkung von Massen, welche eine sonst regelmäfsige Massenverteilung unterbrechen, bei feinen Untersuchungen

nicht mehr zu vernachlässigen ist. Man schliefst hieraus weiter, dafs für Niveauflächen im Hügelland und im Gebirge, sowie an der Meeresküste Potenzreihenentwicklungen von starker Konvergenz in der Regel auf Gebiete von wenigen Kilometern linearer Ausdehnung beschränkt sein werden, selbst bei solchen Niveauflächen, die ganz in der Luft über die Massenunstetigkeiten hinweglaufen oder in einiger Tiefe unter denselben liegen. Denn wegen des Satzes (1) § 8 S. 10 nehmen Niveauflächen, welche in der Nähe von Massenunstetigkeiten vorbeiführen, an den Formveränderungen derjenigen Niveauflächen, welche durch letztere hindurchführen, mehr oder weniger teil.

Niveauflächen im Flachlande werden, durch unterirdische Massenunregelmäfsigkeiten beeinflufst, dasselbe Verhalten zeigen.

Zwei belehrende Beispiele zu Vorstehendem geben § 22 und § 23 bis 27 Bd. 1 S. 568 u. ff. Insbesondere Figur 45 S. 570 weist darauf hin, dafs im Harzgebiet von einer konvergenten Entwicklung ganz und gar nicht, sondern höchstens von einer interpolatorischen, aber jedenfalls unbeholfen ausfallenden Entwicklung die Rede sein kann. Sogar bei Figur 46 S. 572, wo es sich hauptsächlich nur um eine grobe Darstellung der Alpenwirkung handelt, zeigten sich Schwierigkeiten bei der Potenzreihenentwicklung, vergl. S. 578 § 26.

Dies hat zur Folge, dafs man bei der mathematischen Behandlung der geodätischen Aufgaben die Niveauflächen selbst nicht zu grunde legen kann und dafs für beliebige Flächen abgeleitete geodätische Formeln, welche konvergente (meist sogar stark konvergente) Potenzreihenentwicklungen voraussetzen, für wirkliche Niveauflächen geradezu wertlos sind — worauf schon Bd. 1 S. 22 und namentlich S. 513 hingewiesen wurde.

Mit Rücksicht auf die Untersuchungen der Paragraphen 12 und 13 Bd. 1, S. 611 u. ff. müssen wir hier noch erwähnen, dafs die daselbst gemachte Annahme der Stetigkeit der Krümmung (S. 619) und der Möglichkeit der Reihenentwicklung (5) S. 620 (vergl. auch S. 622) mit obigen Resultaten in Widerspruch zu stehen scheint. Indessen handelt es sich dort nicht um eine eingehende Darstellung der Eigenschaften des Geoids, sondern nur um die Konstatierung des Rotationscharakters im grofsen und ganzen. Dieser wird aber, wenn überhaupt vorhanden, durch die kontinentalen Massenunregelmäfsigkeiten auf der physischen Erdoberfläche, abgesehen von der Nähe der Küsten und einzelnen andern Anomalieen, in den Gebieten, welche Gradmessungen zugänglich sind, nicht verwischt, weil die Gestalt des Geoids nach Untersuchungen, welche im dritten Kapitel gegeben werden, sich nicht wesentlich ändert, wenn die Massenunregelmäfsigkeiten, wie überhaupt die äufsersten Massenschichten um etwa drei geographische Meilen nach innen verschoben werden. Betrachten wir aber das Geoid als eine Niveaufläche aufserhalb der Erde, so ist sie nach S. 40 § 23 Anm. eine reguläre Fläche, für welche *eine* Gleichung im gewöhnlichen Sinne der analytischen Geometrie der analytische Ausdruck ist und für welche ferner sich auch Reihen nach Potenzen rechtwinkeliger Koordinaten ansetzen lassen. Die Möglichkeit einer Reihenentwicklung von

der Form (5) S. 620 erscheint nun auch gegeben, da die Differentialquotienten von z nach P bei angemessener Beschränkung des Gebietes endlich und stetig sind; doch würde eine vollständige Untersuchung der Sache noch nachzuweisen haben, dafs wirklich ein endliches Konvergenzgebiet vorhanden ist.

§ 26. Schwerkraft und Lotlinien beim Durchgange durch eine Unstetigkeitsfläche der Dichtigkeit.

Die *Schwerkraft* g hängt nach Gröfse und Richtung von den ersten Differentialquotienten von W ab; wir wissen, dafs beide sich stetig mit dem Orte ändern (die Richtung allerdings nur für $g >$ null). Die Geschwindigkeit aber, mit der sich Gröfse und Richtung ändern, hängt von den zweiten Differentialquotienten ab, und beide sind daher beim Durchgange durch eine Unstetigkeitsfläche unstetig.

Nach Paragraph 8 (1) S. 10 ist die Geschwindigkeit $dg : dh$ der Änderung von g bei Verschiebungen eines Punktes P entlang der Lotlinie gleich

$$-\frac{d^2 W}{dh^2},$$

wenn die Verschiebungen in Richtung der Abnahme von W, d. h. mit zunehmender Höhe erfolgen. Bildet nun die Lotrichtung in P mit der Normale einer Unstetigkeitsfläche, welche durch P hindurchführt, den Winkel ν, so wird nach § 21 (1) S. 32 die sprungweise Änderung der Geschwindigkeit $dg : dh$ beim Durchgange durch die Unstetigkeitsfläche gleich

$$\Delta \frac{dg}{dh} = 4\pi k^2 \Delta\Theta_0 \cos^2 \nu . \tag{1}$$

Führen wir für die Nähe der physischen Erdoberfläche wie S. 39 (3) den Ausdruck

$$g = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$$

ein, welcher im vorliegenden Falle eine völlig ausreichende Annäherung gewährt, so ergiebt sich:

$$\Delta \frac{dg}{dh} = \frac{3\Delta\Theta_0}{\Theta_m} \frac{g}{R} \cos^2 \nu . \tag{2}$$

Für die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe aufserhalb der physischen Erdoberfläche erhält man nun eine ganz brauchbare Annäherung, wenn man, vergl. S. 41 (1), in der Meereshöhe H

$$g = \frac{M}{(R+H)^2}$$

setzt, womit sofort folgt:

$$\left(\frac{dg}{dh}\right)_a = \left(\frac{dg}{dH}\right) = -\frac{2g}{R} . \tag{3}$$

Insofern beim Übergang aus der Luft in horizontales Gestein $\nu =$ null

ist und $\Delta\Theta_0$ sehr nahe gleich der Gesteinsdichte Θ_i wird, folgt aus der Addition von (2) und (3):

$$\left(\frac{dg}{dh}\right)_i = -\frac{g}{R}\left(2 - \frac{3\Theta_i}{\Theta_m}\right). \tag{4}$$

Indem aber Θ_i im allgemeinen gleich $\frac{1}{2}\Theta_m$ gesetzt werden kann, zeigt diese Formel, dafs die Änderungsgeschwindigkeit von g unterhalb der physischen Erdoberfläche nur etwa der vierte Teil des Betrages oberhalb derselben ist. Aber es findet jedenfalls eine Zunahme von g unterhalb der physischen Erdoberfläche bis zu einer gewissen Tiefe statt (vergl. hierzu 6. Kap. § 13).

Die *Kraft-* oder *Lotlinien* sind wegen der stetigen Änderung der Lotrichtung stetig gebogen, vergl. § 12 S. 14; jedoch ihre Krümmung ist wie bemerkt unstetig, derart, dafs nicht nur die Gröfse des Krümmungsradius, sondern auch die Lage der Schmiegungsebene sich bei unendlich kleinen Verschiebungen von P in der Lotlinie um endliche Beträge ändern kann. (Vergl. darüber *Bruns*, *Figur der Erde*, S. 12 und 13, sowie S. 20 o..)

§ 27. **Die geographischen Meridiane und Parallelen** einer Niveaufläche (Bd. 1 S. 8) sind überall unstetig gebogen, wo die Niveaufläche eine Unstetigkeitsfläche der Dichtigkeit durchschneidet. Um dies einzusehen, stellen wir ihre Gleichungen auf.

In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkeliges Koordinatensystem seien χ, ψ, ω die Neigungswinkel der Erdaxe bezw. zu den drei Axen der x, y und z. Für die Normale einer Ebene, zu welcher die Meridianebenen aller Punkte eines geographischen Meridianes parallel liegen sollen, seien diese Stellungswinkel gleich λ, μ, ν. Da nun die Meridianebenen parallel zur Erdaxe laufen, steht letztere mithin auf der Normale $(\lambda\mu\nu)$ senkrecht und es ist nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie:

$$\cos\chi\cos\lambda + \cos\psi\cos\mu + \cos\omega\cos\nu = 0. \tag{1}$$

Durch diese Gleichung ist zunächst ausgedrückt, dafs die Meridianebenen parallel der Erdaxe sind. Sie sind aber auch Vertikalebenen ihrer Punkte und es mufs daher in irgend einem Punkt die Normale $(\lambda\mu\nu)$ rechtwinkelig zur Lotrichtung sein. Die Richtungscosinus der letzteren sind aber offenbar den Komponenten der Schwerkraft g für die drei Axen, d. h. nach (2) S. 9 den partiellen Differentialquotienten von W nach den drei Koordinaten, proportional. Mithin wird

$$\frac{\partial W}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial W}{\partial y}\cos\mu + \frac{\partial W}{\partial z}\cos\nu = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung gilt auch insbesondere für einen Punkt P_0, dessen Meridianebene mafsgebend sein soll:



$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 \cos\lambda + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 \cos\mu + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 \cos\nu = 0\,. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) kann man $\cos\lambda$, $\cos\mu$ und $\cos\nu$ eliminieren. In Determinantenform ist das Resultat:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 \\ \cos\chi & \cos\psi & \cos\omega \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4}$$

Hierzu tritt noch, um den *geographischen Meridian durch* P_0 vollständig zu definieren, die Gleichung der Niveaufläche durch P_0:

$$W = W_0\,. \tag{5}$$

Ohne diese Gleichung bedeutet (4) die Gleichung einer Fläche, welche alle Punkte gleicher geographischer Länge des ganzen Raumes enthält.

Um nun die Richtung eines Linienelementes ds des geographischen Meridianes, welches von P_0 ausgeht, zu erhalten, haben wir für die Gleichungen (4) und (5) das totale Differential für eine Verschiebung von P auf der Niveaufläche zu bilden, dann aber P mit P_0 zusammenfallen zu lassen und also alle Differentialquotienten von W auf P_0 zu beziehen. Wir bezeichnen dabei nach den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 = W_1 \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 = W_{1\cdot 1} \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = W_{1\cdot 2}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 = W_2 \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0 = W_{2\cdot 2} \quad \text{u. s. f.}$$

Es wird erhalten:

$$\begin{vmatrix} W_{1\cdot 1} & W_{1\cdot 2} & W_{1\cdot 3} \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ \cos\chi & \cos\psi & \cos\omega \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} W_{1\cdot 2} & W_{2\cdot 2} & W_{2\cdot 3} \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ \cos\chi & \cos\psi & \cos\omega \end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} W_{1\cdot 3} & W_{2\cdot 3} & W_{3\cdot 3} \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ \cos\chi & \cos\psi & \cos\omega \end{vmatrix} dz = 0 \tag{6}$$

$$W_1\,dx + W_2\,dy + W_3\,dz = 0\,. \tag{7}$$

Hieraus kann man die Richtungscosinus des Linienelements des geographischen Meridianes in P_0 berechnen. Diese Rechnung verfolgen wir aber nicht weiter und bemerken nur bezüglich des Koordinatensystems, dafs man in dem Falle, wo als z-Axe die Erdaxe selbst genommen wird,

$$\cos\chi = 0 \qquad \cos\psi = 0 \qquad \cos\omega = 1 \tag{8}$$

einzuführen hat.

Wählt man dagegen die Tangentialebene in P_0 als xy-Ebene und die Normale der Niveaufläche als z-Axe, so ist zu setzen

$$W_1 = 0 = W_2\,. \tag{9}$$

Wegen (7) wird alsdann dz = null und (6) giebt, wenn wir anstatt xyz jetzt bezw. $\xi\eta\zeta$ schreiben, um auf die Bezeichnungen der Paragraphen 22 und 23 zu kommen:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\begin{vmatrix} W_{1.1} & W_{1.2} \\ \cos\chi & \cos\psi \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} W_{1.2} & W_{2.2} \\ \cos\chi & \cos\psi \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Liegt nun P_0 in einer Unstetigkeitsfläche und die η-Axe tangential an dieser, dann geben die Formeln (1) § 23 S. 38 für $W_{1.1}$ u. s. f. die Unterschiede der Werte beiderseits der Unstetigkeitsfläche. Hiernach ist nur $W_{1.1}$ unstetig und man sieht nun deutlich, daſs die Kurve des geographischen Meridians im allgemeinen in P_0 eine Ecke hat.

Um die Gleichung des *geographischen Parallels* abzuleiten, erinnern wir uns, daſs die Richtung der Normale in P durch die Richtungscosinus $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ und $\frac{\partial W}{\partial z}$ definiert ist, diejenige der Erdaxe aber durch die Werte $\cos\chi$, $\cos\psi$ und $\cos\omega$. Ist B die geographische Breite von P, so hat man nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie für $\cos(90^0 - B)$ oder $\sin B$ die Gleichung:

$$\sin B = \frac{\partial W}{\partial x}\cos\chi + \frac{\partial W}{\partial y}\cos\psi + \frac{\partial W}{\partial z}\cos\omega\,, \tag{11}$$

wozu noch tritt:

$$W = W_0\,, \tag{12}$$

welche letztere Gleichung erforderlich ist, um diejenigen Punkte auszuscheiden, welche nicht auf einer bestimmten Niveaufläche liegen.

Die weitere Behandlung ist ähnlich wie oben. Wählt man das Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$, so folgt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{W_{1.1}\cos\chi + W_{1.2}\cos\psi + W_{1.3}\cos\omega}{W_{1.2}\cos\chi + W_{2.2}\cos\psi + W_{2.3}\cos\omega}\,, \tag{13}$$

wodurch sich die Richtung eines von P_0 ausgehenden Linienelements bestimmt. An einer Unstetigkeitsfläche ändern sich $W_{1.1}$ und $W_{1.3}$ sprungweise; nehmen wir aber der Einfachheit halber an, daſs die Unstetigkeitsfläche die Niveaufläche bei P_0 normal schneidet, mithin die ζ-Axe ebenso wie die η-Axe die erstere tangiert, dann wird die Änderung von $W_{1.3}$ gerade so wie diejenige von $W_{1.2}$ gleich null und es ändert sich nur $W_{1.1}$ sprungweise nach Maſsgabe von Formel (1) S. 38, wobei $\sin\nu = 1$ zu setzen ist.

Zur Berechnung von Näherungswerten für die in (10) und (13) auftretenden Differentialquotienten von W kann der Ausdruck (1) § 23 S. 41 dienen.

Zum Schlusse braucht kaum noch darauf hingewiesen zu werden, daſs für Meridiane und Parallelen der analytische Ausdruck von Ecke zu Ecke ein anderer wird, da W beim Durchgange durch eine Fläche, wo die Dichtigkeit Singularitäten hat, einen anderen analytischen Ausdruck erhält.

---

2. Kapitel.

Bestimmung der Abplattung aus Schweremessungen.

§ 1. **Entwicklung von $\frac{1}{e}$ in eine Potenzreihe.** Um das Potential W der Schwerkraft in eine für die weitere Anwendung geeignete Form zu bringen, ist es erforderlich, in dem Ausdruck (1) § 6 S. 8:

$$W = k^2 \int \frac{dm}{e} + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\,\omega^2\,, \tag{1}$$

$\frac{1}{e}$ in nachstehender Weise in eine Reihe zu entwickeln.

Zunächst bringen wir in Erinnerung, dafs bei Aufstellung des Ausdruckes (1) der Erdschwerpunkt als Koordinatenanfang, die Rotationsaxe der Erde als z-Axe und die Äquatorebene als xy-Ebene genommen ist. Die Koordinaten eines Punktes P', auf welchen sich W bezieht, sind x', y' und z'; diejenigen eines Punktes der Erde, in welchem das Massenelement dm lagert, sind x, y und z, so dafs zu setzen ist

$$dm = \Theta\, dx\, dy\, dz\,, \tag{2}$$

wenn wie bisher Θ die Dichtigkeit der Masse im Punkte (xyz) angiebt.

Bezeichnet man nun mit r' den Radiusvektor von P', mit r denjenigen des Punktes (xyz) und mit γ den von beiden Radienvektoren eingeschlossenen Winkel, so hat man für den Abstand des Punktes (xyz) von P' die Gleichung

$$e^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma\,. \tag{3}$$

Andrerseits ist bekanntlich

$$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

löst man hier rechter Hand die Quadrate auf und beachtet die Beziehungen:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\,,$$

so folgt aus der Vergleichung mit (3):

$$rr' \cos\gamma = xx' + yy' + zz'\,. \tag{4}$$

Hiermit ist $\cos\gamma$ durch die rechtwinkeligen Koordinaten ausgedrückt. Wir behalten aber einstweilen $\cos\gamma$ bei und entwickeln $\frac{1}{e}$ ausgehend von der aus (3) folgenden Gleichung

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'}\left(1 - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma + \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

unter der Voraussetzung $\qquad r' > r\,.$

Sei $i = \sqrt{-1}$ und ε die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist bekanntlich

$$\cos\gamma = \frac{\varepsilon^{\gamma i} + \varepsilon^{-\gamma i}}{2} \tag{6}$$

und hiermit

$$1 - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(1 - \frac{r}{r'}\varepsilon^{\gamma i}\right)\left(1 - \frac{r}{r'}\varepsilon^{-\gamma i}\right).$$

Man hat ferner [vergl. Bd. 1 S. 27 (3)]:

$$\left(1 - \frac{r}{r'}\varepsilon^{\pm\gamma i}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{r}{r'}\varepsilon^{\pm\gamma i} + \frac{3}{8}\left(\frac{r}{r'}\right)^2\varepsilon^{\pm 2\gamma i} + \frac{5}{16}\left(\frac{r}{r'}\right)^3\varepsilon^{\pm 3\gamma i}$$
$$+ \frac{35}{128}\left(\frac{r}{r'}\right)^4\varepsilon^{\pm 4\gamma i} + \ldots, \tag{7}$$

wobei in den Exponenten die oberen und unteren Zeichen einander entsprechen. Beide Reihen sind für $r' > r$ absolut konvergent und ihre Multiplikation giebt daher unter dieser Bedingung eine ebenfalls absolut konvergente Reihe. In dem Produkt gehen wir mittelst der auf 2γ, 3γ und 4γ angewandten Formel (6) wieder auf reelle Werte zurück und erhalten so unter Beachtung von (5):

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'}\left\{1 + \frac{r}{r'}P_1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + \left(\frac{r}{r'}\right)^3 P_3 + \left(\frac{r}{r'}\right)^4 P_4 + \ldots\right\} \tag{8}$$
$$r' > r$$

mit

$$\begin{aligned} P_1 &= \cos\gamma \\ P_2 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2\gamma \\ P_3 &= \frac{3}{8}\cos\gamma + \frac{5}{8}\cos 3\gamma \\ P_4 &= \frac{9}{64} + \frac{20}{64}\cos 2\gamma + \frac{35}{64}\cos 4\gamma\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Da die Reihen (7) nur positive Koefficienten enthalten, so sind in den Koefficienten P auch alle Glieder, abgesehen vom Vorzeichen der Cosinus, positiv. Hiermit erkennt man leicht, daſs die P für $\gamma =$ null ihren gröſsten absoluten Wert annehmen. Ist aber $\gamma =$ null, so ist nach (5)

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{r'}}$$

oder

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'}\left\{1 + \left(\frac{r}{r'}\right) + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \left(\frac{r}{r'}\right)^3 + \left(\frac{r}{r'}\right)^4 + \ldots\right\}.$$

Dies bestätigt einesteils die absolute Konvergenz von (8) für $r' > r$, insofern eben diese Reihe noch für die gröſsten Koefficientenwerte konvergiert, andernteils zeigt sich, daſs der absolute Wert eines Koefficienten P die Einheit nicht überschreitet, wie auch γ beschaffen ist.

Für $r' = r$ gilt die Entwicklung (8) zufolge der Herleitung nicht ohne weiteres. Wir lassen diesen Fall einstweilen unerledigt und wenden uns zu dem Falle $r' < r$. Anstatt (5) ist jetzt zu setzen

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Man hat also nur r mit r' zu vertauschen und erhält dadurch, unter P_1, P_2 u. s. f. immer die durch (9) bezeichneten Koefficienten verstanden:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r}\left\{1 + \frac{r'}{r}P_1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2 + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 P_3 + \left(\frac{r'}{r}\right)^4 P_4 + \ldots\right\} \quad (10)$$

$$r' < r.$$

§ 2. **Fortsetzung: Die Koefficienten P.** Wir führen in die Ausdrücke (9) anstatt der Cosinus der Vielfachen von γ die Potenzen von $\cos\gamma$ ein. Man hat aber

$$\cos 2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1,$$

$$\cos 3\gamma = \cos 2\gamma\cos\gamma - \sin 2\gamma\sin\gamma = 4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma,$$

$$\cos 4\gamma = 2\cos^2 2\gamma - 1 = 8\cos^4\gamma - 8\cos^2\gamma + 1,$$

und hiermit findet sich:

$$\begin{aligned} P_1 &= +\cos\gamma \\ P_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\gamma \\ P_3 &= -\frac{3}{2}\cos\gamma + \frac{5}{2}\cos^3\gamma \\ P_4 &= +\frac{3}{8} - \frac{30}{8}\cos^2\gamma + \frac{35}{8}\cos^4\gamma \end{aligned} \quad (1)$$

Zu dieser Form der Koefficienten gelangt man direkt, wenn z. B. für $r' > r$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'}\left(1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{2\frac{r}{r'}\cos\gamma}{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Man hat hier zuerst den $\cos\gamma$ enthaltenden Faktor rechter Hand zu entwickeln und dann die negativen Potenzen von $1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2$ einzuführen. Schreiben wir anstatt $\frac{r}{r'}$ für den Augenblick α, so folgt zunächst:

$$\frac{r'}{e} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{(1+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\alpha\cos\gamma}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1.3}{1.2}\,\dfrac{\alpha^2\cos^2\gamma}{(1+\alpha^2)^{\frac{5}{2}}} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\,\dfrac{\alpha^n\cos^n\gamma}{(1+\alpha^2)^{\frac{2n+1}{2}}} + \ldots \end{array}\right\}. \quad (2)$$

Da nun

$$\frac{1}{(1+\alpha^2)^{\frac{2n+1}{2}}} = 1 - \frac{2n+1}{1 \cdot 2^1}\alpha^2 + \frac{(2n+1)(2n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2}\alpha^4 - \dots, \tag{2*}$$

so erhält man unter Substitution dieser Entwicklung für $n = 0, 1, 2 \dots$ in die vorhergehende Reihe durch Zusammenfassung der in α^n multiplizierten Glieder als Koefficienten von α^n:

$$P_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.3\dots n}\left\{\begin{array}{l}\cos^n\gamma - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2}\gamma \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\gamma - \dots\end{array}\right\}. \tag{3}$$

Bei dieser Art der Entwicklung ist indessen die Konvergenz der Entwicklung nicht evident, weshalb wir die andere vorangeschickt haben.

Wir haben oben gesehen, dafs P_n höchstens gleich ± 1 werden kann. Diese Werte treten ein für $\gamma =$ null und π. Für einen dazwischen liegenden Wert von γ ist P_n ein echter Bruch, welcher bei unendlich anwachsendem Index n absolut genommen gegen null konvergiert. Es ist nämlich*):

$$\lim_{n=\infty} P_n = \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\gamma + \frac{\pi}{4}\right] \cdot \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\gamma}}. \tag{4}$$

§ 3. Die Entwicklung von $\frac{1}{e}$ für $r' = r$.

In diesem Falle geben die Gleichungen (8) und (10) § 1 S. 51 und 52 beide

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'}\left\{1 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots\right\}. \tag{1}$$

Indessen ist aus der Entwicklung in § 1 nicht zu erkennen, inwieweit diese Formel gilt. Ebensowenig zeigt dies § 2, denn die Entwicklung (2*) konvergiert für $\alpha = 1$ bekanntlich nur im Falle $n =$ null.

Will man sich überzeugen, ob der Ansatz (1) zulässig ist, so kann man versuchen, direkt die Summe der geschlungenen Parenthese in (1) zu bilden. Man findet alsdann, dafs in der That der Ansatz (1) richtig ist für

$$\cos^2\gamma < 1.$$

Ist aber $\cos^2\gamma = 1$, so ist er unzulässig.

Letzteres läfst sich leicht erkennen; schwieriger ist der erste Nachweis, der sich aber mit Hülfe einiger aus der höheren Analysis bekannter Entwicklungen führen läfst.

Für $\cos\gamma = +1$ d. h. für $\gamma =$ null sind nach S. 51 § 1 (5) und (8) alle P gleich 1, also ist dann ihre Summe ∞ grofs. Der Ansatz (1) giebt somit hier $\frac{1}{e} = \infty$. Wenngleich nun in der That für $\gamma =$ null

*) *E. Heyne*, Theorie der Kugelfunktionen; 2. Auflage, Berlin 1878; S. 175 (28c) und S. 178 (29c).



auch $e =$ null und $\frac{1}{e}$ also ∞ grofs ist, so darf man doch nicht ohne weiteres den Ansatz (1) benutzen, da ∞ kein bestimmter Wert ist.

Für $\cos\gamma = -1$ d. h. für $\gamma = \pi$ und $2\gamma = 2\pi$ behalten nach (9) § 1 S. 51, oder besser nach (3) § 2 S. 53, die P mit geradem Index denselben Wert wie für $\cos\gamma = +1$, dagegen wechseln diejenigen mit ungeradem Index das Vorzeichen unter Beibehaltung des absoluten Wertes wie für $\cos\gamma = +1$. Mithin oscilliert jetzt die Reihe $1 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots$, d. i. $+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ zwischen $+1$ und null hin und her, während $\frac{1}{e}$ gleich $\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2}$ ist.

Um die Reihe $1 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots$ für $\cos^2\gamma < 1$ zu summieren, gehen wir von der Gleichung aus:

$$P_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\, d\psi\,, \tag{2}$$

welche in der Lehre von den Kugelfunktionen bewiesen wird und gilt, wenn γ der Bedingung genügt:

$$0 < \gamma < \pi\,.\text{*)} \tag{2*}$$

Diese Gleichung für kleine Werte von n zu verifizieren, ist nicht schwierig:

Für $n =$ null hat man

$$P_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}\, \frac{d\psi}{2}\,;$$

setzt man nun $\sin\frac{\psi}{2} = x \sin\frac{\gamma}{2}$, so geht dieses über in

$$P_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{d. i.} = 1. \tag{3}$$

Hiernach giebt (2) für $n =$ null das erste Glied der zu summierenden Reihe.

Für $n = 1$ ist aus (2) wegen $\cos\frac{3\psi}{2} = \left(1 - 4\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\cos\frac{\psi}{2}$:

$$P_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1 - 4x^2 \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \cos\gamma\,.$$

U. s. f.

Wenn wir nun die Summe aller P_n von $n =$ null bis $n - 1$ suchen, so ist zunächst die Summe von

$$\cos\frac{\psi}{2} + \cos\frac{3\psi}{2} + \cos\frac{5\psi}{2} + \ldots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\psi$$

zu bilden. Dies geschieht nach einer bekannten Formel, welche auch leicht mittelst Projektion der Seiten eines regelmäfsigen (einem Kreise eingeschriebenen) Polygones auf eine Axe, gegen welche sie die Neigungs-

*) *Heyne*, Kugelfunktionen; S. 44 (7b).

winkel $\frac{\psi}{2}$, $\frac{3\psi}{2}$ u. s. f. besitzen, gewonnen werden kann. Die Summe ist

$$\frac{\sin n\psi}{2 \sin \frac{\psi}{2}}.$$

Hiernach erhält man:

$$1 + P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\sin\left(2n\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\frac{\psi}{2} \sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} \frac{d\psi}{2}. \quad (4)$$

Nach der Theorie der trigonometrischen Reihen*) ist aber unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion $F(\beta)$:

$$\lim_{m=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^h F(\beta) \frac{\sin m\beta}{\beta} d\beta = F(0). \quad (4^*)$$

Im Integral von (4) setzen wir im Zähler und Nenner $\frac{\psi}{2}$ hinzu; dann gehen (4) und (4*) in einander über für $m = 2n$, $\beta = \frac{\psi}{2}$, $h = \frac{\gamma}{2}$ und

$$F(\beta) = \frac{\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}},$$

sowie

$$F(0) = \frac{1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Es wird daher

$$\lim_{n=\infty} (1 + P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}) = \frac{1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}. \quad (5)$$

Die Voraussetzung über $F(\beta)$ ist (soweit sie hier in betracht kommt) die, dafs es innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich wird. Falls ein Unendlichwerden eintritt, so kann die Rechnung auch noch gültig sein, es bedarf dieses aber besonderer Untersuchung. Im vorliegenden Falle wird $F(\beta)$, da $\gamma < \pi$ ist und also $\frac{\psi}{2} : \sin\frac{\psi}{2}$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleibt, nur für $\psi = \gamma$ unendlich. Integrieren wir nun in (4) zunächst nur bis $\gamma - \varepsilon$, wo ε eine sehr kleine Gröfse und jedenfalls $< \gamma$ sein soll, so gilt dafür die weitere Entwicklung; es ist aber zu (5) rechter Hand noch hinzu zusetzen:

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\gamma-\varepsilon}^\gamma \frac{\sin\left(2n\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\frac{\psi}{2} \sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} \frac{d\psi}{2}, \quad (5^*)$$

oder nach Hinzufügen von $\sin\frac{\psi}{2}$ $\cos\frac{\psi}{2}$ im Zähler und Nenner:

---

*) *Heyne*, Kugelfunktionen; S. 62 und 63, insbesondere (5a).

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma}\frac{\sin n\psi}{\sin\psi\sin\frac{\psi}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\psi}{2}}}\frac{d\psi}{2}.$$

Da $0<\gamma<\pi$ ist, bleibt unter dem Integralzeichen der zweite Faktor innerhalb der Integrationsgrenzen positiv. Der erste Faktor hat einen endlichen Wert. Mithin ist (5*) seinem absoluten Werte nach ein endliches Vielfaches von

$$\int\limits_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma}\frac{\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\psi}{2}}}\frac{d\psi}{2}.$$

Das unbestimmte Integral hiervon ist gleich

$$\textit{Konst.}-\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\psi}{2}}\;;$$

man erhält somit (5*) gleich einem endlichen Vielfachen von

$$\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma-\varepsilon}{2}}\quad\text{d. i.}\quad\sqrt{\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\frac{2\gamma-\varepsilon}{2}}\,.$$

Hiernach kann man durch Voraussetzung eines geeignet kleinen Wertes für ε den Fehler der Formel (5) auf einen verschwindenden Betrag herabdrücken.

Aus Gleichung (5) ersehen wir nun, dafs die Summe $1+P_1+P_2+$ u.s.f. mit wachsender Anzahl der Glieder gegen $1:2\sin\frac{\gamma}{2}$ konvergiert (falls $\cos^2\gamma<1$). Dieses ist aber der Wert von $\frac{r'}{e}$ für $r'=r$ nach (5) § 1 S. 50. Mithin gilt der Ansatz (1) im laufenden Paragraphen wirklich für $r'=r$ und $\cos^2\gamma<1$.

§ 4. Die Koefficienten P in rechtwinkeligen und in Polarkoordinaten.

Um die Koefficienten P durch rechtwinkelige Koordinaten auszudrücken, bedarf es nur der Einführung des Ausdruckes

$$\cos\gamma=\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}\tag{1}$$

nach § 1 S. 50 (4) in die Formeln (1) § 2 S. 52.

Denken wir uns ferner den Punkt P' wie im vorigen Kapitel § 4 S. 5 im Anschlufs an Fig. 1 durch Polarkoordinaten bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned}x'&=r'\cos\varphi'\cos\lambda'\\y'&=r'\cos\varphi'\sin\lambda'\\z'&=r'\sin\varphi'.\end{aligned}\tag{2}$$

Hierin bedeutet r' den Radiusvektor vom Erdschwerpunkt aus, φ' die geozentrische Breite und λ' die geozentrische Länge.

Für irgend einen Punkt (xyz) oder $(r\,\varphi\,\lambda)$ hat man

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos\varphi \cos\lambda \\
y &= r \cos\varphi \sin\lambda \\
z &= r \sin\varphi,
\end{aligned} \tag{3}
$$

und hiermit wird aus (1) ohne Schwierigkeit gefunden:

$$\cos\gamma = \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda') + \sin\varphi \sin\varphi', \tag{4}$$

eine Formel, die man auch direkt mittelst sphärischer Trigonometrie hätte ableiten können.

Wenn man diesen Ausdruck für $\cos\gamma$ in die Ausdrücke (1) § 2 S. 52 einführt, ist es vorteilhaft, anstatt der Potenzen von $\cos(\lambda - \lambda')$ die Cosinus der Vielfachen von $(\lambda - \lambda')$ anzuwenden. Es findet sich dann:

$$P_1 = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda').$$

$$
\begin{aligned}
P_2 = {} & \frac{9}{4}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right) \\
& + 3 \sin\varphi \cos\varphi \sin\varphi' \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda') \\
& + \frac{3}{4} \cos^2\varphi \cos^2\varphi' \cos 2(\lambda - \lambda').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3 = {} & \frac{25}{4}\left(\sin^3\varphi - \frac{3}{5}\sin\varphi\right)\left(\sin^3\varphi' - \frac{3}{5}\sin\varphi'\right) \\
& + \frac{75}{8}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{5}\right)\cos\varphi \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{5}\right)\cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda') \\
& + \frac{15}{4} \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\varphi' \cos^2\varphi' \cos 2(\lambda - \lambda') \\
& + \frac{5}{8} \cos^3\varphi \cos^3\varphi' \cos 3(\lambda - \lambda').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_4 = {} & \frac{1225}{64}\left(\sin^4\varphi - \frac{6}{7}\sin^2\varphi + \frac{3}{35}\right)\left(\sin^4\varphi' - \frac{6}{7}\sin^2\varphi' + \frac{3}{35}\right) \\
& + \frac{245}{8}\left(\sin^3\varphi - \frac{3}{7}\sin\varphi\right)\cos\varphi\left(\sin^3\varphi' - \frac{3}{7}\sin\varphi'\right)\cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda') \\
& + \frac{245}{16}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{7}\right)\cos^2\varphi\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{7}\right)\cos^2\varphi' \cos 2(\lambda - \lambda') \\
& + \frac{35}{8} \sin\varphi \cos^3\varphi \sin\varphi' \cos^3\varphi' \cos 3(\lambda - \lambda') \\
& + \frac{35}{64} \cos^4\varphi \cos^4\varphi' \cos 4(\lambda - \lambda').
\end{aligned}
$$

Man bemerkt, dafs nach Auflösung der Cosinus von $(\lambda - \lambda')$ und seiner Vielfachen die P symmetrisch zu φ und φ', λ und λ' gebaut sind, was nicht anders sein kann, da $\cos\gamma$ bereits diese Symmetrie besitzt. Eigentümlich bei dieser Symmetrie ist aber, dafs jede in einen Cosinus von $(\lambda - \lambda')$ oder seiner Vielfachen multiplizierte Funktion von φ und φ' in ein Produkt einer Funktion von φ allein

und einer solchen von φ' allein zerfällt. Dafs dies so sein mufs, zeigt die Theorie ganz allgemein. Für unsere Zwecke genügt die obige Darstellung bis P_4, die leicht zu beschaffen ist.

Wir stellen hier noch die Formeln her, welche dabei zur Einführung der Vielfachen von $(\lambda - \lambda')$ dienen. Man kann sie aus den Relationen für γ im Eingang des § 2 S. 52 ableiten:

$$\cos^2(\lambda - \lambda') = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\lambda - \lambda')$$

$$\cos^3(\lambda - \lambda') = \frac{3}{4}\cos(\lambda - \lambda') + \frac{1}{4}\cos 3(\lambda - \lambda')$$

$$\cos^4(\lambda - \lambda') = \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\cos 2(\lambda - \lambda') + \frac{1}{8}\cos 4(\lambda - \lambda').$$

§ 5. **Das Potential W der Schwerkraft aufserhalb.** Befindet sich ein von der Erde angezogener und mit ihr rotierender Punkt P' aufserhalb einer die ganze Erde gerade völlig einschliefsenden, zum Erdschwerpunkt konzentrischen Kugel, so ist nach (1) und (8) des § 1 S. 50 und 51 zu setzen das Potential

$$W = \left\{ \begin{array}{c} \frac{k^2}{r'} \left[\begin{array}{l} \int dm + \frac{1}{r'}\int P_1 r\,dm + \frac{1}{r'^2}\int P_2 r^2\,dm \\ + \frac{1}{r'^3}\int P_3 r^3\,dm + \frac{1}{r'^4}\int P_4 r^4\,dm + \dots \end{array} \right] \\ + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\,\omega^2 \end{array} \right\}, \tag{1}$$

wobei die physische Möglichkeit des Falles gleichgültig ist.

Ohne zunächst auf die Frage einzugehen, inwieweit vorstehender Ausdruck für das Potential auf Punkte aufserhalb bis zur physischen und mathematischen Erdoberfläche Anwendung finden kann, erörtern wir vorerst die Bedeutung der drei, den Anfang der Reihe rechter Hand bildenden Integrale.

Zunächst hat man das 1. Integral

$$\int dm = M, \tag{2}$$

der Masse der ganzen Erde, wie unmittelbar ersichtlich.

Für das 2. Integral beachten wir die Relationen (1) § 2 S. 52 und (1) § 4 S. 56, wonach

$$P_1 = \cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$$

zu setzen ist. Damit ergiebt sich

$$\int P_1 r\,dm = \frac{1}{r'}\left\{ x'\int x\,dm + y'\int y\,dm + z'\int z\,dm \right\}.$$

Insofern wir aber den Erdschwerpunkt als Koordinatenanfang gewählt haben, sind die Integrale

$$\int x\,dm \qquad \int y\,dm \qquad \int z\,dm$$

gleich null, da sie nach der aus der Mechanik bekannten Definition des Schwerpunkts [vergl. S. 3 § 2 (4)] bezw. gleich sind

$$\xi M \qquad \eta M \qquad \zeta M,$$

wenn ξ, η und ζ die Schwerpunktskoordinaten vorstellen, welche im vorliegenden Falle gleich null gesetzt wurden. Wir haben somit

$$\int P_1 r\,dm = 0. \tag{3}$$

Für das 3. Integral wenden wir P_2 in der S. 57 gegebenen Form an, wobei wir $\cos(\lambda - \lambda')$ und $\cos 2(\lambda - \lambda')$ auflösen. Es folgt alsdann:

$$\int P_2 r^2 dm = \frac{3}{2}\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right)\int\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\varphi\right) r^2 dm$$
$$+ 3\sin\varphi'\cos\varphi' \left\{ \cos\lambda' \int \sin\varphi\cos\varphi\cos\lambda\, r^2 dm + \sin\lambda' \int \sin\varphi\cos\varphi\sin\lambda\, r^2 dm \right\}$$
$$+ \frac{3}{4}\cos^2\varphi' \left\{ \cos 2\lambda' \int \cos^2\varphi\cos 2\lambda\, r^2 dm + \sin 2\lambda' \int \cos^2\varphi \sin 2\lambda\, r^2 dm \right\}.$$

In den Integralen rechter Hand führen wir wieder rechtwinkelige Koordinaten ein, um auf bekannte Ausdrücke zu kommen. Dazu dienen die Relationen (3) § 4 S. 57. Man findet ohne Schwierigkeit:

$$\int P_2 r^2 dm = \frac{3}{2}\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right)\int\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dm$$
$$+ 3\sin\varphi' \cos\varphi' \left\{ \cos\lambda' \int xz\, dm + \sin\lambda' \int yz\, dm \right\}$$
$$+ \frac{3}{4}\cos^2\varphi' \left\{ \cos 2\lambda' \int (x^2 - y^2)\, dm + \sin 2\lambda' \int 2\, xy\, dm \right\}.$$

Wegen des Umstandes, dafs die z-Axe Rotationsaxe ist, sowie bei geeigneter Wahl der andern beiden Koordinatenaxen läfst sich die rechte Seite wesentlich vereinfachen. In der Dynamik wird nämlich gezeigt, dafs es in jedem festen Körper drei zu einander rechtwinkelige Axen durch den Schwerpunkt giebt — die drei Hauptaxen des Körpers — für welche als Koordinatenaxen die Integrale

$$\int xz\,dm \qquad \int yz\,dm \qquad \int xy\,dm \tag{4}$$

verschwinden. Dieses gilt auch für die Erde, wenn wir wie bisher die in § 5 S. 7 eingeführte Annahme festhalten, dafs die Teile der Erde in relativer Ruhe zu einander sind.

Mit dem Verschwinden jener Integrale hängt nun zusammen, dafs eine Rotation um eine in dem Körper feste, sonst aber freie Axe dauernd nur dann stattfinden kann, wenn diese Axe eine Hauptaxe ist. Die Rotationsaxe der Erde mufs also eine solche Hauptaxe sein (§ 4 S. 5). Sie ist bereits als z-Axe eingeführt. Rechtwinkelig zu ihr liegen in der Äquatorebene die beiden andern Hauptaxen, die

wir als x- und y-Axe annehmen. (Bei beliebiger Lage dieser letzteren Koordinatenaxen würde das 3. Integral (4) nicht verschwinden).

Wir führen nun noch die Hauptträgheitsmomente ein, die wir bezw. für die Axen der x, y und z mit A, B und C bezeichnen:

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2)\, dm, \\ B &= \int (x^2 + z^2)\, dm, \\ C &= \int (x^2 + y^2)\, dm. \end{aligned} \tag{5}$$

Hiermit wird

$$\int P_2 r^2 dm = \frac{3}{2}\left(\frac{A+B}{2} - C\right)\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}(B-A)\cos^2\varphi' \cos 2\lambda'. \tag{6}$$

Der Ausdruck (1) geht jetzt über in den nachstehenden, wobei also Voraussetzung ist, dafs die beiden Hauptträgheitsaxen in der Äquatorebene als Axen der x und y dienen:

$$W = \left\{ \begin{aligned} &\frac{k^2}{r'}\left[M + \frac{1}{2r'^2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3\sin^2\varphi') + \frac{3}{4r'^2}(B-A)\cos^2\varphi' \cos 2\lambda' \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{r'^3}\int P_3 r^3 dm + \frac{1}{r'^4}\int P_4 r^4 dm + \ldots \right] \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}\,\omega^2 r'^2 \cos^2\varphi'. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Im letzten Gliede rechter Hand von (1) ist zugleich $x'^2 + y'^2 = r'^2 \cos^2\varphi'$ gesetzt, um in allen Gliedern nur die Polarkoordinaten von P', dem angezogenen Punkte, zu haben.

Es entsteht jetzt die Frage, ob die Formel (7) auch noch gilt innerhalb der eingangs erwähnten Kugelfläche bis zur physischen und mathematischen Erdoberfläche. Zunächst wollen wir den Einflufs des Luftmeeres schätzen und beginnen zu dem Zwecke damit, das Potential für eine homogene Kugelschale abzuleiten, woran sich einige Notizen über Kugelfunktionen schliefsen werden.

§ 6. **Das Potential der Anziehung einer homogenen Kugelschale** läfst sich leicht durch direkte Integration nach der Formel

$$v = k^2 \int \frac{dm}{e} \tag{1}$$

ermitteln, wenn räumliche Polarkoordinaten eingeführt werden. Der Übergang von rechtwinkeligen Koordinaten zu diesen Polarkoordinaten ist schon § 4 S. 6 angegeben. Man vergl. insbesondere Fig. 1 S. 5. Für die Anwendung auf (1) ist nun zunächst das Massenelement dm auszudrücken.

Zu dem Zwecke denke man sich mit dem Radiusvektor r des Punktes (r, φ, λ) konzentrisch zum Koordinatenanfang eine Kugel beschrieben und auf derselben den geozentrischen Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ entsprechend zwei Parallelkreise, sowie den geozentrischen Längen λ

und $\lambda + d\lambda$ entsprechend zwei Meridiankreise gezogen. Dann entsteht am Punkte (r, φ, λ) ein Oberflächenelement auf der Kugel, welches als Rechteck mit den Seiten $r\,d\varphi$ und $r\cos\varphi\,d\lambda$ berechnet werden darf. Wächst nunmehr r um dr, so liegt über jenem Oberflächenelement ein Volumenelement von der Höhe dr. Es wird also

$$dm = \Theta\, r^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda\, dr. \tag{2}$$

Bezeichnet endlich γ den Winkel zwischen den Radienvektoren r und r', letzterer in Bezug auf den angezogenen Punkt P', so kann (1) auf die nachstehende Form gebracht werden:

$$v = k^2 \int\int\int \frac{\Theta r^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda\, dr}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}}. \tag{3}$$

In diesem Ausdruck, welcher noch ganz allgemein gilt, ist die dreifache Integration über den anziehenden Körper zu erstrecken. Indem wir ihn auf eine homogene Kugelschale von gleichmäfsiger Stärke dr beziehen, können wir unbeschadet der Allgemeinheit die z-Axe durch den angezogenen Punkt P' legen, Fig. 3, womit $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$ wird, und (3) übergeht in:

Fig. 3.

$$v = k^2 \Theta r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\sin\varphi}}. \tag{4}$$

Die Integration nach λ läfst sich ohne weiteres ausführen und giebt als Resultat den Faktor 2π vor dem Integralzeichen. Unter dem Integralzeichen schreiben wir für $\cos\varphi\, d\varphi$ besser $d(\sin\varphi)$ und setzen für $\sin\varphi$ das Symbol t; dann wird

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}}. \tag{5}$$

Das unbestimmte Integral des unter dem Integralzeichen stehenden Differentialausdruckes ist

$$\frac{-\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}}{rr'};$$

das bestimmte Integral wird hiernach gleich

$$\frac{\sqrt{(r' + r)^2} - \sqrt{(r' - r)^2}}{rr'}.$$

Die Quadratwurzeln sind (insofern sie die Distanz e in zwei besonderen Fällen bedeuten) positiv zu nehmen. Man mufs daher unterscheiden zwischen $r' > r$ und $r' < r$.

Liegt P' aufserhalb der Kugelschale, ist also $r' > r$, so wird das bestimmte Integral gleich

$$\frac{(r'+r)-(r'-r)}{rr'} = \frac{2}{r'}$$

und das Potential

$$v = \frac{4\pi k^2 \Theta r^2 dr}{r'} = k^2 \frac{Masse}{r'}. \tag{6}$$

Liegt P' innerhalb der Kugelschale, ist also $r' < r$, so wird das bestimmte Integral gleich

$$\frac{(r'+r)-(r-r')}{rr'} = \frac{2}{r}$$

und das Potential

$$v = 4\pi k^2 \Theta r\, dr = k^2 \frac{Masse}{r}. \tag{7}$$

Für $r = r'$ gehen beide Formeln (6) und (7) in einander über und haben wegen des stetigen Verlaufes von v, trotzdem in (4) unter dem Integralzeichen der Nenner einmal null wird, auch noch Geltung. Die Gleichungen (6) und (7) sagen aus: *Das Potential der Anziehung einer homogenen, gleichstarken Kugelschale für einen aufserhalb gelegenen Punkt ist ebensogrofs als das Potential ihrer im Mittelpunkt konzentrierten Masse; für einen innerhalb des Hohlraumes gelegenen Punkt ist es konstant.*

Für das Potential einer *homogenen Kugel* vom Radius R und der Dichtigkeit Θ ergiebt sich aus (6) und (7), wenn der Punkt P' *aufserhalb* liegt:

$$v = k^2 \frac{Masse}{r'} = \frac{4\pi k^2 \Theta R^3}{3r'}, \tag{8}$$

wenn derselbe *innerhalb* liegt:

$$v = 2\pi k^2 \Theta \left(R^2 - \frac{1}{3} r'^2\right). \tag{8*}$$

Die Konstanz des Potentials innerhalb des Hohlraumes einer homogenen Kugelschale läfst sich geometrisch sehr leicht nach einem bereits von *Newton* angegebenen Verfahren einsehen.*) Liegt P' nämlich innerhalb einer Kugelfläche und ist A_1B_1 ein Linienelement derselben, so ziehe man die Linien A_1P' und B_1P' bis sie die Kugelfläche in A_2 und B_2 zum zweiten Male schneiden. Da A_1B_1 und A_2B_2 unendlich klein sind, erkennt man ohne weiteres, dafs sie im Verhältnis $A_1P' : A_2P'$ stehen. Dreht man A_1B_1 um den Punkt A_1 um 360°, wobei aufserdem A_1B_1 seine Länge ändern darf, so beschreibt A_1B_1 ein Oberflächenelement, welches zu dem gleichzeitig von A_2B_2 beschriebenen im Verhältnis $\overline{A_1P'}^2 : \overline{A_2P'}^2$ steht, wie man sofort erkennt, wenn man zunächst nur eine unendlich kleine Drehung ausführt. Die Anziehungen beider Elemente auf P' verhalten

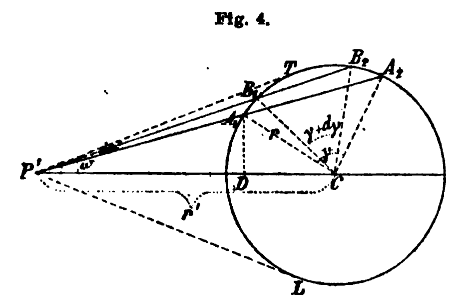
*) *Sir Isaac Newtons mathematische Prinzipien der Naturlehre.* Mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Prof. Dr. *O. Ph. Wolfers.* Berlin 1872; S. 191.

sich aber wie die Quotienten aus Fläche und Quadrat des Abstandes; sie sind also gleich grofs. Da sie überdies entgegengesetzt gerichtet sind, so ist die Summe der Anziehungen für beide Elemente null. Innerhalb des Hohlraums einer gleichstarken, homogenen Kugelschale wird P' daher gar nicht angezogen und somit ist hier v konstant.

Bei einem aufserhalb gelegenen Punkte P' führt dieses Verfahren für innere Punkte nur zu der Kenntnis, dafs 2 Oberflächenelemente, welche von einem von P' ausgehenden Kegel aus der Kugelfläche ausgeschnitten werden, gleichstark auf P' wirken. Da aber die Anziehungen jetzt gleiche Richtung haben, so hat diese Kenntnis nicht den Nutzen, die Integration zu sparen.

Doch ist es von Interesse zu erkennen, dafs *die Anziehung einer unendlich dünnen, homogenen, gleichstarken Kugelschale in 2 gleiche Teile zerspalten werden* kann, dadurch dafs man von P' einen tangierenden Kegel an die Schale legt. Ist TL die Tangierungslinie auf derselben, Fig. 4, so üben nach den obigen Bemerkungen die beiden durch TL getrennten Teile der Schale gleiche Wirkung auf P' aus.

Fig. 4.



Der Weg, welchen Newton (a. a. O. S. 192—194) einschlägt, um die Integration für einen Punkt P' aufserhalb zu bewirken, ist folgender. Er betrachtet zunächst die zentrale Komponente der Anziehung einer unendlich schmalen Ringfläche, welche durch Rotation des Elementes A_1B_1 um $P'C$ entsteht, Fig. 4, und vergleicht sie mit der entsprechenden bei einer anderen Entfernung von P'. In beiden Fällen werden, was wesentlich ist, die Bögen A_1A_2 bezw. B_1B_2 gleich lang angenommen. Bei der Summierung tritt demgemäfs der Zentriwinkel γ des Bogens A_1A_2 als unabhängige Variable auf. Ohne hier den von Newton eingeschlagenen Weg zu verfolgen, zeigen wir nur noch, wie ungemein bequem sich mittelst der Variablen γ integrieren läfst. Im wesentlichen haben wir damit auch Newtons Verfahren, aber in moderner Ausdrucksweise, dargestellt.

Ist ϑ die Masse pro Flächeneinheit, so ist die zentrale Komponente der Anziehungsbeschleunigung, welche von dem mit $A_1B_1 = ds$ beschriebenen Ringe herrührt, zufolge der Figur gleich

$$dX = 2\pi \,.\, DA_1 \,.\, ds \,.\, k^2\vartheta \cdot \frac{\cos\omega}{\overline{P'A_1}^2}\,.$$

Die Figur zeigt aber, dafs $ds = P'A_1 \,.\, \operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}\, d\omega$ und $DA_1 = P'A_1 \,.\, \sin\omega$ ist. Hiermit folgt

$$dX = 2\pi k^2\vartheta \operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}\sin\omega\, d(\sin\omega),$$

und insofern $\sin\omega = r\cos\frac{\gamma}{2} : r'$ ist, erhält man hieraus endlich

$$dX = -2\pi k^2\vartheta\,\frac{r^2}{r'^2}\, d\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)\cdot$$

Diese Gleichung zeigt bereits, dafs X umgekehrt proportional r'^2 ist, weil

bei veränderter Entfernung $P'C = r'$ sich im Ausdruck für dX nur der Nenner r'^2 ändert, falls γ und $\gamma + d\gamma$ unverändert (nach Newton) beibehalten werden. Damit ist also der eingangs angeführte Satz bewiesen. Übrigens hat die Integration gar keine Schwierigkeit; sie ergiebt X in der bekannten Form. (Newton vervollständigt den Satz auf andre Art in § 114 a. a. O. S. 194 und 195.)

§ 7. **Kugelfunktionen.** Eine Eigenschaft der Koefficienten P verdient, ehe wir unsere Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich des Potentialausdruckes (7) § 5 S. 60 fortsetzen, an der Hand des Vorigen hervorgehoben zu werden. Wir entwickeln zu diesem Zwecke das Potential v für eine unendlich dünne, gleichstarke, homogene Kugelschale nochmals, aber unter Einführung der Reihe (8) § 1 S. 51 für $\frac{1}{e}$ in den Ausdruck (1) § 6 S. 60. Zugleich setzen wir $dm = \Theta r^2 dr\, d\sigma$, wobei $d\sigma$ das Oberflächenelement einer zum Koordinatenanfang konzentrischen Kugel vom Radius 1 vorstellt. Damit wird

$$v = k^2 \frac{Masse}{r'} + \left\{ \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \int P_1\, d\sigma + \left(\frac{r}{r'}\right)^3 \int P_2\, d\sigma + \ldots \right\} k^2 \Theta r\, dr. \qquad (1)$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen reduziert sich aber die rechte Seite auf ihr erstes Glied und wir erhalten daher, da dies für jeden Betrag von $r < r'$ der Fall ist, als Resultat den Satz: Es ist das über die Kugeloberfläche ausgedehnte Integral

$$\int P_i\, d\sigma = 0; \quad i = 1, 2, 3 \ldots. \qquad (2)$$

Hierbei ist zunächst Voraussetzung, dafs die Lage von $d\sigma$ durch die Variablen φ und λ angegeben, also $d\sigma = \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda$ gesetzt wird.

Da P_i aber symmetrisch ist zu φ und φ', λ und λ', so hat man auch, wenn $d\sigma' = \cos\varphi'\, d\varphi'\, d\lambda'$ gesetzt wird:

$$\int P_i\, d\sigma' = 0; \quad i = 1, 2, 3 \ldots. \qquad (3)$$

Betrachtet man jetzt die Ausdrücke § 4 S. 57 für P_1, P_2 u. s. f., und denkt sich zugleich die Cosinus von $(\lambda - \lambda')$ und seiner Vielfachen aufgelöst, so erkennt man ohne weiteres, dafs die über die Kugeloberfläche erstreckten Integrale, insoweit sie von Gliedern herrühren, welche λ' enthalten, verschwinden. Nicht unmittelbar ersichtlich ist dies für die von λ' freien Glieder; es sind das immer die zuerst stehenden. Hier hilft nun Gleichung (3) aus.

Damit läfst sich weiter einsehen, dafs Gleichung (3) auch noch besteht, wenn man für P_i einen allgemeineren Ausdruck setzt, der aus P_i dadurch hervorgeht, dafs man in demselben die Funktionen von φ' und λ' beibehält, sie aber nicht mit gleichgebauten Funktionen von φ und λ, sondern mit beliebigen, von φ' und λ' freien Gröfsen multipliziert. Bezeichnen wir diese Koefficienten allgemein

mit p und q mit verschiedenen Indices und die aus den P_i hervorgehenden Funktionen mit K_i', so ist nach S. 57 § 4 z. B.:

$$K_1' = p_{1.0} \sin\varphi' + (p_{1.1} \cos\lambda' + q_{1.1} \sin\lambda') \cos\varphi'$$

$$K_2' = p_{2.0} \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right) + (p_{2.1} \cos\lambda' + q_{2.1} \sin\lambda') \sin\varphi' \cos\varphi' + (p_{2.2} \cos 2\lambda' + q_{2.2} \sin 2\lambda') \cos^2\varphi'$$

$$K_3' = p_{3.0} \left(\sin^3\varphi' - \frac{3}{5} \sin\varphi'\right) + (p_{3.1} \cos\lambda' + q_{3.1} \sin\lambda') \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{5}\right) \cos\varphi' + (p_{3.2} \cos 2\lambda' + q_{3.2} \sin 2\lambda') \sin\varphi' \cos^2\varphi' + (p_{3.3} \cos 3\lambda' + q_{3.3} \sin 3\lambda') \cos^3\varphi'$$

$$K_4' = p_{4.0} \left(\sin^4\varphi' - \frac{6}{7} \sin^2\varphi' + \frac{3}{35}\right) + (p_{4.1} \cos\lambda' + q_{4.1} \sin\lambda') \left(\sin^3\varphi' - \frac{3}{7} \sin\varphi'\right) \cos\varphi' + (p_{4.2} \cos 2\lambda' + q_{4.2} \sin 2\lambda') \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{7}\right) \cos^2\varphi' + (p_{4.3} \cos 3\lambda' + q_{4.3} \sin 3\lambda') \sin\varphi' \cos^3\varphi' + (p_{4.4} \cos 4\lambda' + q_{4.4} \sin 4\lambda') \cos^4\varphi'.$$

Eine solche Funktion K' heifst *Kugelfunktion* und zwar je nach dem Index 1, 2, 3 . . . *ersten*, *zweiten*, *dritten Ranges*. Als Kugelfunktion nullten Ranges kann man ihnen hinzufügen $K_0' =$ Konstante.

Die Kugelfunktionen haben dadurch eine hohe Bedeutung erlangt, dafs man jede beliebige (sogar auch nicht analytische) Funktion zweier Variablen, welche wie Breite und Länge auf der Kugelfläche variieren, nach Kugelfunktionen entwickeln kann und zwar nur auf *eine* Art. Man weifs also z. B. vor jeder speziellen Untersuchung, dafs die Beschleunigung g im Niveau der Meeresfläche sich in der Form

$$g = K_0' + K_1' + K_2' + K_3' + K_4' + \ldots$$

mufs darstellen lassen, wobei in obigen Ausdrücken der K' gesetzt werden dürfen an Stelle von φ' und λ' auch die geographische Breite B' und Länge L', während die p und q zu bestimmende Konstanten bezeichnen.

Setzt man in (7) § 5 S. 60 für $\cos^2\varphi'$ das Aggregat $\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)$, so bemerkt man sofort, dafs auch W eine Entwicklung nach Kugelfunktionen ist. Die Koefficienten derselben sind Funktionen von r' und der Massenanordnung. Trennen wir r' von den Koefficienten ab, verstehen also unter $K_3', K_4' \ldots$ Ausdrücke wie oben die K', worin nun die p und q nur noch von der Massenanordnung abhängen, und behalten wir für die Kugelfunktionen 1. und 2. Ranges die entwickelteren Ausdrücke bei, wie sie in (7) auftreten, so wird

$$W = \frac{Mk^2}{r'} \left\{ \begin{array}{l} \left\{1 + \frac{1}{3}\frac{\omega^2 r'^3}{Mk^2}\right\} \\ - \left\{ \frac{3\left(C - \frac{A+B}{2}\right)}{2 M r'^2} + \frac{\omega^2 r'^3}{2 Mk^2} \right\} \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right) \\ + \frac{3(B-A)}{4 M r'^2} \cos^2\varphi' \cos 2\lambda' \\ + \frac{K_3'}{r'^3} + \frac{K_4'}{r'^4} + \dots \end{array} \right\}. \tag{4}$$

Die 1. Zeile der grofsen Parenthese ist in Bezug auf φ' und λ' konstant, sie entspricht also der Kugelfunktion nullten Ranges; die 2. und 3. Zeile sind Kugelfunktionen 2. Ranges. Es fehlt mithin die Kugelfunktion 1. Ranges; ebenso fehlen auch einige Glieder im Vergleich zu dem allgemeinen Ausdruck von K_2': eine Folge der Wahl des Koordinatensystems.

Die nach dem oben Entwickelten stattfindende Gleichung

$$\int K_i' \, d\sigma' = 0; \quad i = 1, 2, 3 \dots \tag{5}$$

stellt eine interessante Eigenschaft der Kugelfunktionen dar, von der wir sogleich auf W eine Anwendung machen.

Betrachtet man nämlich das Potential W für alle Punkte P' einer Kugelfläche, so findet sich, dafs das konstante Glied der Entwicklung (4):

$$\frac{Mk^2}{r'} \left\{1 + \frac{1}{3}\frac{\omega^2 r'^3}{Mk^2}\right\}, \tag{6}$$

der Mittelwert aller W für diese Fläche ist. Um zu diesem Wert zu gelangen, hat man den Quotienten

$$\int W r'^2 d\sigma' : \int r'^2 d\sigma'$$

zu bilden, indem man die Anzahl der W für ein Oberflächenelement $r'^2 d\sigma'$ diesem proportional setzt. Da r'^2 konstant ist, fallen alle Integrale im Zähler, welche sich auf Kugelfunktionen beliebigen Ranges $>$ null beziehen, nach Gleichung (5) weg, und es bleibt in der That nur dasjenige übrig, welches sich aus dem konstanten Anfangsglied der grofsen Parenthese in (4) ergiebt.

Ebenso ist in der oben aufgestellten Entwicklung von g das Anfangsglied K_0' der Mittelwert aller Werte g für alle Punkte (φ', λ') oder (B', L'), wenn man sich diese auf einer Kugelfläche ausgebreitet denkt.

Im einzelnen schwanken W und g um ihre Mittelwerte herum nach Mafsgabe der von den Kugelfunktionen gegebenen Änderungen. Diese sind mit der Lage von P' periodisch veränderlich und zwar ist die Periode um so kleiner, je höher der Rang der Kugelfunktionen ist.

Wegen der Konvergenz der Reihen müssen im allgemeinen die Koefficienten (Amplituden) der Kugelfunktionen höheren Ranges kleiner sein als diejenigen der Kugelfunktionen niederen Ranges.

Einen Beweis des Satzes von der Entwickelbarkeit beliebiger Funktionen nach Kugelfunktionen gab *Dirichlet* 1837 in Crelles Journal für reine und angewandte Math. Bd. 17 S. 35—56; derselbe ist auch abgedruckt in seinen *Vorlesungen* S. 165—176. Über andere Beweise vergl. *Heyne, Theorie der Kugelfunktionen*, 2. Auflage, Berlin 1878, S. 432—441 und *H. Bruns* in Borchardts Journal für reine und angewandte Math. 1881, Bd. 90 S. 322—328.

Auf diese schwierigen, rein mathematischen Darstellungen können wir hier nicht eingehen. Um aber die Möglichkeit der Existenz des Satzes zu erkennen, reproduzieren wir eine Darstellung von *Dirichlet, Vorlesungen* S. 73 u. ff. (auch bei *Riemann,* auf S. 350 und 351 in *Schwere, Elektricität und Magnetismus,* bearbeitet v. *Hattendorff*), welche zwar nicht durchaus einwurfsfrei ist, aber auch von Dirichlet benutzt wurde, um auf den Satz hinzuweisen.

Wir denken uns demgemäfs auf einer Kugelfläche vom Radius r Masse ausgebreitet, so dafs im Punkte mit der Breite φ und Länge λ die Dichtigkeit ϑ, d. i. die Masse für die Flächeneinheit, der gegebenen Funktion $f(\varphi, \lambda)$ gleich ist. Dann hat man das Potential der Anziehung auf einen aufserhalb gelegenen Punkt (r', φ', λ') nach Gleichung (8) § 1 S. 51 gleich:

$$v = k^2 r \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n \, f(\varphi, \lambda) \cos\varphi \, d\varphi \,,$$

wobei zu beachten ist, dafs das Flächenelement auf der Kugel die Form $r^2 \cos\varphi \, d\lambda \, d\varphi$ annimmt und P_0 gleich 1 wird.

Für einen Punkt (r', φ', λ') innerhalb ergiebt sich dagegen nach (10) § 1 S. 52:

$$v = k^2 r \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n} \cdot \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n \, f(\varphi, \lambda) \cos\varphi \, d\varphi \,.$$

Nun läfst sich zeigen, dafs der 1. Differentialquotient von v nach r', wenn der angezogene Punkt von aufsen nach innen durch die Fläche hindurchgeht, den Sprung $-4\pi k^2 \vartheta$ macht, was wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r'}\right)_{r'=r+0} - \left(\frac{\partial v}{\partial r'}\right)_{r'=r-0} = -4\pi k^2 \vartheta.$$

Der Beweis wird ganz ebenso wie für den Satz (4) § 19 S. 30 geführt. Dies zeigt ein Blick auf die Formeln (7) § 16 S. 24 und den Anfang des § 18 S. 26.

Setzt man in die letzte Gleichung linker Hand im 1. Glied den ersten Wert von v, im 2. Glied den zweiten, und nimmt nach geschehener Differentiation $r' = r$, so folgt ϑ, d. i. die Dichtigkeit im Punkte (φ', λ') der Kugelfläche, gleich

$$f(\varphi', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n f(\varphi, \lambda) \cos\varphi \, d\varphi. \tag{7}$$

Die einzelnen Glieder rechter Hand sind aber für $n = 0, 1, 2 \ldots$ wegen $P_0 = 1$ und mit Rücksicht auf die, Seite 57 angegebnen Werte von P_1, P_2 u. s. f. genau von der Form der oben eingeführten Funktionen K'. Wir haben also $f(\varphi', \lambda')$ nach Kugelfunktionen entwickelt und zugleich eine neue Darstellung derselben gewonnen.

Bedenken erregt bei vorstehender Herleitung die Anwendung der beiden Entwicklungen von v auf den Fall $r' = r$, wofür sie als gültig nicht bewiesen sind. Die rein mathematischen Beweise befreien aufser hiervon auch von der Beschränkung, dafs die überall endliche Funktion $f(\varphi, \lambda)$ allenthalben stetig verläuft.

Die wichtigsten Sätze, die bei der Entwicklung nach Kugelfunktionen in betracht kommen, sind in § 28 dieses Kapitels zusammengestellt.

§ 8. **Der Einflufs des Luftmeeres auf das Potential W der Schwerkraft.** Nach Gesetzen der Hydrostatik ist im Zustande der relativen Ruhe jede das Luftmeer durchschneidende Niveaufläche zugleich eine Fläche gleichen Druckes und gleicher Dichtigkeit; letztere nimmt nach aufsen hin ab. Nehmen wir die Niveauflächen als Kugelflächen und sehen davon ab, dafs die Unregelmäfsigkeiten der physischen Erdoberfläche den Verlauf der Luftschichten unterbrechen, so läfst sich der Einflufs der Luft auf W in aller Strenge angeben: die Luft aufserhalb der durch den angezogenen Punkt P' führenden Niveaufläche zieht gar nicht an; die Luft innerhalb zieht so an, als ob ihre Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre.

Die Masse der Luft von der äufseren Grenze des Luftmeeres bis zur Niveaufläche mit dem Barometerstand b^m ist näherungsweise gleich

$$4\pi R^2 \,.\, 13{,}6 \,.\, b, \tag{1}$$

wenn als Masseneinheit 1 Kubikmeter Wasser angenommen wird. Zu diesem Werte gelangt man, wenn man den Radius aller Niveauflächen im Luftmeer konstant gleich R, dem mittlern Radius der physischen Erdoberfläche setzt und beachtet, dafs 13,6 das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist. Ferner ist die Masse der Luft von der Niveaufläche mit dem Barometerstand b^m bis zur physischen Erdoberfläche d. h. bis zur Meeresfläche, da von den Unregelmäfsigkeiten jener abgesehen werden soll, gleich

$$4\pi R^2 \,.\, 13{,}6\,(0{,}76 - b), \tag{2}$$

da b im Meeresniveau nahezu $0{,}76^m$ beträgt.

Die Masse der Erde innerhalb der physischen Erdoberfläche ist aber sehr nahe gleich

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \,.\, 5{,}6\,; \tag{3}$$

demnach ist die gesamte Luftmasse im Verhältnis zu dieser Erdmasse gleich dem kleinen Bruche

$$\frac{3 \cdot 13{,}6 \cdot 0{,}76}{5{,}6 R} \text{ d. i. rund } \frac{1}{1000000}. \tag{4}$$

Dagegen ist z. B. die Luftmasse zwischen den Niveauflächen mit $b = 0{,}76^m$ und $0{,}50^m$, ungefähr den Meereshöhen null und 3500^m entsprechend, mit Rücksicht auf (2) nur $\frac{1}{3000000}$ der Erdmasse.

Nur diese Luftmasse aber wird nach dem eingangs Gesagten auf Punkte zwischen null und 3500^m Meereshöhe verschieden wirken; für die Höhe null wirkt sie gar nicht, für 3500^m Höhe wirkt sie, als wäre sie im Erdschwerpunkt vereinigt. Jedoch ist die Differenz dieser Wirkungen eben nur $\frac{1}{3000000}$ der Schwerkraft.

Diese Betrachtungen dürften zur Genüge zeigen, daſs man bei der theoretischen Behandlung der Schwerkraft auf der physischen Erdoberfläche von der Wirkung der Luft absehen kann, da dieselbe wenigstens innerhalb der oben durchgeführten Annäherung so klein ist, daſs sie durch Fehler in der Beobachtung der Schwerkraft ganz und gar verdeckt wird. Es kommt hinzu, daſs in allen Fällen gröſserer Meereshöhe, wo die Anziehung der Luft überhaupt erst zu erwägen ist, bei der Reduktion der beobachteten Schwerkraft auf das Meeresniveau Ungenauigkeiten eintreten, die die Beobachtungsfehler weit übersteigen.

Nun sind allerdings unsere Betrachtungen insofern unrichtig, als sie die Luftschichten gleicher Dichtigkeit als konzentrische Kugelflächen voraussetzen und davon absehen, daſs die Erhebungen der physischen Erdoberfläche über das Meeresniveau die Luftschichten unterbrechen. Da jedoch die Kugelform jedenfalls eine Annäherung ist, so wird auch die oben ermittelte Gröſse des Unterschieds der Wirkungen einer Luftschicht zwischen zwei Flächen verschiedenen Barometerstandes auf einen Punkt auſserhalb und innerhalb einen Näherungswert des thatsächlichen Wirkungsunterschiedes vorstellen — dies bedarf wohl keines Beweises (geht übrigens aus den Newtonischen Betrachtungen über die Anziehung von Kugelschalen, Anm. S. 62, unschwer hervor). Was ferner den Einfluſs der Unterbrechungen der Luftschichten durch das Terrain anlangt, so ist leicht ersichtlich, daſs derselbe für Punkte der physischen Erdoberfläche nur eine Verminderung der oben berechneten Wirkungen erzeugt, weil auf hochgelegenen Terrainpunkten die anziehende Wirkung der vom Terrain verdrängten benachbarten Luftmassen fehlt (und diese nach Anm. S. 63 etwa halbsogroſs ist wie die Gesamtanziehung der betreffenden Schichten). Auſserdem kombiniert sich dieser Einfluſs mit der Anziehung des Terrains selbst, welche wegen der Unsicherheit der Dichtigkeits-

bestimmung nicht so genau angegeben werden kann, dafs dagegen die Anziehung der verdrängten Luftmassen eine Bedeutung gewinnt.

§ 9. **Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der Reihenentwicklung für W.** Indem wir nach dem Vorhergehenden keine weitere Rücksicht auf das Luftmeer nehmen, erstreckt sich der Gültigkeitsbereich des Ausdrucks (7) § 5 S. 60 für das Potential W der Schwerkraft von aufsen her bis zu einer zum Erdschwerpunkt konzentrischen Kugelfläche, welche die physische Erdoberfläche gerade noch völlig umschliefst. Wenden wir den Ausdruck auf einen Punkt P' innerhalb dieser Kugelfläche an, so verliert er in Strenge seine Brauchbarkeit, auch wenn dieser Punkt noch aufserhalb der physischen Erdoberfläche liegt, wie wir zunächst voraussetzen wollen. Dies folgt ohne weiteres aus der Betrachtung des Anteils eines Elementes dm der Masse der Erde am Potential W, wenn für dieses Element $r > r'$ ist; solche Elemente werden aber existieren, sobald der Punkt P' innerhalb der umschliefsenden Kugel liegt. Denn während Ausdruck (7) § 5 für $\frac{1}{e}$ die Formel (8) S. 51 voraussetzt, d. i.

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{1 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + \ldots\right\}, \tag{1}$$

mufs eigentlich für jedes Teilchen, dessen $r > r'$ ist, angewandt werden:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r} \left\{1 + \frac{r'}{r} P_1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2 + \ldots\right\}. \tag{2}$$

Die erste Reihe divergiert sogar für $r > r'$, weil dann $r : r' > 1$ ist und somit die Faktoren der Koefficienten P ins Unendliche wachsen. Für einzelne Fälle kann man sich von der Divergenz leicht überzeugen, z. B. für $\cos\gamma = -1$ (der Fall $+1$ kommt nicht vor) und für $\cos\gamma =$ null; (sie ergiebt sich aber auch allgemein aus dem Umstand, daſs mit Rücksicht auf die Anmerkung zu § 2 S. 53 bei unendlich anwachsendem Index n des Koefficienten P_n nach Formel (4) daselbst dieser Koefficient mit $\sqrt{1 : n}$ abnimmt, also weit langsamer abnimmt, als sein Faktor $(r : r')^n$ zunimmt, wie wenig auch $r : r'$ die Einheit überschreiten mag).

Trotz dieser Divergenz für einzelne Massenteile kann aber doch bei der Integration über einen Körper, abgesehen vom wirklichen Erdkörper, ein konvergentes Resultat entstehen, welches nun das Potential bis zur Oberfläche darstellt. Dies läfst sich z. B. für ein homogenes Rotationsellipsoid nachweisen (vergl. § 29 dieses Kapitels). Hiernach würde also Ausdruck (7) § 5 bis zur physischen Erdoberfläche gelten, falls die Masse zwischen dieser und einer ihr eingeschriebenen Kugelfläche als zu einem oder mehreren, zum Erdschwerpunkt konzentrischen und zur Rotationsaxe koaxialen, homogenen Rotationsellipsoiden gehörig betrachtet werden könnte. Ohne

weiter an einer solchen Annahme festzuhalten, ersehen wir doch soviel, dafs der betrachtete Ausdruck nur dann bis zur physischen Erdoberfläche Anwendung finden kann, wenn wir davon absehen, durch ihn das Potential streng darzustellen und uns vielmehr begnügen, ihn auf eine gewisse, nicht ohne weiteres angebbare, jedenfalls aber die Unregelmäfsigkeiten der Massenlagerung in der Nähe der physischen Erdoberfläche irgendwie ausgleichende, ideelle Massenlagerung zu beziehen — wobei wir zu der Nähe der physischen Erdoberfläche mindestens den ganzen Raum zwischen ihr und einer berührend eingeschriebenen, zum Erdschwerpunkt konzentrischen Kugelfläche zu rechnen haben. Da wir jedoch demnächst die Gültigkeit des betrachteten Potentialausdruckes sogar bis zur mathematischen Erdoberfläche annehmen werden, wollen wir uns sogleich die letztgenannte Kugelfläche der mathematischen Erdoberfläche eingeschrieben denken.

Welcher Fehler im Potential durch eine gewisse, zweckmäfsige Art der Idealisierung der Massenlagerung entsteht, wird im nächsten Kapitel eingehend untersucht werden. Wir können hier im voraus erwähnen, dafs diese Idealisierung lediglich eine Reduktion der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerkräfte erfordert, während die Flächen bestimmten Potentialwertes nur unerheblich durch dieselbe verändert werden. Die Formel für die Schwerebeschleunigung im Meeresniveau unter der geographischen Breite B:

$$g = 9{,}7806^m (1 + 0{,}0052 \sin^2 B), \qquad (3)$$

welche den Beobachtungen nach bisher angestellten Interpolationsrechnungen bis auf lokale und kontinentale Abweichungen von einem im Vergleiche zur Breitenvariation mäfsigen Betrage genügt, kann als auf die Massenidealisierung passend angesehen werden, doch werden wir im 3. Kap. die Konstanten der Formel etwas modifizieren, sowie es der eingeführten Idealisierung am besten entspricht.

In diesem Kapitel werden wir nunmehr die Zulässigkeit der Entwicklung (7) § 5 S. 60 bis zur mathematischen Erdoberfläche einfach voraussetzen. Unsere Aufgabe ist es jetzt, die Konstanten dieser Entwicklung aus der Formel (3) oder einer ähnlichen, den Schwerebeobachtungen entsprechenden, herzuleiten. Da der Ausdruck für g kein ganz strenger ist, so vereinfachen wir das Verfahren dahin, von der Entwicklung (7) § 5 versuchsweise nur die ersten Glieder anzusetzen, also eine starke Konvergenz dieser Entwicklung, entsprechend der starken Konvergenz der Reihe für g, anzunehmen.

Die vereinfachten Ausdrücke für W bezeichnen wir mit U. Bei der Ausführung der Rechnung ist von Wichtigkeit, dafs wir auf grund von astronomischen Messungen wissen, dafs die physische und die mathematische Erdoberfläche im wesentlichen Kugelform haben

und zwar konzentrisch zum Erdschwerpunkt (vergl. das 6. Kap. § 1). Hiernach entspricht in der Nähe der physischen Erdoberfläche einem konstanten r' ein nahezu konstanter Wert von W und also auch von U; es mufs daher das 1. Glied $\frac{Mk^2}{r}$ in dem Potentialausdruck (7) § 5 beträchtlich über die anderen, welche alle wesentlich periodisch sind, dominieren. Erst hierdurch wird es überhaupt möglich, aus U einen Ausdruck für g herzustellen, wie man sich leicht durch einen Versuch, ohne diese Kenntnis zu rechnen, überzeugt.

§ 10. **Erste Annäherung für das Potential W (aufserhalb).** Wir setzen versuchsweise

$$U = \frac{Mk^2}{r}\left\{\begin{aligned}&1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi)\\ &+ \frac{3(B-A)}{4Mr^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda\\ &+ \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi\end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Hierin sind die Koordinaten des angezogenen Punktes mit r, φ und λ bezeichnet. Ferner ist gesetzt

$$K = \frac{C - \frac{A+B}{2}}{M}. \tag{2}$$

M, A, B und C bedeuten die Masse bezw. die Hauptträgheitsmomente für die ideelle Massenverteilung. A, B und C sind also nicht mehr in Strenge Trägheitsmomente der Erde, aber doch sehr nahe. Es wird später zu untersuchen sein, inwieweit die ideelle Massenverteilung die Trägheitsmomente ändert und etwa auch den Schwerpunkt verschiebt.

Nennen wir die Flächen konstanten Wertes U *Niveausphäroide*, so zeigt die Formel, dafs die Niveausphäroide U zu ihren Äquatorebenen symmetrisch sind, weil nur $\sin^2\varphi$ und $\cos^2\varphi$ vorkommen.

Um nun aus U einen Ausdruck für die Beschleunigung g der Schwerkraft abzuleiten, sowie die Richtung derselben anzugeben, denken wir uns den angezogenen Punkt der Reihe nach in drei zu einander normalen Richtungen verschoben.

Zunächst in Richtung von r, also bei konstantem φ und λ, um ∂r; alsdann bei konstantem r und λ auf einem Kreise durch die z-Axe, also einem Meridiankreise der geozentrischen Kugel vom Radius r, um $r\partial\varphi$; endlich bei konstantem r und φ auf einem Kreise, dessen Ebene normal zur z-Axe steht, einem Parallelkreise, um $r\cos\varphi\,\partial\lambda$. Nach S. 9 § 6 sind die Ausdrücke

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial r},$$
$$U_2 = \frac{\partial U}{r\partial\varphi}, \tag{3}$$
$$U_3 = \frac{\partial U}{r\cos\varphi\cdot\partial\lambda}.$$

die Komponenten von g, welche in die Richtung der Verschiebungen ∂r, $r\partial\varphi$ und $r\cos\varphi\,\partial\lambda$ fallen. Da diese Richtungen normal aufeinanderstehen, haben wir

$$g^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2. \tag{4}$$

Ein Blick auf (1) zeigt, dafs U_2 und U_3 klein gegen U_1 sind, wenn die Parenthese rechter Hand daselbst nahezu den Wert eins hat, wie wir nach den Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen für die Nähe der physischen Erdoberfläche annehmen müssen. Es wird demnach aus der Gleichung

$$g^2 = U_1^2\left(1 + \frac{U_2^2 + U_3^2}{U_1^2}\right)$$

mit Rücksicht darauf, dafs g positiv gerechnet wird, U_1 sich aber negativ ergiebt, erhalten:

$$g = -U_1\left(1 + \frac{U_2^2 + U_3^2}{2U_1^2} + \ldots\right). \tag{5}$$

Vernachlässigen wir Gröfsen der Ordnung des Quadrates der zur Einheit in Formel (1) rechter Hand tretenden Glieder d. h., wie wir demnächst sehen werden, Gröfsen der Ordnung des Quadrates der Abplattung der Niveausphäroide, also Gröfsen 4. Ordnung, so folgt weiter:

$$g = -U_1 + \ldots = -\frac{\partial U}{\partial r} + \ldots \tag{6}$$

Dies führt zu der Formel:

$$g = \frac{Mk^2}{r^2}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{3K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) \\ + \frac{9(B-A)}{4Mr^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda \\ - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2}\cos^2\varphi + \ldots \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Da wir nun g für ein bestimmtes Niveausphäroid, dessen U gleich einer Konstanten W_0 ist, haben wollen, so ist in (7) r durch W_0 auszudrücken. Nach (1) ist aber

$$r = \frac{Mk^2}{W_0}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) \\ + \frac{3(B-A)}{4Mr^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda \\ + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Wird dieser Wert von r in (7) substituiert, so gelangt man mit gleichen Vernachlässigungen wie bisher zu der Formel:

$$g = \frac{W_0^2}{Mk^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) \\ + \frac{3(B-A)}{4Mr^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda \\ - \frac{2\omega^2 r^3}{Mk^2}\cos^2\varphi + \dots \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Die Genauigkeit ändert sich hierin nicht, wenn für r in der Parenthese irgend ein, dem betreffenden Niveausphäroid angehöriger Wert des Radiusvektors substituiert wird. Außerdem können wir zufolge einer leicht ersichtlichen Transformation setzen:

$$g = \frac{W_0^2}{Mk^2}\left(1 + \frac{K}{2r^2} - \frac{2\omega^2 r^3}{Mk^2} + \dots\right) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{2\omega^2 r^3}{Mk^2} - \frac{3K}{2r^2}\right)\sin^2\varphi \\ + \frac{3(B-A)}{4Mr^2}\cos^2\varphi\cos 2\lambda + \dots \end{array} \right\} \tag{10}$$

und hierin endlich B, die geographische Breite, mit der geozentrischen Breite φ vertauschen. Denn man erkennt ohne weiteres, dafs die Richtung der Resultante g von derjenigen der grofsen Komponente U_1 nur um eine Gröfse der Ordnung $\sqrt{U_2^2 + U_3^2} : U_1$ abweicht und dafs die Unterschiede von φ und B, sowie von $\sin^2\varphi$ und $\sin^2 B$ die gleiche Ordnung besitzen.

Vergleichen wir die Formel (10), in welcher also B für φ gesetzt zu denken ist, (wonach aber beachtet werden mufs, dafs in der Differenz $(B - A)$ der Buchstabe B *nicht* die Bedeutung der geographischen Breite hat), mit dem Ergebnis der auf das Meeresniveau reduzierten Schwerebeobachtungen

$$g = 9{,}7806^m\,(1 + 0{,}0052\,\sin^2 B)\,, \tag{11}$$

so zeigt sich, dafs der Ausdruck U in der That ausreicht, um dieses Ergebnis bis auf kleine, der Ordnung der lokalen und kontinentalen Abweichungen in g völlig entsprechende Gröfsen darzustellen. Es erübrigt nur, die in U auftretenden Konstanten durch diejenigen von (11) darzustellen.

Als erstes Resultat erweist sich die Relation $(B - A) =$ null, oder

$$A = B\,.$$

Hiernach sind die Trägheitsmomente für die x- und y-Axe, d. h. für die beiden Äquatoraxen, einander gleich. Für die Erde hat diese Gleichung allerdings nur die Bedeutung einer Näherungsrelation, da die Formel (11) keine ganz strenge ist und nach früheren Bemerkungen A und B nicht vollständig den Trägheitsmomenten für die beiden in der Äquatorebene liegenden Hauptaxen zu entsprechen brauchen. Jedenfalls sind aber *die beiden Trägheitsmomente der Erde für die beiden Aequator-*

Hauptaxen in erster Annäherung einander gleich. (Damit sind nach den Lehren der Mechanik überhaupt die Trägheitsmomente für beliebige Äquatoraxen in erster Annäherung einander gleich.)

Wird in (1) die Differenz $(B - A)$ gleich null gesetzt, so verschwindet die geozentrische Länge λ aus dem Ausdruck für U, d. h. *die Niveausphäroide, somit auch die Niveauflächen selbst, sind in erster Annäherung zur Äquatorebene symmetrische Rotationsflächen mit der Erdaxe als Drehaxe.*

§ 11. Fortsetzung: Theorem von Clairaut. Wir können jetzt als erste Annäherung für das Potential W (aufserhalb) setzen:

$$U = \frac{Mk^2}{r}\left\{1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi\right\}. \qquad (1)$$

Hieraus folgt, wenn in der Klammer für r der Äquatorialhalbmesser a eines Niveausphäroids $U = W_0$ gesetzt wird:

$$r = \frac{Mk^2}{W_0}\left\{1 + \frac{K}{2a^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi + \ldots\right\}, \qquad (2)$$

oder

$$r = \frac{Mk^2}{W_0}\left(1 + \frac{K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} + \ldots\right)\left\{1 - \left(\frac{3K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2}\right)\sin^2\varphi + \ldots\right\}; \qquad (2^*)$$

ferner ergiebt sich mittelst (7) und (10) des vorigen Paragraphen:

$$g = \frac{Mk^2}{r^2}\left\{1 + \frac{3K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2}\cos^2\varphi + \ldots\right\} \qquad (3)$$

und

$$g = \frac{W_0^2}{Mk^2}\left(1 + \frac{K}{2a^2} - \frac{2\omega^2 a^3}{Mk^2} + \ldots\right)\left\{1 + \left(\frac{2\omega^2 a^3}{Mk^2} - \frac{3K}{2a^2}\right)\sin^2\varphi + \ldots\right\}. (4)$$

Die erstere Formel giebt g allgemein im Punkte (r, φ), die letztere im Punkte φ eines Niveausphäroids $U = W_0$. In den Parenthesen von (3) und (4) sind, ebenso wie in (2) und (2*), Glieder von der Ordnung des Quadrates der Gröfsen $\omega^2 a^3 : Mk^2$ und $K : a^2$ vernachlässigt, d. h. Gröfsen der vierten Ordnung, wenn jenen die zweite Ordnung zugeschrieben wird.

Es sei nun für ein Niveausphäroid $U = W_0$ durch Beobachtungen gegeben:

$$g = g_a(1 + \mathfrak{b}\sin^2 B), \qquad (5)$$

so ist, wenn dem Koefficienten $\mathfrak{b}$ die zweite Ordnung beigelegt und von Gliedern vierter Ordnung in der Parenthese abgesehen wird:

$$g = g_a(1 + \mathfrak{b}\sin^2\varphi + \ldots). \qquad (5^*)$$

Schreiben wir aufserdem für den Radiusvektor r, ebenfalls abgesehen von Gliedern vierter Ordnung:

$$r = a(1 - \mathfrak{a}\sin^2\varphi + \ldots), \qquad (6)$$

so zeigt die Vergleichung mit (4) bezw. (2*), dafs

$$\mathfrak{b} = \frac{2\omega^2 a^3}{Mk^2} - \frac{3K}{2a^2} + \dots, \tag{7}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} + \frac{3K}{2a^2} + \dots. \tag{8}$$

Die Vergleichung von (5*) und (3) zeigt aufserdem, dafs bis auf Glieder zweiter Ordnung in der Parenthese

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2}(1 + \dots). \tag{9}$$

Mit Benutzung dessen erhalten wir aus (7) zur *Bestimmung von K* die bis auf Glieder vierter Ordnung genaue Relation:

$$\frac{3K}{2a^2} = 2\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \dots \tag{10}$$

und zur *Bestimmung von* $\mathfrak{a}$ aus (7) + (8) die ebenso genaue Relation:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \frac{5}{2}\mathfrak{c} + \dots, \tag{11}$$

wobei der Gröfse $\mathfrak{c}$ die nachstehende Bedeutung beigelegt ist:

$$\mathfrak{c} = \frac{\omega^2 a}{g_a}. \tag{12}$$

Bedenkt man, dafs $\omega^2 a$ die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator des Niveausphäroids vorstellt und dafs deren Verhältnis zur Schwerebeschleunigung g_a daselbst, wie wir weiterhin ausführlich berechnen werden, für die Meeresfläche nahe gleich $^1/_{289}$ ist, berücksichtigt man ferner den der Meeresfläche entsprechenden Wert von $\mathfrak{b}$ gleich 0,0052, so sind nach (10) und (11) $K : a^2$ und $\mathfrak{a}$ in der That für alle Niveausphäroide (aufserhalb) *in der Nähe* der physischen Erdoberfläche Gröfsen zweiter Ordnung und es ist damit die angegebene Gröfsenordnung der vernachlässigten Glieder in den Formeln dieses Paragraphen bestätigt.

Die Gröfse $\mathfrak{a}$ ist nun bis auf Glieder vierter Ordnung zufolge (6) die Abplattung des Niveausphäroids $U = W_0$; die Formel (11) giebt daher ein Mittel zur Berechnung der Abplattung des der Meeresfläche zugehörigen Niveausphäroids und also auch in erster Annäherung der Abplattung der Meeresfläche selbst aus der den Schwerebeobachtungen im Meeresniveau entsprechenden Formel. In Worten hat man zufolge dieser Formel:

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Die Abplattung}\\ \textit{der Meeresfläche}\end{matrix}\right\} + \frac{\textit{Zunahme der Schwerkraft vom Äquator bis zum Pol}}{\textit{Schwerkraft am Äquator}}$$

$$= \frac{5}{2}\,\frac{\textit{Zentrifugalkraft am Äquator}}{\textit{Schwerkraft am Äquator}}.$$

Dieser (keineswegs ganz strenge) Satz wird nach seinem Entdecker *das Theorem von Clairaut* benannt. Der Satz wurde 1738 veröffentlicht. Über die Art seiner Ableitung durch den Erfinder vergl. § 26 dieses Kapitels.

§ 12. Theorem von Clairaut für ein Niveausphäroid mit dem Potentialausdruck

$$U = \frac{Mk^2}{r}\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi \\ + \frac{D}{r^4}\left(\sin^4\varphi - \frac{6}{7}\sin^2\varphi + \frac{3}{35}\right) \end{array}\right\}. \tag{1}$$

Entsprechend dem Umstande, dafs bereits von einigen versucht worden ist, in der Formel für die Beschleunigung g im Meeresniveau ein Glied mit der vierten Potenz des Sinus der geographischen Breite aufzunehmen, haben wir dem Ausdruck für U in § 10 noch das von der geozentrischen Länge freie Glied der Kugelfunktion vierten Ranges beigefügt, vergl. (4) S. 66 und K_4' S. 65; für $p_{4.0}$ ist D geschrieben. Die Niveausphäroide verlieren hierdurch ihren Charakter als zur Äquatorebene symmetrische Rotationssphäroide nicht.

Der Koefficient D ist aus den Schwerebeobachtungen abzuleiten. Wir nehmen einstweilen an, dafs $\frac{D}{r^4}$ die vierte Ordnung hat, während wie bekannt $\frac{K}{r^2}$ und $\frac{\omega^2 r^3}{Mk^2}$ für die Nähe der physischen Erdoberfläche die zweite Ordnung besitzen.

Wir könnten nun so vorgehen, dafs aus (1) zunächst die Polargleichung der Meridiankurve abgeleitet und alsdann der Ausdruck für g aufgestellt würde. Anstatt aber hierauf als letzte Folgerung das Theorem von *Clairaut* zu entwickeln, ziehen wir es vor, mit diesem zu beginnen. Es tritt dadurch in einfacherer Entwicklung und von vornherein in eleganterer Form auf.

Wenden wir (1) auf Äquator und Pol an mit $r = a$, $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ bezw. $r = b$, $\sin\varphi = 1$, $\cos\varphi = 0$, so giebt die Gleichsetzung beider Werte von U ohne Schwierigkeit:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{K}{2a^3} + \frac{K}{b^3} + \frac{\omega^2 a^2}{2Mk^2} + \frac{3}{35}\frac{D}{a^5} - \frac{8}{35}\frac{D}{b^5}.$$

Hierin setzen wir $b = a(1 - \mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}$ die Abplattung bezeichnet, und erhalten mit Vernachlässigung von Gröfsen sechster Ordnung:

$$\mathfrak{a}(1 + \mathfrak{a}) = \frac{3K}{2a^2}(1 + 2\mathfrak{a}) + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} - \frac{D}{7a^4} + Gl_6. \tag{2}$$

Differenzieren wir U nach r, so giebt dies, abgesehen vom Vorzeichen, für Äquator und Pol sofort die Beschleunigung g selbst, weil an diesen Stellen der Radiusvektor die Richtung der Normale annimmt. Es wird bezw.:

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2}\left(1 + \frac{3K}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + \frac{3D}{7a^4}\right) \tag{3}$$

$$g_p = \frac{Mk^2}{b^2}\left(1 - \frac{3K}{b^2} + \frac{8D}{7b^4}\right)$$

oder

$$g_p = \frac{Mk^2}{a^2}\left(1 + 2\mathfrak{a} + 3\mathfrak{a}^2 - \frac{3K}{a^2}[1 + 4\mathfrak{a}] + \frac{8D}{7a^4} + Gl_6\right).$$

Man hat daher

$$\frac{g_p - g_a}{Mk^2 : a^2} = \mathfrak{a}(2 + 3\mathfrak{a}) - \frac{3K}{2a^2}(3 + 8\mathfrak{a}) + \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + \frac{5D}{7a^4} + Gl_6 . \quad (4)$$

Aus (4) + 3 × (2) folgt ohne weiteres:

$$\mathfrak{a} + \frac{g_p - g_a}{Mk^2 : a^2} = \frac{5}{2}\,\frac{\omega^2 a}{Mk^2 : a^2} - \frac{3K}{a^2}\,\mathfrak{a} + \frac{2D}{7a^4} + Gl_6 .$$

Dividieren wir diese Gleichung mit $1 + \frac{3K}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2}$, so geht sie mit Rücksicht auf (3) über in

$$\mathfrak{a} + \frac{g_p - g_a}{g_a} = \frac{5}{2}\,\frac{\omega^2 a}{g_a} - \mathfrak{a}\left(\frac{3K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2}\right) + \frac{2D}{7a^4} + Gl_6 ,$$

oder nach Elimination von K mittelst (2) und unter Einführung abkürzender Bezeichnungen:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \frac{5}{2}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}\right) + \frac{2}{7}\,\mathfrak{d} + Gl_6 . \quad (5)$$

Hierin haben die Gröfsen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ nachstehende Bedeutung:

$$\mathfrak{a} = \frac{a - b}{a} = \textit{Abplattung},$$

$$\mathfrak{b} = \frac{g_p - g_a}{g_a} = \frac{\textit{Zunahme der Schwerkraft vom Äquator bis zum Pol}}{\textit{Schwerkraft am Äquator}}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{\omega^2 a}{g_a} = \frac{\textit{Zentrifugalkraft am Äquator}}{\textit{Schwerkraft am Äquator}},$$

$$\mathfrak{d} = \frac{D}{a^4},$$

wobei D noch der Bestimmung aus der Formel für die Schwerkraft im Meeresniveau bedarf.

Aus (5) und (2) kann man durch Elimination von $\mathfrak{a}$ noch eine Gleichung für $K : a^2$ ableiten, die wir mit Benutzung der Relation

$$\frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} = \mathfrak{c}\,\frac{g_a a^2}{Mk^2} = \mathfrak{c}\left(1 + \frac{3K}{2a^2} - \mathfrak{c} + Gl_4\right) \quad (6)$$

zunächst in der Form

$$\frac{3K}{2a^2}\left(1 + 2\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{c}}{2}\right) = 2\mathfrak{c} - \mathfrak{b} - \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{2} + \frac{\mathfrak{c}^2}{2} + \frac{3}{7}\,\mathfrak{d} + Gl_6$$

erhalten. Hieraus folgt mit Benutzung der Relation

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \frac{5}{2}\,\mathfrak{c} + Gl_4$$

zum Zwecke der Elimination von $\mathfrak{b}$ aus den Gliedern vierter Ordnung (was die Formel vereinfacht):

$$\frac{3K}{2a^2} = 2\mathfrak{c} - \mathfrak{b} - 2\mathfrak{a}^2 + \frac{3}{4}\mathfrak{c}^2 + \frac{3}{7}\mathfrak{d} + Gl_6 . \tag{7}$$

Zugleich geht (6) über in:

$$\frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} = \mathfrak{c}(1 + \mathfrak{c} - \mathfrak{b} + Gl_4) , \tag{8}$$

eine Gleichung, der wir zur Reduktion bei Entwicklungen weiterhin bedürfen.

§ 13. Polargleichung der Meridiankurve für das Niveausphäroid $U = W_0$, wobei

$$U = \frac{Mk^2}{r}\left\{1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3s^2) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}(1 - s^2) + \frac{D}{r^4}\left(s^4 - \frac{6}{7}s^2 + \frac{3}{35}\right)\right\} \cdot \tag{1}$$

Hierin bezeichnet s den $\sin\varphi$. Setzen wir nun an:

$$r = a(1 - \mathfrak{a}_2 s^2 + \mathfrak{a}_4 s^4 - \ldots), \tag{2}$$

so ist die Abplattung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_4 + \ldots . \tag{3}$$

Um $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \ldots$ zu bestimmen, führen wir in (1) für r den Ausdruck (2) ein, wobei es vorteilhaft ist, in (1) zuvor das r vor der Klammer rechts nach links zu bringen. Es folgt mit Rücksicht darauf, dafs $\mathfrak{a}_4$ eine Gröfse vierter Ordnung sein mufs:

$$\frac{W_0 a}{Mk^2}(1 - \mathfrak{a}_2 s^2 + \mathfrak{a}_4 s^4 - \ldots) = \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{K}{2a^2}(1 - 3s^2)(1 + 2\mathfrak{a}_2 s^2) \\ + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2}(1 - s^2)(1 - 3\mathfrak{a}_2 s^2) \\ + \frac{D}{a^4}\left(s^4 - \frac{6}{7}s^2 + \frac{3}{35}\right) + Gl_6 \end{array}\right\} \cdot \tag{4}$$

Indem wir die Faktoren gleich hoher Potenzen von s^2 linker und rechter Hand nach Ordnung der rechten Seite einander gleich setzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{W_0 a}{Mk^2} &= 1 + \frac{K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} + \frac{3}{35}\frac{D}{a^4} + Gl_6 , \\ \mathfrak{a}_2 \frac{W_0 a}{Mk^2} &= \frac{K}{a^2}\left(\frac{3}{2} - \mathfrak{a}_2\right) + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2}(1 + 3\mathfrak{a}_2) + \frac{6}{7}\frac{D}{a^4} + Gl_6 , \\ \mathfrak{a}_4 \frac{W_0 a}{Mk^2} &= \mathfrak{a}_2\left(\frac{3\omega^2 a^3}{2Mk^2} - \frac{3K}{a^2}\right) + \frac{D}{a^4} + Gl_6 . \end{aligned} \tag{5}$$

Da wir $\mathfrak{a}$ im vorigen Paragraphen bereits entwickelt haben, so ist von diesen Gleichungen nur die erste und dritte noch zu benutzen. Sie geben:

$$\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}_2\left(\frac{3\omega^2 a^3}{2Mk^2} - \frac{3K}{a^2}\right) + \frac{D}{a^4} + Gl_6$$

oder unter Elimination von K mittelst (2) des vorigen Paragraphen,

sowie unter Substitution von $\mathfrak{a}$ für $\mathfrak{a}_2$, von $\mathfrak{c}$ für $\omega^2 a^3 : Mk^2$ und von $\mathfrak{d}$ für $D : a^4$,

$$\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}\left(\frac{5}{2}\,\mathfrak{c} - 2\mathfrak{a}\right) + \mathfrak{d} + Gl_6\,, \tag{6}$$

oder endlich nach (5) des vorigen Paragraphen mittelst Elimination von $\mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{d} + Gl_6\,. \tag{6*}$$

Die Gleichung der *Meridiankurve des Niveausphäroids* wird hiernach mit Vernachlässigung von Gliedern sechster Ordnung die folgende:

$$r = a\left\{1 - [\mathfrak{a}(1+\mathfrak{b}-\mathfrak{a})+\mathfrak{d}]\sin^2\varphi + [\mathfrak{a}(\mathfrak{b}-\mathfrak{a})+\mathfrak{d}]\sin^4\varphi - \ldots\right\}. \tag{7}$$

Hierzu giebt die Gleichung (5) des vorigen Paragraphen die Abplattung $\mathfrak{a}$. Ferner stellt die erste Gleichung (5) dieses Paragraphen die Beziehung zwischen a und W_0 her, wobei Mk^2 mittelst (3) des vorigen Paragraphen eliminiert werden kann. Es hat aber die Entwicklung dieser Beziehung hier weiter keinen Wert.

Für eine *Ellipse* mit dem Äquatorialhalbmesser a und der Abplattung $\mathfrak{a}$ können wir nach Bd. 1 S. 60 (6) und mit Rücksicht auf die Bedeutung von δ nach Bd. 1 S. 38 o. ansetzen:

$$r = a\left\{1 - \mathfrak{a}\left(1 + \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}\right)\sin^2\varphi + \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}^2\sin^4\varphi - \ldots\right\}. \tag{8}$$

Verstehen wir unter r_U den Radiusvektor des Sphäroids, unter r_E den des Ellipsoids, so ist

$$r_U - r_E = a\left\{\left[\mathfrak{a}\left(\frac{5}{2}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\right) - \mathfrak{d}\right]\cdot\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi + Gl_6\right\}. \tag{9}$$

Für $\sin^2 2\varphi = 1$ d. h. $\varphi = \pm 45^0$ erlangt $r_U - r_E$ seinen Maximalwert und zwar wird

$$(r_U - r_E)_{max} = \frac{1}{4}\,a\left\{\mathfrak{a}\left(\frac{5}{2}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\right) - \mathfrak{d} + Gl_6\right\}. \tag{10}$$

§. 14. Formeln für die Beschleunigung g der Schwerkraft in Bezug auf das Niveausphäroid $U = W_0$; Bestimmung von $\mathfrak{d}$.

Wenn wir denselben Ausdruck für U wie in den vorigen beiden Paragraphen zu grunde legen, so läfst sich für g in Bezug auf alle Punkte des Niveausphäroids $U = W_0$ ein Ausdruck von der Form

$$g = g_a(1 + \mathfrak{b}_2\sin^2 B + \mathfrak{b}_4\sin^4 B + Gl_6) \tag{1}$$

herstellen, worin $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{b}_4$ bezw. die zweite und vierte Ordnung haben, falls $D : r^4$, wie angegeben, die vierte Ordnung hat. Mit Rücksicht darauf, dafs wir bereits mit $\mathfrak{b}$ den Quotienten $(g_p - g_a) : g_a$ bezeichnet haben, ist jetzt zu setzen:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_4 + \ldots\,. \tag{2}$$

$\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{b}_4$ denken wir uns aus den Beobachtungen der Schwerkraft auf der betreffenden Niveaufläche abgeleitet. Um nun $\mathfrak{b}_2$ und

$\mathfrak{b}_4$ mit den Konstanten des Niveausphäroids in Beziehung zu setzen, führen wir zunächst in den Ausdruck (1) für B die geozentrische Breite φ ein. Wir können dabei entweder von den drei Komponenten U_1, U_2 und U_3 der Beschleunigung g ausgehen wie in § 10 S. 72, oder einfacher, da bereits festgestellt ist, dafs die Meridiankurve der Fläche $U = W_0$ bis auf Gröfsen vierter Ordnung mit der Ellipse gleicher Abplattung zusammenfällt, die bekannte Relation für die Ellipse benutzen.

Nach Bd. 1 S. 60 (4) ist, wenn wir für m einfach $\mathfrak{a}$ schreiben, sowie für $\sin 2B$ setzen $\sin 2\varphi$:

$$B - \varphi = \mathfrak{a} \sin 2\varphi + Gl_4 \,. \tag{3}$$

Diese Formel gilt auch sofort fürs Niveausphäroid $U = W_0$. Zufolge derselben wird nach *Taylors* Satz:

$$\sin^2 B = \sin^2 \varphi + 4\mathfrak{a} \sin^2\varphi \cos^2\varphi + Gl_4;$$

hiermit sowie mittelst (2) geht (1) nach naheliegenden Reduktionen über in die Gestalt:

$$g = g_a \left\{ 1 + (\mathfrak{b} + 4\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}_4) \sin^2\varphi - (4\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}_4) \sin^4\varphi + Gl_6 \right\} . \tag{4}$$

Wir haben nun einen zweiten Ausdruck für g aus U abzuleiten. Hierbei gilt im allgemeinen Formel (5) § 10 S. 73, doch ist U_3 gleich null, da der Ausdruck für U λ nicht enthält. Demnach wird

$$g = - U_1 \left(1 + \frac{U_2^2}{2 U_1^2} + \dots \right) . \tag{5}$$

Differenzieren wir aber den Ausdruck (1) für U S. 79 § 13 nach r, so folgt unter Beibehaltung der Abkürzung s für $\sin \varphi$:

$$U_1 = - \frac{Mk^2}{r^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{3K}{2r^2}(1 - 3s^2) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2}(1 - s^2) \\ \quad + \frac{5D}{r^4}\left(s^4 - \frac{6}{7}s^2 + \frac{3}{35}\right) \end{array} \right\};$$

ferner ist

$$U_2 = \frac{\partial U}{r \partial \varphi} = - \frac{Mk^2}{r^2} \left\{ \left(\frac{3K}{r^2} + \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2} \right) \sin\varphi \cos\varphi + Gl_4 \right\} .$$

Mit Rücksicht auf (5) wird daher:

$$g = \frac{Mk^2}{r^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{3K}{2r^2}(1 - 3s^2) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2}(1 - s^2) \\ \quad + \frac{5D}{r^4}\left(s^4 - \frac{6}{7}s^2 + \frac{3}{35}\right) \\ \quad + \frac{1}{2}\left(\frac{3K}{r^2} + \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2}\right)^2 (s^2 - s^4) + Gl_6 \end{array} \right\} . \tag{6}$$

Um nun g für Punkte des bestimmten Niveausphäroids $U = W_0$ zu erhalten, eliminieren wir r mittelst des Ausdrucks für U, oder einfacher mittelst der Polargleichung der Meridiankurve (7) § 13 S. 80. Es ist darnach im Faktor vor der Parenthese rechter Hand in (6) zu setzen:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\left\{1 + 2[\mathfrak{a}(1+\mathfrak{b}-\mathfrak{a}) + \mathfrak{d}]\,s^2 - [\mathfrak{a}(2\mathfrak{b} - 5\mathfrak{a}) + 2\mathfrak{d}]\,s^4 + Gl_6\right\};$$

dagegen reicht es für die Glieder zweiter Ordnung der Parenthese aus,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\left(1 + 2\mathfrak{a}s^2 + Gl_4\right)$$

und

$$r^3 = a^3\,(1 - 3\mathfrak{a}s^2 + Gl_4)$$

einzuführen, während in den Gliedern vierter Ordnung für r einfach a geschrieben werden darf. Aufserdem eliminieren wir $3K : 2a^2$ und $\omega^2 a^3 : Mk^2$ mittelst der Formeln (7) und (8) § 12 S. 79 und nehmen entsprechend im letzten Gliede vierter Ordnung der Parenthese nach (2) § 12 S. 77

$$\frac{3K}{a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} = 2\mathfrak{a} + Gl_4\,;$$

es geht alsdann die Gleichung (6), gehörig zusammengezogen mit Vernachlässigung von Gliedern sechster Ordnung über in:

$$g = \frac{Mk^2}{a^2}\left(1 + \frac{3K}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + \frac{3}{7}\mathfrak{d}\right)\left\{\begin{array}{l} 1 + [\mathfrak{b} + 7\mathfrak{a}^2 - 3\mathfrak{d}]\sin^2\varphi \\ \quad - [7\mathfrak{a}^2 - 3\mathfrak{d}]\sin^4\varphi + \ldots \end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Strenggenommen hätte es genügt, den Faktor von $\sin^4\varphi$ herzustellen, da er am bequemsten die neue Beziehung liefert, welcher wir bedürfen, um $\mathfrak{d}$ mit den Koefficienten der aus den Schwerebeobachtungen folgenden Formel (4) für g zu vergleichen. In der That giebt die Gleichung (7) weiter nichts Neues als diese Beziehung; sie giebt nämlich durch Vergleichung mit (4) g_a genau so wie Formel (3) § 12 S. 77, ferner aber

$$4\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}_4 = 7\mathfrak{a}^2 - 3\mathfrak{d} + Gl_6 \qquad (8)$$

sowohl aus der Vergleichung der Koefficienten von $\sin^2\varphi$ als derjenigen von $\sin^4\varphi$. Der Grund hiervon ist, dafs wir durch das *Clairaut*sche Theorem in der Gestalt von Gleichung (5) § 12 S. 78 bereits $\mathfrak{a}$ mittelst $\mathfrak{b}$ ausgedrückt haben und diese Relation von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bei der Umformung von (6) oben benutzten. Die doppelte Bestimmung von (8) ist eine Kontrolle der Rechnung.

Wir erhalten jetzt aus (8):

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{3}\,(7\mathfrak{a}^2 - 4\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_4) + Gl_6\,, \qquad (9)$$

und erkennen, dafs $\mathfrak{d}$, wie anfangs in § 12 vorausgesetzt, die vierte Ordnung hat, sobald $\mathfrak{b}_4$ diese Ordnung besitzt.

§ 15. **Zusammenstellung der Formeln für ein Niveausphäroid** *U*. Dieselben gelten zufolge der Entwicklung nur für die Nähe der physischen Erdoberfläche, haben aber auch nur hier Interesse.

Gegeben sei die aus den Beobachtungen auf einer Niveaufläche abgeleitete Formel

$$g = g_a\,(1 + \mathfrak{b}_2 \sin^2 B + \mathfrak{b}_4 \sin^4 B) \tag{1}$$

für die Beschleunigung der Schwere auf dem zugehörigen Niveausphäroid U; $\mathfrak{b}_2$ habe die zweite Ordnung und $\mathfrak{b}_4$ die vierte Ordnung. Dann folgt unter Zugrundelegung des Ausdrucks U in § 12 (1), wenn $\mathfrak{c}$ wie bisher das Verhältnis der Zentrifugalbeschleunigung am Äquator zu g_a bedeutet und

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_4$$

gesetzt wird, für die Meridiankurve des Niveausphäroids:

$$r = a\left\{1 - [\mathfrak{a}(1 + \mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{d}]\sin^2\varphi + [\mathfrak{a}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{d}]\sin^4\varphi + \ldots\right\}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{5}{2}\mathfrak{c} - \mathfrak{b} - \mathfrak{a}\left(\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}\right) + \frac{2}{7}\mathfrak{d} + \ldots, \tag{3}$$

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{3}(7\mathfrak{a}^2 - 4\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_4) + \ldots; \tag{4}$$

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ finden sich aus den beiden letzten Gleichungen leicht durch successive Annäherung.

Die maximale Erhebung des Niveausphäroids über das Rotationsellipsoid gleicher Abplattung ist gleich

$$\frac{1}{4}a\left(\mathfrak{a}\left[\frac{5}{2}\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\right] - \mathfrak{d}\right) + \ldots,$$

oder mit Rücksicht auf (4) gleich

$$\frac{1}{24}a\left(\mathfrak{a}[\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b}] - 2\mathfrak{b}_4\right) + \ldots. \tag{5}$$

Behufs einer späteren Verwendung notieren wir noch folgende Formeln. Aus (2) § 12 S. 77 folgt mit Rücksicht auf (8) S. 79 ohne Schwierigkeit:

$$\mathfrak{a} = \frac{3K}{2a^2}(1 + \mathfrak{a}) + \frac{\mathfrak{c}}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\mathfrak{c}\right) - \frac{1}{7}\mathfrak{d} + \ldots, \tag{6}$$

eine Gleichung, welche $\mathfrak{a}$ giebt, falls K irgendwie bekannt wird.

Ferner folgt aus (3) S. 77 mit Benutzung von (7) und (8) in demselben Paragraphen S. 79:

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2}\left(1 + \mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{b} - \frac{1}{4}\mathfrak{c}^2 - 2\mathfrak{a}^2 + \frac{6}{7}\mathfrak{d} + \ldots\right),$$

und hieraus mit Rücksicht auf (4):

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2}\left(1 + \mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{b} - \frac{1}{4}\mathfrak{c}^2 - \frac{8}{7}\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \frac{2}{7}\mathfrak{b}_4 + \ldots\right), \tag{7}$$

welche Gleichung einen Schlufs auf Mk^2 gestattet.

§ 16. Numerische Anwendung der Formeln auf das Niveausphäroid des Geoids. Legen wir die, älteren Interpolationsrechnungen entsprechende Formel

$$g = 9{,}7806^{m}\,(1 + 0{,}0052 \sin^2 B) \tag{1}$$

für das Meeresniveau zu grunde, so ist

$$g_a = 9{,}7806^m\,, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 = 0{,}0052\,, \quad \mathfrak{b}_4 = 0\,.$$

Wir haben nun zunächst $\mathfrak{c}$ zu ermitteln. Bezeichnet a_0 den Äquatorialhalbmesser des Niveausphäroids des Geoids, so ist:

$$\mathfrak{c} = \frac{\omega^2 a_0}{g_a}\,.$$

Es bezieht sich aber der numerische Wert (1) von g auf eine Sekunde mittlere Zeit, wir müssen somit auch die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation auf dieses Zeitintervall beziehen. Da die Dauer einer Rotation der Erde um ihre Axe aufserordentlich nahe einen Sterntag beträgt und dieser (nicht 24 Stunden = 86400 Sekunden mittlere Zeit wie ein mittlerer Tag, sondern) 86164,09 Sekunden mittlere Zeit hat, so wird

$$\omega = \frac{2\pi}{86164{,}09}\,; \quad \log\frac{\omega^2}{g_a} = 0{,}73534 - 10\,.$$

Setzen wir mit *Bessel* $a_0 = 6377397^m$ (Bd. 1. S. 38), so folgt

$$\mathfrak{c} = 0{,}0034672 = \frac{1}{288{,}41}\,. \tag{2*}$$

Dagegen folgt mit *Kleins* Wert $a_0 = 6378740^m$ (Bd. 1. S. 18)

$$\mathfrak{c} = 0{,}0034680 = \frac{1}{288{,}35}\,. \tag{2}$$

Wir werden weiterhin aus g_a und der Mondparallaxe einen Wert für a ableiten, der hinlänglich mit dem aus Gradmessungen folgenden harmoniert, dergestalt, dafs es jedenfalls ausreichend erscheint, bei der Angabe (2*) für $\mathfrak{c}$ stehen zu bleiben, ohne mehr als etwa eine Einheit der sechsten Decimale Fehler in $\mathfrak{c}$ befürchten zu müssen.

Nach dem einfachen Theorem von *Clairaut* folgt jetzt weiter

$$\mathfrak{a} = \frac{5}{2}\cdot 0{,}0034672 - 0{,}0052 = 0{,}0034680$$

oder

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{288{,}35}\,. \tag{3}$$

Ferner ist nach (4) des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{3}\cdot 0{,}003468\,(7\,.\,0{,}003468 - 4\,.\,0{,}0052)$$

also

$$\mathfrak{d} = 0{,}0000040\,. \tag{4}$$

Damit wird genauer nach (3) des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{a} = 0{,}0034680\left(1 - \frac{3}{2}\cdot 0{,}003468\right) + \frac{2}{7}\cdot 0{,}0000040$$

oder

$$\mathfrak{a} = 0{,}0034511 = \frac{1}{289{,}76}\,. \tag{5}$$

Eine Wiederholung der Rechnung giebt

$$\mathfrak{d} = 0{,}0000039$$
$$\mathfrak{a} = 0{,}0034512\,,$$

also wesentlich dasselbe.

Die Erhebung des dem Geoid entsprechenden Niveausphäroids über das Rotationsellipsoid gleicher Abplattung ist nach (5) des vorigen Paragraphen im Maximum sehr nahe gleich

$$\frac{1}{24}\cdot 6377397\,.\,4\mathfrak{a}^2 \qquad \text{d. i.} \qquad 12{,}7^m\,. \tag{6}$$

Gehen wir von der im dritten Kapitel § 35 abgeleiteten Formel aus:

$$g = 9{,}7800^m\,(1 + 0{,}005310\,\sin^2 B)\,, \tag{1*}$$

so ist

$$g_a = 9{,}7800 \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 = 0{,}005310 \qquad \mathfrak{b}_4 = 0\,.$$

Nach dem einfachen Theorem von *Clairaut* folgt hiermit

$$\mathfrak{a} = \frac{5}{2}\cdot 0{,}0034672 - 0{,}005310 = 0{,}0033580$$

oder

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{297{,}80}\,. \tag{3*}$$

Ferner wird

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{3}\cdot 0{,}003358\,(7\,.\,0{,}003358 - 4\,.\,0{,}005310)\,,$$

also

$$\mathfrak{d} = 0{,}0000025 \tag{4*}$$

und hiermit genauer

$$\mathfrak{a} = 0{,}0033580\,(1 - 0{,}0033580 - 0{,}0017336) + \frac{2}{7}\cdot 0{,}0000025$$

oder

$$\mathfrak{a} = 0{,}0033416 = \frac{1}{299{,}26}\,. \tag{5*}$$

Die Gröſse (6) ändert sich nicht wesentlich.

Wie im dritten Kapitel näher begründet wird, ist unsere Formel der älteren unbedingt vorzuziehen, also auch der Wert für $\mathfrak{a}$, welcher zufälligerweise mit der Abplattung des *Bessel*schen Erdellipsoids fast ganz übereinstimmt.

Laplace findet in der *Mécanique céleste t.* II. *l.* III p. 149—150 die Pendellängenbeobachtungen von fünfzehn Orten der Variation mit $\sin^2 B$ sehr nahe entsprechend und berechnet $\mathfrak{a}$ gleich $^1/_{321,48}$ und $^1/_{335,78}$ unter Annahme von $\mathfrak{c}$ gleich $^1/_{289}$, je nachdem er die zweite oder dritte Ausgleichungsmethode (siehe Bd. 1 S. 598) anwendet.

Unsere Kenntnis des allgemeinen Verlaufes der Beschleunigung g im Niveau des Meeres ist zur Zeit noch immer wesentlich das Resultat einer Reihe ausgezeichneter wissenschaftlicher Operationen aus den ersten Decennien dieses Jahrhunderts. Ganz besonders ragen hervor die Beobachtungen des Capt. *Edw. Sabine* auf 13 Stationen von -13° bis $+80^\circ$ geographischer Breite in den Jahren 1822 bis 1824 und

diejenigen des Capt. *Foster* auf 12 Stationen aufser London und Greenwich von -63^0 bis $+11^0$ geographischer Breite in den Jahren 1828 bis 1831. Nächstdem existieren aufser verschiedenen kleineren Reihen zwei Reihen von *Louis de Freycinet* und Capt. *Lütke* aus den Jahren 1817, bezw. 1826 bis 1829, sowie Reihen neueren Ursprungs, welche aber mehr den Charakter von Spezialstudien tragen. Im dritten Kapitel kommen wir auf diese Beobachtungen im einzelnen zurück.

Mit der Berechnung einer Interpolationsformel haben sich verschiedene Gelehrte beschäftigt. Nach ersten Versuchen einer Formelableitung durch *Laplace* und *Walbeck*, wobei jedoch wenig Material vorlag, findet *Ed. Schmidt* durch Ausgleichung von 47 beobachteten Pendellängen auf S. 372 u. ff. des ersten Bandes seiner *Mathematischen Geographie* 1829, wenn $\mathfrak{L}_a$ die Länge des Sekundenpendels am Äquator bezeichnet:

$$\mathfrak{L}_a = 39{,}015233 \text{ Zoll engl., also } g_a = 9{,}78056^m,$$

sowie ($\mathfrak{b}_4 =$ null gesetzt):

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 = 0{,}0052005\,. \tag{7}$$

Hierbei ist in Bezug auf die Reduktion von $\mathfrak{L}_a$ auf g_a zu bemerken, dafs zwischen g und der Schwingungszeit t des mathematischen Pendels von der Länge l bekanntlich die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

besteht, mithin zur Bestimmung von g aus der Länge des Sekundenpendels $\mathfrak{L}$ folgt:

$$g = \pi^2 \mathfrak{L}\,.$$

Ferner ist nach den *Comparisons of Standards of Length* von *A. R. Clarke,* 1866, p. 280

$$1 \text{ Fufs engl.} = 0{,}30479727^m = [9{,}48401107 - 10]$$

mithin

$$1 \text{ Zoll engl.} = [8{,}40482982 - 10]^m\,.$$

Über die Verteilung der von *Schmidt* angewandten Beobachtungen nach der Breite, wie über verschiedene Details weiterhin anzuführender Rechnungen kann auch eine Zusammenstellung von *J. B. Listing* verglichen werden.*) Bei *Schmidt* dominiert die nördliche Halbkugel: er hat 11 südliche Stationen bis -52^0 Breite gegen 33 nördliche bis $+80^0$ (2 südliche und 1 nördliche zählen doppelt).

Die später publizierten Messungen *Fosters* geben nach der Bearbeitung von *Fr. Baily* in den *Memoirs of the Royal Astronom. Society VII* 1834 p. 81 wesentlich denselben Wert für $\mathfrak{b}$, nämlich:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 = 0{,}0051961\,, \tag{8}$$

wobei für die Stationen aufser Greenwich und London die Breite von $+11^0$ bis -63^0 variiert. Es tritt also aus der Vergleichung von (7) und (8) keine erhebliche Differenz der Nord- und Südhälfte der Erde hervor.

*) *J. B. Listing, Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers.* Eine Fortsetzung der Untersuchung über unsere jetzige Kenntnis von der Gestalt und Gröfse der Erde. Göttingen 1878. (Separatabdruck aus den Nachr. der kgl. Ges. d. Wiss.)

Abgesehen von dem historischen Wert dieser Schrift verdient dieselbe auch als Kritik Beachtung. Wir werden indes mehrfach zu anderen Schlüssen geführt werden.

In seinem Werke *An Account of Experiments to determine the Figure of the Earth by means of the Pendulum vibrating Seconds in different Latitudes,* London 1825, berechnet *Edward Sabine* S. 334 aus 13 seiner Stationen von -13^0 bis $+80^0$ Breite

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 = 0{,}0051807\,, \tag{9}$$

welche Zahl sich durch Zuziehung von 6 Stationen *Katers* und 6 Stationen *Biots* auf der nördlichen Erdhälfte, ungerechnet der Anschlufsstationen, auf

$$0{,}0051890 \tag{9*}$$

erhöht. Nach *Sabines* Rechnung ist

$$\mathfrak{L}_a = 39{,}01568 \quad \text{bezw.} \quad 39{,}01516 \text{ Zoll engl.}$$

Wir haben die abgerundeten Zahlen *Schmidts* auf grund dieser Ermittelungen beibehalten, obgleich einige andere Rechner abweichendere Resultate finden.

Francis Baily berechnet in den *Memoirs of the Royal Astronom. Society VII* 1834 (aufser der *Foster*schen Reihe) noch p. 94 eine Formel aus 79 überhaupt bis dahin bekannt gewordenen Beobachtungen. Seine Arbeit ist dadurch ausgezeichnet, dafs er verschiedene erforderliche Korrektionen anbringt, die z. T. unterblieben waren (u. a. die Reduktion wegen des Mitschwingens der Luft [man hatte nur wegen des Auftriebs korrigiert], wegen Temperatur, auf das Meeresniveau). Jedoch führt er die Ausgleichung ohne Rücksicht auf die Verteilung der Stationen über die Erdoberfläche durch; verschiedene Orte kommen mehrfach, London sogar 11mal vor. Er findet $\mathfrak{b} = 0{,}0051449$ und für die tägliche Schwingungszahl n des Londoner Sekundenpendels in der Breite B:

$$n = \sqrt{7441625711} \cdot \sqrt{1 + \mathfrak{b} \sin^2 B}\ .\text{*)}$$

Borenius stellte eine in mehreren Beziehungen verbesserte Rechnung an. Namentlich sorgt er für eine gleichmäfsigere Verteilung der Stationen, deren jede bei ihm nur eine Gleichung erhält. In seiner Abhandlung *Über die Berechnung der mit dem unveränderlichen Pendel zur Bestimmung der Abplattung der Erde angestellten Beobachtungen (Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Académie imp. des sciences de St. Pétersbourg, tome I 1843)* findet sich als tägliche Schwingungszahl des Londoner Sekundenpendels an einem Orte mit der geographischen Breite B:

$$86265{,}016 + 222{,}359 \sin^2 B\,. \tag{10}$$

Hierbei sind 47 Stationen mit 47 Gleichungen benutzt. Aus 32 nördlichen und Äquator-Stationen folgt

$$86265{,}097 + 222{,}242 \sin^2 B\,;$$

aus 20 südlichen und Äquator-Stationen, wovon 5 mit den vorigen Äquator-Stationen gemeinsam sind, folgt ferner

$$86264{,}648 + 223{,}080 \sin^2 B\,.$$

Die gute Übereinstimmung der Ausdrücke für beide Erdhälften zeigt sich also auch bei dieser Berechnung.

---

*) Hiernach wird allerdings n (London) für $\mathfrak{L}_0$ nicht 86400. Letztere Zahl ist eben der unausgeglichene Wert von n für $\mathfrak{L}_0$. Bei Berechnung von $\mathfrak{L}_a$ aus $\mathfrak{L}_0$ hat man aber die ausgeglichenen, d. h. die Formelwerte anzuwenden.

Borenius leitet aufserdem die Ausdrücke

$$86265{,}475 + 216{,}379 \sin^2 B + 6{,}958 \sin^4 B \tag{11}$$

und

$$86491{,}474 - 14{,}051 \cos B - 212{,}071 \cos^2 B$$

ab, von denen der letztere jedoch zu verwerfen ist, da die Potentialtheorie Ausdrücke fordert, die nach Potenzen von $\sin B$ fortschreiten (allgemeiner gesprochen: nach Kugelfunktionen der Breite und Länge).

Bedenkt man, dafs für konstante Pendellänge l sich die Schwingungszahlen n umgekehrt wie die Zeiten t verhalten, so findet man leicht aus (10) bezw. (11):

$$g = g_a \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{222{,}359}{86265} \sin^2 B + \left(\frac{222{,}359}{86265}\right)^2 \sin^4 B \right\}, \tag{10*}$$

also

$$\mathfrak{b}_2 = 0{,}0051552 \qquad \mathfrak{b}_4 = 0{,}00000664\,;$$

ferner

$$g = g_a \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{216{,}379}{86265{,}5} \sin^2 B + \left[\left(\frac{216{,}379}{86265{,}5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{6{,}958}{86265{,}5}\right] \sin^4 B + \ldots \right\}, \tag{11*}$$

also

$$\mathfrak{b}_2 = 0{,}0050166 \qquad \mathfrak{b}_4 = 0{,}00016761\,.$$

Hiermit erhält man weiter:

$$\mathfrak{a} = 0{,}0034899 = \frac{1}{286{,}54} \qquad \mathfrak{d} = 0{,}0000066 \tag{12}$$

Sphäroid über Ellipsoid im Max. $+ 9{,}3^m$

bezw.

$$\mathfrak{a} = 0{,}0034828 = \frac{1}{287{,}13} \qquad \mathfrak{d} = 0{,}0000601 \tag{13}$$

Sphäroid über Ellipsoid im Max. $- 76^m$.

Bezüglich des Ansatzes der Fehlergleichungen sei hier Folgendes bemerkt; vergl. auch 3. Kap., § 33.

Da die Potentialtheorie unmittelbar auf eine Entwicklung für g oder auch für die Länge $\mathfrak{L}$ des Sekundenpendels nach Potenzen von $\sin B$ führt, so ist es korrekt, wie *Schmidt* die Ausgleichung auf grund dieser Pendellängen zu führen oder, wie *Baily*, die n^2 als Beobachtungsgröfsen anzusehen; es ist aber weniger gut, wie von *Borenius* geschehen, auf grund der Schwingungszahlen n selbst zu rechnen, da diese den Quadratwurzeln der $\mathfrak{L}$ proportional sind.

Paucker berechnet in seiner bereits Bd. 1 S. 18 citierten Abhandlung (*Bull. de la Classe phys.-math. de l'Ac. imp. de St. Pét.* Bd. 12 S. 120—128, Bd. 13 S. 49—89 und 225—237, insbesondere S. 227) nach einer Zusammenstellung der Resultate verschiedener Rechner aus 28 Stationen:

$$g = g_a\,(1 + 0{,}005209070 \sin^2 B - 0{,}00005973 \sin^2 2B)\,.$$

Hieraus folgt

$$g = g_a\,(1 + 0{,}00497015 \sin^2 B + 0{,}00023892 \sin^4 B) \tag{14}$$

mit

$$\mathfrak{a} = 0{,}0034648 = \frac{1}{288{,}62} \qquad \mathfrak{d} = 0{,}0000836 \tag{14*}$$

Sphäroid über Ellipsoid im Max. $- 114^m$.

Dieses Resultat hat indes weniger Bedeutung als das von *Borenius*, weil *Paucker* nur diejenigen der 47 Stationen, welche ersterer anwandte,

nimmt, bei denen die Abweichung der berechneten von der beobachteten täglichen Schwingungszahl $\leqq 8$ ist. (Bei *Borenius* kommen Abweichungen bis 11 vor.) Diese Art der Auswahl ist jedenfalls bedenklich. Man kann noch bemerken, dafs *Paucker* aus den Gradmessungen ein Rotationssphäroid findet, welches zwar beinahe dieselbe Abplattung hat, aber vom Ellipsoid entgegengesetzt abweicht (Bd. 1 S. 18), so dafs im grunde keine grofse Übereinstimmung dieser beiden Resultate vorhanden ist.

Eine neuere Berechnung von $\mathfrak{a}$ aus den Pendelbeobachtungen gab 1880 *A. R. Clarke* in seiner *Geodesy* p. 341—351. Durch den Einflufs der bei dieser Berechnung herbeigezogenen indischen Beobachtungen verkleinert sich $\mathfrak{a}$ auf etwa 1 : 294, welchen Wert Verfasser p. 319 auch aus Gradmessungen ableitet. Jedoch ist auch diese Übereinstimmung wie bei *Paucker* durchaus zufällig und in der Genauigkeit der Einzelresultate nicht begründet.

§ 17. Die Normalform der Niveauflächen (aufserhalb) und das Rotationsellipsoid. Die beobachteten und auf das Meeresniveau reduzierten Werte von g lassen sich, wie bereits erwähnt, bis auf Gröfsen, welche im Verhältnis zu g die vierte Ordnung nicht wesentlich überschreiten, durch eine Formel $g = g_a\,(1 + \mathfrak{b}\sin^2 B)$ interpolieren. Setzt man $g = g_a\,(1 + \mathfrak{b}_2\sin^2 B + \mathfrak{b}_4\sin^4 B)$, so zeigt sich in der That, dafs $\mathfrak{b}_4$ ebenfalls eine Gröfse vierter Ordnung wird (vergl. § 16 S. 88). Eine Verbesserung ist jedoch die dreigliedrige Formel für g nicht, insofern sie die g im Meeresniveau nicht wesentlich besser als die zweigliedrige darstellt. Es würde in der That erst durch Mitnahme zahlreicher weiterer, von Breite und Länge abhängiger periodischer Glieder möglich werden, diese g wesentlich besser zu interpolieren, weil die Abweichungen gegen jene beiden einfachen Formeln einen lokalen und kontinentalen Charakter besitzen.

Als Normalform der Niveauflächen aufserhalb dürfen wir hiernach diejenigen Niveausphäroide ansehen, für welche in dem Potentialausdruck

$$U = \frac{Mk^2}{r}\left\{\begin{aligned}&1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi\\ &+ \frac{D}{r^4}\left(\sin^4\varphi - \frac{6}{7}\sin^2\varphi + \frac{3}{35}\right) + Gl_6\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die Konstanten so bestimmt werden, dafs für das Niveausphäroid des Geoids in Strenge

$$g = g_a\,(1 + \mathfrak{b}\sin^2 B) \qquad (2)$$

wird. Für die höher gelegenen Niveausphäroide wird allerdings g in Strenge diese Form nicht behalten; dies ist jedoch gleichgültig, und überdies wird sich zeigen, dafs für die Nähe der physischen Erdoberfläche die höheren Glieder, welche zu (2) im allgemeinen hinzutreten, sehr klein bleiben.

Beziehen sich jetzt a, g_a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ausschliefslich auf das Niveausphäroid der Meeresfläche, so haben wir nach S. 82 § 14 (9) zur Bestimmung von $\mathfrak{d}$ und D:

$$\mathfrak{d} = \frac{D}{a^4} = \frac{1}{3}(7\mathfrak{a}^2 - 4\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + Gl_6 ; \tag{3}$$

ferner ist hiermit die Gleichung der Meridiankurve dieses besonderen Niveausphäroids nach S. 80 § 13 (7):

$$r = a\left\{1 - \mathfrak{a}\left(1 + \frac{4}{3}\mathfrak{a} - \frac{1}{3}\mathfrak{b}\right)\sin^2\varphi + \mathfrak{a}\left(\frac{4}{3}\mathfrak{a} - \frac{1}{3}\mathfrak{b}\right)\sin^4\varphi - Gl_6\right\} \tag{4}$$

und die maximale Erhebung über das gleichstark abgeplattete Rotationsellipsoid nach S. 83 § 15 (5):

$$\frac{1}{24}\, a \left\{\mathfrak{a}(\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b}) + Gl_6\right\}, \tag{5}$$

was nach S. 85 § 16 (6) 12,7 Meter beträgt.

Zur Bestimmung von K, $\omega^2 : Mk^2$ und Mk^2 hat man nach S. 79 § 12 (7) und (8), sowie nach S. 83 § 15 (7) und unter Benutzung der Relation $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \frac{5}{2}\mathfrak{c} + Gl_4$ die Formeln:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{a^4} &= \frac{175}{12}\mathfrak{c}^2 + \frac{11}{3}\mathfrak{b}^2 - 15\mathfrak{b}\mathfrak{c} + Gl_6 ,\\
\frac{K}{2a^2} &= \frac{1}{3}\left\{2\mathfrak{c} - \mathfrak{b} - \frac{11}{2}\mathfrak{c}^2 - \frac{3}{7}\mathfrak{b}^2 + \frac{25}{7}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + Gl_6\right\}\\
\frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} &= \mathfrak{c}(1 + \mathfrak{c} - \mathfrak{b} + Gl_4)\\
Mk^2 &= \frac{g_a a^2}{1 + \mathfrak{c} - \mathfrak{b} - \frac{1}{4}\mathfrak{c}^2 + \frac{8}{7}\mathfrak{b}^2 - \frac{13}{7}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + Gl_6}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Formeln für r und g sowohl im allgemeinen, wie auch für beliebige Niveauflächen können aus der nunmehr als bekannt anzusehenden Funktion U, Gleichung (1), abgeleitet werden, was im wesentlichen den Entwicklungen der Paragraphen 12 bis 15 entspricht. Wir kommen hierauf im folgenden Paragraphen zurück.

Hier ist zunächst noch zu erwähnen, dafs *H. Bruns* in seiner *Figur der Erde* S. 16 und 18 für die Normalform den Ausdruck

$$U = \frac{Mk^2}{r}\left\{1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi\right\}$$

ansetzt und behandelt. Er setzt also insbesondere $\mathfrak{d}$ = null und findet damit, wie auch unsere Formel (10) § 13 S. 80 ergiebt, als maximale Erhebung des Niveausphäroids des Geoids über das gleichstark abgeplattete Ellipsoid

$$19{,}1^m.$$

Selbstverständlich reduziert sich für das Meeresniveau g nicht mehr in Strenge auf den Ausdruck (2), vielmehr treten noch Glieder mit $\sin^4 B$ u. s. f. hinzu, welche jedoch nur sehr kleine Werte annehmen können, wie schon aus der geringen Differenz der Maximalerhebungen 13 und 19 Meter folgt. (Nach Gleichung (4) S. 83 § 15 wird für $\mathfrak{d}$ = null $\mathfrak{b}_4$ gleich rund 0,00001.)

Für welche der beiden oben angegebenen Normalformen man sich auch entscheiden mag, so ist jedenfalls die Abweichung des der Meeresfläche entsprechenden Niveausphäroids vom Rotationsellipsoid gleicher Abplattung eine so geringe, dafs *der Gebrauch der Geodäten gerechtfertigt erscheint, das Geoid* abgesehen von den Verbiegungen lokalen und kontinentalen Charakters *als abgeplattetes Rotationsellipsoid anzusehen.*

Man kann sogar U auch so ansetzen, dafs für ein bestimmtes Niveausphäroid die Gleichung (1) diesem Rotationsellipsoid genau entspricht. Als ersteres nehmen wir wieder dasjenige des Geoids, auf welches sich a, g_a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ beziehen sollen. Damit nun der Radiusvektor desselben mit dem des gleichstark abgeplatteten Rotationsellipsoides bis auf Glieder sechster Ordnung im Verhältnis zu a übereinstimmt, ist in der für das Meeresniveau geltenden Formel

$$g = g_a \left\{1 + [\mathfrak{b} - \mathfrak{b}_4] \sin^2 B + \mathfrak{b}_4 \sin^4 B + Gl_6\right\} \qquad (2^*)$$

nach S. 83 § 15 (5) zu setzen

$$\mathfrak{b}_4 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b})\,,$$

oder nach Elimination von $\mathfrak{a}$ mittelst der Relation $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \frac{5}{2}\,\mathfrak{c} + Gl_4$:

$$\mathfrak{b}_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{4}\,\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2\right).$$

Mit dem ersten Ausdruck folgt nach (4) § 15 S. 83 weiter:

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\left(\frac{5}{2}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\right) + Gl_6\,, \qquad (3^*)$$

womit sich für den Radiusvektor der Meridiankurve nach (7) S. 80 § 13 in Übereinstimmung mit Gleichung (8) daselbst findet:

$$r = a\left\{1 - \mathfrak{a}\left(1 + \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}\right)\sin^2\varphi + \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}^2 \sin^4\varphi - Gl_6\right\}, \qquad (4^*)$$

die Polargleichung der Ellipse bis auf Glieder sechster Ordnung darstellend.

Zur Bestimmung der Konstanten des Potentialausdrucks (1) für U hat man in ähnlicher Entwicklung wie oben für die erste Normalform:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d} &= \frac{D}{a^4} = \frac{125}{8}\,\mathfrak{c}^2 + \frac{7}{2}\,\mathfrak{b}^2 - 15\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} + Gl_6 \\
\frac{K}{2a^2} &= \frac{1}{3}\left\{2\mathfrak{c} - \mathfrak{b} - \frac{283}{56}\,\mathfrak{c}^2 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{b}^2 + \frac{25}{7}\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} + Gl_6\right\} \\
\frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} &= \mathfrak{c}\,(1 + \mathfrak{c} - \mathfrak{b} + Gl_4) \\
Mk^2 &= \frac{g_a\,a^2}{1 + \mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \frac{9}{14}\,\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{b}^2 - \frac{13}{7}\,\mathfrak{b}\mathfrak{c} + Gl_6}\,.
\end{aligned} \qquad (6^*)$$

Wie bereits oben bemerkt, lassen sich nun r und g für beliebige Niveauflächen aus dem Ausdrucke für U herstellen.

Wenn wir in Zukunft besonders hervorheben wollen, dafs das Niveausphäroid des Geoids eine der drei besprochenen Normalformen hat, so werden wir es kurz als *Normalsphäroid* bezeichnen.

§ 18. Die Formänderung der Niveausphäroide in der Nähe der physischen Erdoberfläche mit der Höhenlage.

Der Abstand unendlich benachbarter Niveauflächen ist bereits im ersten Kapitel § 8 S. 10 Gegenstand der Untersuchung gewesen. Darnach ist der Abstand des Niveausphäroids der Meeresfläche von einem unendlich benachbarten Niveausphäroid mit Rücksicht auf die Formel (1*) § 16 S. 85 für die Beschleunigung der Schwere dem Ausdruck

$$1 + \mathfrak{b} \sin^2 B\,, \qquad \mathfrak{b} = 0{,}00531 \tag{1}$$

umgekehrt proportional. Insbesondere hat man für die Abstände h am Äquator und am Pol die Proportion:

$$h_{Aequ.} : h_{Pol} = 1{,}00531 : 1$$

oder näherungsweise (2)

$$h_{Aequ.} : h_{Pol} = 189 : 188\,.$$

Diese Proportion darf man als erste Annäherung auch auf beliebige Niveauflächen in der Nähe der Erdoberfläche und auf endliche Abstände anwenden. Sie zeigt deutlich die Thatsache, dafs die Niveauflächen, selbst in der normalen Form der Niveausphäroide, im ganzen betrachtet erheblich vom Parallelismus abweichen.

Für zwei Abstände h in den Breiten B_1 und B_2 erhält man die Proportion:

$$h_1 : h_2 = 1 + 0{,}00531 \sin^2 B_2 : 1 + 0{,}00531 \sin^2 B_1\,.$$

Hieraus folgert man ohne Schwierigkeit:

$$h_1 - h_2 = \frac{0{,}00531 \sin(B_2 - B_1) \sin(B_2 + B_1)}{1 + 0{,}00531 \sin^2 B_2}\, h_1\,. \tag{3}$$

Ist $B_2 + B_1 = 90^0$, so erreicht der Ausdruck rechter Hand unter sonst gleichen Umständen sehr nahe sein Maximum. Dasselbe beträgt für $B_2 - B_1 = 1^0$, d. h. also für 15 geographische Meilen meridionalen Abstandes rund $0{,}00009\, h_1$.

Infolge des Umstandes, dafs die Niveausphäroide keine ähnlichen Flächen sind, ändert sich auch die *Abplattung* mit der Höhenlage. Sind a und b die äquatoriale und polare Halbaxe eines Niveausphäroids, so hat man für dessen Abplattung die Gleichung:

$$a - b = a\mathfrak{a}\,.$$

Für ein unendlich benachbartes wird durch Differentiation dieser Gleichung

$$da - db = a\, d\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\, da\,. \tag{4}$$

Für die Beschleunigung der Schwerkraft auf dem Niveausphäroid können wir aber ansetzen

$$g = g_a \left(1 + \mathfrak{b} \sin^2 B + Gl_4\right); \tag{5}$$

demnach ist

$$da \,.\, 1 = db \left(1 + \mathfrak{b} + Gl_4\right)$$

oder

$$db = da \left(1 - \mathfrak{b} + Gl_4\right). \tag{6}$$

Führen wir dies in Gleichung (4) ein, so ergiebt sich nach einfacher Reduktion:

$$d\mathfrak{a} = \frac{da}{a} \left(\mathfrak{b} - \mathfrak{a} + Gl_4\right). \tag{7}$$

Da $\mathfrak{b}$ sehr nahe $\frac{3}{2}\,\mathfrak{a}$ ist, so hat man angenähert

$$d\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}}{2} \cdot \frac{da}{a}. \tag{8}$$

§ 19. **Fortsetzung.** Es ist nächstdem von Interesse zu ermitteln, wie sich die Niveausphäroide in verschiedenen Höhen zu dem Ellipsoid gleicher Abplattung verhalten. Nach S. 80 § 13 (10) ist *der maximale Abstand eines Niveausphäroids vom Ellipsoid gleicher Abplattung* gleich

$$(r_U - r_E)_{max} = \frac{1}{4}\, a \left\{\mathfrak{a} \left(\frac{5}{2}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\right) - \mathfrak{d} + Gl_6 \right\}, \tag{1}$$

worin a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ sich auf das betreffende Niveausphäroid beziehen. Da wir nun verschiedene Niveausphäroide vergleichen wollen, müssen wir $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ auf absolute Konstanten zurückführen. Dies wird durch nachstehende Formeln geleistet, die man unter Annahme des Ausdrucks (1) § 12 S. 77 für U leicht aus § 12 entnimmt:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{b} &= 2\mathfrak{c} - \frac{3K}{2a^2} + Gl_4\,,\\
\mathfrak{a} &= \frac{5}{2}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + Gl_4\,,\\
\mathfrak{c} &= \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + Gl_4\,,\\
\mathfrak{d} &= \frac{D}{a^4}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}
a\,\frac{d\mathfrak{c}}{da} &= 3\mathfrak{c} + Gl_4\,,\\
a\,\frac{d\mathfrak{b}}{da} &= 2a\,\frac{d\mathfrak{c}}{da} + \frac{3K}{a^2} + Gl_4 = 4\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} + Gl_4\,,\\
a\,\frac{d\mathfrak{a}}{da} &= \frac{5}{2}\,a\,\frac{d\mathfrak{c}}{da} - a\,\frac{d\mathfrak{b}}{da} + Gl_4 = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} + Gl_4\,,\\
a\,\frac{d\mathfrak{d}}{da} &= -\,4\mathfrak{d}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus (1) ergiebt sich nun durch Differentiation und unter Anwendung vorstehender Formeln:

$$\frac{d(r_U - r_E)_{max}}{da} = \frac{1}{4}\left\{\mathfrak{a}\left(\frac{5}{2}\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\right) - \mathfrak{d}\right\}$$

$$+ \frac{a}{4}\left\{(5\mathfrak{a} - \mathfrak{b})\frac{d\mathfrak{a}}{da} - \mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{da} - \frac{d\mathfrak{d}}{da}\right\} + Gl_6$$

oder
$$\frac{d(r_U - r_E)_{max}}{da} = \frac{1}{4}\left\{3\mathfrak{d} + 3\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \frac{13}{2}\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 + Gl_6\right\}. \quad (4)$$

Wenden wir die Zahlwerte des § 16 S. 84 und 85 an, so wird [vergl. auch S. 90 § 17 (3)] $\mathfrak{b}$ sehr nahe gleich $\frac{3}{2}\mathfrak{a}$ und

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{3}(7\mathfrak{a}^2 - 4\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + Gl_4 \quad \text{oder sehr nahe} = \frac{1}{3}\mathfrak{a}^2.$$

Damit folgt

$$\frac{d(r_U - r_E)_{max}}{da} = -\frac{2\mathfrak{b}^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{a}^2}{8} + Gl_4,$$

$$\text{oder sehr nahe} = -\frac{13}{16}\mathfrak{a}^2 \quad \text{d. i.} \quad = -0{,}000010. \quad (5)$$

Setzt man dagegen $\mathfrak{d}$ = null (vergl. § 17 S. 90) und behält die Relation $\mathfrak{b} = \frac{3}{2}\mathfrak{a}$ bei, so wird dieser Differentialquotient gleich $-0{,}000012$.

Wählt man endlich $\mathfrak{d}$ nach Gleichung (3*) § 17 S. 91, d. h. nahezu gleich $\mathfrak{a}^2$, wobei nun das Niveausphäroid, auf welches sich die festen Werte von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ beziehen, bis auf Glieder sechster Ordnung in $r : a$ mit der Ellipse gleicher Abplattung übereinstimmt, dann folgt

$$\frac{d(r_U - r_E)_{max}}{da} = -\frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}{4} + Gl_6, \quad (6)$$

oder sehr nahe $= -\frac{5}{16}\mathfrak{a}^2$, d. i. $= -0{,}000004$.

In diesem Falle sind sonach die Änderungen der Niveausphäroide mit der Höhenlage am kleinsten. Sie sind aber auch bei den beiden vorhergehenden Annahmen sehr klein: selbst für eine Änderung von a im Betrage von $\Delta a = 6370^m$ ist $\Delta(r_U - r_E)_{max}$ jedenfalls $< 0{,}1^m$.

Die Niveausphäroide U in der Nähe der physischen Erdoberfläche stimmen daher alle in gleichem Grade mit Rotationsellipsoiden derselben Abplattung überein. Wählt man insbesondere die Funktion U so, dafs das Niveausphäroid der Meeresfläche in $r : a$ bis auf Glieder sechster Ordnung mit einem Revolutionsellipsoid gleicher Abplattung übereinstimmt, so sind auch überhaupt alle Niveausphäroide U in der Nähe der physischen Erdoberfläche Revolutionsellipsoide bis auf Gröfsen derselben Ordnung.

§ 20. Die normale Änderung der Beschleunigung g der Schwerkraft mit der Höhe in der Nähe der physischen Erdoberfläche, aufserhalb. Näherungsformeln für g und $dg : dh$.

Legen wir für U den Ausdruck (1) § 12 S. 77 zu grunde, so ist

allgemein *für ein bestimmtes Niveausphäroid* in der Nähe der physischen Erdoberfläche

$$g = g_a (1 + \mathfrak{b}_2 \sin^2 B + \mathfrak{b}_4 \sin^4 B + Gl_6) . \tag{1}$$

Beachten wir die Relation $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_4 + \ldots$, so folgt zur Bestimmung von $\mathfrak{b}_4$ aus Gleichung (9) § 14 S. 82:

$$\mathfrak{b}_4 = 3\mathfrak{d} - 7\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{a}\mathfrak{b} + Gl_6 . \tag{2}$$

Hieraus erhält man durch Differentiation bei geändertem Äquatorialhalbmesser des Niveausphäroids:

$$a \frac{d\mathfrak{b}_4}{da} = 3a \frac{d\mathfrak{d}}{da} - (14\mathfrak{a} - 4\mathfrak{b})\, a \frac{d\mathfrak{a}}{da} + 4\mathfrak{a}\, a \frac{d\mathfrak{b}}{da} + Gl_6 ;$$

setzt man nun rechter Hand die Werte der Differentialquotienten (3) § 19 S. 93 ein, so folgt

$$d\mathfrak{b}_4 = \frac{da}{a} \left\{ 30\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{b}^2 - 10\mathfrak{a}\mathfrak{b} - 12\mathfrak{d} + Gl_6 \right\} \cdot \tag{3}$$

Setzen wir hierin näherungsweise $\mathfrak{b} = \frac{3}{2}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d} = \frac{1}{8}\mathfrak{a}^2$, null oder $\mathfrak{a}^2$ (vergl. die dritte Annahme in § 19 S. 94), so wird $d\mathfrak{b}_4$ gleich 20-, 24- oder 12-mal $\mathfrak{a}^2 . da : a$. Es ist also selbst für die Änderung $\Delta a = 6370^{km}$ die Änderung $\Delta \mathfrak{b}_4$ ganz unwesentlich.

Man kann daher $\mathfrak{b}_4$ für die Nähe der physischen Erdoberfläche als konstant betrachten. Hat man es insbesondere fürs Meeresniveau gleich null angesetzt, so wird es innerhalb der angegebenen Grenzen überall null.

Zur Bestimmung der Veränderung von $\mathfrak{b}_2$ hat man

$$d\mathfrak{b}_2 = d\mathfrak{b} - d\mathfrak{b}_4 + \ldots$$

und demnach mit Rücksicht auf (3) § 19 S. 93:

$$d\mathfrak{b}_2 = \frac{da}{a} \left\{ 4\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} + Gl_4 \right\} ,$$

oder angenähert (4)

$$d\mathfrak{b}_2 = 7\mathfrak{a} \cdot \frac{da}{a} .$$

Der allgemeine Ausdruck für die Beschleunigung g ist nach (6) § 14 S. 81 in abgekürzter Form:

$$g = \frac{Mk^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2}\cos^2\varphi + Gl_4 \right\} \cdot \tag{5}$$

Da wir in der Parenthese Glieder vierter Ordnung vernachlässigt haben, so kommen hierbei die in § 17 S. 89 besprochenen Unterschiede in den Annahmen für U nicht weiter in betracht. Für viele Zwecke reicht aber Ausdruck (5) völlig aus. Um die Änderung von g für eine differentiale Verschiebung dh in Höhe zu erhalten, haben wir zu beachten, dafs

$$\frac{dg}{dh} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{dr}{dh} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dh}. \tag{6}$$

Das differentiale Dreieck, welches aus dh, dr und $r d\varphi$ gebildet wird, zeigt nun, dafs zwischen diesen Gröfsen die Beziehungen

$$\begin{aligned} dr &= dh \,.\, \cos(B - \varphi) \\ r\, d\varphi &= dh \,.\, \sin(B - \varphi) \end{aligned} \tag{7}$$

bestehen. Hierbei ist nach (3) § 14 S. 81 $B - \varphi = \mathfrak{a} \sin 2\varphi + Gl_4$. Man erkennt jetzt sofort die Richtigkeit der Gleichung:

$$\frac{dg}{dh} = \frac{\partial g}{\partial r} + Gl_4, \tag{8}$$

wenn unter Gl_4 Glieder verstanden werden, die Faktoren der Ordnung $\mathfrak{a}^2$ enthalten.

Wir erhalten demgemäfs:

$$\frac{dg}{g} = -\left\{\frac{2}{r} + \frac{3K}{r^3}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{3\omega^2 r^2}{Mk^2}\cos^2\varphi + Gl_4\right\} dh$$

oder mit Rücksicht auf die Relationen (7), (8) und (5) § 12 S. 79 und 78, sowie mit einigen zulässigen Vernachlässigungen:

$$dg = -\frac{2g}{r}\left\{1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{c} - 3\mathfrak{a}\sin^2 B + Gl_4\right\} dh. \tag{9}$$

Setzen wir hierin noch für r den Ausdruck $a(1 - \mathfrak{a}\sin^2 B + Gl_4)$, so folgt nach einiger Reduktion:

$$dg = -\frac{2g}{a}\left\{1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{c} - 2\mathfrak{a}\sin^2 B + Gl_4\right\} dh. \tag{10}$$

Bei der Bildung des zweiten Differentialquotienten von g nach h kann man von Gliedern zweiter Ordnung ganz absehen und findet ohne Mühe aus (9) sofort

$$\frac{d^2 g}{dh^2} = \frac{2g}{a^2}\left\{1 + Gl_2\right\}. \tag{11}$$

Der Vollständigkeit halber fügen wir nach S. 83 § 15 (7) hinzu:

$$g = \frac{Mk^2}{a^2}\left(1 - \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + Gl_4\right)\left\{1 + \mathfrak{b}\sin^2 B + Gl_4\right\}. \tag{12}$$

Diese Formeln gelten für jedes Niveausphäroid aufserhalb in der Nähe der physischen Erdoberfläche. Sie gestatten einen bequemen Ausdruck für den normalen Wert von g in der Meereshöhe H aufzustellen.

Beziehen sich Gröfsen mit dem unteren Index 0 auf das Niveausphäroid der Meeresfläche, so ist in der Höhe H über demselben, H gemessen in der Lotlinie, welche dieses Sphäroid in der geographischen Breite B durchschneidet:

$$g = g_0 + \left(\frac{dg}{dh}\right)_0 H + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 g}{dh^2}\right)_0 H^2 + \ldots,$$

d. h. mit Rücksicht auf (10) und (11):

$$g = g_0 \left\{ 1 - \frac{2H}{a_0} (1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{c} - 2\mathfrak{a} \sin^2 B + Gl_4) + \frac{H^2}{a_0^2} (1 + Gl_2) + \ldots \right\}, \quad (13)$$

mit
$$g_0 = \frac{Mk^2}{a_0^2} (1 - \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + Gl_4) \left\{ 1 + \mathfrak{b} \sin^2 B + Gl_4 \right\}. \quad (14)$$

An den Gröfsen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, die sich hierin ebenso wie a_0 und g_0 auf das Niveausphäroid der Meeresfläche beziehen, ist der Index 0 der Einfachheit halber weggelassen.

Diese Formeln befriedigen jedes praktische Bedürfnis, denn (14) giebt g_0 so genau, wie die Beobachtungen zur Zeit den numerischen Ausdruck für diese Gröfse haben ermitteln lassen, vergl. (1) und (1*) § 16 S. 84, und in (13) werden die vernachlässigten Glieder der geschlungenen Parenthese, da $H : a_0$ im Maximum etwa $1/_{1000}$ beträgt, weit kleiner als $1/_{1000000}$; ja man kann recht wohl auch das Glied $H^2 : a_0^2$ vernachlässigen.

Bei der Aufstellung von Formeln für die Beschleunigung g wird vielfach ein mittlerer Erdradius R angewandt. Nun ist für das Niveausphäroid der Meeresfläche

$$r = a_0 (1 - \mathfrak{a} \sin^2 B + Gl_4). \quad (15)$$

Diese Gleichung zwischen r und B gilt mit gleicher Genauigkeit für ein Rotationsellipsoid mit den Elementen a_0 und $\mathfrak{a}$; wir haben daher nach Bd. 1 S. 68 § 21 sofort für den mittleren Erdradius R die Gleichung:

$$R = a_0 \left(1 - \frac{1}{3} \mathfrak{a} + Gl_4\right)$$

oder (16)

$$a_0 = R \left(1 + \frac{1}{3} \mathfrak{a} + Gl_4\right).$$

Die Formeln (13) und (14) geben unter Einführung dieses Ausdruckes für a_0 und mit Benutzung der Relation $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \frac{5}{2} \mathfrak{c} + Gl_4$:

$$g = g_0 \left\{ 1 - \frac{2H}{R} \left(1 + \frac{2}{3} \mathfrak{a} + \mathfrak{c} - 2\mathfrak{a} \sin^2 B + Gl_4\right) + \frac{H^2}{R^2} (1 + Gl_2) + \ldots \right\}, \quad (17)$$

$$g_0 = \frac{Mk^2}{R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \mathfrak{a} - \frac{3}{2} \mathfrak{c} + Gl_4\right) \left\{ 1 + \mathfrak{b} \sin^2 B + Gl_4 \right\}. \quad (18)$$

Bezeichnen wir den Wert von g_0 für $B = 45^0$ mit $\mathfrak{G}$, so folgt noch aus (18) nach naheliegenden Reduktionen:

$$g_0 = \mathfrak{G} \left(1 - \frac{1}{2} \mathfrak{b} \cos 2B + Gl_4\right) \quad (19)$$

mit

$$\mathfrak{G} = \frac{Mk^2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{6} \mathfrak{a} - \frac{1}{4} \mathfrak{c} + Gl_4\right). \quad (20)$$

Nach den S. 85 § 16 (1*) angegebenen Zahlen ist zu setzen

$$g_0 = 9{,}8060^m (1 - 0{,}00265 \cos 2B). \quad (19^*)$$

Die vorstehenden Entwicklungen lassen nun erkennen, wie genau verschiedene in Anwendung kommende Näherungsformeln sind. Wird z. B. für die Schwerkraft in der Breite B und der Meereshöhe H gesetzt

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+H)^2} = \mathfrak{G}\left(1 - \frac{1}{2}\mathfrak{b}\cos 2B - \frac{2H}{R}\right), \tag{21}$$

wozu die Differentialformel

$$\frac{dg}{g} = -\frac{2dH}{R} \tag{22}$$

gehört, so ist die normale Veränderung im Meeresniveau so genau berücksichtigt, als gegenwärtig möglich, die normale Veränderung mit der Höhe aber nach (10) und (16) auf etwa $^1/_2\,^0/_0$ Maximalfehler.

In den oben entwickelten Formeln kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\,\Theta_m \tag{23}$$

setzen, worin Θ_m die mittlere Dichtigkeit der Erde bezeichnet und $\frac{4}{3}\pi R^3$ als Volumen der Erde angesetzt ist. Nach Bd. 1 S. 68 ist das Volumen des Rotationsellipsoids gleich diesem Ausdruck bis auf Bruchteile der vierten Ordnung; mit derselben Genauigkeit etwa wird dieser Ausdruck auch für das Volumen des Geoids anwendbar sein. Überdies wird Formel (23) bei allen numerischen Bestimmungen von Θ_m benutzt. Mithin kommt der theoretische Fehler des Ausdrucks für M bei der numerischen Anwendung nicht zur Geltung; er ist auch ohne Belang, weil bei der Bestimmung von Θ_m zur Zeit Fehler anderer Art begangen werden, die weit bedeutender sind als diejenigen der Theorie.

Setzt man einfach, entsprechend der Kugelgestalt der Erde:

$$g = \frac{Mk^2}{(R+H)^2}, \tag{24}$$

so giebt dieses in g zufolge (18) etwa $^1/_3\,^0/_0$ Maximalfehler, während die Veränderung mit der Höhe wie bei (22) auf $^1/_2\,^0/_0$ Maximalfehler richtig wird.

Alle hier aufgestellten Formeln geben nur den normalen Teil von g und $dg : dH$. Wegen lokaler und kontinentaler Einflüsse weicht g in Wirklichkeit um etwa $^1/_{5000}$ seines Betrages im Maximum vom normalen Werte ab. $dg : dH$ kann sich noch weit mehr ändern; normal ist es nur bei Erhebungen in freier Luft über nahezu ebenem Terrain und bei Abwesenheit gröſserer Dichtigkeitsunregelmäſsigkeiten in der Nähe der Erdoberfläche, vergl. 4. Kap. § 3. Innerhalb des Terrains giebt der normale Wert von $dg : dH$ gar keine Annäherung, wie schon im Kap. 1 § 26 S. 46 erwähnt worden ist.

§ 21. Die normale Änderung der geographischen Breite mit der Höhe wegen der Krümmung der Lotlinien.

Wir drücken zunächst die geographische Breite B als Funktion

des Radiusvektors r und der geozentrischen Breite φ aus. Bezeichnet man aber wie S. 73 § 10 und S. 81 § 14 mit U_1 und U_2 die beiden von null verschiedenen Komponenten der Schwerebeschleunigung und beachtet, daſs U_1 die Richtung des Radiusvektors r hat, die Richtung der Resultante g aber die geographische Breite markiert, so ergiebt sich

$$\tan(B' - \varphi) = \frac{U_2}{U_1},$$

oder mit Rücksicht auf die Ausdrücke für U_2 und U_1 auf S. 81:

$$B = \varphi + \left(\frac{3K}{2r^2} + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\right) \sin 2\varphi + Gl_4 . \tag{1}$$

Andrerseits hat man

$$\frac{dB}{dh} = \frac{\partial B}{\partial r}\,\frac{dr}{dh} + \frac{\partial B}{\partial \varphi}\,\frac{d\varphi}{dh}. \tag{2}$$

Hierzu giebt (1):

$$r\,\frac{\partial B}{\partial r} = \left(-\frac{3K}{r^2} + \frac{3\omega^2 r^3}{2Mk^2}\right) \sin 2\varphi + Gl_4 ,$$

$$\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 1 + Gl_2 ;$$

ferner hat man wegen der Relationen (7) auf S. 96 und in leicht ersichtlicher Entwicklung:

$$\frac{dr}{dh} = 1 + Gl_4$$

$$r\,\frac{d\varphi}{dh} = \left(\frac{3K}{2r^2} + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\right) \sin 2\varphi + Gl_4 .$$

Durch Substitution in (2) folgt hieraus ohne Schwierigkeit:

$$r\,\frac{dB}{dh} = \left(-\frac{3K}{2r^2} + \frac{2\omega^2 r^3}{Mk^2}\right) \sin 2\varphi + Gl_4 .$$

Wie (7) und (8) § 12 S. 79 zeigen, ist die Parenthese rechter Hand wesentlich gleich $\mathfrak{b}$. Man gelangt nunmehr leicht zu der Endformel:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta B} = \varrho'' \left\{\mathfrak{b} \sin 2B + Gl_4\right\} \frac{\Delta h}{r}, \tag{3}$$

d. i. für $\mathfrak{b} = 0{,}00531$ und $r = 6370000^m$ sehr nahe die Relation:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta B} = \frac{\Delta h}{5820} \sin 2B , \tag{3*}$$

wobei ΔB die Änderung der geographischen Breite bezeichnet, die zu der Erhebung Δh in Metern gehört.

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch mit Rücksicht darauf, daſs die Krümmung der Lotlinien eine Folge des Nichtparallelismus der Niveauflächen ist. Die Konvergenz der Meridiane zweier unendlich nahen Niveausphäroide im Abstande dh ist nach (3) § 18 S. 92, wenn man $B_2 = B_1 + dB$ setzt, sehr nahe gleich $(h_1 - h_2) : r\,dB$

oder 0,00531 $\sin 2B \cdot \frac{dh}{r}$. Ebensoviel beträgt die Biegung der Lotlinien für die Erhebung dh.

In welcher Weise sich die Krümmung der Lotlinien auf die Änderung der geographischen Breite überträgt, zeigte bereits *Gaufs* 1853 in einem Briefe an *Baeyer*, vergl. das Protokoll der Verhandlungen der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung von 1869 S. 30 oder *Astronom. Nachrichten* Bd. 84 1874 Nr. 1993 S. 3. Hiernach ist die Breite in der Meereshöhe H gleich

$$B + 1070'' \frac{H}{a_0} \sin 2B,$$

was mit (3*) genügend übereinstimmt.

Eine Entwicklung aut grund der Potentialtheorie gab *Haupt* in den Astronom. Nachrichten Bd. 84 No. 1996 S. 50, sowie *Bruns* in seiner *Figur der Erde* S. 19. Obwohl ersterer einen nicht korrekten Ausdruck für das Potential nach *Hansen* anwendet, wird doch seine Endformel richtig. Dagegen ist wiederholt von anderen infolge fehlerhafter Berücksichtigung der Anziehung des Erdkörpers der Differentialquotient $dB : dh$ unrichtig aufgestellt worden.

§ 22. **Die äufserste Niveaufläche der Erde.** Entfernt man sich in der Äquatorebene mehr und mehr von der Erde, so nimmt die Anziehung ab, die Zentrifugalkraft dagegen zu, bis endlich an einer Stelle Gleichheit eintritt. Darüber hinaus überwiegt die Zentrifugalkraft. Man kann nun diejenige Niveaufläche, in deren Äquator jene Gleichheit statt hat, als äufserste Niveaufläche bezeichnen, insofern sie unter gewissen Voraussetzungen die Grenze der Atmosphäre sein mufs. Wir betrachten hier übrigens diese Fläche nur zu dem Zwecke, um an einem Beispiel zu erkennen, wie sich die Niveauflächen bei gröfserem Abstande von der physischen Erdoberfläche verändern.

Für das Potential W der Schwerkraft wenden wir wieder den Ausdruck

$$U = \frac{Mk^2}{r}\left\{1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi + \ldots\right\} \tag{1}$$

an, welcher jetzt sicher eine weit stärkere Annäherung an W giebt, als dicht an der physischen Erdoberfläche. Differenziert man U nach r und setzt nach Einführung von $r = a$, $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ den Differentialquotienten gleich null, so folgt zur Bestimmung des Äquatorialhalbmessers der Grenzfläche die Gleichung

$$0 = 1 + \frac{3K}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + \ldots. \tag{2}$$

Verstehen wir unter a_0 den Äquatorialhalbmesser des Niveausphäroids der Meeresfläche und setzen wir wie bisher

$$\frac{\omega^2 a_0^3}{Mk^2} = \mathfrak{c}\,(1 + Gl_2), \tag{3}$$

so läfst sich (2) in die Form bringen:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \frac{1}{\mathfrak{c}}\left\{1 + \frac{3K}{2a_0^2}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \ldots\right\}. \tag{4}$$

Mit Rücksicht auf den Zahlwert $\mathfrak{c} = 1:288,4$ (vergl. § 16 S. 84) erkennt man, dafs $a : a_0$ zwischen 6 und 7 liegt; läfst man daher rechter Hand in (4) alle Glieder aufser 1 weg, so giebt dies, weil $3K:2a_0^2$ nach (6) § 15 S. 83 nahezu $1:577$ ist und weil ferner die Reihe in der Klammer nach Potenzen von $\left(\frac{a_0}{a}\right)$ fortschreitet, nur einen kleinen Fehler in der Bestimmung von $a : a_0$. Derselbe beträgt etwa 1 : 75000 des Wertes.

Wir setzen somit in grofser Annäherung

$$a = a_0 \sqrt[3]{\frac{1}{\mathfrak{c}}} = a_0 \,.\, 6{,}607\,. \tag{5}$$

Durch diese Relation ist zunächst der Äquatorialradius der Grenzfläche in Bezug zu demjenigen der Meeresfläche gebracht.

Um nun auch die Form der Grenzfläche zu ermitteln, schreiben wir statt (1):

$$U = \frac{Mk^2}{r}\left\{1 + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi\right\}; \tag{6}$$

dieser Ausdruck entspricht genau demjenigen Falle, dafs die Erde nach aufsen wie eine homogene Kugel anzieht, was in dem beträchtlichen Abstande der Grenzfläche bereits sehr nahe zutrifft, wie auch das Vorhergehende hinlänglich zeigt. Aus (6) folgt unmittelbar

$$r = \frac{Mk^2}{U}\left\{1 + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi\right\}. \tag{6*}$$

Da nun für $\cos\varphi =$ null r in die kleine Halbaxe b übergeht, so ist $b = Mk^2 : U$. Führen wir in (6*) b ein, sowie ferner die aus (2) folgende und für (6) modifizierte Relation $Mk^2 = \omega^2 a^3$, so ergiebt sich

$$\frac{r}{a} = \frac{b}{a}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^3\cos^2\varphi\right\}, \tag{7}$$

welche Gleichung für $r = a$ und $\cos\varphi = 1$ zeigt, dafs $b : a = {}^2/_3$ ist. *Die Abplattung* $(a - b) : a$ der Grenzfläche beträgt hiernach

$$\frac{1}{3}\,.\,^{*})$$

---

*) *Laplace* berechnet diese Abplattung in der *Mécanique céleste*, t. II., l. III, chap. VII p. 169. Für eine beliebige Niveaufläche setzt er, wenn $a = 1$ genommen wird und $\varkappa$ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator ist, als Gleichung an:

$$r^3 - \frac{2r}{\varkappa\, b\cos^2\varphi} + \frac{2}{\varkappa\cos^2\varphi} = 0,$$

bringt jedoch für den Fall $\varkappa = 1$ die Gleichung nicht auf die einfache Form (8*). *Laplace* bemerkt ausdrücklich, dafs diese Gleichung nur unter Voraussetzung kugelartiger Anziehung gelte. Es ist also selbstverständlich, dafs er sie nicht für die Nähe der physischen Erdoberfläche angewandt haben wollte, wie *Astronom. Nachrichten* Bd. 74 1869 No. 1768 geschehen. Auch unser Citat Bd. 1. S. 18 Z. 24 ist insofern inkorrekt.

Als Gleichung der Grenzfläche (und zugleich als Gleichung ihres Meridianschnittes) erhält man jetzt aus (7):

$$\frac{r}{a} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos^2\varphi\,, \tag{8}$$

oder nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra für die trigonometrische Auflösung der Gleichungen dritten Grades:

$$\frac{r}{a} = 2 \sec\varphi \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 60^0\right)\cdot \tag{8*}$$

Für das Rotationsellipsoid gleicher Abplattung besteht nach Bd. 1 S. 60 (3), da $\delta = (a^2 - b^2) : b^2 = \frac{5}{4}$ wird, die Gleichung:

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5}{4}\sin^2\varphi}}\,. \tag{9}$$

Hiernach ist $\frac{r}{a}$ für die Grenzfläche und das Ellipsoid durch folgende Tabelle gegeben:

φ	Grenzfläche	Ellipsoid
0°	1,000	1,000
15	0,875	0,961
30	0,790	0,873
45	0,732	0,784
60	0,695	0,718
75	0,673	0,679
90	0,667	0,667

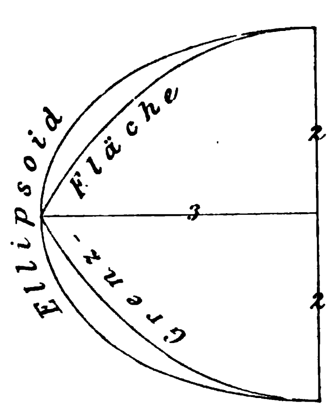


Fig. 5.

Vergl. hierzu Fig. 5. Die gröfste Differenz der $\frac{r}{a}$ liegt bei $\varphi = 21{,}2^0$, wo deren Werte gleich sind 0,8359 bezw. 0,9271 mit 0,0912 Differenz.

Eine sehr wesentliche Abweichung zeigt die Grenzfläche von dem Ellipsoid insofern als sie am Äquator in eine Kante ausläuft. Hier ist die Fläche gegen die Äquatorebene unter 60° geneigt. Um dieses Resultat zu erlangen, genügt es, aus (8*) $dr : r\,d\varphi$ für $\varphi =$ null zu bilden, d. i. die Kotangente des Neigungswinkels der Meridiankurve gegen den Radiusvektor. Übrigens hat nur die Grenzfläche diese Kante; bei den innerhalb in ihrer Nähe gelegenen Niveauflächen findet, wie die Untersuchung

zeigt, am Äquator mit abnehmenden Werten φ nur eine sehr rasche Abnahme des Krümmungsradius in der Ebene der Meridiankurve statt.

Ist $\varkappa$ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator, so ist daselbst der Krümmungsradius im Meridian gleich $a(1-\varkappa)$.

§ 23. Historische Notizen zu dem Theorem von Clairaut; Newton.

Die wichtigsten Epochen in der Entwicklung der Theorie für die Anwendung der Schweremessungen im Meeresniveau auf die Bestimmung der Erdgestalt bezeichnen die Namen *Newton*, *Clairaut* und *Stokes*. Machte der erste eigentlich nur einen nicht ganz vollständigen Versuch, das Gravitationsgesetz auch hier zu verwerten, wobei jedoch wegen Voraussetzung der Homogenität der Erde kein zutreffendes Resultat möglich war, so gab *Clairaut* in seinem Theorem eine Formel zur wirklichen Berechnung der Abplattung der Erde aus dem Ergebnis der Schwerebeobachtungen, bei deren Begründung er für die Massen der Erde nur noch eine gewisse regelmäſsige Schichtung voraussetzte, jedoch in solcher Allgemeinheit, daſs auch eine hydrostatischen Gesetzen genügende Schichtung inbegriffen ist. Von allen diesen Annahmen, insoweit sie das Erdinnere betreffen, befreite endlich *Stokes* die Entwicklung des Theorems; nur über die Massenlagerung der Erdrinde bis zur Tiefe $\mathfrak{a}R$, wenn R einen mittleren Erdradius und $\mathfrak{a}$ die Abplattung bezeichnet, sind auch hier Voraussetzungen vorhanden.

Indem wir uns nun zu einer eingehenden Besprechung der geschichtlichen Entwicklung wenden, beginnen wir mit den bezüglichen Sätzen und Berechnungen von *Newton* (1642—1727), die sich in seinem Werke *Philosophiae naturalis principia mathematica* vorfinden. Ohne irgendwie die Frage zu berühren, ob die Oberfläche eine Gleichgewichtsfläche sein kann, denkt sich *Newton* in einem homogenen Rotationsellipsoid, dessen polare und äquatoriale Halbaxe im Verhältnis 100 : 101 stehen, zwei Kanäle vom Zentrum C nach dem einen Pol P und nach einem Äquatorpunkt A, gefüllt mit Wasser, und untersucht ihr Gewicht (den hydrostatischen Druck) in C mit Rücksicht auf die Zentrifugalkraft. Da bei jenem Axenverhältnisse die Gewichte sich nicht gleich herausstellen, ändert er dasselbe angemessen ab, (in *Wolfers* Übersetzung a. a. O. § 23 S. 401 unten bis S. 403). Der Kalkül vernachlässigt in der Regel die zweite Potenz der Abplattung.

Von den erforderlichen Hilfssätzen betrifft ein erster das Verhältnis, in welchem die Anziehung des abgeplatteten Ellipsoids zu der Anziehung einer mit dem Polarhalbmesser beschriebenen Kugel auf einen der Pole steht. Um es zu ermitteln, wird zuerst ein Ausdruck für die Anziehung einer Kreisfläche auf einen senkrecht über ihrem Mittelpunkt befindlichen Punkt abgeleitet und mit Hilfe dessen ein Ausdruck für das erwähnte Verhältnis der Anziehungen des

Ellipsoids und der Kugel. Die betreffenden Angaben sind ziemlich dürftig, da *Newton* die erforderlichen Summierungen auf Flächenberechnungen zurückführt, diese aber dem Leser überläfst (bei *Wolfers* S. 214 § 136 und S. 217 § 137). Als numerischen Wert des Verhältnisses giebt er 126 : 125.

Die Anziehung des abgeplatteten Ellipsoids auf einen Äquatorpunkt ergiebt sich mittelst des vorigen Satzes, weil derselbe in der angegebenen Annäherung eine unmittelbare Anwendung auch auf ein längliches Rotationsellipsoid gestattet und jene Anziehung mit gleicher Annäherung als geometrisches Mittel der Anziehungen einer mit dem Äquatorialradius AC beschriebenen Kugel und eines länglichen Ellipsoids mit der Polarhalbaxe AC aufgefafst werden kann. Die Anziehung des abgeplatteten Ellipsoids auf einen Äquatorpunkt verhält sich daher zu derselben Anziehung der umschriebenen Kugel wie 125,5 : 126, und da sich diese letztere Anziehung zu derjenigen der eingeschriebenen Kugel auf einen Pol wie 101 : 100 verhält, so folgt als Verhältnis der Anziehungen des abgeplatteten Ellipsoids auf Pol und Äquatorpunkt 501 : 500.

Ein anderer Hilfssatz lehrt, dafs eine homogene, von zwei ähnlichen, ähnlich liegenden und konzentrischen Ellipsoiden begrenzte Schale einen Punkt des Hohlraumes nicht anzieht und dafs hiernach die Anziehung eines Ellipsoids auf verschiedene Punkte eines Radiusvektors deren Abstand vom Zentrum proportional ist. Die Untersuchung der Anziehung jener Schale erfolgt in ähnlicher Weise durch Zerlegung in gegenüberliegende, gleich stark anziehende Elemente wie für die Kugelschale, siehe § 6 S. 63, (bei *Wolfers* S. 217 unten).

Mittelst des letztgenannten Hilfssatzes findet sich für die Gewichte der beiden Kanäle nach Pol und Äquator, abgesehen von der Zentrifugalkraft, das Verhältnis 100.501 : 101.500 oder 501 : 505. Man bemerkt leicht, wie man hieraus das entsprechende Gewichtsverhältnis bei anderem Axenverhältnis abzuleiten hat. Ist insbesondere $^1/_{289}$ das Verhältnis von Zentrifugalkraft und Schwerkraft am Äquator, so kann man setzen

$$\mathfrak{a} : \frac{1}{101} = \frac{1}{289} : \frac{4}{505},$$

um diejenige Abplattung $\mathfrak{a}$ zu finden, für welche das Mehrgewicht des äquatorialen Kanals im Vergleiche zum polaren ohne Rücksicht auf die Zentrifugalkraft gerade soviel beträgt, als letztere aufhebt. Wenn *Newton* $^1/_{230}$ für $\mathfrak{a}$ angiebt, so liegt der Unterschied mit dem aus vorstehender Proportion folgenden Wert $^1/_{231}$ innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze. (Was eine strengere Rechnung giebt, werden wir demnächst anführen.) Die Zahl $^1/_{231}$ bezeichnet auch den Überschufs der Schwerkraft am Pol über diejenige am Äquator in Bruchteilen der letzteren.

Auf eine homogene, feste und mit dünner Flüssigkeitsschicht bedeckte Erde ist die *Newton*sche Rechnung insofern anwendbar, als das Gleichgewicht durch Einfügung der beiden Kanäle nicht gestört werden kann. Es entging jedoch *Newton* nicht, daſs die thatsächliche Änderung der Schwerkraft auf der Erdoberfläche mit der geographischen Breite einem homogenen Rotationsellipsoid nicht entspricht. Er sagt darüber (*Wolfers* Übersetzung S. 408 o., in der dritten Ausgabe des lateinischen Originals [von *Cotes* 1714] S. 385 u. und 386 o.): „Der Überschuſs der Pendellänge in Paris über die in diesen Breiten (nämlich in -7^0 bis $+20^0$) beobachteten Längen des isochronischen Pendels ist ein wenig gröſser als die oben berechnete (nämlich dem homogenen Rotationsellipsoid mit $^1/_{230}$ Abplattung zukommende) Tabelle der Pendellängen angiebt. Die Erde muſs also am Äquator etwas stärker erhöht sein, als die frühere Rechnung es ergiebt und ihre Materie muſs in der Nähe des Mittelpunktes dichter sein als nahe an ihrer Oberfläche.“ Daſs die erstere Schluſsfolgerung nicht richtig ist, bemerkt schon *Clairaut* S. 157 seiner *Figure de la Terre* und er bemüht sich insbesondere S. 253 § LI für *Newtons* Schluſs eine Erklärung zu finden. Unsere Notiz Bd. 1 S. 11 Z. 12 u. 11 von u. bedarf also insofern der Berichtigung, als *Newton* zwar die Verhältnisse bei nicht homogener Erde in betracht zog, jedoch nur teilweise zu richtigen Resultaten gelangte.

Auf den ersten Blick erscheint es in der That befremdlich, daſs der gröſseren Variation der Schwere eine kleinere Abplattung entspricht. Diese Aussage von *Clairauts* Theorem erscheint auch offenbar dem Verfasser des Artikels „*Erde*“ in *Gehlers physik. Wörterbuch* Bd. 3 S. 915—919 nicht ganz klar, weshalb sich bereits *Borenius* in seiner S. 87 genannten Abhandlung S. 2 veranlaſst sieht, dieselbe zu besprechen. Jeder Zweifel hebt sich, wenn man beachtet, daſs eine Änderung der Abplattung bei konstantem $\mathfrak{c}$ auch eine veränderte Massenverteilung zur Erhaltung des Gleichgewichts fordert. Vergl. hierzu die Gleichungen (7) u. (8) § 11 S. 76.

§ 24. Clairauts Darstellung des Newtonschen Problems.

In seinem Werke über die Figur der Erde beschäftigt sich *Clairaut* auch mit einer strengen Darstellung des Falles der Homogenität, welchen *Newton* behandelt hatte.*) Diese Darstellung ist überaus interessant durch die Einfachheit des Beweises für die Möglichkeit des Gleichgewichts. Er geht von folgendem Satze aus:

Hat man zwei ähnliche, ähnlichliegende und konzentrische Ellipsen, Fig. 6, deren eines Axenpaar durch $AQCB$ bezeichnet ist, so ist $2QR = 2QS = MK \pm ML$, jenachdem K und L auf derselben oder

*) *Clairaut, Theorie de la Figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique.* Paris 1743. Unverändert abgedruckt 1808. S. 158—195 § I—XXI.

Übrigens gab *Clairaut* schon in den *Philosophical Transactions* von 1737 (Bd. VIII S. 119 u. ff. der Ausgabe von 1809) eine Vervollständigung von *Newtons* Theorie für eine homogene Erde.

auf verschiedenen Seiten der zu AB normalen Tangente QM liegen, wenn zugleich ML parallel zu QR, MK parallel zu QS ist, beide Linienpaare aber zu AB entgegengesetzt gleiche Neigung haben.

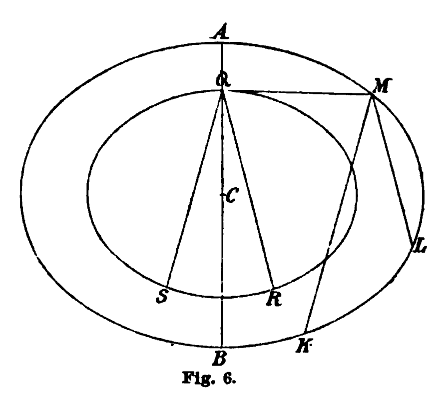


Fig. 6.

Dieser Satz läfst sich für die Kreisform leicht beweisen und hieraus durch Projektion auf die Ellipsenform übertragen. Verbindet man aber mit demselben den Satz, dafs die Anziehung zweier Pyramiden mit gleichem differentialen körperlichen Winkel auf ihre Spitzen proportional ihren Längen ist, so wird durch Zerlegung der Körper in Differentialpyramiden leicht erkannt, dafs der Punkt M der Oberfläche eines Rotationsellipsoides, dessen Meridianschnitt Fig. 7 zeigt, in den Richtungen MT und MQ parallel zu den beiden Axen gerade so angezogen wird, wie bezw. der Punkt Q von einem zum gegebenen ähnlichen, ähnlich liegenden und konzentrischen Rotationsellipsoid, dessen Oberfläche durch Q führt, und der Punkt T von einem ebensolchen Ellipsoid durch T.

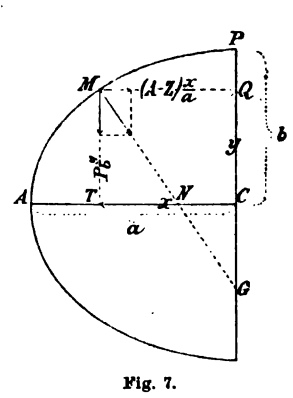


Fig. 7.

Nennt man P die Anziehung in P, A die Anziehung und Z die Zentrifugalkraft in A, beachtet man ferner, dafs die Resultante der auf M wirkenden Kräfte die Richtung der Normale MG haben mufs, so folgt sofort mit Benutzung einer leicht zu entwickelnden Relation für QG, als Bedingung des Gleichgewichts die merkwürdige Gleichung:

$$(A - Z)\, a = P b\,. \tag{1}$$

Die Möglichkeit des Gleichgewichts beim homogenen Rotationsellipsoid erhellt also bereits ohne Kenntnis der Ausdrücke für die Anziehung, lediglich als Folge des Umstandes, dafs die Koordinaten von M aus der Gleichung verschwinden.

Die weitere Rechnung bietet insofern weniger Bemerkenswertes, als *Clairaut* A und P, ausgehend von einer Zerlegung des Ellipsoids in Differentialpyramiden, ganz in jetzt üblicher Weise durch Integration berechnet und zu den bekannten Ausdrücken gelangt, welche in unseren Bezeichnungen formell unerheblich verändert lauten:

$$A = 2\pi k^2 a \frac{(1+e'^2)\arctan e' - e'}{e'^3}$$
$$P = 4\pi k^2 b \frac{(1+e'^2)(e' - \arctan e')}{e'^3}\,, \tag{2}$$

die Dichtigkeit der Masse gleich 1 gesetzt und $(a^2 - b^2) : b^2$ mit e'^2 bezeichnet. Wendet man die Reihenentwicklung für *arctan* an und setzt $Z : (A - Z) = \mathfrak{c}$, so giebt obige Gleichung

$$\mathfrak{c} = \frac{2}{5} e'^2 - \frac{18}{175} e'^4 + \cdots \tag{3}$$

oder, wenn man mit *Clairaut* $(a - b) : b$ einführt und darauf reduziert:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{5}{4}\mathfrak{c}\left(1 + \frac{1}{56}\mathfrak{c} + \ldots\right). \tag{4}$$

Den kleinen Bruch in der Klammer vernachlässigt *Clairaut*. Beachtet man noch die Beziehung von $(a - b) : b$ zur Abplattung $\mathfrak{a}$, so wird mit großer Schärfe

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} = \frac{4}{5\mathfrak{c}} + 1 + \ldots. \tag{5}$$

Setzt man also

mit *Newton*	$\mathfrak{c} = \frac{1}{289}$	, so folgt	$\frac{1}{\mathfrak{a}} =$	232,2
mit *Clairaut*	„ $\frac{1}{287{,}52}$	„	„	231,0
nach S. 84 (2*)	„ $\frac{1}{288{,}41}$	„	„	231,7 .

Clairaut zeigt noch, dafs die Schwerkraft auf dem homogenen, im Gleichgewicht befindlichen Rotationsellipsoid proportional der Normale MN (d. h. nach Bd. 1 S. 40 proportional zu $1 : \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$) ist, was man, ohne hier seiner etwas umständlichen Beweisform zu folgen, leicht aus Dreieck MTN Fig. 7 entnimmt.

Zu derselben Formel für $\frac{1}{\mathfrak{a}}$ gelangt man natürlich durch Einführung der Werte

$$K = \frac{1}{5} a^2 \mathfrak{a}(2 - \mathfrak{a})$$
$$D = \frac{3}{2} a^4 \mathfrak{a}^2\,, \tag{6}$$

welche dem Potential des homogenen Rotationsellipsoids angehören, in die Gleichung (6) § 15 S. 83. Das Potential des homogenen Rotationsellipsoids ist weiterhin abgeleitet. Durch Vergleichung der dafür in § 31 (8) dieses Kapitels gegebenen Formel mit dem Ausdruck für U in § 12 (1) S. 77 kann man die Angaben für K und D verifizieren.

§ 25. Huygens (1629—1695). Da uns das Werk*), in welchem

---

*) *Huygens, Traité de la Lumière. Avec un Discours de la Cause de la Pesanteur.* 1690.

Hierbei sei bemerkt, dafs *van Tricht* S. 6 des *Jahrb. der Fortschr. d. Mathematik* von 1877 (publ. 1880) für die angewandte Schreibweise des Namens des Autors eintritt, weil er selbst sich so geschrieben habe.

Huygens nach *Todhunter* seine Berechnung der Erdabplattung gegeben hat, nicht vorliegt, so beschränken wir uns darauf nach dessen *History of the mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth* Bd. 1 S. VI und 28 mitzuteilen, dafs *Huygens* sich hierbei ebenfalls wie *Newton* der Kanäle bedient. Aus dem Wert $\mathfrak{c} = {}^1/_{289}$ berechnet sich nach ihm $\mathfrak{a} = {}^1/_{578}$ sowohl unter der Annahme, dafs die Zentralanziehung (Bd. 1 S. 11) konstant, als irgendwie von der Distanz abhängig ist. Die Oberfläche des Sphäroids stellt sich normal zur Resultante aus Zentralanziehung und Zentrifugalkraft. Die Gröfse der Resultante, die Schwere, variiert vom Pol bis zum Äquator, wenn man die Zentralanziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Distanz setzt, um ${}^2/_{289}$, was allerdings den Verhältnissen der Erde nicht entspricht, wie *Huygens* keineswegs übersieht.

Das *Huygens*sche Problem wird auch ausführlich von *Clairaut* in seiner *Figure de la Terre* behandelt (S. 28—32 § XIV u. XV; S. 139 bis 143 § LXXIII u. LXXIV). Er findet, dafs eine Gleichgewichtsoberfläche nur möglich ist, wenn die Zentralkraft lediglich eine Funktion von der Distanz ist und z. B. nicht etwa noch von der Richtung der Kraft. Indem er sodann ebenfalls einen polaren und äquatorialen Kanal betrachtet, bedient er sich in übersichtlicher Weise folgender graphischen Methode. In Fig. 8 sei die Ordinate QQ' proportional der Anziehung in der beliebigen Distanz CQ. Dann stellt die Fläche $CAC'A'$ über dem äquatorialen Halbmesser CA das Gewicht (den hydrostatischen Druck) des äquatorialen Kanals für die Dichtigkeit 1 und den Querschnitt 1 vor, ohne Rücksicht auf die Zentrifugalkraft. Wird diese am Äquator durch AA'' ausgedrückt, so giebt das Dreieck $AA''C$ die Gewichtsverminderung durch die Zentrifugalkraft. Es mufs nun das Gewicht $CA''C'A'$ des äquatorialen Kanals gleich sein demjenigen des polaren, d. i. $CPC'P'$, oder was dasselbe ist, für jedes nur von der Distanz abhängige Gesetz der Zentralanziehung mufs Fläche $AA''C$ der Fläche $APA'P'$ gleich sein. Bezeichnet Z wieder die Zentrifugalkraft und A die Anziehung am Äquator, so ist hiermit angenähert $\frac{1}{2} Za = a\mathfrak{a}A$, oder ebenso genau $\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\mathfrak{c}$.

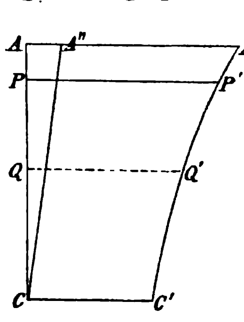


Fig. 8.

Die Potentialtheorie zeigt sehr bequem die Resultate der *Clairaut*schen Untersuchung. Ist W das Potential der Schwere, V dasjenige der Anziehung, so folgt

$$W = V + \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2 \varphi$$

bei der üblichen Bedeutung von r, ω und φ. $W =$ Konstante ist die Gleichung einer Niveaufläche, also auch der Gleichgewichtsoberfläche.

Giebt es nun kein Potential V, so existiert auch keine Gleichgewichtsoberfläche. Ein V kann aber nur existieren als Funktion von r allein, denn da $\frac{\partial V}{\partial r}$ die ganze Anziehung ist, so mufs der Differentialquotient von V nach φ null sein, weil derselbe eine zur radialen Richtung normale Komponente vorstellt.

Gilt nun V_a für den Äquator, V_p für den Pol der Gleichgewichtsoberfläche, so wird $V_a + \frac{1}{2} a^2 \omega^2 = V_p$. Da $V_p - V_a$ sehr nahe $A a \mathfrak{a}$ ist, erhält man hieraus $\mathfrak{a}$ wie oben.

§ 26. **Clairaut** (1713 — 1765). Der erste Teil der Schrift *Theorie de la Figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique* ist der Hydrostatik gewidmet, vor allem deren Prinzipien. Bisher hatte man bei der Betrachtung flüssiger, rotierender Sphäroide die Gestalt der Oberfläche entweder nach dem Prinzip von *Huygens*, dafs sie normal zur Resultante der Kräfte stehen müsse, berechnet oder mittelst des Prinzips von *Newton*, dafs geradlinige Kanäle, welche von der Oberfläche nach dem Zentrum führen, gleiches Gewicht besitzen müssen. *Clairaut* zeigt aber, dafs diese Prinzipien allein nicht erkennen lassen, ob thatsächlich Gleichgewicht besteht. Dieses ist in der That nur dann möglich, wenn die Komponenten der nach drei rechtwinkeligen Axen zerlegten Resultante der Kräfte in einem Punkte sich als die bezüglichen partiellen Differentialquotienten einer Funktion der Koordinaten dieses Punktes auffassen lassen, so dafs also zum Bestehen des Gleichgewichtes die Existenz eines Potentials der Kräfte erforderlich ist. *Clairaut* erkannte dies wenigstens dem Wesen nach, ohne jedoch den Begriff des Potentials zu erfassen.*) Er weist es auf doppelte Art nach, einmal ausgehend von dem Prinzip, dafs jeder geschlossene Kanal von beliebiger Form im Gleichgewicht sein müsse, sodann von dem Prinzip aus, dafs der Abstand zweier unendlich benachbarten Niveauflächen überall im umgekehrten Verhältnis zu der Kraft daselbst stehe. Mit Hilfe dessen und an der Hand der thatsächlichen Schwereverhältnisse auf der Erdoberfläche gelingt es dann, die Unhaltbarkeit der Annahme einer Zentralanziehung, welchem Gesetze sie auch folge, nachzuweisen. [Vergl. weiter die Notizen S. 10 § 8 und S. 108 § 25.]

Aus der Einleitung der Schrift geht hervor, weshalb *Clairaut* ausführlich bei der Hypothese der Zentralanziehung verweilt. Darnach entspricht dieselbe der Wirbeltheorie des *Descartes***), welche nur sehr allmählich von *Newtons* Gravitationstheorie verdrängt wurde.

*) Vergl. unsere Anmerkung zu Kap. 1 § 8 S. 10. Dafs die Komponenten der Anziehung beim *Newton*schen Attraktionsgesetz partielle Differentialquotienten sind, war hiernach wohl bereits *Clairaut* bekannt. Es wird diese Erkenntnis sonst *Lagrange* zugeschrieben, von dem sie in der That zuerst frei von hydrostatischen Nebenbeziehungen deutlich ausgesprochen wird.

**) Vergl. über dieselbe z. B. *Whewell, Geschichte der induktiven Wissen schaften*, Bd. 2 S. 186 u. ff.

Es galt also nicht nur diese auf die Probleme der Naturwissenschaft anzuwenden, sondern auch jene direkt zu widerlegen. Nach dem Bekanntwerden der *Newton*schen Untersuchungen sahen sich übrigens die Anhänger jener Theorie bereits zu dem Zugeständnis genötigt, in der Sonne und den Hauptplaneten Gravitationszentren anzunehmen und die Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vorauszusetzen, während anfangs zur Erklärung der als konstant betrachteten Erdschwere *ein* Gravitationszentrum mit konstanter Wirkung ausreichte.

Der zweite Teil des *Clairaut*schen Werkes enthält in den Paragraphen XXIII bis XXIX, XXXVII und XLI bis XLIX S. 198 bis 218, 225 und 233 bis 250 die speziellen Untersuchungen über die Erdgestalt auf grund des *Newton*schen Anziehungsgesetzes. *Clairaut* bedient sich dabei überall der Differential- und Integralrechnung in der jetzt üblichen Weise, vereinfacht die Betrachtung aber wesentlich dadurch, dafs er nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt, diese somit strenggenommen als unendlich kleine Gröfse behandelt. Entsprechend wird das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator wie eine unendlich kleine Gröfse von derselben Ordnung eingeführt.

Der Gang der Entwicklung ist nun in den Hauptpunkten folgender. Zunächst wird die Anziehung einer aus homogenen, konzentrischen Schichten gebildeten Kugel auf einen Punkt aufserhalb ermittelt; sodann wird ein Ausdruck für diejenige Komponente der Anziehung einer Kreisfläche auf einen nahezu normal über ihrem Mittelpunkt gelegenen Punkt aufgestellt, welche parallel zur Kreisfläche (in der Richtung der Excentricität) wirkt, und mittelst dieses Satzes dann zunächst für ein homogenes, abgeplattetes Rotationsellipsoid, darauf aber für ein geschichtetes Rotationsellipsoid diejenige Komponente der Anziehung auf einen aufserhalb gelegenen Punkt berechnet, welche in die Richtung normal zum Radiusvektor fällt. Das geschichtete Rotationsellipsoid besteht aus einem Kern und einer beliebig dicken homogenen Flüssigkeitsschicht; in dem Kern sind die Flächen gleicher Dichte konzentrische, koaxiale Rotationsellipsoide, deren Abplattung und Dichtigkeit beliebige Funktionen der kleinen Halbaxe sind. Mittelst dieser Entwicklungen wird die Bedingungsgleichung dafür, dafs die Resultante aus Anziehung und Zentrifugalkraft auf der Oberfläche überall normal steht, aufgestellt und schliefslich durch die Annahme vereinfacht, dafs die Dicke der äufsersten Schicht unendlich klein sei. Bezeichnen wir mit b, $\mathfrak{a}$ und Θ die kleine Halbaxe, Abplattung und Dichtigkeit einer Fläche gleicher Dichtigkeit, mit b_0 und $\mathfrak{a}_0$ die ersteren beiden Gröfsen für die Oberfläche und mit $\mathfrak{c}_0$ das Verhältnis der Schwerkraft zur Zentrifugalkraft am Äquator derselben, so lautet die Bedingungsgleichung:

$$10 A \mathfrak{a}_0 - 2 D = 5 A \mathfrak{c}_0 \tag{1}$$

für

$$A = \frac{1}{b_0^2} \int_0^{b_0} \Theta\, b^2\, db\,, \qquad D = \frac{1}{b_0^4} \int_0^{b_0} \Theta\, d\,(b^5 \mathfrak{a})\,. \tag{2}$$

Bis dahin durfte die Anziehung des Ellipsoides in radialer Richtung mit Vernachlässigung der Abplattung berechnet werden. Diese Anziehung wird nunmehr genauer ermittelt und dabei nachgewiesen, dafs die Anziehung auf einen äufseren Punkt M ebenso grofs ist, wie diejenige eines Rotationsellipsoides, dessen Rotationsaxe nach Lage und Gröfse zusammenfällt mit dem Radiusvektor NC des gegebenen Ellipsoids in Richtung MC, und dessen Masse derjenigen des letzteren gleich ist. Zum Zwecke des Nachweises wird das gegebene Ellipsoid durch unendlich viele parallele Schnitte zerlegt, welche zu NC konjugiert liegen und gezeigt, dafs die zentrale Anziehung einer nahezu kreisförmigen Ellipse auf einen Punkt, der nahezu normal über deren Mittelpunkt liegt, der Anziehung eines flächengleichen Kreises, über dessen Mittelpunkt der angezogene Punkt genau normal sich befindet, gleich gesetzt werden kann. Als Anziehung eines abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoids mit der Dichtigkeit 1 auf einen Punkt in der Drehaxe mit dem Zentrumsabstand r wird erhalten

$$4 \pi k^2 \left\{ \frac{b^3}{3 r^2} + \left[\frac{2 b^3}{3 r^2} - \frac{2 b^5}{5 r^4} \right] \mathfrak{a} \right\}. \tag{3}$$

Hieraus folgt mittelst des vorigen Satzes (da innerhalb der festgesetzten Genauigkeit der Ausdruck (3) auch für negative $\mathfrak{a}$ gilt) die Anziehung desselben Ellipsoids auf einen Punkt der Äquatorebene gleich

$$4 \pi k^2 \left\{ \frac{b^3}{3 r^2} + \left[\frac{2 b^3}{3 r^2} + \frac{b^5}{5 r^4} \right] \mathfrak{a} \right\}, \tag{4}$$

und aus (3) und (4) leitet sich endlich ab, dafs die Anziehung eines wie oben angegeben geschichteten Ellipsoides auf einen Punkt des Äquators kleiner ist als auf einen der Pole um

$$4 \pi k^2 \mathfrak{a}_0 \left(2 A - \frac{3}{5} D \right). \tag{5}$$

Fügt man hierzu für die Zentrifugalkraft $4 \pi k^2 A \mathfrak{c}_0$, so ergiebt sich der Überschufs der Schwerkraft am Pol über diejenige am Äquator. Denselben im Verhältnis zur Schwerkraft mit $\mathfrak{b}_0$ bezeichnend, erhalten wir also

$$\mathfrak{b}_0 = 2 \mathfrak{a}_0 - \frac{3}{5} \frac{D}{A} + \mathfrak{c}_0\,, \tag{6}$$

hieraus und aus (1) aber unter Elimination von $D : A$ das Theorem

$$\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0 = \frac{5}{2} \mathfrak{c}_0\,.$$

Noch immer vorkommender fehlerhaften Auffassung wegen mufs nochmals betont werden, dafs die Schichtung des Rotationsellipsoids keineswegs nach ähnlichen Flächen gedacht ist. Allerdings hat *Clairaut* in einer Abhandlung in den *Phil. Transactions* von 1738 (Ausgabe von 1809: Bd. VIII S. 207) sein Theorem zuerst für solche bewiesen, aber sein Buch von 1743 enthält die mit Rücksicht auf eine wesentlich flüssige oder flüssig gewesene Erde wichtige Erweiterung des Beweises, ohne ihn jedoch lediglich auf diesen Fall zu beschränken. S. 265 § LV wird noch bewiesen, dafs man die Trennungsflächen der Schichten einer rotierenden Flüssigkeitsmasse in hier ausreichender Annäherung, d. h. abgesehen von der zweiten Potenz der Abplattung, als Rotationsellipsoide betrachten darf — oder genauer gesagt, es wird bewiesen, dafs die Voraussetzung dieser Form zu keinem Widerspruch führt.

Die Gleichung (1) entspricht der Formel (2) § 12 S. 77; sie giebt

$$\mathfrak{a}_0 = \frac{1}{5}\frac{D}{A} + \frac{\mathfrak{c}_0}{2},$$

während jene $\frac{3}{2} K : a_0^2$ als erstes Glied hat. Da nun fürs homogene Ellipsoid mit der Dichtigkeit 1 in hier genügender Annäherung

$$KM = \frac{2}{5} b^2 \mathfrak{a} M = \frac{8}{15} \pi b^5 \mathfrak{a} \quad \text{mit} \quad M = \frac{4}{3} \pi b^3$$

ist (vergl. weiterhin § 31), so wird fürs geschichtete Ellipsoid in gleicher Annäherung

$$M = 4\pi b_0^2 A \qquad KM = \frac{8}{15} \pi b_0^4 D \qquad \frac{3}{2}\frac{K}{a_0^2} = \frac{1}{5}\frac{D}{A}.$$

Setzt man in dem Potential der Anziehung des homogenen Rotationsellipsoids

$$\frac{Mk^2}{r}\left\{1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\sin^2\varphi) + \dots\right\}$$

M genauer gleich $\frac{4}{3}\pi a^2 b$, so verifizieren sich auch (3) und (4) leicht als partielle Differentialquotienten nach r für $\varphi = 90^0$ und $\varphi =$ null.

§ 27. **Die Einführung des Potentials** in die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Schwerkraft und Erdgestalt beginnt gegen Ende des vorigen Jahrhunderts (zunächst ohne Einführung des Namens Potential). Nach *Todhunter*, *History of Attraction* Bd. 2 S. 95—106, hat *Legendre* (1752—1833) in den Memoiren der französischen Akademie der Wissenschaften von 1789 (publ. 1793) das *Clairaut*sche Theorem mit zweiten Potenzen der Abplattung abgeleitet und zwar mit Hilfe einer Entwicklung von V, dem Potential der Anziehung der wie bei *Clairaut* geschichteten Erde, nach negativen Potenzen des Radiusvektors des angezogenen Punktes, wobei die Konvergenz allerdings unmittelbar evident nur aufserhalb der umschreibenden Kugel ist (vergl. § 9 S. 70). Die Art der Entwicklung

gestattet aber, wie hervorgehoben wird, in das Theorem Glieder beliebig hoher Ordnung aufzunehmen und auch den Ausdruck für den Radiusvektor der Oberfläche aufzustellen.

Laplace (1749—1827) beschäftigt sich in der *Mécanique céleste* sowohl im dritten Buche (2. Bd. 1799) wie im elften Buche (5. Bd. 1825) mit der Figur der Erde und ihrer Beziehung zur Schwerkraft. Am ersteren Orte S. 99—103 wird bei Ableitung des *Clairaut*schen Theorems nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt; im Ausdruck für den Radiusvektor der Flächen gleicher Dichtigkeit wird demgemäfs auch nur die erste Potenz der Abplattung angesetzt, sodafs sie innerhalb dieser Genauigkeit Rotationsellipsoiden entsprechen. Sie werden übrigens so gewählt, wie die Hydrostatik für flüssigen Zustand verlangt. S. 105—108 behandeln die Weiterentwicklung bis zur zweiten Potenz der Abplattung einschliefslich, ohne spezielles Eingehen auf *Clairauts* Theorem. Im Bd. 5 S. 22—57 ist über die Flächen gleicher Dichtigkeit weiter keine Annahme gemacht, als diejenige, dafs sie Rotationsflächen seien. Aufserdem ist bei den Untersuchungen über die Figur der mathematischen Erdoberfläche überhaupt sogar auf die irreguläre Bedeckung des Festlandes durch das Meer Rücksicht genommen.

Der Ausdruck für V aufserhalb der umschreibenden Kugel wird stillschweigend als bis zur Oberfläche konvergent betrachtet.

Die Entwicklungen in der *Méc. cél.* und in einigen vorausgehenden Abhandlungen von *Legendre* und *Laplace* (vergl. *Todhunter* a. a. O. Bd. 2. S. 23, 26, 43 und 44) sind dadurch epochemachend, dafs bei denselben die Kugelfunktionen oder *Laplace*schen Koefficienten, welche sich später für die mathematische Physik von grofser Wichtigkeit erwiesen, auftreten. Nach *Todhunter* a. a. O. Bd. 2 S. 23 gebührt *Legendre* die Ehre der Einführung der Kugelfunktionen.

Eduard Schmidt giebt im ersten Teile seines *Lehrbuchs der mathematischen Geographie* (Göttingen 1829) S. 326—339 eine Ableitung des *Clairaut*schen Theorems für die Voraussetzung einer Schichtung, welche auch im Falle des Flüssigseins bestehen bleiben würde; doch wird nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt. Es ist also wesentlich wieder die Darstellung des Theorems durch *Laplace*, *Méc. cél.*, l. III. Die Entwicklung von V für Punkte aufserhalb der umschreibenden Kugel wird ebenfalls stillschweigend als bis zur Oberfläche gültig vorausgesetzt.

Paucker giebt 1854 an dem S. 88 mitgeteilten Orte ausführliche Entwicklungen mit Rücksicht auf die 2. Potenz der Abplattung. Als Flächen gleicher Dichtigkeit nimmt er Rotationsflächen, die zwar nicht als Ellipsoide aber als einander ähnliche Flächen vorausgesetzt werden. Aufserdem fehlt auch hier jede Erörterung der Konvergenz der Entwicklung von V.

Nach *Todhunter* hat auch bereits *Jvory* sich mit den höheren Gliedern des *Clairaut*schen Theorems beschäftigt.

Der Umstand, dafs die Ableitung des *Clairaut*schen Theorems mehrfach so erfolgte, als sei die Erde ganz flüssig (während doch schon der Erfinder einen gröfsern Umfang der Gültigkeit sicher stellte), scheint die Meinung erweckt zu haben, als könne man aus der nahen Übereinstimmung der für die Erdabplattung aus Schwere- und aus Gradmessungen erhaltenen Werte schliefsen, die Erde sei wenigstens früher einmal flüssig gewesen.*) Dieses ist die Ursache, weshalb *Stokes*, wie er in seiner bereits Bd. 1 S. 18 citierten Abhandlung *On the Variation of Gravity* 1849 S. 672 sagt, das Potential der Schwerkraft und daraus das mehrgenannte Theorem in einer von allen Voraussetzungen über die Schichtung der Massen im Erdinnern freien Weise abzuleiten versuchte, um dadurch die Meinung über die Bedeutung jener Übereinstimmung zu zerstreuen. Von der Theorie der Kugelfunktionen ausgehend gelangt *Stokes* zu einem Ausdruck, welcher im wesentlichen mit demjenigen unter Nr. (7) S. 60 übereinstimmt.**) Da er diesen Ausdruck ebenfalls über die aus der Entwicklung hervorgehenden Grenzen der Konvergenz hinaus bis zur Oberfläche anwendet, so denkt er sich (S. 676) die ganze Masse der Erde innerhalb einer der Oberfläche eingeschriebenen, zum Erdschwerpunkt konzentrischen Kugelfläche derart verteilt, dafs das Potential W der Schwerkraft aufserhalb der Oberfläche sich nicht ändert: „*The possibility of such a distribution will be justified by the result, provided the series to which we are led prove convergent*“. Ob *Stokes* sich wirklich an einer Stelle mit dem Nachweis der Konvergenz beschäftigt, war uns nicht möglich festzustellen. Infolge dessen haben wir die Theorie nach eigener Ansicht ergänzen müssen; vergl. § 9 S. 70 u. ff. Im nächsten Kapitel kommen wir überdies in weiterer Ausführung auf diese Angelegenheit zurück.

---

*) Einen ähnlichen Irrtum begeht *Hansen* in der Darlegung seiner Berechnung der Mondstörungen, 1. Abt., im 6. Bde. der Abh. der math.-physik. Cl. der Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1864 S. 469. Hier kommt er auf unsere Gl. (8) S. 76, welche schon *Laplace* in der *Méc. cél.* giebt, und er ist der Ansicht, dafs diese Gleichung die Abplattung der Flächen gleicher Dichte im Innern ebensogrofs wie diejenige der Meeresfläche voraussetze, dafs ferner eine Nichtübereinstimmung der Abplattungen eine Unsicherheit in dem aus Gl. (8) berechneten Werte von K erzeuge, da man nur das a der Oberfläche einführen könne. — Im Gegenteil ist aber diese Gleichung ganz unabhängig von unserer Kenntnis über die Massenlagerung im Erdinnern; sie setzt nur voraus, dafs für das Potential W die einfache Form U § 11 (1) S. 75 als genügende Annäherung nachgewiesen ist, wie in den vorangehenden Paragraphen (9) u. (10) geschehen.

**) Eine kurze Darstellung in der *Stokes*schen Manier giebt *Pratt* in der Abh.: *A Treatise on Attractions, Laplace Functions and the Figure of the Earth*, London 1860, p. 89—96.

H. Bruns betrachtet als Normalform für W den von uns § 17 S. 90 citierten einfachen Ausdruck für U. Er erklärt, dafs $W - U$ auf grund der Erfahrungen eine in 1. Annäherung zu vernachlässigende Gröfse sei, ohne jedoch diese Erfahrungen anzugeben. Er zeigt aber weiterhin, wie bei gegebenem Werte der Differenz $W - U$ ein Schlufs auf die wahre Form der Niveauflächen möglich ist. Auf letzteres kommen wir ebenfalls im nächsten Kapitel zu sprechen.

Wir dürfen hier noch eines von uns gegebenen Beweises des *Clairaut*schen Theorems in Kürze gedenken, den wir mittelst eines strengen Ausdrucks für das Potential W der Schwerkraft gegeben haben.*) Diesen Ausdruck kann man im Anschlufs an die Bemerkungen in § 9 S. 70 leicht ableiten. Man mufs nämlich, wenn ein Punkt P' der Erde so nahe liegt, dafs sein Radiusvektor r' kleiner ist als der Radiusvektor r für einen Teil der Erdmasse, zum Teil die Reihe (1), zum Teil die Reihe (2) S. 70 anwenden. Ist A der gröfste Radiusvektor für Erdmassen, so wird danach

$$W = k^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r'^{i+1}} \int_0^{r'} r^i P_i \, dm + r'^i \int_{r'}^{A} \frac{P_i}{r^{i+1}} \, dm \right\} + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi'.$$

Um an der Hand dieses Ausdruckes das *Clairaut*sche Theorem abzuleiten, bedarf es einer Idealisierung der Massenlagerung in der Nähe der Oberfläche nicht mehr, dagegen wird über die Gestalt der mathematischen Oberfläche selbst eine Voraussetzung nötig. Es ist diese: Radiusvektor und Normale derselben weichen nirgends um Winkel von einander ab, welche (in Bogenmafs) Beträge von der Ordnung der Abplattung $\mathfrak{a}$ überschreiten. Die Resultate astronomischer Messungen, vergl. den Schlufs von § 9 S. 71, in Verbindung mit denjenigen der Gradmessungen geben ohne Zweifel der Thatsächlichkeit des Vorausgesetzten einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit und es kann daher dieser Beweis dazu dienen, die Gültigkeit des *Clairaut*schen Theorems ohne Einführung einer Massenidealisierung sicher zu stellen.

§ 28. **Sätze aus der Theorie der Kugelfunktionen.** Für verschiedene weitere Entwicklungen bedürfen wir noch einiger Sätze aus der Lehre von den Kugelfunktionen, wegen deren Begründung wir auf *Dirichlet*s Vorlesungen über diesen Gegenstand verweisen.**)

Bereits § 7 S. 65 ist bei der Einführung der Kugelfunktionen darauf hingewiesen worden, dafs nach *Dirichlet*s Untersuchungen jede beliebige Funktion zweier Variablen, welche wie Breite und Länge auf der Kugelfläche variieren, immer und nur auf eine Weise nach Kugelfunktionen entwickelt werden kann. Die Entwicklung läfst sich, vergl. S. 68 (7), in die Form bringen:

*) Zeitschr. für Vermessungswesen 1878 Bd. 7 S. 121—141.

**) Vergl. den vollständigen Titel S. 14 d. Bds.

$$f(\varphi', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n f(\varphi, \lambda) \cos\varphi \, d\varphi, \tag{1}$$

oder kürzer, wenn wir das Oberflächenelement $\cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda$ mit $d\sigma$ bezeichnen und die Integration nach φ und λ über die ganze Kugelfläche vom Radius 1 erstreckt denken:

$$f(\varphi', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n f(\varphi, \lambda) \, d\sigma. \tag{1*}$$

Hierin bedeuten φ und λ die Variablen Breite und Länge, $f(\varphi, \lambda)$ die darzustellende Funktion und P_n für $n > 1$ die eingangs des 2. Kapitels, insbesondere S. 57 behandelten Entwicklungskoefficienten, für $n = 0$ aber 1.

Die Glieder der Entwicklung (1) heifsen Kugelfunktionen und zwar nullten, ersten, zweiten Ranges u. s. w. für $n = 0, 1, 2 \ldots$ Wie sich für $n =$ null bis vier aus den betreffenden P_n die Kugelfunktionen bilden, ist bereits in § 7 S. 65 angegeben worden.

Bezeichnen nun K_n und K_n' Kugelfunktionen vom n. Range bezw. der Variablen φ, λ und φ', λ', so gelten folgende zwei Sätze. Es ist

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int P_n K_n \, d\sigma = K_n' \tag{2}$$

und ferner für $m \gtrless n$:

$$\int P_m K_n \, d\sigma = 0, \tag{3}$$

sowie allgemeiner

$$\int K_m K_n \, d\sigma = 0. \tag{4}$$

Hierin ist $d\sigma = \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda$ zu setzen und die Integration über alle Werte φ und λ der Kugelfläche zu erstrecken.

Um sich eine deutliche Vorstellung von diesen Sätzen zu machen, ist es für den Leser nützlich, die Ausdrücke P_n S. 57 und K_n' S. 65 zu vergleichen. In (2) geht K_n' aus K_n durch Vertauschung von φ mit φ' und λ mit λ' hervor.

Auf einen direkten Beweis dieser Sätze, die für alle Anwendungen von Kugelfunktionen unentbehrlich sind, müssen wir ebenso wie auf den Beweis des Satzes (1) verzichten, da dies ein tieferes Eindringen in die Natur der Kugelfunktionen und somit mehr Raum erfordert, als wir hierauf mit Rücksicht auf die verhältnismäfsig geringe Bedeutung der von uns beabsichtigten Anwendungen verwenden können. Ein direkter Beweis der Sätze (2) bis (4) findet sich bei *Dirichlet, Vorlesungen*, S. 86—88.

Wenn übrigens Satz (1) feststeht, so folgen wenigstens (2) und (3) unmittelbar. Denn setzt man rechter Hand für $f(\varphi, \lambda)$ die Kugelfunktion K_n und beachtet, dafs das Integral von $P_m K_n \, d\sigma$ eine Kugelfunktion m. Ranges

ist, die rechte Seite sich aber auf K_n' reduzieren mufs, so müssen alle diese Integrale für $m \gtrless n$ verschwinden, womit (3) und (2) hervorgehen.

Aus (3) folgt nun leicht (4): Ein Blick auf S. 57 und 65 zeigt nämlich, dafs P_m und die allgemeine Kugelfunktion K_n aus $(2m+1)$ bezw. $(2n+1)$ Gliedern der Form Funktion φ mal $\cos p\lambda$ oder $\sin p\lambda$ bestehen, wenn p die ganzen Zahlen von null bis m oder n bedeutet.

Verstehen wir nun unter K_n zunächst nur ein Glied mit $\frac{\cos}{\sin} p\lambda$, so fällt im Integral (3) von vornherein der Einflufs aller Glieder von P_m weg, die nicht $\frac{\cos}{\sin} p\lambda$ enthalten, da das Integral von $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \cdot \frac{\cos}{\sin} q\lambda\, d\lambda$ für $p \gtrless q$ null ist, wie man durch Zerlegung des Produkts der trigonometrischen Funktionen in eine Summe erkennt. Jetzt zeigt also (3), dafs auch das Integral desjenigen Gliedes des Produkts $P_m K_n$ verschwindet, welches $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \frac{\cos}{\sin} p\lambda$ enthält, hier offenbar wegen der Integration nach φ.

Das allgemeine Integral (4) setzt sich aber unter dem Integralzeichen aus Gliedern mit $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \frac{\cos}{\sin} q\lambda$, $p \gtrless q$, sowie aus Gliedern mit $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \frac{\cos}{\sin} p\lambda$ zusammen. Die Glieder der ersten Art verschwinden einzeln wegen der Integration nach λ, diejenigen der zweiten Art aber wegen der Integration nach φ, denn sie sind bis auf Koefficienten übereinstimmend mit dem oben betrachteten, $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \frac{\cos}{\sin} p\lambda$ enthaltenden Gliede in $P_m K_n$, $m \lessgtr n$.

§ 29. **Potential des abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoids auf einen Punkt aufserhalb desselben*).** Um dieses Potential in übersichtlicher Form nach Kugelfunktionen entwickelt zu erhalten, ist folgender Weg einzuschlagen.**)

Auf S. 51 erhielten wir unter (8) § 1 für die reziproke Entfernung eines Massenelementes dm mit den Koordinaten x, y, z bezw. r, φ, λ von dem angezogenen Punkte P' mit den Koordinaten x', y', z' bezw. r', φ', λ' die im Falle $r' > r$ gültige Entwicklung nach Kugelfunktionen:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'}\left\{1 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + \left(\frac{r}{r'}\right)^3 P_3 + \left(\frac{r}{r'}\right)^4 P_4 + \ldots\right\}. \quad (1)$$

*) Es erscheint uns nicht überflüssig, im Folgenden anhangsweise das Potential des Rotationsellipsoids zu entwickeln und daran einige Bemerkungen über die Gestalt rotierender Flüssigkeitskörper anzufügen.

**) Entnommen der Schrift: *Wand, die Prinzipien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie.* Leipzig 1871, S. 83. Die Ableitung ist im wesentlichen übereinstimmend mit derjenigen von *Lagrange, Sur les sphéroides elliptiques* [aus den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1798] nach der Mitteilung, welche *Todhunter, History of Attraction* Bd. 2 S. 158 über letztere giebt. Das Original war uns nicht zugänglich.

Ausdrücke in geschlossener Form gab *Gaufs* in der Abhandlung: *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata.* Göttinger gelehrte Anzeigen 1813, April 5, *Gaufs*' Werke, Bd. 5 S. 3; Selbstanzeige ebenda S. 279 mit geschichtlichen Notizen.

Für den jetzt vorliegenden Zweck ist es vorteilhaft dieser Entwicklung eine andere Form zu geben, indem man von *Taylors* Satz ausgeht.

Man hat

$$e = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} \tag{2}$$

und kann nun $-x$, $-y$, $-z$ als Änderungen von x', y', z' behandeln. Sind die Änderungen null, so geht e in r' über. Nach *Taylors* Satz für mehrere Variable wird erhalten*):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} &+ \left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'}(-x) + \frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial y'}(-y) + \frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial z'}(-z)\right\} \\
&+ \frac{1}{1.2}\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial^2\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'^2}(-x)^2 + 2\frac{\partial^2\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'\partial y'}(-x)(-y) + 2\frac{\partial^2\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'\partial z'}(-x)(-z) \\
\qquad + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial y'^2}(-y)^2 + 2\frac{\partial^2\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial y'\partial z'}(-y)(-z) \\
\qquad\qquad + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial z'^2}(-z)^2
\end{array}\right\} \\
&+ \cdots + \frac{1}{i!}\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial x'}(-x) + \frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial y'}(-y) + \frac{\partial\left(\frac{1}{e}\right)}{\partial z'}(-z)\right\}^i + \cdots.
\end{aligned} \tag{3}$$

Hierin sind in allen Differentialquotienten nach geschehener Differentiation x, y und z gleich null zu setzen. Das allgemeine Glied ist ferner so zu lesen, daſs erstens $1.2.3\ldots(i-1)\,i$ für $i!$ gesetzt werden muſs, und daſs zweitens nach Erhebung des Trinoms zur i. Potenz für $\partial\left(\frac{1}{e}\right)^i$ das Symbol der i. Differentiation $\partial^i\left(\frac{1}{e}\right)$ eintritt.

Die Überzeugung, daſs die Reihe (3) thatsächlich von (1) nicht abweicht und also auch in gleichem Umfange gültig ist, gewinnt man leicht, wenn man sich in (1) für die P die Ausdrücke aus § 2 S. 52 und zugleich für $\cos\gamma$ nach § 4 (1) S. 56 $(xx' + yy' + zz') : rr'$ eingeführt denkt. Es zeigt sich dann, daſs allgemein das Glied $r^i P_i : r'^{i+1}$ in (1) eine homogene Funktion i. Grades von x, y und z ist. Dies letztere ist aber auch das allgemeine Glied in (3). Nun muſs man noch bedenken, daſs man in (3) anstatt der Differentialquotienten von $1 : e$ nach x', y' und z' auch diejenigen nach $(-x)$, $(-y)$ und $(-z)$ setzen kann, wie ein Blick auf (2) zeigt. Wendet man also bei der Bildung von (3) für $1 : e$ die Reihe (1) an, so hat auf die i. Differentialquotienten nur das Glied mit P_i Einfluſs, weil nach der Differentiation nur hierin von x, y und z freie Glieder entstehen und für x, y und z gleich null alles andere verschwindet. Hieraus erkennt man, daſs das Glied i. Grades in (3) die *Taylor*sche Entwick-

*) Vergl. u. a. *Hattendorff, Höhere Analysis,* S. 286.

lung von dem Gliede mit P_i in (1) darstellt, und zwar gerade so, als wären alle andern Glieder gar nicht vorhanden. Die *Taylor*sche Entwicklung einer Funktion vom i. Grade ist aber selbstverständlich mit ihr identisch. Somit ist auch Reihe (3) mit Reihe (1) identisch.

Für die weitere Entwicklung ist es vorteilhaft die Differentialquotienten in (3) noch anders zu schreiben. In denselben soll, wie erwähnt, nach geschehener Differentiation x, y und z gleich null gesetzt werden. Dies kann aber auch vorher geschehen, da in e nach Ausdruck (2) die Änderungen x, y und z an den Variabeln x', y' und z' nur subtraktiv vorkommen. Setzt man in e nun x, y und z gleich null, so geht es in r' über. Anstatt (3) erhalten wir somit in symbolischer Schreibweise:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left\{ \frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'}(-x) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial y'}(-y) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'}(-z) \right\}^i . \quad (4)$$

Gegen früher tritt jetzt besser hervor, dafs die Differentialquotienten dieselben bleiben, welche Koordinaten das anziehende Massenelement im Punkte (x, y, z) innerhalb der Bedingung $r' > r$ auch haben mag.

Betrachtet man nun ein homogenes Rotationsellipsoid von der Dichtigkeit 1, nimmt seinen Mittelpunkt als Koordinatenanfang und seine Drehaxe als z-Axe, so kann man das Potential der Anziehung v auf einen Punkt P' aufserhalb der dem Ellipsoid umschriebenen Kugel mittelst (4) in eine Reihe entwickeln, indem man in den Ausdruck

$$v = k^2 \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{e} \quad (5)$$

für $1 : e$ die Reihe (4) setzt. Die Integration erstreckt sich über alle Massenelemente innerhalb des Ellipsoids, also über alle Werte von x, y, z, für welche

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqq 1 . \quad (6)$$

Zur Vereinfachung führen wir neue Variable ein, indem wir setzen:

$$x = a\xi , \qquad y = a\eta , \qquad z = b\zeta$$
$$dx = a\,d\xi , \qquad dy = a\,d\eta , \qquad dz = b\,d\zeta ,$$

und erhalten

$$v = k^2 a^2 b \iiint \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{e} , \quad (7)$$

wobei sich die Integration über alle Werte von ξ, η und ζ, welche der Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqq 1 \quad (8)$$

genügen, zu erstrecken hat und wobei für $1 : e$ zu substituieren ist:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left\{ \frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'}(-a\xi) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial y'}(-a\eta) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'}(-b\zeta) \right\}^i. \quad (9)$$

Die Bedingung (8) zeigt, dafs die Integration auf die Grenzen einer Kugel vom Radius 1 reduziert ist.

§ 30. **Fortsetzung.** Durch Einführung der Reihe (9) in (7) zerfällt das Integral daselbst in unendlich viele Integrale der Form

$$\iiint \xi^l \eta^m \zeta^n \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \,. \quad (1)$$

Die Integrale verschwinden, sobald wenigstens einer der Exponenten l, m und n ungerade ist. Denn integriert man, falls z. B. m ungerade ist, zuerst nach η, so ergiebt sich wegen der Symmetrie zur $\xi\zeta$-Ebene null, womit das ganze Integral verschwindet.

Um aber den Wert eines Integrales (1) für gerade Exponenten zu ermitteln, setzen wir unter Einführung von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos\varphi \cos\lambda \\ \eta &= \varrho \cos\varphi \sin\lambda \\ \zeta &= \varrho \sin\varphi \,; \end{aligned} \quad (2)$$

φ ist die Breite, λ die Länge auf der Kugeloberfläche, vergl. im ersten Kapitel S. 6. Das Volumenelement ist gleich $\varrho^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda \, d\varrho$, vergl. § 6 S. 60. Durch Einführung der Relationen (2) und des Volumenelementes in (1) geht das Integral über in

$$\iiint \varrho^{l+m+n+2} (\cos\varphi \cos\lambda)^l (\cos\varphi \sin\lambda)^m \sin^n\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda \, d\varrho$$

und die Bedingungsgleichung (8) des vorigen Paragraphen in $\varrho^2 \leq 1$. Es ist daher zu integrieren für ϱ von null bis 1, für λ von null bis 2π und für φ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$.

Das Integral zerfällt ersichtlich in das Produkt der drei Integrale

$$\int_0^1 \varrho^{l+m+n+2} \, d\varrho \,, \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^l\lambda \sin^m\lambda \, d\lambda \quad (4)$$

und

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{l+m+1}\varphi \sin^n\varphi \, d\varphi \,. \quad (5)$$

Ohne weiteres hat man für (3)

$$\int_0^1 \varrho^{l+m+n+2}\, d\varrho = \frac{1}{l+m+n+3}. \tag{6}$$

Um (4) und (5) zu bestimmen, entwickeln wir zunächst wie folgt:

$$\int \cos^q u \sin^p u\, du = \int \cos^{q-1} u \sin^p u\, d(\sin u),$$

hieraus folgt durch teilweise Integration, abgesehen vom Falle $p = -1$:

$$\int \cos^q u \sin^p u\, du = \cos^{q-1} u \frac{\sin^{p+1} u}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \cos^{q-2} u \sin^{p+2} u\, du.$$

Schreibt man rechter Hand für $\sin^2 u$ aber $1 - \cos^2 u$, so findet sich:

$$\int \cos^{q-2} u \sin^{p+2} u\, du = \int \cos^{q-2} u \sin^p u\, du - \int \cos^q u \sin^p u\, du.$$

Substituieren wir dies in der vorigen Gleichung und reduzieren auf das links und rechts vorkommende Integral, so folgt

$$\int \cos^q u \sin^p u\, du = \frac{\cos^{q-1} u \sin^{p+1} u}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \cos^{q-2} u \sin^p u\, du. \tag{7}$$

Vertauscht man u mit $\frac{\pi}{2} - u$, so folgt noch:

$$\int \cos^p u \sin^q u\, du = -\frac{\cos^{p+1} u \sin^{q-1} u}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \cos^p u \sin^{q-2} u\, du. \tag{8}$$

Diese Formeln gestatten, (4) und (5) zu ermitteln. Dabei sind nur die Fälle, in welchen l, m und n gerade sind, zu beachten; denn andernfalls hat das Integral (1), wie bereits bemerkt, den Wert null. Die Anwendung von (7) auf (4) giebt

$$\int_0^{2\pi} \cos^l \lambda \sin^m \lambda\, d\lambda = \frac{l-1}{l+m}\int_0^{2\pi} \cos^{l-2}\lambda \sin^m \lambda\, d\lambda$$

und die wiederholte Anwendung von (7) auf das Integral rechter Hand:

$$\int_0^{2\pi} \cos^l \lambda \sin^m \lambda\, d\lambda = \frac{1.3\ 5 \ldots (l-3)\,(l-1)}{(m+2)\,(m+4)\ldots(m+l)}\int_0^{2\pi} \sin^m \lambda\, d\lambda.$$

Die wiederholte Anwendung von (8) giebt ferner successive:

$$\int_0^{2\pi} \sin^m \lambda\, d\lambda = \frac{m-1}{m}\int_0^{2\pi} \sin^{m-2}\lambda\, d\lambda = \frac{1.3.5 \ldots (m-3)\,(m-1)}{2.4.6 \ldots (m-2)\,m}\cdot 2\pi;$$

man hat daher zur Bestimmung des Integrals (4) die Formel:

$$\int_0^{2\pi} \cos^l \lambda \sin^m \lambda\, d\lambda = 2\pi\,.\,\frac{1.3.5 \ldots (l-3)(l-1)\,.\,1.3.5 \ldots (m-3)(m-1)}{2.4.6 \ldots\ldots (l+m-2)\,(l+m)}. \tag{9}$$

Die wiederholte Anwendung von (7) auf (5) giebt ohne Schwierigkeit:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{l+m+1}\varphi \sin^n\varphi \, d\varphi = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2.4.6 \ldots (l+m-2)(l+m)}{(n+3)(n+5)\ldots(l+m+n-1)(l+m+n+1)} \cdot (10)$$

Verbindet man die Resultate (6), (9) und (10) und setzt im Zähler und Nenner das Produkt $1.3.5\ldots(n-3)(n-1)$ als Faktor zu, so folgt zur Bestimmung des Integrales (1):

$$\iiint \xi^l \eta^m \zeta^n \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 4\pi \frac{1.3.5\ldots(l-1).1.3.5\ldots(m-1).1.3.5\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(l+m+n-1)(l+m+n+1)(l+m+n+3)}, \quad (11)$$

gültig für gerade Werte von l, m und n. Im speziellen Falle des Verschwindens eines oder mehrerer der Exponenten l, m und n ist, wie die Entwicklung zeigt, im Zähler rechter Hand von (11) das Produkt $1.3.5\ldots$ für die betreffenden Exponenten gleich 1 zu setzen.

§ 31. **Fortsetzung.** Es handelt sich jetzt darum, den Koefficienten auszumitteln, den das Integral (1) des vorigen Paragraphen in dem Ausdruck für das Potential v erhält, welchen die Substitution von (9) in (7) § 29 ergiebt. Man bemerkt sogleich, daſs es der Faktor des Termes $\xi^l \eta^m \zeta^n$ ist, welcher bei der Ausrechnung von

$$\frac{1}{i!}\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'}(-a\xi) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial y'}(-a\eta) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'}(-b\zeta)\right\}^i \quad (1)$$

entsteht für $i = l + m + n$. Schreiben wir kurz für den Augenblick das Trinom in der Form $(A + B + C)^{l+m+n}$, so giebt die Ausrechnung bei der üblichen Schreibweise der Binominal-Koefficienten u. a. ein Glied

$$\frac{1}{i!}\binom{l+m+n}{n} . (A + B)^{l+m} C^n$$

und dessen Ausrechnung das Glied

$$\frac{1}{i!}\binom{l+m+n}{n}\binom{l+m}{m} A^l B^m C^n$$

oder

$$\frac{(l+m+n)(l+m+n-1)\ldots(l+1)}{i!\,m!\,n!} A^l B^m C^n .$$

Fügt man hier im Zähler und Nenner noch $l!$ bei, so geht dies in $\frac{1}{l!\,m!\,n!} A^l B^m C^n$ über und es zeigt sich nun, daſs man an Stelle des Ausdruckes (1) überhaupt setzen kann:

$$\sum\left\{\frac{\partial^i\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'^l \, \partial y'^m \, \partial z'^n} \frac{(-a\xi)^l (-a\eta)^m (-b\zeta)^n}{l!\,m!\,n!}\right\}, \quad (2)$$

wobei die Summierung über alle ganzen positiven Werte von l, m und n zu erstrecken ist, deren Summe i beträgt; einschliefslich der Fälle einer oder zweier dieser Zahlen gleich null, in welchen für die betreffenden durch das Ausrufungszeichen angedeuteten Produkte 1 zu setzen ist.

Hiermit nimmt der Ausdruck für v die Form an:

$$v = k^2 a^2 b \left[\frac{1}{r'} \iiint d\xi \, d\eta \, d\zeta + S \right],$$

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i\,\text{konst.}} \left\{ \frac{\partial^i \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'^l \, \partial y'^m \, \partial z'^n} \; \frac{(-a)^l (-a)^m (-b)^n}{l!\, m!\, n!} \iiint \xi^l \eta^m \zeta^n \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \right\}.$$

Führen wir nun die Integralwerte nach (11) des vorigen Paragraphen ein und beachten wir ferner, dafs bei der Dichtigkeit 1 die Ellipsoidmasse M gleich $\frac{4}{3} \pi a^2 b$ ist, sowie dafs nur gerade Werte von l, m, n und $i = l + m + n$ in betracht kommen, so folgt nach naheliegenden Kürzungen:

$$v = 3 M k^2 \left[\frac{1}{3 r'} + \sum_{\frac{i}{2}=1}^{\infty} \frac{\sum_{i\,\text{konst.}} \left\{ \frac{\partial^i \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'^l \, \partial y'^m \, \partial z'^n} \; \frac{a^l \, a^m \, b^n}{\frac{l}{2}!\, \frac{m}{2}!\, \frac{n}{2}!} \right\}}{2^i \, . \, 1.3.5 \ldots (i+3)} \right]. \tag{3}$$

Die innere Summe in (3) ist wie Summe (2), jedoch unter Ausschlufs ungerader Werte von l, m und n zu verstehen. Sie läfst sich aber noch anders schreiben. Man hat, um dies zu erkennen, nur diese Summe mit (2) zu vergleichen und nun zu der entsprechend zu modifizierenden Form (1) zurückzukehren. Man findet dann, dafs mit der inneren Summe von (3) gleichwertig ist der symbolische Ausdruck

$$\frac{1}{\frac{i}{2}!} \left\{ \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'^2} a^2 + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial y'^2} a^2 + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'^2} b^2 \right\}^{\frac{i}{2}}. \tag{4}$$

Dieser vereinfacht sich noch, wenn wir von der leicht zu verifizierenden Gleichung

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'^2} = 0 \tag{5}$$

Gebrauch machen. Aus derselben folgt nämlich in symbolischer Schreibweise, wenn k eine positive, gerade Zahl bezeichnet:

$$\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'^2}\right\}^{\frac{k}{2}}=0\,. \tag{6}$$

Um dieses einzusehen, braucht man nur die Gleichung (5) zweimal nach x', ebenso nach y' und z' zu differenzieren und die drei Resultate zu addieren. In symbolischer Schreibweise lautet dasselbe: das Quadrat der linken Seite von (5) ist gleich null. Differenziert man nun diese neue Gleichung zweimal nach x', ebenso nach y' und z' und addiert die drei Resultate, so folgt symbolisch die dritte Potenz der linken Seite von (5) gleich null. U. s. f.

Hiermit läfst sich unschwer erkennen, dafs es erlaubt ist, die Parenthese von (4) einfach um das mit a^2 multiplizierte Aggregat linker Hand in (5) zu vermindern. Dabei setzen wir entsprechend einem abgeplatteten Rotationsellipsoid $a^2 - b^2 = a^2e^2$; dann folgt für die innere Summe rechter Hand von (3) der gleichwertige Ausdruck

$$\frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{\frac{i}{2}!}\,a^i e^i\,\frac{\partial^i\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'^i}\,,$$

bei welchem nunmehr die symbolische Schreibweise verschwunden ist. Der Ausdruck für das Potential v geht jetzt über in

$$v = 3Mk^2\left\{\frac{1}{3r'}+\sum_{\frac{i}{2}=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{(i+1)!\,(i+3)}\,a^i e^i\,\frac{\partial^i\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'^i}\right\}. \tag{7}$$

Hierzu findet sich durch wiederholte Differentiation von

$$\frac{1}{r'}=\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

ohne Schwierigkeit, wenn man in den Differentialquotienten $z'=r'\sin\varphi'$ setzt:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'}=-\frac{1}{r'^2}\sin\varphi'$$

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'^2}=\frac{1}{r'^3}\left(3\sin^2\varphi'-1\right)$$

$$\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'^3}=-\frac{1}{r'^4}\left(15\sin^3\varphi'-9\sin\varphi'\right)$$

$$\frac{\partial^4\left(\frac{1}{r'}\right)}{\partial z'^4}=\frac{1}{r'^5}\left(105\sin^4\varphi'-90\sin^2\varphi'+9\right),$$

womit sich endlich die ersten drei Glieder einer Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen für das *Potential des abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoids* wie folgt ergeben:

$$v = \frac{Mk^2}{r'}\left\{1 + \frac{1}{10}\frac{a^2e^2}{r'^2}\left(1 - 3\sin^2\varphi'\right) + \frac{1}{280}\frac{a^4e^4}{r'^4}\left(105\sin^4\varphi' - 90\sin^2\varphi' + 9\right) + \ldots\right\}. \quad (8)$$

Hierin ist M die Masse, a die Äquatorialhalbaxe, e die numerische Excentricitat der Meridianellipse; r' ist der Abstand des angezogenen Punktes vom Ellipsoidmittelpunkt und φ' die geozentrische Breite desselben.

Zufolge der Ableitung konvergiert die Reihe in (8), solange $r' > a$ ist. Sie konvergiert aber noch weiter. Da nämlich in (8) nur die Masse M und die lineare Excentricität ae auftreten, so wird man zu dem Ausdruck (8) auch bei jedem anderen homogenen Rotationsellipsoid mit gleicher Masse und gleicher linearer Excentricität gelangen, d. h. alle konfokalen Ellipsoide gleicher Masse geben für aufserhalb gelegene Punkte gleiches Potential. Das kleinste dieser Ellipsoide hat als halbe Länge der Drehaxe null und als Äquatorialradius daher ae selbst. Für dieses Ellipsoid konvergiert die Reihe in (8) mithin, solange $r' > ae$ ist. Sie konvergiert also überhaupt solange als $r' > ae$ ist.

Wenn nun $b \geqq ae$ ist, so liegt die Oberfläche des Ellipsoids nirgends innerhalb der Kugelfläche vom Radius ae. Die Reihenentwicklung konvergiert daher sicher bis zur Oberfläche des Ellipsoids, wenn $b > ae$ ist.

Der Umstand, dafs sie auch noch z. T. innerhalb der Oberfläche konvergiert, hat kein Interesse, weil innerhalb der Oberfläche das Potential v nicht mehr durch Formel (8) dargestellt wird, indem der analytische Ausdruck des Potentials für innerhalb und aufserhalb gelegene Punkte verschieden ist (vergl. die entsprechenden Bemerkungen über W in § 21 S. 34).

Ebenso interessiert hier nicht die Frage, ob (8) bis zur Oberfläche konvergiert für den Fall $b < ae$, da bei schwach abgeplatteten Rotationsellipsoiden dieser Fall nicht eintritt.

§ 32. Hauptträgheitsmomente des abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoids. Dichtigkeit im Erdinnern.

Wenn es nicht auf den Konvergenznachweis ankommt, kann man die ersten Glieder der Reihe für das Potential des homogenen Rotationsellipsoids auch mittelst Formel (7) § 5 S. 60 bestimmen, welche für das Potential der Anziehung jedes beliebigen Körpers gilt, wenn das Potential der Schwungkraft (das Glied mit ω) weggelassen wird. Es sind dann vor allem die Hauptträgheitsmomente zu berechnen.

Wir bezeichnen wie früher die Trägheitsmomente für zwei Äquatoraxen, die Axen der x und y, mit A und B, das Trägheitsmoment für die Drehaxe, die z-Axe, mit C. Dann sind $A = B$ und C die Hauptträgheitsmomente und zwar ist [vergl. S. 60 (5)]:

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2)\, dm\,. \\ C &= \int (x^2 + y^2)\, dm\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Um diese Integrale, für welche die Grenzen durch die Bedingung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} < 1$$

gegeben sind, abzuleiten, setzen wir wie in § 29 S. 119

$$x = a\xi \qquad y = a\eta \qquad z = b\zeta$$

und erhalten dann

$$\int x^2\, dm = \int y^2\, dm = a^4 b \int\int\int \xi^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

sowie

$$\int z^2 dm = a^2 b^3 \int\int\int \zeta^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\,,$$

wobei die Grenzen rechter Hand durch die Bedingung sich bestimmen, dafs

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqq 1\,.$$

Formel (11) § 30 S. 122 giebt die Werte vorstehender Integrale:

$$\begin{aligned} \int x^2 dm = \int y^2 dm &= \frac{4}{15}\pi a^4 b \\ \int z^2 dm &= \frac{4}{15}\pi a^2 b^3\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Beachtet man nun noch, dafs $M = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ ist, so erhält man ohne weiteres:

$$\begin{aligned} A = B &= \frac{1}{5}(a^2 + b^2)\, M \\ C &= \frac{2}{5}\, a^2 M \end{aligned} \tag{3}$$

und (vergl. § 10 (2) S. 72):

$$MK = C - \frac{A + B}{2} = \frac{1}{5}\, a^2 e^2 M\,. \tag{4}$$

Hiermit findet man leicht wieder die beiden ersten Glieder der Entwicklung (8) § 31 S. 125. Auch würden sich auf diesem Wege weitere Glieder entwickeln lassen.

Wir haben in § 17 S. 91 gefunden, dafs die Normalform der mathematischen Erdoberfläche von einem Rotationsellipsoid wenig abweicht. Wäre nun die Erdmasse überall wesentlich gleich dicht verteilt, so müfste für die Erde sehr nahe $K : a^2_0$ gleich $e^2 : 5$ oder $2\mathfrak{a} : 5$ sein, also

$$\text{für } \mathfrak{a} = \frac{1}{299} \quad K : a_0^2 = 0{,}00134$$
$$\text{„} \quad \mathfrak{a} = \frac{1}{289} \quad \text{„} \quad = 0{,}00138. \tag{5}$$

In Wirklichkeit ist $K : a_0^2$ kleiner. Nach Gleichung (6) § 15 S. 83 haben wir

$$\frac{K}{a_0^2} = \frac{2}{3}\mathfrak{a} - \frac{1}{3}\mathfrak{c} + \ldots;$$

mithin ist

$$\text{für } \mathfrak{a} = \frac{1}{299} \text{ und } \mathfrak{c} = \frac{1}{289} \quad K : a_0^2 = 0{,}00108$$
$$\text{„} \quad \mathfrak{a} = \frac{1}{289} \quad \text{„} \quad \mathfrak{c} = \frac{1}{289} \quad \text{„} \quad = 0{,}00115. \tag{6}$$

Hiernach ist $K : a_0^2$ um $^1/_5$ bis $^1/_6$ seines Wertes kleiner, als beim homogenen Ellipsoid.

Dies läfst sich dadurch erklären, dafs man eine allmähliche Zunahme der Erddichtigkeit von aufsen nach innen annimmt. Zu einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit für diese Annahme gelangt man jedoch erst durch Herbeiziehung der Aussagen von Präzession und Nutation der Erdaxe über A und C, vergl. 6. Kap. § 8 u. ff.

§ 33. **Potential des homogenen Rotationsellipsoids auf einen Punkt innerhalb.** Wir denken uns den angezogenen Punkt P' zunächst nur innerhalb der dem Ellipsoid konzentrisch zum Mittelpunkt, dem Koordinatenanfang, eingeschriebenen Kugel; die Dichtigkeit der Masse sei gleich Θ. Wir zerlegen diese letztere durch eine Kugelfläche, welche mit dem Radiusvektor r' des Punktes P' beschrieben wird, in zwei Teile. Das Potential des inneren Teiles auf P' ist bekannt, das des äufseren Teiles ist noch zu bestimmen. Wir setzen also

$$v = v_1 + v_2 \tag{1}$$

und haben nach S. 62 (8)

$$v_1 = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta r'^2. \tag{2}$$

Ferner ist mit Benutzung der Entwicklung (10) S. 52

$$v_2 = k^2 \int \frac{dm}{e} = k^2 \int \left\{ \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} P_1 + \frac{r'^2}{r^3} P_2 + \frac{r'^3}{r^4} P_3 + \frac{r'^4}{r^5} P_4 + \ldots \right\} dm. \tag{3}$$

Die für $1 : e$ benutzte Reihenentwicklung gilt allerdings nur für $r' < r$ und wir wenden sie bei der Integration bis $r' = r$ an; aber da für eine Hohlkugel das Potential auf einen Punkt der inneren Begrenzungsfläche nach S. 62 (7) bekannt ist, kann man leicht a posteriori die Richtigkeit des Resultates prüfen.

Die Integration in (3) ist über die ganze Masse des äufseren Teiles zu erstrecken. Setzen wir nun $dm = \Theta\, d\sigma \,.\, r^2\, dr$, so empfiehlt es sich zunächst nach r von $r = r'$ bis zur Oberfläche des Ellipsoids zu integrieren. Den Radiusvektor der letzteren nennen wir wieder r und erhalten aus (3):

$$v_2 = k^2\Theta \int \left\{ \begin{array}{l} \frac{r^2 - r'^2}{2} + r'(r - r')\, P_1 + r'^2 P_2 \log\text{nat}\frac{r}{r'} \\ \quad + r'^3\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) P_3 + \frac{r'^4}{2}\left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{r^2}\right) P_4 + \ldots \end{array} \right\} d\sigma \,. \quad (4)$$

Die Integration erstreckt sich nunmehr noch über die Kugelfläche vom Radius 1. Dabei ist auf den Ausdruck für r als Funktion von φ Rücksicht zu nehmen.

Nach Bd. 1 S. 60 ist aber der Radiusvektor in der geozentrischen Breite φ

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + \delta \sin^2\varphi}}\,,$$

wenn a der Äquatorialhalbmesser, b die kleine Halbaxe und $\delta = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$ ist. Wir setzen für δ das Symbol e'^2 und schreiben also

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2\varphi}}$$

mit

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1 - e^2}\,.\ *) \quad (5)$$

Die Einführung von r in (4) erfolgt nun am besten in der Weise, dafs die verschiedenen Funktionen von r nach Kugelfunktionen von φ entwickelt werden. Da r nur von $\sin^2\varphi$ abhängt, so treten in allen diesen Entwicklungen nur Kugelfunktionen von geradem Range auf, weil nur in diesen lediglich $\sin^2\varphi$ und seine Potenzen erscheinen. Hieraus erkennt man mit Rücksicht auf den Satz (3) von S. 116 zunächst, dafs in (4) alle Glieder verschwinden, welche von den Koefficienten P mit ungeradem Index, also von P_1, P_3, P_5 u. s. f. abhängen.

Aber auch die von P_4, P_6 u. s. f. abhängenden Glieder geben nichts, weil in den Faktoren dieser Koefficienten nur Potenzen von $\sin\varphi$ bis bezw. zum zweiten, vierten u. s. f. Grade auftreten, so dafs diese Faktoren sich durch Kugelfunktionen darstellen, deren Index mindestens um zwei Einheiten niedriger ist, als der des multiplizierenden P, weshalb für alle Glieder der obengenannte Satz (3) zur Anwendung kommt. (4) geht hiermit zunächst über in die Gleichung:

---

*) Im ersten Bande hatten wir das Symbol δ nach dem Vorgange von *O. Schreiber, Theorie der Projektionsmethode der hannoverischen Landesvermessung, Hannover 1866*, benutzt. Wir nehmen aber anstatt dessen mit *Jordan* jetzt e'^2, erstens wegen der engen Beziehung der Gröfse zu e^2 [vergl. die zweite Gleichung (5)], zweitens weil δ auch als Änderungszeichen variabler Gröfsen auftritt.

$$v_2 = k^2 \Theta \int \left\{ \frac{r^2 - r'^2}{2} + r'^2 P_2 \operatorname{lognat} \frac{r}{r'} \right\} d\sigma . \tag{6}$$

Indem wir nun den Ausdruck (5) für r beachten und

$$d\sigma = \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda = d(\sin\varphi) \, d\lambda$$

setzen, sowie sogleich nach der geozentrischen Länge λ von null bis 2π integrieren und für $\sin\varphi$ das Symbol t einführen, wird zu (6):

$$\int r^2 d\sigma = 2\pi a^2 \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{1 + e'^2 t^2} = 4\pi a^2 \frac{\operatorname{arctan} e'}{e'} ; \tag{7}$$

ferner ist

$$\int r'^2 d\sigma = 4\pi r'^2 \tag{8}$$

und

$$\int P_2 \operatorname{lognat} \frac{r}{r'} d\sigma = \int P_2 \left[\operatorname{lognat} \frac{a}{r'} - \frac{1}{2} \operatorname{lognat}(1 + e'^2 \sin^2\varphi) \right] d\sigma .$$

Mit Rücksicht auf den Satz (3) S. 116 reduziert sich die rechte Seite der letzten Gleichung auf den Ausdruck

$$-\frac{1}{2} \int P_2 \operatorname{lognat}(1 + e'^2 \sin^2\varphi) \, d\sigma ,$$

und zwar sind auch hier in P_2 S. 57 nur diejenigen Glieder zu beachten, welche lediglich von φ abhängen, d. h. man hat

$$P_2 = \frac{9}{4} \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3} \right)$$

zu setzen. Damit folgt

$$\int P_2 \operatorname{lognat} \frac{r}{r'} d\sigma = -\frac{9\pi}{4} \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3} \right) \int_{-1}^{+1} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) \operatorname{lognat}(1 + e'^2 t^2) \, dt . \tag{9}$$

Es ist nun zunächst teilweise integriert, ohne Rücksicht auf die Grenzen:

$$\int \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) \operatorname{lognat}(1 + e'^2 t^2) \, dt = \frac{1}{3} (t^3 - t) \operatorname{lognat}(1 + e'^2 t^2)$$
$$- \frac{2e'^2}{3} \int \frac{t^4 - t^2}{1 + e'^2 t^2} dt .$$

Bei Einführung der Grenzen verschwindet der erste Teil; setzen wir zugleich identisch

$$\frac{t^4 - t^2}{1 + e'^2 t^2} = \frac{t^2}{e'^2} - \frac{1 + e'^2}{e'^4} + \frac{1 + e'^2}{e'^4 (1 + e'^2 t^2)} ,$$

so folgt für die rechte Seite von (9) ohne Schwierigkeit:

$$\int_{-1}^{+1} = -\frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1 + e'^2}{e'^2} + \frac{1 + e'^2}{e'^2} \frac{\operatorname{arctan} e'}{e'} \right\} . \tag{9*}$$

Aus (7), (8), (9) und (9*) erhält man endlich

$$v_2 = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2 \frac{\operatorname{arc\,tan} e'}{e'} - r'^2 \left[1 + \frac{1}{e'^2}\left(\frac{3}{2} + e'^2 - \frac{3}{2}(1+e'^2)\frac{\operatorname{arc\,tan} e'}{e'}\right)\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right)\right]\right\}. \quad (10)$$

Vereinigt man die Resultate (2) und (10), so folgt mit Rücksicht auf (1) für das gesuchte Potential der Ausdruck

$$v = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2 \frac{\operatorname{arc\,tan} e'}{e'} - r'^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{e'^2}\left(\frac{3}{2} + e'^2 - \frac{3}{2}(1+e'^2)\frac{\operatorname{arc\,tan} e'}{e'}\right)\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right)\right]\right\}. \quad (11)$$

Für $e' = 0$ geht dieser Ausdruck über in

$$2\pi k^2 \Theta \left(a^2 - \frac{r'^2}{3}\right), \quad (11^*)$$

welcher dem Potential einer homogenen Kugel auf einen inneren Punkt im Zentrumsabstand r' entsprechen mufs, was man auch durch Vergleich mit Ausdruck (8*) S. 62 bestätigt findet.

Der Ausdruck (11) ist unter der Bedingung abgeleitet, dafs P' innerhalb der dem Ellipsoid eingeschriebenen Kugel liege. Da aber v eine geschlossene Form angenommen hat und innerhalb eines homogenen Körpers v nicht verschiedene analytische Ausdrücke besitzen kann, so gilt Ausdruck (11) überhaupt *innerhalb des Ellipsoids bis zur Oberfläche.*

Durch Reihenentwicklung folgt aus (11)

$$v = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2\left(1 - \frac{e'^2}{3} + \frac{e'^4}{5} - \ldots\right) - r'^2\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5}e'^2 - \frac{3}{35}e'^4 + \ldots\right)\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right)\right]\right\} \quad (12)$$

oder wegen $e'^2 = e^2 + e^4 + \ldots$

$$v = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2\left(1 - \frac{e^2}{3} - \frac{2e^4}{15} - \ldots\right) - r'^2\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5}e^2 + \frac{4}{35}e^4 + \ldots\right)\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right)\right]\right\}. \quad (12^*)$$

Diese Entwicklungen gelten, solange $e' < 1$ ist, d. h. für $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Differenziert man v nach irgend einer Richtung, also insbesondere nach r' oder φ', so verschwindet a. Es ist also die Anziehung innerhalb nur abhängig von e' und gleich grofs für alle ähnlichen, ähnlich liegenden und konzentrischen Ellipsoide, innerhalb deren der Punkt liegt, d. h. *eine homogene Schale, die von zwei solchen Flächen begrenzt wird, übt auf einen inneren Punkt keine Anziehung aus.* (Vergl. S. 104 § 23.)

§ 34. **Das abgeplattete Rotationsellipsoid kann die Oberfläche einer rotierenden, homogenen Flüssigkeitsmasse bilden.** Dreht sich ein homogenes, abgeplattetes Rotationsellipsoid mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine kleine Axe, so ist das Potential w innerhalb bis zur Oberfläche gegeben durch die Gleichung

$$w = v + \frac{1}{2}\omega^2 r'^2 \cos^2\varphi'; \quad (1)$$

hierzu ist v nach Gleichung (11) § 33 anzusetzen. Indem wir v einführen, setzen wir mit Benutzung der rechtwinkeligen Koordinaten des Punktes P', bezogen auf die Äquatorebene als $x'y'$-Ebene und die Drehaxe als z'-Axe, $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, sowie $r'^2 \sin^2\varphi' = z'^2$ und nehmen w konstant gleich w_0. Die Gleichung

$$w_0 = \frac{1}{2}\omega^2(x'^2+y'^2) + m - (x'^2+y'^2+z'^2)\left(n - \frac{nE}{3}\right) - z'^2 nE\,, \tag{2}$$

worin

$$\frac{2}{3}\pi k^2 \Theta = n \qquad 3na^2 \frac{\operatorname{arctan} e'}{e'} = m$$

und

$$E = \frac{3}{e'^2}\left(\frac{3}{2} + e'^2 - \frac{3}{2}(1+e'^2)\frac{\operatorname{arctan} e'}{e'}\right) \tag{3}$$

gesetzt ist, ist sodann die Gleichung einer Niveaufläche innerhalb. Wir wollen nun zeigen, dafs bei jedem Werte e' die Oberfläche bei angemessener Winkelgeschwindigkeit Niveaufläche sein kann. Für diesen Fall, wo die Niveaufläche in die Oberfläche fällt, behalten die Ausdrücke ihre Gültigkeit.

Bringen wir (2) auf die Form

$$(x'^2 + y'^2)\frac{n - \frac{nE}{3} - \frac{\omega^2}{2}}{m - w_0} + z'^2 \frac{n + \frac{2nE}{3}}{m - w_0} = 1\,, \tag{4}$$

so erkennen wir, dafs die Oberfläche mit der Niveaufläche w_0 zusammenfällt für

$$\frac{m - w_0}{n - \frac{nE}{3} - \frac{\omega^2}{2}} = a^2$$

und

$$\frac{m - w_0}{n + \frac{2nE}{3}} = b^2\,, \tag{5}$$

wenn wie bisher a und b die grofse und kleine Halbaxe der Meridianellipse der Oberfläche bezeichnen. Aus den letzten beiden Ausdrücken ergiebt sich

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{nE + \frac{\omega^2}{2}}{n - \frac{nE}{3} - \frac{\omega^2}{2}} = e'^2. \tag{6}$$

Hieraus folgt

$$\omega^2 = 2n \frac{e'^2 - (3 + e'^2)\frac{E}{3}}{1 + e'^2}\,.$$

und mit Rücksicht auf die Werte von n und E nach (3) weiter:

$$\omega^2 = 2\pi k^2 \Theta \frac{3 + e'^2}{e'^3}\left(\operatorname{arctan} e' - \frac{3e'}{3 + e'^2}\right). \tag{7}$$

Für kleine e' giebt die Reihenentwicklung

$$\omega^2 = \frac{8}{15} \pi k^2 \Theta e'^2 \left(1 - \frac{6}{7} e'^2 + \ldots\right). \tag{7*}$$

Differenziert man die Parenthese in (7) nach e', so erkennt man, dafs der Differentialquotient für jeden Wert von e'^2 positiv ist. Da nun für $e' =$ null die Parenthese auch null ist, so wird, wie leicht zu ersehen, für positive Werte von e' der Wert der rechten Seite von (7) stets positiv, und es ist mithin ω für jeden Wert von e', der bei einem abgeplatteten Rotationsellipsoid vorkommen kann, reell.

Nehmen wir e' sehr klein an, so ist in erster Annäherung

$$\omega^2 = \frac{8}{15} \pi k^2 \Theta e'^2. \tag{8}$$

Setzen wir nun das Verhältnis von Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator gleich $\mathfrak{c}$, so ist angenähert

$$\mathfrak{c} = \frac{\omega^2 a}{\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta a};$$

hiermit giebt (8) angenähert

$$e'^2 = \frac{5}{2} \mathfrak{c},$$

woraus ebenso genau für die Abplattung $\mathfrak{a}$ die Relation folgt:

$$\mathfrak{a} = \frac{5}{4} \mathfrak{c}. \tag{9}$$

Bei der Erde, welche keine homogene Flüssigkeitsmasse darstellt, ist diese Beziehung nicht erfüllt, denn hier ist

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{288,4} \qquad \frac{5}{4} \mathfrak{c} = \frac{1}{230,7},$$

dagegen $$\mathfrak{a} = \frac{1}{290} \text{ bis } \frac{1}{299}.$$

Die Beziehung von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{c}$ bei dem im Gleichgewicht befindlichen, rotierenden, homogenen Ellipsoid wurde bereits S. 107 § 24 genauer entwickelt gelegentlich der Erwähnung der bezüglichen Untersuchungen von *Clairaut*.

Eingehend wird das rotierende, homogene Flüssigkeitsellipsoid untersucht von *Laplace*, *Méc. cél.* t. 2, l. 3, p. 50—62. Er findet namentlich auch, dafs zu jeder Rotationsgeschwindigkeit zwei oder kein Rotationsellipsoid gehören und dafs das längliche Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur unmöglich ist. Für unsere Zwecke genügt das oben Gegebene; übrigens zeigt (8) sofort die Unmöglichkeit eines negativen e'^2 bei kleinen Werten desselben.

Laplace bemerkt a. a. O. S. 63, dafs die Untersuchung über das Rotationsellipsoid nicht genügt, dafs man vielmehr sich bemühen müsse, alle Gleichgewichtsfiguren zu finden. Im folgenden Paragraphen nehmen wir eine ähnliche Untersuchung wie *Laplace* a. a. O. S. 63—72 vor, nämlich die Lösung dieser Aufgabe für nahezu kugelförmige, homogene Massen, sodafs Glieder der Ordnung des Quadrats der Abplattung vernachlässigt werden können.

§ 35. Eine rotierende, nahezu kugelförmige, homogene, flüssige Masse mufs die Form eines Rotationskörpers haben. Der auf den Schwerpunkt als Koordinatenanfang bezogene Radiusvektor sei, nach Kugelfunktionen K von φ und λ entwickelt, gleich

$$r = R\,(1 - \mathfrak{a}\,[K_1 + K_2 + K_3 + \ldots])\,. \tag{1}$$

Hierin ist $\mathfrak{a}$ ebenso wie R eine Konstante.

Zur Entwicklung des Potentials der Anziehung auf einen Punkt P' mit den Polarkoordinaten r', φ' und λ' benutzen wir die Reihe (8) S. 51, welche für $r' > r$ gilt:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'}\left(1 + \frac{r}{r'}P_1 + \frac{r^2}{r'^2}P_2 + \frac{r^3}{r'^3}P_3 + \ldots\right), \tag{2}$$

worin r sich vorläufig auf irgend einen inneren Punkt bezieht. Indem wir dies in den Ausdruck

$$v = k^2 \int \frac{dm}{e} \tag{3}$$

substituieren, nehmen wir zugleich $dm = \Theta\, d\sigma\,.\, r^2 dr$ und integrieren nach r von $r =$ null bis zur Oberfläche, für welche wir den Radiusvektor wieder mit r bezeichnen. Wir erhalten so:

$$v = \frac{k^2\Theta}{r'}\int\left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}\frac{P_1}{r'} + \frac{r^5}{5}\frac{P_2}{r'^2} + \frac{r^6}{6}\frac{P_3}{r'^3} + \ldots\right)d\sigma\,. \tag{4}$$

Wir beschränken uns nun vorerst auf Glieder, welche nur die nullte oder erste Potenz von $\mathfrak{a}$ enthalten und setzen demgemäfs in (4) allgemein

$$r^n = R^n\,(1 - n\mathfrak{a}\,[K_1 + K_2 + K_3 + \ldots] + \ldots)\,.$$

Bei der Integration sind sodann die Sätze (2) und (3) S. 116 zu beachten, womit erhalten wird:

$$v = \frac{4}{3}\pi k^2\Theta\frac{R^3}{r'}\left\{1 - 3\mathfrak{a}\left[\frac{1}{3}\frac{R}{r'}K_1' + \frac{1}{5}\frac{R^2}{r'^2}K_2' + \frac{1}{7}\frac{R^3}{r'^3}K_3' + \ldots\right] + \ldots\right\}. \tag{5}$$

Hierin sind die K' Kugelfunktionen von φ', λ'.

Zu diesem Potential der Anziehung tritt, wenn wir es auf einen Punkt der Oberfläche des rotierenden Körpers anwenden, wozu die Berechtigung allerdings noch fraglich ist, das Potential der Zentrifugalkraft. Bei der eingeführten Vernachlässigung von $\mathfrak{a}^2$ kann man zugleich in der geschlossenen Parenthese $R : r'$ gleich 1 setzen, womit einfacher wird:

$$v = \frac{4}{3}\pi k^2\Theta\frac{R^3}{r'}\left\{1 - 3\mathfrak{a}\left[\frac{1}{3}K_1' + \frac{1}{5}K_2' + \frac{1}{7}K_3' + \ldots\right] + \ldots\right\}. \tag{6}$$

Nehmen wir die Rotationsaxe, die immer den Schwerpunkt enthält, als z-Axe, so ist das Gesamtpotential

$$w = v + \frac{1}{2}\,\omega^2 r'^2 \cos^2\varphi'$$

oder anders geschrieben:

$$w = v + \frac{1}{3}\,\omega^2 r'^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2 r'^2 \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right), \tag{7}$$

worin v aus (6) zu substituieren ist.

Für irgend eine Niveaufläche aufserhalb des rotierenden Körpers ist w konstant. Nehmen wir, wie bereits bemerkt, an, dafs (5) auch noch für die Oberfläche gilt und nehmen wir ferner an, dafs daselbst w konstant gleich w_0 sei, so ist nun, wenn

$$\frac{4}{3}\,\pi\Theta\, R^3 \text{ mit } M \tag{8}$$

bezeichnet wird:

$$w_0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k^2 M}{r'}\left(1 - 3\mathfrak{a}\left[\frac{1}{3}K_1' + \frac{1}{5}K_2' + \frac{1}{7}K_3' + \ldots\right] + \ldots\right) \\ \qquad + \frac{1}{3}\,\omega^2 r'^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2 r'^2 \left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right) \end{array} \right\}. \tag{9}$$

Diese Gleichung ist eine Gleichung zwischen r', φ' und λ', den Polarkoordinaten eines Oberflächenpunktes, und sie mufs identisch erfüllt werden, wenn wir r' nach Gleichung (1), von der wir ausgegangen sind, gleich $R(1 - \mathfrak{a}\,[K_1' + K_2' + K_3' + \ldots])$ einführen. Mit Vernachlässigung von $\mathfrak{a}^2$ folgt

$$w_0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k^2 M}{R}\left(1 + \mathfrak{a}\left[\frac{2}{5}\,K_2 + \frac{4}{7}\,K_3 + \ldots\right]\right) \\ \qquad + \frac{1}{3}\,\omega^2 R^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2 R^2 \left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right) \end{array} \right\},$$

wobei die oberen Striche weggelassen sind, so dafs r, φ und λ wieder auf die Oberflächenpunkte ausschliefslich bezogen gedacht werden.

Man erkennt, dafs für beliebige Werte von φ und λ diese Gleichung nur identisch erfüllt ist, falls die Kugelfunktionen

$$K_3 = K_4 = K_5 \text{ u. s. f.} = \text{null}$$

sind, aufserdem aber

$$K_2 = \frac{5}{4}\,\frac{\omega^2 R^3}{\mathfrak{a} M k^2}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right) \tag{10}$$

wird, mithin frei von λ ist.

K_1 bestimmt sich nicht; aber wir wissen aus der ähnlichen Entwicklung des Paragraphen 5 S. 58, dafs K_1' im Potential (5) verschwindet, weil der Schwerpunkt Koordinatenanfang ist. Wir erhalten somit als Gleichung der Oberfläche

$$r = R\,(1 - \mathfrak{a} K_2), \tag{11}$$

wobei $\mathfrak{a} K_2$ sich nach (10) bestimmt. *Die Gleichgewichtsoberfläche ist mithin bis auf Gröfsen der Ordnung* $\mathfrak{a}^2$ *jedenfalls ein abgeplattetes Rotationsellipsoid.* Die Abplattung wird nach (10) und (11) gleich

$$\mathfrak{a} = \frac{5}{4}\,\frac{\omega^2 R^3}{Mk^2} \quad \text{d. i.} \quad \frac{5}{4}\,\mathfrak{c}\,,$$

da M nach (8) hinreichend genau die Masse und $\omega^2 R^3 : Mk^2$ also das Verhältnis $\mathfrak{c}$ der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator ist.

Die vorstehende Untersuchung ist insofern mangelhaft, als der Ausdruck (5) für v noch für die Oberfläche als gültig vorausgesetzt wird. Ganz allgemein genommen ist dies aber durchaus unzulässig, wie wir für den ähnlichen Fall des Erdkörpers schon S. 70 bemerkt haben. Allein wenn wir die physikalisch sehr plausible Voraussetzung machen, dafs die Abweichungen der Oberfläche des Gleichgewichtssphäroids von der Kugel in sanften Undulationen erfolgen, so erscheint es für den beabsichtigten Genauigkeitsgrad zulässig, den Ausdruck (5) bis zur Oberfläche anzuwenden.

Denkt man sich nämlich das Sphäroid durch eine ihm eingeschriebene Kugelfläche vom Radius b zerlegt in eine Kugel und eine dünne Schale, so zerfällt das Potential in dasjenige der Kugel und dasjenige der Schale. Letzteres kann man dadurch mit hinreichender Genauigkeit ableiten, dafs man die Masse der Schale radial nach innen auf die Kugelfläche b kondensiert annimmt und das Potential einer Kugelfläche mit der veränderlichen Dichtigkeit $\Theta\,(r - b)$ dafür setzt. Diese leichte Rechnung, welche wir dem Leser überlassen dürfen, führt mit geringen, jedenfalls zulässigen Vernachlässigungen zur Reihe (5). Wir werden im folgenden Kapitel bei anderer Gelegenheit den Genauigkeitsgrad, welchen eine solche Kondensation bietet, genauer untersuchen; aber man sieht unmittelbar, dafs derselbe nur dann nicht genügt, wenn es sich um die Darstellung rasch veränderlicher Glieder des Potentials handelt, die rasch veränderlichen Undulationen der Oberfläche entsprechen.

Für das dreiaxige, von der Kugel wenig abweichende Ellipsoid, gilt unsere Entwicklung jedenfalls; denn für dieses Ellipsoid weifs man durch andere Untersuchungen (z. B. Erweiterung derjenigen der Paragraphen 29—31 für drei ungleiche Axen), dafs die Reihe (5) bis zur Oberfläche konvergiert. Wir ersehen daher, dafs *das dreiaxige Ellipsoid nicht zu den Gleichgewichtsoberflächen eines rotierenden, nahezu kugelförmigen, homogenen Flüssigkeitssphäroids gehört.*

Über die Geschichte der Theorie der Gleichgewichtsfigur des rotierenden, flüssigen Körpers ist *Todhunter*, *History of Attraction and the Figure of the Earth*, insbesondere Bd. 2 S. 53 Art. 845—847 und weiterhin S. 285 u. ff. zu vergleichen. Ferner für neuere Untersuchungen *L. Matthiessen* in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von *Schlömilch* 1871 Bd. 16 S. 290 u. ff.



Wir entnehmen daraus Folgendes: Die Drehung eines Metallringes um einen Durchmesser als eines zur Figur der Erde in Beziehung stehenden Experiments erwähnt bereits 1726 *Desagulier* in einer Schrift über die Figur der Erde (*Todh.* I. p. 106). *Newton* setzte, wie hier schon S. 103 bemerkt, voraus, dafs das abgeplattete Ellipsoid eine Gleichgewichtsfigur für eine homogene Masse sei. *Clairaut* gab 1743 dazu einen Beweis in seiner *Figure de la Terre*, vergl. S. 105. *Legendre* erbrachte zuerst den Beweis, dafs jenes Ellipsoid unter gewissen Umständen die einzig mögliche Form sei, was *d'Alembert* vergeblich versucht hatte, und *Laplace* wies u. a. nach, dafs das längliche Rotationsellipsoid keine Gleichgewichtsfigur sei. Während *Legendre* zuerst einen beliebigen, nahezu kugelförmigen Rotationskörper untersuchte, ging *Laplace* zuerst auf ganz beliebige, nahezu kugelförmige Sphäroide ein und suchte nachzuweisen, dafs sie bis auf Gröfsen der Ordnung des Quadrates der Abplattung abgeplattete Rotationsellipsoide sein müfsten. *Liouville, Poisson* und *Todhunter* verbesserten den Beweis. (Auf diese letzteren Entwicklungen konnten wir hier nicht eingehen.)

Jacobi fand 1834, dafs auch das dreiaxige Ellipsoid eine Gleichgewichtsfigur sein könne, (vergl. *Thomson und Tait, Handbuch der theor. Physik* I. 1. S. 322) und dies wurde wiederholt von Geodäten als Ausgang für Berechnungen eines dreiaxigen Erdellipsoids aus Gradmessungen benutzt. Allein *Clausen* wies schon 1841 Bd. 18 No. 418 S. 145 der *Astronom. Nachr.* nach, dafs das dreiaxige Ellipsoid mit den drei Halbaxen $a > b > c$ nur für $\frac{c}{a} < \sqrt{\frac{1}{2}}$ bestehen kann, was bei der Erde sicher nicht stattfindet. Wie die genauere Untersuchung zeigt, würden für die thatsächliche Rotationsgeschwindigkeit der Erde die Beziehungen der Axen folgende sein:

$$a = 52{,}4346\,c \qquad b = 1{,}002313\,c\,,$$

während für die der Erde entsprechende Rotationsform ist, vergl. S. 107:

$$a = b = \left(1 + \frac{1}{230{,}7}\right) c\,.$$

Strenggenommen genügt die Betrachtung homogener Massen als Analogon zur Erde nicht. *Laplace* untersuchte daher in der *Méc. cél.* (t. 2 l. 3 p. 85—90) auch einen geschichteten, flüssigen Körper auf seine Oberfläche, allerdings unter Voraussetzung nahezu kugelförmiger Gestalt. Er findet auch hier die Figur, abgesehen von der zweiten Potenz der Abplattung, elliptisch. Bei dieser Gelegenheit werden noch eine Relation zwischen Abplattung und Dichtigkeit der Schichten abgeleitet und für verschiedene Dichtigkeitsgesetze als mögliche *Grenzen der Abplattung*

$$\frac{1}{2}\mathfrak{c} \text{ und } \frac{5}{4}\mathfrak{c}$$

$$\text{oder rund } \frac{1}{577} \text{ und } \frac{1}{231}$$

ermittelt, ersteres für den Fall der Konzentration der Masse im Schwerpunkt, letzteres für homogene Verteilung. (Vergl. auch § 12 im 6. Kap.)

§ 36. Schätzung der Abweichung der Oberfläche einer flüssigen Erde von der Gestalt eines Rotationsellipsoids. Da die Dichtigkeit der Erde veränderlich ist und zwar nach innen zu-

nimmt (S. 127), so kann das abgeplattete Rotationsellipsoid für eine flüssige Erde, wie sich zeigen läfst, nicht mehr die Form ihrer Oberfläche angeben. Wir wollen hierauf und auf eine sorgfältige Schätzung der Abweichung nicht eingehen. Wir begnügen uns, einige Betrachtungen anzustellen, die uns ein rohes Mafs der Abweichung mit geringerem Aufwand von Entwicklung abzuleiten gestatten.

Zunächst bestimmen wir das Potential eines homogenen Rotationssphäroids auf einen Punkt (r', φ') aufserhalb. Wir können hier sogleich an den Ausdruck (4) des vorigen Paragraphen anknüpfen:

$$v = \frac{k^2 \Theta}{r'} \int \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4} \frac{P_1}{r'} + \frac{r^5}{5} \frac{P_2}{r'^2} + \frac{r^6}{6} \frac{P_3}{r'^3} + \frac{r^7}{7} \frac{P_4}{r'^4} + \ldots \right) d\sigma. \quad (1)$$

Für den Radiusvektor r der Oberfläche setzen wir die Entwicklung nach Kugelfunktionen von φ an (vergl. S. 65):

$$\left.\begin{aligned} r &= R\,(1 + \alpha_1 K_2 + \alpha_2 K_4 + \ldots), \\ \text{mit} \qquad K_2 &= \sin^2\varphi - \frac{1}{3} \\ K_4 &= \sin^4\varphi - \frac{6}{7}\sin^2\varphi + \frac{3}{35}\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

K_1, K_3 u. s. f. sind sogleich weggelassen, da wir uns auf Rotationsflächen, symmetrisch zum Äquator, beschränken dürfen.

Bei den Entwicklungen berücksichtigen wir die erste und zweite Potenz von α_1, nur die erste aber von α_2. Die Potenzen von r entwickeln wir sogleich wieder nach Kugelfunktionen, wobei wir indes nur bis K_4 gehen. Dabei ist Gebrauch zu machen von der Identität

$$K_2^2 = K_4 + \frac{4}{21} K_2 + \frac{4}{45}, \quad (3)$$

die leicht aufzustellen ist.

Alle Potenzen von r enthalten nur K_2 und K_4; nach Satz (3) S. 116 verschwinden deshalb bei der Integration in (1) die Glieder mit P_1 und P_3; ferner kommen in betracht im Gliede mit

r^3 nur das von K freie Glied
r^5 „ „ Glied mit K_2
r^7 „ „ „ „ K_4.

Diese Glieder sind

$$\begin{aligned} &R^3 \left(1 + \frac{4}{15}\alpha_1^2\right) && \text{für } r^3 \\ &R^5 K_2 \left(5\alpha_1 + \frac{40}{21}\alpha_1^2\right) && \text{„ } r^5 \\ &R^7 K_4 \left(7\alpha_2 + 21\,\alpha_1^2\right) && \text{„ } r^7. \end{aligned}$$

Beachtet man nun noch den Satz (2) S. 116, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$v = \frac{4}{3}\pi k'\Theta \frac{R^3}{r'} \left\{ \begin{array}{c} \left(1 + \frac{4}{15}\alpha_1^2\right) + \frac{R^2}{r'^2}\left(\frac{3}{5}\alpha_1 + \frac{8}{35}\alpha_1^2\right) K_2' \\ + \frac{R^4}{r'^4}\left(\frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_1^2\right) K_4' + \dots \end{array} \right\}, \qquad (4)$$

worin K_2' und K_4' die in (2) angegebenen Kugelfunktionen, aber von φ', sind. Indem wir

$$\frac{4}{3}\pi\Theta R^3\left(1 + \frac{4}{15}\alpha_1^2\right) \text{ mit } M$$

bezeichnen, folgt aus (4)

$$v = \frac{k^2 M}{r'}\left\{1 + \frac{R^2}{r'^2}\left(\frac{3}{5}\alpha_1 + \frac{8}{35}\alpha_1^2\right) K_2' + \frac{R^4}{r'^4}\left(\frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_1^2\right) K_4' + \dots\right\}. \quad (4^*)$$

M ist, wie sich direkt zeigen läfst, die Masse. Wir wissen aber bereits aus der ähnlichen Entwicklung S. 60, dafs v mit $k^2 M : r'$ beginnen mufs. Was die Brauchbarkeit und die Genauigkeit der Formel (4*) anlangt, so ist zu bemerken, dafs (4*) für das Rotationsellipsoid jedenfalls bis auf Glieder der dritten Potenz der Abplattung richtig ist. Wenn nun in (2) α_2 von seinem elliptischen Werte nur um ein Glied von der Ordnung der zweiten Potenz der Abplattung abweicht und in den nicht angesetzten Gliedern von (2) die Abweichungen mindestens nicht über die dritte Potenz gehen, so muss (4*) bis zur zweiten Potenz der Abplattung incl. genau sein und auch eine wirkliche Näherungsformel darstellen, weil die Abweichung vom Ellipsoid wesentlich nur in einer sehr flachen Undulation, K_4 entsprechend, verläuft; (vergl. die entsprechenden Bemerkungen in dem vorigen Paragraphen auf S. 135).

Nehmen wir nun an, dafs die Erde gebildet sei aus einem homogenen Sphäroid, welches im Innern durch homogene, kugelförmige, zum Schwerpunkt des Sphäroids konzentrische Schichten durchdrungen ist, so können wir für das Sphäroid allein den Ausdruck (4*), für die übrige Masse aber den einfachen Ausdruck *Masse* : r' anwenden. Bezeichnen wir die Gesamtmasse mit M, die Sphäroidmasse mit M_1, so wird das Gesamtpotential

$$w = k^2\left\{\frac{M}{r'} + \frac{M_1 R^2}{r'^3}\left[\left(\frac{3}{5}\alpha_1 + \frac{8}{35}\alpha_1^2\right)K_2' + \frac{R^2}{r'^2}\left(\frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_1^2\right)K_4' + \dots\right]\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\omega^2 r'^2 \cos^2\varphi'. \qquad (5)$$

Soll nun die Oberfläche des Sphäroids eine Niveaufläche sein, so mufs w einen konstanten Wert w_0 annehmen, wenn r' nach Mafsgabe der ersten Formel (2) eingeführt wird. Indem wir jetzt den oberen Strich an r und φ weglassen, setzen wir bei der Substitution

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left\{1 + \frac{4}{45}\alpha_1^2 - \left(\alpha_1 - \frac{4}{21}\alpha_1^2\right)K_2 - \left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right)K_4\right\}$$

$$\frac{K_2}{r^3} = \frac{1}{R^3}\left\{-\frac{4}{15}\alpha_1 + K_2\left(1 - \frac{4}{7}\alpha_1\right) - 3\alpha_1 K_4\right\}$$

$$r^2\cos^2\varphi = R^2\left\{\frac{2}{3} - \frac{8}{45}\alpha_1 - K_2\left(1 - \frac{20}{21}\alpha_1\right) - 2\alpha_1 K_4\right\},$$

welche Formeln leicht mit Rücksicht auf (3) abzuleiten sind. Es folgt

$$w_0 = \left\{\frac{k^2 M}{R}\left(1 + \frac{4}{45}\alpha_1^2\right) - \frac{4}{25}\alpha_1^2\frac{k^2 M_1}{R} + \omega^2 R^2\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{45}\alpha_1\right)\right\}$$
$$-\frac{K_2}{R}\left\{k^2 M\left(\alpha_1 - \frac{4}{21}\alpha_1^2\right) - k^2 M_1\left(\frac{3}{5}\alpha_1 - \frac{4}{35}\alpha_1^2\right) + \omega^2 R^3\left(\frac{1}{2} - \frac{10}{21}\alpha_1\right)\right\}$$
$$-\frac{K_4}{R}\left\{k^2 M\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right) - k^2 M_1\left(\frac{1}{3}\alpha_2 - \frac{4}{5}\alpha_1^2\right) + \omega^2 R^3\alpha_1\right\},$$

und da die Faktoren von K_2 und K_4 verschwinden müssen, wird

$$k^2 M\left(\alpha_1 - \frac{4}{21}\alpha_1^2\right) - k^2 M_1\left(\frac{3}{5}\alpha_1 - \frac{4}{35}\alpha_1^2\right) + \omega^2 R^3\left(\frac{1}{2} - \frac{10}{21}\alpha_1\right) = 0$$

und

$$k^2 M\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right) - k^2 M_1\left(\frac{1}{3}\alpha_2 - \frac{4}{5}\alpha_1^2\right) + \omega^2 R^3\alpha_1 = 0\,.$$

Eliminiert man ω und reduziert auf α_2, so ergiebt sich mit Vernachlässigung von α_1^3 die Näherungsformel:

$$\alpha_2 = 3\,\alpha_1^2\,\frac{3 - 2\frac{M_1}{M}}{3 - \frac{M_1}{M}}\,. \tag{6}$$

Um nun die Abweichung vom Ellipsoid gleicher Abplattung zu bestimmen, ordnen wir den Ausdruck (2) für r zunächst nach Potenzen von $\sin\varphi$. Mit Einführung der Abplattung $\mathfrak{a}$ und des Äquatorialhalbmessers a ist dann

$$r = a\left(1 - [\mathfrak{a} + \alpha_2]\sin^2\varphi + \alpha_2\sin^4\varphi + \ldots\right). \tag{7}$$

Da $\mathfrak{a}$ und α_1 bis auf Gröfsen der Ordnung $\mathfrak{a}^2$ mit einander übereinstimmen, kann man in (6) α_1^2 mit $\mathfrak{a}^2$ vertauschen, womit der Ausdruck (6) mit Vernachlässigung von $\mathfrak{a}^3$ übergeht in

$$\alpha_2 = 3\mathfrak{a}^2\,\frac{3 - 2\frac{M_1}{M}}{3 - \frac{M_1}{M}}\,. \tag{7*}$$

Wir wissen bereits, dafs für $M_1 = M$ ein Rotationsellipsoid herauskommen mufs. In der That folgt alsdann $\alpha_2 = \frac{3}{2}\mathfrak{a}^2$, wie es nach Bd. 1 S. 61 sein soll. Für das Rotationsellipsoid mit der Abplattung $\mathfrak{a}$ und dem Äquatorialradius a ist somit der Ausdruck für den Radiusvektor:

$$r = a\left(1 - \left[\mathfrak{a} + \frac{3\mathfrak{a}^2}{2}\right]\sin^2\varphi + \frac{3\mathfrak{a}^2}{2}\sin^4\varphi + \dots\right).$$

Der radiale Abstand vom Sphäroid und Ellipsoid beträgt daher, wenn die Radien durch die Indices S und E unterschieden werden:

$$r_S - r_E = \frac{1}{4}\,a\left(\frac{3\mathfrak{a}^2}{2} - \alpha_2\right)\sin^2 2\varphi\,.$$

Dies ist ein Maximum für $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}$ und zwar wird mit Rücksicht auf (7*):

$$(r_S - r_E)_{max} = -\frac{9}{8}\,a\mathfrak{a}^2\,\frac{1 - \frac{M_1}{M}}{8 - \frac{M_1}{M}}\,. \tag{8}$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde ist 5,6; die Dichtigkeit Θ_0 an der Oberfläche etwa 2,8. Der kleinste Wert von M_1 ist hiernach gleich $\frac{1}{2}M$ anzunehmen, womit

$$(r_S - r_E)_{max} = -16^m$$

wird. Dieser Wert dürfte aber zu grofs sein. Wir werden im sechsten Kapitel sehen, dafs die Dichtigkeit anfangs sehr rasch zunimmt und zwar bei der Tiefe von etwa $a:4$ bereits gleich 5,6 ist. Legen wir nun dementsprechend ein homogenes Sphäroid mit der Dichte

$$\frac{1}{2}\left(2{,}8 + 5{,}6\right)$$

zu grunde, so wird $M_1 = \frac{3}{4}M$ und $(r_S - r_E)_{max} = -9^m$.

Im sechsten Kapitel wird auch gezeigt, dafs die Abplattung der Schichten gleicher Dichtigkeit nach innen wahrscheinlich abnimmt. Demgemäfs dürfte ebenfalls der zuerst erhaltene Maximalabstand zu grofs sein, da er gewissermafsen die extreme Annahme einer sehr raschen Änderung der Abplattung bis auf null macht. Der zweite Wert zeigt, dafs eine mäfsige Vergröfserung von Θ_0 die Differenz $(r_S - r_E)_{max}$ bedeutend herabdrückt. Jedenfalls sind also die Abstände zwischen Ellipsoid und Sphäroid gering.

Vergleicht man die soeben erhaltenen Resultate mit den Ergebnissen des Paragraphen 17 S. 90, so zeigt sich, dafs bei gleichen Axenlängen die Normalsphäroide und das oben betrachtete Sphäroid um Gröfsen derselben Ordnung, aber in entgegengesetztem Sinne, vom Ellipsoid abweichen. Dies kann nicht verwundern, da sehr geringe Abweichungen in der Massenanordnung im Erdinnern von derjenigen für flüssigen Zustand schon eine solche Differenz zu erzeugen im Stande sind. Unzweifelhaft ist die Erde aber bis zu einiger Tiefe fest und wenn nun auch hier durch Abweichungen der Massenanordnung

vom flüssigen Zustande Spannungen entstehen, die im grofsen und ganzen schliefslich eine dem letzteren angenäherte Anordnung herbeiführen, so kann sich dies doch nicht auf Bruchteile des Radius erstrecken, die Gröfsen der Ordnung α^2 sind. Man vergl. übrigens die Resultate von *Borenius* und *Paucker* S. 88 (13) und (14*).

Airy hat nach *Thomson und Tait*, *Handbuch* I, 2 S. 360 eine genauere Untersuchung geführt und die Abweichung der Oberfläche einer flüssigen Erde vom Ellipsoid zu 24′ d. h. 7ᵐ ermittelt. Man vergl. für solche Rechnungen auch die Entwicklungen von *Hargraeve* in den *Phil. Transact.* 1841 p. 75 und von *Ed. Schmidt* in seiner *mathem. Geogr.* Bd. 1 S. 339.

Drittes Kapitel.

Ableitung einer Formel für die Schwerkraft im Meeresniveau aus den Beobachtungen; kontinentale Abweichungen des Geoids.

§ 1. Potential und Anziehung einer kreisförmigen Scheibe auf einen Punkt normal über dem Zentrum.*) Beschreibt man um den Mittelpunkt M der Scheibe mit dem Radius r einen Kreis (Fig. 9), so haben alle Punkte P desselben von P', dem angezogenen Punkte, gleiche Entfernung $e = \sqrt{z^2 + r^2}$. Lassen wir nun r um dr wachsen und setzen die Dicke der Scheibe gleich dz, so entsteht das Raumelement $2\pi r\, dr\, dz$, welches in allen Teilen denselben Abstand e von P' hat.

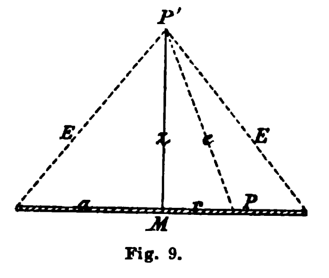


Fig. 9.

Es ist daher, wenn Θ die konstante Dichtigkeit in der Scheibe bezeichnet, das Potential derselben gleich

$$v = 2\pi k^2 \Theta dz \int_0^a \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}.$$

Die Integration giebt sofort

$$v = 2\pi k^2 \Theta dz\, (E - z) \qquad (1)$$
$$\scriptstyle z \text{ positiv}$$

für

$$E = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Die Anziehung der Scheibe auf P' findet offenbar in Richtung $P'M$ statt. Man erhält sie gleich

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = 2\pi k^2 \Theta dz \left(1 - \frac{z}{E}\right). \qquad (2)$$

---

*) Wir stellen in den ersten Paragraphen dieses Kapitels einige vorbereitende Entwicklungen zusammen.

Diese Formel zeigt, dafs *die Anziehung der Scheibe auf den Punkt P' in der Richtung $P'M$ normal zur Scheibe solange vom Abstande z des Punktes nahezu unabhängig ist, als dieser Abstand im Verhältnis zu der Entfernung des Punktes vom Rande der Scheibe sehr klein ist.* Es gilt dies auch für excentrische Lagen von P' und für unregelmäfsig begrenzte Scheiben, wenn nur die Projektion M von P' innerhalb der Scheibe liegt und z im Verhältnis zur *kleinsten* Randentfernung noch sehr klein ist.

§ 2. Potential und Anziehung eines homogenen, geraden Kreiscylinders auf einen Punkt seiner Axe, aufserhalb, sowie eines homogenen, geraden Kreiskegels auf seine Spitze.

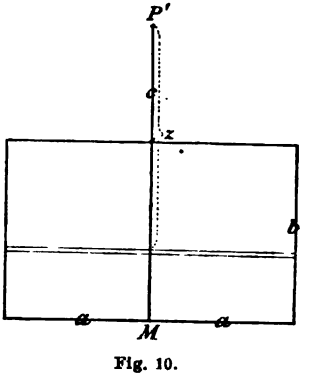


Fig. 10.

Für ein scheibenförmiges Element des *Cylinders*, Fig. 10, im Abstand z von P' gilt wieder Formel (1) des vorigen Paragraphen. Man hat damit für das Potential des ganzen Cylinders die Gleichung

$$v = 2\pi k^2 \Theta \int_c^{b+c} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - z\right) dz\,.$$

Das unbestimmte Integral ist nach bekannten Formeln gleich

$$\frac{1}{2} z \sqrt{z^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{lognat}\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right) - \frac{1}{2} z^2 + Konst.$$

und hiermit ergiebt sich

$$v = \pi k^2 \Theta \left\{ \begin{array}{l} (b+c)\sqrt{a^2 + (b+c)^2} - c\sqrt{a^2 + c^2} - b(b+2c) \\ \qquad + a^2 \operatorname{lognat} \dfrac{b + c + \sqrt{a^2 + (b+c)^2}}{c + \sqrt{a^2 + c^2}} \end{array} \right\}. \tag{1}$$

Die Anziehung des Cylinders auf P' in Richtung $P'M$ wird gleich

$$-\frac{\partial v}{\partial c} = 2\pi k^2 \Theta \left(b + \sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + (b+c)^2}\right), \tag{2}$$

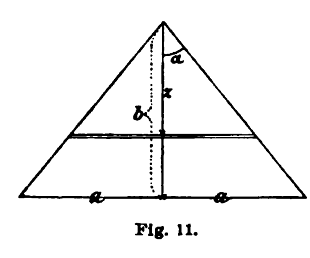


Fig. 11.

welchen Ausdruck man übrigens noch bequemer aus Formel (2) des vorigen Paragraphen durch direkte Integration findet.

Die Formeln (1) und (2) gelten nur für positive Werte von c, da im Innern eines Körpers der analytische Ausdruck für v ein anderer ist als aufserhalb (vergl. Kap. 1 S. 34). Auch Formel (1) a. v. S. zeigt dies.

Für das Potential des *Kegels* in Bezug auf seine Spitze hat man, weil hier nach Fig. 11 in Bezug auf ein scheibenförmiges Element $E = z \sec \alpha$ ist:

$$v = 2\pi k^2 \Theta \int_0^b z (\sec\alpha - 1)\, dz$$

d. i.

$$v = \pi k^2 \Theta b^2 (\sec\alpha - 1)$$

oder

$$v = \pi k^2 \Theta b \left(\sqrt{a^2 + b^2} - b\right). \qquad (3)$$

Dagegen erhält man für die Anziehung auf die Spitze aus Formel (2) des vorigen Paragraphen:

$$2\pi k^2 \Theta \int_0^b (1 - \cos\alpha)\, dz$$

d. i.

$$2\pi k^2 \Theta b (1 - \cos\alpha)$$

oder

$$2\pi k^2 \Theta b \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right). \qquad (4)$$

§ 3. **Potential und Anziehung eines homogenen Rotationsparaboloids auf einen Punkt seiner Axe, außerhalb.** Für ein scheibenförmiges Element im Abstand z von P' gilt wieder Formel (1) § 1 S. 141, wobei für a jetzt y zu schreiben ist, Fig. 12. Man hat damit für das Potential des Paraboloids von der Höhe b die Gleichung

$$v = 2\pi k^2 \Theta \int_c^{b+c} \left(\sqrt{z^2 + y^2} - z\right) dz,$$

wobei zu setzen ist

$$y^2 = 2p(z - c) \qquad (1)$$

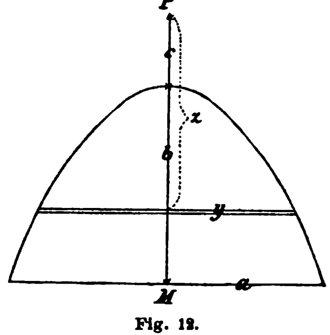


Fig. 12.

und p sich durch Anwendung dieser letztern Gleichung auf die Ordinate a in der Grundfläche bestimmt. Hier ist $a^2 = 2pb$ und man hat daher

$$p = \frac{a^2}{2b}. \qquad (2)$$

Der oben gegebene Ausdruck für v geht durch Substitution des Wertes von y^2 nach (1) und einfacher Umformung über in

$$v = 2\pi k^2 \Theta \int_c^{b+c} \left\{\sqrt{(z+p)^2 - p(2c+p)}\, d(z+p) - z\, dz\right\}.$$

Das unbestimmte Integral ist nach bekannten Formeln gleich

$$\frac{1}{2}(z+p)\sqrt{(z+p)^2 - p(2c+p)}$$

$$- \frac{1}{2} p(2c+p) \log\text{nat}\left\{z + p + \sqrt{(z+p)^2 - p(2c+p)}\right\} - \frac{1}{2} z^2 + \mathit{Konst.}$$

und hiermit ergiebt sich

$$v = \pi k^2 \Theta \left\{ \begin{array}{l} (b+c+p)\sqrt{(b+c)^2+2pb} - c(c+p) - b(b+2c) \\ -p(2c+p) \log\text{nat} \dfrac{b+c+p+\sqrt{(b+c)^2+2pb}}{2c+p} \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Die Anziehung des Paraboloids auf P' in Richtung $P'M$ wird gleich

$$-\frac{\partial v}{\partial c} = 2\pi k^2 \Theta \left\{ \begin{array}{c} b+c-\sqrt{(b+c)^2+2pb} \\ +p \log\text{nat} \dfrac{b+c+p+\sqrt{(b+c)^2+2pb}}{2c+p} \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Dasselbe ergiebt sich durch Integration aus Formel (2) § 1 S. 141.

Nach Kap. 1 S. 34 gelten die Formeln (3) und (4) nicht im Innern des Paraboloids, was übrigens auch aus (1) S. 141 hervorgeht.

§ 4. **Potential und Anziehung einer sphärischen Scheibe auf einen Punkt normal über dem Zentrum.** Der angezogene Punkt P' liege *außerhalb* der Kugelfläche vom Radius r, welche die innere Begrenzung der von einem kleinen Kreise begrenzten Scheibe von der Dicke dr bildet, Fig. 13; den Punkt P', die Mitte M der Scheibe und das Kugelzentrum C nehmen wir auf einer Geraden. Beschreibt man um den Mittelpunkt M mit dem Radius $r\psi$ einen Kreis, so haben alle Punkte P desselben von P' die Entfernung $e = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi}$. Lassen wir zugleich ψ um $d\psi$ wachsen, so entsteht ein ringförmiges Raumelement vom Querschnitt $dq = dr \,.\, r d\psi$ und dem Volumen $dq \,.\, 2\pi r \sin\psi$, dessen Teile alle in der gleichen Entfernung e von P' liegen. Mit Rücksicht auf die Fixierung des Scheibenrandes in der Figur durch $\psi = \Psi$ folgt nun als Potential der Platte

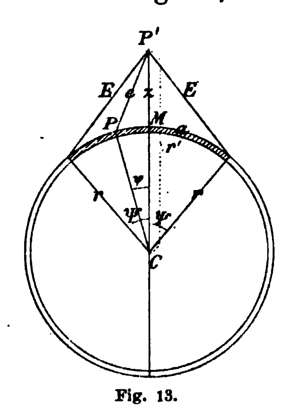


Fig. 13.

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \int_0^{\Psi} \frac{\sin\psi \, d\psi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\psi}},$$

wobei die Dichtigkeit wieder mit Θ bezeichnet ist. Die Integration giebt

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\Psi} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}}{rr'}, \quad (1)$$

worin die beiden Quadratwurzeln die immer positiven Entfernungen des angezogenen Punktes vom Rande bezw. der Mitte M bedeuten. Die Ausziehung der zweiten Quadratwurzel mit Beachtung der Bedingung $r' > r$, sowie die Benutzung der Abkürzungen

$$E = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi}$$

und

$$z = r' - r$$

geben:

$$v = 2\pi k^2 \Theta \underset{z \text{ positiv.}}{\frac{r}{r'}} dr (E - z). \tag{2}$$

Der negative Differentialquotient von v nach r' ist die Anziehung in Richtung $P'C$ auf P'. Es ist nach naheliegenden Reduktionen:

$$- \frac{\partial v}{\partial r'} \doteq 2\pi k^2 \Theta \underset{r' > r}{\frac{r^2}{r'^2}} dr \left\{ 1 - \frac{r' \cos \Psi - r}{E} \right\}. \tag{3}$$

Liegt P' *innerhalb* der Kugelfläche, so ist im Ausdruck für v nach (2) $z = r - r'$ zu setzen und es wird

$$\frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \Theta \underset{r' < r}{\frac{r^2}{r'^2}} dr \left\{ 1 + \frac{r' \cos \Psi - r}{E} \right\}. \tag{3*}$$

Vergleicht man die vorstehenden Ausdrücke für das Potential und die Anziehung einer sphärischen Platte mit den in § 1 dieses Kapitels S. 141 für eine ebene Platte gefundenen, so ist leicht zu erkennen, dafs die Krümmung wenig Einflufs hat, falls der Abstand des Punktes P' von der Platte, $z = r' - r$, und der Radius der Platte, $a = r\Psi$, kleine Gröfsen gegen den Kugelradius r sind. Bei dem Potential ist dies unmittelbar ersichtlich. Um es auch bei der Anziehung hervortreten zu lassen, schreiben wir in (3) $r' - 2r' \sin^2 \frac{\Psi}{2}$ für $r' \cos \Psi$ und erhalten anstatt (3):

$$- \frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \Theta \underset{z \text{ positiv}}{\frac{r^2}{r'^2}} dr \left\{ 1 - \frac{z}{E} + \frac{2r'}{E} \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right\}. \tag{4}$$

Hierin kann man anstatt des dritten Gliedes der Parenthese, $a = r\Psi$ gesetzt, angenähert schreiben:

$$\frac{1}{2} \frac{a}{E} \cdot \frac{a}{r},$$

und dies zeigt deutlich die Geringfügigkeit des Gliedes.

Ist z gegen $a = r\Psi$ sehr klein und zugleich a gegen r klein, so gilt derselbe Satz, welcher in § 1 S. 142 für die ebene Scheibe hervorgehoben worden ist.

In dem Falle, dafs zwar z sehr klein ist gegen a, aber a im übrigen einen beliebigen Wert hat, kann man in (4) vor der Parenthese $r^2 = r'^2$ und innerhalb der Parenthese $z : E$ gleich null setzen. Es geht (4) alsdann über in

$$- \frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \Theta dr \left\{ 1 + \frac{E}{2r} \right\}.$$

Nun ist zugleich

$$v = 2\pi k^2 \Theta dr \,.\, E;$$

man hat daher, falls z gegen a sehr klein ist, bei beliebigem Werte von a:

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \Theta\, dr + \frac{v}{2r}\,. \tag{5}$$

Dieser Satz gilt nicht blos für den besonderen Fall, in welchem er bewiesen wurde, sondern *ganz allgemein für jeden unendlich dünnen Massenbelag der Kugelfläche* und für alle unendlich nahe aufserhalb derselben liegenden Punkte, in deren Umgebung die Dichtigkeit Θ des Belags sich nicht unstetig ändert.

Um vorstehenden Satz allgemein zu beweisen, nehmen wir den angezogenen Punkt P' zunächst in der Kugelfläche liegend, auf welcher wir uns kondensierte Masse verbreitet denken. Wenn wir nun das Massenelement bei irgend einem Punkte P der Kugelfläche mit dm bezeichnen, so ist einerseits

$$v = k^2 \int \frac{dm}{e}\,,$$

worin die Integration für die ganze Kugelfläche zu nehmen ist. Die Anziehung in radialer Richtung $P'C$, nach innen, wird andrerseits gleich

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = k^2 \int \frac{dm}{e^2} \sin\frac{\psi}{2}\,, \tag{6}$$

indem $P'C$ mit PP' den Winkel $90^0 - \frac{\psi}{2}$ einschliefst. Da aber $e = 2r \sin\frac{\psi}{2}$ ist, so hat man

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = \frac{k^2}{2r} \int \frac{dm}{e} = \frac{v}{2r}\,. \tag{7}$$

Hierbei ist entsprechend dem Umstand, dafs P' in die unendlich dünn mit kondensierter Masse belegte Fläche verlegt wurde, die Anziehung der Masse in der Umgebung von P' gleich null gesetzt. Dies zeigt (6) sofort, wenn wir dm durch die Masse für die Flächeneinheit: die Flächendichtigkeit, ausdrücken. Bezeichnen wir dieselbe mit ϑ im Durchschnitt für alle Punkte in demselben Abstand e, so wird $dm = 2r^2\pi \sin\psi\, d\psi \,.\, \vartheta$ und es folgt aus (6):

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \vartheta \cos\frac{\psi}{2}\, d\,\frac{\psi}{2}\,.$$

Nimmt man ϑ in der nächsten Umgebung von P' konstant, etwa bis $\psi = \psi_1$, so wird der Anteil dieser Umgebung an der radialen Anziehung gleich

$$2\pi k^2 \vartheta \sin\frac{\psi_1}{2}\,;$$

derselbe verschwindet also mit ψ_1.

Liegt aber P' nicht in der Fläche, sondern unendlich nahe aufserhalb, so ist die Anziehung dieser benachbarten Masse sehr wesentlich. Man zerlege in diesem Falle die Kugelfläche in 2 Teile durch Ausschneiden einer zu P' konzentrischen Scheibe vom Radius a. Innerhalb a mufs ϑ als konstant zu betrachten sein. Dann gilt für den innern Teil Formel (5), worin nur ϑ für Θdr zu setzen ist; für den äufsern Teil gilt Formel (7) und zusammen also offenbar wieder die Gleichung (5):

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \vartheta + \frac{v}{2r}, \tag{8}$$

wobei ϑ die Dichtigkeit in der Umgebung von P' darstellt.

Über Formeln bei endlicher Dicke der Platten vergl. *Pratt, Phil. Transact.* 1871, p. 341.

Über eine ähnliche Gleichung für die Oberfläche eines nahezu kugelförmigen, homogenen Körpers von *Laplace* vergl. *Méc. cél.*, t. II l. III Nr. 10 sowie t. V l. XI und *Todhunter, History of Attraction*, Bd. 2 S. 253.

§ 5. Abstand von Niveausphäroid und Niveaufläche gleichen Potentialwertes.

Im vorigen Kapitel ist für einen Näherungsausdruck U des Potentiales W der Schwerkraft gezeigt worden, wie sich mit Hülfe von Schweremessungen die Gestalt der zugehörigen Niveausphäroide aufserhalb der mathematischen Erdoberfläche bestimmen läfst. Wir denken uns jetzt ganz allgemein unter U eine Funktion, welche einen Näherungsausdruck von W vorstellt. Wir denken uns ferner zu den Gleichungen $W = W_0$ und $U = W_0$, unter W_0 eine Konstante verstanden, die zugehörigen Flächen aufgesucht. Dann gilt es eine Beziehung zu ermitteln für den Abstand $QP = N$, um welchen sich, Fig. 14, die Niveaufläche $W = W_0$ über das Niveausphäroid $U = W_0$ in der Normalen PQ des letzteren erhebt. Diese Beziehung kann dann selbstredend auch für die besonderen Formen von U Anwendung finden, die im vorigen Kapitel für Niveausphäroide aufserhalb benutzt worden sind.

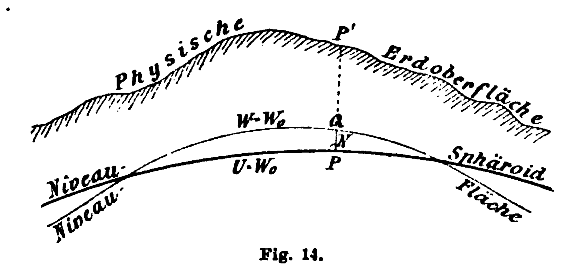


Fig. 14.

Im allgemeinen wird nun in einem beliebigen Punkte der Wert der Funktion U von W abweichen um eine Gröfse T:

$$W = U + T. \tag{1}$$

Ist in dem Punkte insbesondere $W = U = W_0$, so hat T den Wert null. Wir sehen also zunächst, dafs Niveaufläche und Niveausphäroid

sich da schneiden, wo $T = $ null ist. Ist T für einen Punkt Q der Niveaufläche $W = W_0$ nicht null, so hat U einerseits daselbst nach (1) den Wert $W_0 - T$. Andrerseits kann man von P ausgehend U für Q nach *Taylors* Satz herleiten und zwar ist für kleine N in erster Annäherung, wenn beliebige Höhen über P mit h bezeichnet werden:

$$U = W_0 + \left(\frac{dU}{dh}\right)_0 N + \dots \, .$$

Da aber auch $U = W_0 - T$ gefunden war, so folgt sofort aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke

$$N = -\frac{T}{\left(\frac{dU}{dh}\right)_0} + \dots,$$

oder mit der Festsetzung, dafs N nach aufsen wie in Fig. 14 positiv gezählt wird:

$$N = \frac{T}{\gamma} + \dots, \tag{2}$$

worin γ die der Funktion U in P entsprechende Beschleunigung der Schwere bedeutet.

In den Fällen des vorigen Kapitels bezeichnet γ die *normale* Schwerkraft.

Die Relation (2) hat *H. Bruns* in seiner *Figur der Erde* S. 20 angegeben und zwar in der Gestalt $h = -T : \gamma \cos \varepsilon$. Hierbei bedeutet h die Tiefe des Sphäroids $U = W_0$ unter der Niveaufläche $W = W_0$, gemessen in der Lotrichtung von Q, wenn in Q die normale Schwerebeschleunigung gleich γ ist und die Lotrichtung daselbst mit der Richtung der normalen Schwerkraft den Winkel ε einschliefst. Praktisch genommen laufen beide Formeln, die *Bruns*sche und (2), auf dasselbe hinaus. Doch ist bei *Bruns* die Entwicklung eine etwas andere.

Da man die Werte von T im Niveau der Meeresfläche, welche einem wie im vorigen Kapitel auf grund der Schweremessungen zu bestimmenden Niveausphäroid U entsprechen, nicht kennt, so kann man von der Formel (2) allerdings keinen Gebrauch machen, um die Undulationen der Meeresfläche gegen ein Niveausphäroid gleichen Potentialwertes zu ermitteln. Nichtsdestoweniger ist die Formel von hoher Bedeutung, wie aus den zahlreichen Anwendungen derselben in diesem Kapitel hervorgehen wird.

Wir werden sie als das *Theorem von Bruns* bezeichnen.

§ 6. **Die Untersuchung der Brauchbarkeit der Entwicklung des Potentials W der Schwerkraft nach negativen Potenzen des Radiusvektors bis zur Meeresfläche (dem Geoid)** erfordert eine Anwendung vorstehenden Theorems.

S. 70 § 9 wurde darauf hingewiesen, dafs diese S. 60 § 5 (7) gegebene Entwicklung in Strenge nicht bis zur Meeresfläche gelten kann. Um Gültigkeit zu erlangen, wird es nötig, der wirklichen Massenverteilung zwischen der physischen Erdoberfläche und einer der mathematischen

Erdoberfläche konzentrisch zum Erdschwerpunkt berührend eingeschriebenen Kugelfläche oder einer innerhalb der letzteren gelegenen Fläche eine ideelle Massenverteilung zu substituieren, für welche jene Entwicklung gilt. Allein es ist klar, dafs mit dieser Abänderung der Massenlagerung auch Änderungen im Potential und in der Schwerkraft verknüpft sind. Man mufs sich nun eine Vorstellung zu machen suchen, wie grofs diese Änderungen etwa sind und welchen Einflufs dieselben auf die Bestimmung der Form der Niveauflächen, insbesondere der Meeresfläche, aus Schweremessungen haben.

Um eine jedenfalls zulässige Idealisierung durchzuführen, denken wir uns zu der mathematischen Erdoberfläche eine Parallelfläche im Abstand $\mathfrak{a}R$ (d. i. Abplattung mal mittlerer Erdradius) konstruiert.*) Diese *Parallelfläche* erfüllt die Bedingung, innerhalb einer der mathematischen Erdoberfläche konzentrisch zum Erdschwerpunkt berührend eingeschriebenen Kugelfläche zu liegen, mindestens sehr nahe und hinreichend genau. Alle Massen aufserhalb der Parallelfläche verschieben wir radial auf dieselbe; wir kondensieren also die äufseren Massen daselbst. Durch diese Kondensation gehen das wirkliche Potential W und die wirkliche Schwerkraft g in das theoretische Potential U und die theoretische Schwere γ über. Ist im Punkte Q der wirklichen Meeres-(Geoid-)Fläche $W = U + T$, so stehen die wirkliche und die theoretische Meeres-(Geoid-)Fläche gleichen Potentialwertes nach vorigem Paragraph daselbst um $T:\gamma$ voneinander ab, wobei γ die theoretische Schwere in dem zu Q gehörigen Punkte P der theoretischen Meeresfläche bezeichnet.

Wir haben nun zunächst die Aufgabe, T zu schätzen, d. h. zu schätzen die Änderung im Potential infolge der Kondensation der äufseren Massen. Ferner sind zu schätzen die Änderungen der Schwerkraft im Niveau der Meeresfläche: 1. infolge der Verschiebung der letzteren um $T:\gamma$, 2. infolge der Kondensation der äufseren Massen.

§ 7. Änderung des Potentiales W durch Kondensation der äufseren Massen auf die Parallelfläche. Bei der Untersuchung des Kondensationseffektes wird es jedenfalls eine gute Annäherung gewähren, die Meeresfläche und ihre Parallelfläche, die Kondensationsfläche, als Kugelflächen zu betrachten. Dafs diese Annahme auf den Betrag des Kondensationseffektes keinen wesentlichen Einflufs hat, wird sich im Folgenden ohne weitere Betonung dieses Umstandes von selbst zeigen.

Wir denken uns W zunächst auf einen Punkt P' im Meeresniveau bezogen, Fig. 15. Ein im Punkte P befindliches Massenelement dm liefert zum Potential den Beitrag $k^2 dm : e$; verschieben

---

*) Durch die Annahme $\mathfrak{a}R$ wird nur ein plausibler Wert für den Abstand beider Flächen, nicht aber die Voraussetzung eingeführt, dafs die Meeresfläche ein abgeplattetes Sphäroid sei.

wir das Massenelement aber in radialer Richtung auf die Kondensationsfläche nach P_1, so wird der Beitrag $k^2 dm : e_1$. Für kleine Winkel ψ ist nun nach der Figur $e_1 > e$, also der Beitrag nach der Kondensation ein kleinerer als vorher. Für grofse Werte ψ ist es aber gerade umgekehrt. Die Grenzfläche $A_1 B B A_1$, eine Rotationsfläche mit der Axe $P'C$, welche alle Punkte P der einen Art von denen der andern Art trennt, findet man leicht. A_1 liegt in dem Berührungspunkt der Tangente von P' an den innern Kreis; B liegt so, dafs die Mitte B_2 von BB_1 im Dreieck $B_2 P' C$ den Scheitel eines rechten Winkels bezeichnet und dafs somit $P'B = P'B_1$ ist; u. s. f.

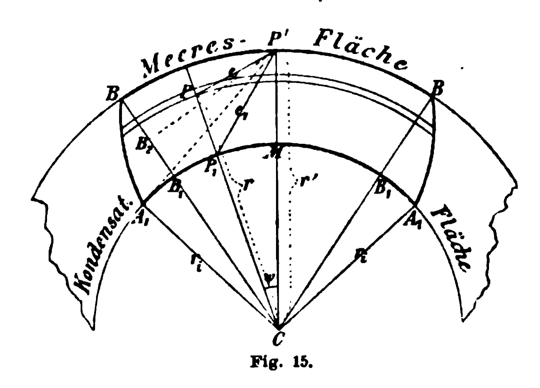


Fig. 15.

Setzt man den Radius der Kondensationsfläche gleich r_i und ihren Abstand von der Meeresfläche gleich $\mathfrak{a} R$ oder $\mathfrak{a} r_i$, so hat man:

$$A_1 P' = r_i \sqrt{(1+\mathfrak{a})^2 - 1} = r_i \sqrt{2\mathfrak{a}} \text{ nahezu;}$$
$$B_2 P' = r_i \sqrt{(1+\mathfrak{a})^2 - \left(1 + \frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^2} = r_i \sqrt{\mathfrak{a}} \text{ nahezu.} \quad (1)$$

Wir leiten nunmehr einen Näherungsausdruck für die Potentialverminderung ab, welche die Kondensation der Masse $A_1 B B A_1$ giebt, wobei wir konstante Dichte Θ voraussetzen. Wäre die Kugelschale zwischen beiden Flächen ganz mit Masse gleicher Dichte erfüllt, so würde die Kondensation am Potentialwert nach S. 62 § 6 (6) nichts ändern. Die Kondensation von $A_1 B B A_1$ giebt daher für P' einen Maximaleffekt, weshalb wir den entsprechenden, in Fig. 15 kräftig umschlossenen Körper kurz als Maximalkörper bezeichnen können.

Das Potential einer sphärischen Platte vom Radius r, der Dicke dr und dem Zentriwinkel Ψ am Rande ist nach S. 145 § 4 (2):

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi} - (r' - r)}{rr'}. \quad (2)$$

Kondensieren wir aber die ganze Masse $A_1 B B A_1$ auf die Kondensationsfläche und denken uns dieselbe in unendlich dünne sphärische Platten zerlegt, so läuft die Kondensation darauf hinaus, dafs jede Platte auf die Kondensationsfläche verschoben wird. Dabei erfolgt eine Verdichtung, weil die Oberflächenelemente bei der Verschiebung im Verhältnis $r^2 : r_i^2$ abnehmen. Behalten wir dr als Plattendicke bei, so bleibt mithin $\Theta r^2 dr$ ungeändert, und es wird das Potential der auf die Kondensationsfläche verschobenen Platte gleich

$$v_1 = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \frac{\sqrt{r_i^2 + r'^2 - 2 r_i r' \cos \Psi} - (r' - r_i)}{r_i r'} . \qquad (3)$$

Die in (2) und (3) vorkommenden Quadratwurzeln sind aber einander gleich, wenn wir die Platte bis an die Fläche $A_1 B$ ausdehnen. Bezeichnen wir diese Wurzel mit E_r, so wird

$$v - v_1 = 2\pi k^2 \Theta r\, dr \frac{r - r_i}{r_i} \left(1 - \frac{E_r}{r'}\right) .$$

Setzen wir im Nenner für r_i den Wert r, so vereinfacht sich die Formel in

$$v - v_1 = 2\pi k^2 \Theta (r - r_i) \left(1 - \frac{E_r}{r'}\right) dr , \qquad (4)$$

welche Formel die Differenz $v - v_1$ höchstens um $^1/_{300}$ ihres Wertes fehlerhaft giebt, da $r : r_i$ von der Einheit nicht mehr als um rund $^1/_{300}$ abweichen kann.

$E_r : r'$ liegt nach (1) zwischen rund $^1/_{12}$ und $^1/_{17}$. Bei der Summierung der Ausdrücke (4) für alle Platten, in welche die Masse $A_1 B B A_1$ zerlegt wurde, reicht es für die beabsichtigte Schätzung aus, für diesen Bruch einen Mittelwert $^1/_{15}$ zu setzen. (Wegen des Faktors $r - r_i$ mufs zufolge genauerer Rechnung nicht das arithmetische Mittel des gröfsten und kleinsten Wertes genommen werden, sondern ein Wert, der sich aus $\frac{1}{3}$ des gröfsten und $\frac{2}{3}$ des kleinsten zusammensetzt). Integrieren wir nun, wobei für dr auch $d(r - r_i)$ gesetzt werden darf, von $r - r_i$ gleich null bis $\mathfrak{a} R$, so folgt als Verminderung des Potentials für Punkt P' Fig. 15 durch Kondensation der Masse $A_1 B B A_1$ auf die Parallelfläche:

$$0{,}93\, \pi k^2 \Theta\, \mathfrak{a}^2 R^2 . \qquad (5)$$

Dieser Ausdruck, in welchem für R irgend ein mittlerer Radiusvektor der Meeresfläche, für $\mathfrak{a}$ ihre Abplattung zu setzen ist, bezeichnet wie bemerkt den Maximalbetrag der Potentialänderung im Meeresniveau durch Kondensation der Massen zwischen Meeresfläche und Parallelfläche. Der wirkliche Betrag wird in der Regel weit kleiner sein, insoweit nur die erwähnten Massen in betracht kommen. Es ist aber noch zu berücksichtigen, dafs zu diesen letzteren in einigen Gegenden noch gewaltige Gebirgsmassen hinzutreten.

§ 8. Fortsetzung: Gebirgsmasse, Verschiebung der Meeresfläche. Denken wir uns die Meeresfläche noch von einer Platte überlagert, deren Stärke wir gleich $\frac{1}{2}\mathfrak{a} R$ setzen wollen, so konstruiert sich zunächst wieder wie früher die Grenzfläche $BDDB$, innerhalb welcher diejenigen Massen liegen, welche bei der Kondensation eine Potentialverminderung geben. Insbesondere ist $P'D = P'D_1$ zu nehmen, Fig. 16; für die Mitte D_2 von DD_1 hat man die Relation

$$D_2 P' = r_i \sqrt{(1 + \mathfrak{a})^2 - \left(1 + \frac{3}{4}\mathfrak{a}\right)^2} = \frac{1}{2} r_i \sqrt{2\mathfrak{a}}. \qquad (1)$$

Die Masse $BDDB$ zerlegen wir ebenfalls wie $A_1 BBA_1$ in unendlich dünne sphärische Platten. Für eine Platte vom Radius r und der Dicke dr erhalten wir anstatt (2) S. 150, da jetzt $r > r'$ ist (vergl. S. 145, Bem. für P' innerhalb):

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\Psi} - (r - r')}{rr'}; \qquad (2)$$

die Kondensation giebt wieder den Ausdruck (3) des vorigen Paragraphen für v_1. Die Subtraktion des letzteren Ausdrucks von (2) führt unter Vernachlässigung von Bruchteilen der Ordnung $\mathfrak{a}$ zu dem Ausdruck

$$v - v_1 = 2\pi k^2 \Theta \left\{ \frac{r' r_i + r' r - 2 r_i r}{r'} - \frac{E_r}{r'}(r - r_i) \right\} dr. \qquad (3)$$

Dies ist zu integrieren von r gleich r' bis $r' + \frac{1}{2}\mathfrak{a} r'$ und giebt ohne Schwierigkeit unter Substitution von $r_i = r' - \mathfrak{a} r'$ und mit Vernachlässigung von Bruchteilen der Ordnung $\mathfrak{a}$, sowie unter Annahme eines konstanten Mittelwertes für E_r als Potentialverminderung durch Kondensation der Masse $BDDB$ auf die innere Kugelfläche:

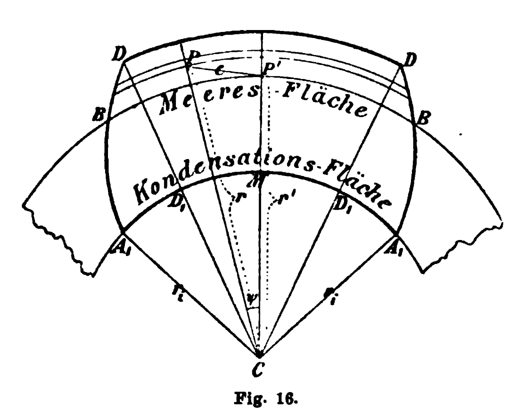


Fig. 16.

$$\pi k^2 \Theta \mathfrak{a}^2 r'^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\frac{E_r}{r'}\right).$$

$E_r : r'$ schwankt nach (1) dieses und des vorigen Paragraphen zwischen rund $\frac{1}{17}$ und $\frac{1}{24}$; nehmen wir $\frac{1}{21}$ und schreiben für r' wieder R, so folgt

$$0{,}69\, \pi k^2 \Theta \mathfrak{a}^2 R^2. \qquad (4)$$

Dieser Ausdruck stellt die maximale Verminderung des Potentials für einen Punkt der Meeresfläche infolge der Kondensation einer darüberlagernden Gebirgsmasse von der Dicke $\frac{1}{2}\mathfrak{a} R$ dar.

Fügen wir (4) zu (5) des vorigen Paragraphen, so erhalten wir die maximale Potentialverminderung im Meeresniveau mit Rücksicht auf Gebirgsmassen gleich

$$1{,}62\, \pi k^2 \Theta \mathfrak{a}^2 R^2. \qquad (5)$$

Wegen der im Vergleiche zur Wirklichkeit übertriebenen Gröfse der angenommenen Gebirgsmasse tritt dieser Effekt niemals ein.

Der Potentialverminderung entspricht eine Senkung der Meeresfläche gleichen Potentialwertes, welche durch Division des Ausdrucks (5) durch die Schwerkraft erhalten wird. Für die Berechnung der Schwerkraft genügt hierbei die Voraussetzung der Kugelgestalt. Ist Θ_m die mittlere Dichtigkeit, so wird in der Nähe der Oberfläche die Schwerkraft angenähert gleich $\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ [S. 39 § 23 (3)] und es ist daher die Senkung der Meeresfläche höchstens gleich

$$1{,}2 \frac{\Theta}{\Theta_m} \mathfrak{a}^2 R \text{ d. i. ca. } 40^m, \tag{6}$$

wenn $\mathfrak{a} = 1:300$ und $\Theta = 0{,}5 \cdot \Theta_m = 2{,}8$ gesetzt wird.

Ohne Rücksicht auf die Gebirgsmasse ergiebt sich die maximale Senkung nur zu

$$\text{ca. } 25^m. \tag{6*}$$

Der Anteil der Gebirgsmasse allein ist

$$\text{ca. } 15^m. \tag{6†}$$

Es ist bemerkenswert, dafs man zu dem Ausdruck (5) mit grofser Annäherung auch gelangt, wenn man von der Krümmung derjenigen Teile der Kugelflächen absieht, welche die Masse $A_1 D D A_1$ begrenzen. Aufserdem zeigt sich, dafs der gröfste Teil des Maximaleffekts durch diejenigen Massenteile erzeugt wird, welche der Linie $P'C$ nahe liegen. Betrachten wir, um dies wenigstens für die unterhalb P' liegende Masse $A_1 B B A_1$ nachzuweisen, die Formel (1) § 2 S. 142 für das Potential eines Cylinders von der Höhe b und dem Radius der Grundfläche a, bezogen auf den Mittelpunkt der Deckfläche. Indem wir demgemäfs daselbst c gleich null setzen, erhalten wir als Potential:

$$\pi k^2 \Theta \left\{ b\sqrt{a^2+b^2} - b^2 + a^2 \log\text{nat} \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} \right\}.$$

Kondensieren wir diesen Cylinder auf seine Grundfläche, so ist zur Berechnung des Potentials Formel (1) § 1 S. 141 anzuwenden, dabei aber für Θdz zu setzen Θb und für z b. Damit findet sich als Potential nach der Kondensation:

$$2\pi k^2 \Theta \left\{ b\sqrt{a^2+b^2} - b^2 \right\}.$$

Subtrahieren wir dies vom Vorigen, so ergiebt sich als Potentialänderung infolge der Kondensation:

$$\pi k^2 \Theta \left\{ b^2 - b\sqrt{a^2+b^2} + a^2 \log\text{nat} \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} \right\}. \tag{7}$$

Behufs Vergleichung mit Ausdruck (5) des vorigen Paragraphen

ist hierin $b = \mathfrak{a} R$ zu setzen. a nehmen wir der Reihe nach gleich b, $2b$, $3b$ . . . $20b$ und erhalten für Ausdruck (7):

$$
\begin{array}{lll}
\pi k^2 \Theta \mathfrak{a}^2 R^2 \,.\, 0{,}47 & \text{bei} & a = b \\
\quad\text{,,} \qquad .\, 0{,}69 & \text{,,} & a = 2b \\
\quad\text{,,} \qquad .\, 0{,}79 & \text{,,} & a = 3b \\
\quad\text{,,} \qquad .\, 0{,}85 & \text{,,} & a = 4b \\
\quad\cdot \qquad \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\
\quad\text{,,} \qquad .\, 0{,}97 & \text{,,} & a = 20b
\end{array}
\qquad (8)
$$

Der Fall $a = 20b$ entspricht aber den Dimensionsverhältnissen der Masse $A_1 B B A_1$; im Vergleich zu (5) des vorigen Paragraphen zeigt sich also eine Übereinstimmung bis auf 4 Prozent. Man kann hieraus auf eine genügende Annäherung auch der anderen Angaben (8) schliefsen und ersieht, dafs in der That die nächstgelegenen Massen den Hauptanteil am Maximaleffekt haben.

§ 9. **Fortsetzung: Wahrscheinliche Maximalverschiebung der Meeresfläche.** Der bisher betrachtete Maximaleffekt der Kondensation im Betrage von 25 bis 40^m Senkung der Meeresfläche kann selbstverständlich nur eintreten, wenn lediglich der durch die Figuren 15 und 16 bezeichnete Maximalkörper in betracht kommt. Allein dieser Fall findet thatsächlich nie statt; denn alle Massen, welche sich aufserhalb dieses Körpers über der Kondensationsfläche befinden, vermindern den Effekt. Derselbe kann sogar sein Vorzeichen wechseln, wenn innerhalb der Grenzen des zu einem Punkte P' gehörigen Maximalkörpers sich ein Meer befindet. Würde er für irgend einen Punkt P' ganz leer werden können, während aufserhalb über der Kondensationsfläche im allgemeinen Masse von etwa 2,8 Dichtigkeit bis zur Meeresfläche lagerte, so würde mit Rücksicht auf das Verschwinden des Kondensationseffekts für eine homogene, gleichstarke Kugelschale in diesem Fall innerhalb bei P' eine Hebung von 25^m durch die Kondensation entstehen. Da er jedoch in keinem Falle leer gedacht werden darf, sondern nur etwa entsprechend den tiefsten Oceanen bis 9^{km} Tiefe mit Wasser erfüllt, während weiterhin bis zur Tiefe $\mathfrak{a} R = 21^{km}$ wie früher feste Masse von etwa 2,8 Dichtigkeit sein wird, so bleibt nur eine Hebung von etwa 10^m übrig, wie man mit Hülfe der Formel (4) S. 151 leicht findet. Aber selbst dieses ist noch zu hoch bemessen, indem auch aufserhalb des Maximalkörpers zu berücksichtigen ist, dafs bis zur Tiefe von durchschnittlich 3 bis 4^{km} auf $^8/_{11}$ der Erdoberfläche anstatt der Dichtigkeit 2,8 nur die Dichtigkeit 1 vorhanden ist. Hierdurch reduziert sich die maximale Hebung auf etwa 8^m.

Auch die Senkung ist oben zu reichlich gerechnet, indem noch nicht berücksichtigt wurde, dafs der mit Masse von der Dichtigkeit

2,8 erfüllte Maximalkörper, ein kleiner Kontinent, aufserhalb auch mit Masse umgeben sein wird und zwar bis zur Tiefe von durchschnittlich 3 bis 4^{km} mit solcher von der Dichtigkeit 1, im übrigen mit solcher von der Dichtigkeit 2,8. Die Senkung reduziert sich dadurch auf etwa 5^m für den Fall, dafs kein Gebirge auf dem Kontinent lagert und steigt mit Rücksicht auf (6†) S. 153 unter der Annahme von Gebirgen auf nicht über 20^m. Der letztere Maximalbetrag wird wohl selbst im Himalaya noch nicht eintreten; meistens werden kaum 10^m erreicht werden.

Addieren wir diese 10^m Senkung und jene 8^m Hebung, so folgt ein Betrag von 18^m, um welchen sich die Unterschiede der Radienvektorenlängen für die Meeresfläche, abgesehen von wenigen aufsergewöhnlichen Fällen, im Maximum durch die Kondensation ändern. Es hat dies auf die Abplattung der Meeresfläche sicher noch keinen Einflufs von $^1/_{1000}$ ihres Betrages: die absoluten Beträge bis zu 10^m Änderung der Radienvektorenlängen kommen aber gar nicht in betracht. Mithin kann man die Kondensation bezüglich der Gestalt der Meeresfläche als von unerheblichem Einflufs ansehen.

§ 10. **Die Änderung der Schwerkraft im Meeresniveau durch dessen Verschiebung** infolge der Kondensation ist ebenfalls als unerheblich zu betrachten; denn in freier Luft beträgt für 20^m diese Änderung nur $g : 160000$, für 8^m nur $g : 400000$. Das sind Beträge von der Ordnung der Beobachtungsfehler bei den besten Bestimmungen: im § 28 werden wir für den mittleren Beobachtungsfehler der besten Bestimmungen etwa $^1/_{100000}$ von g finden. Hierbei ist noch abgesehen von denjenigen Fehlern, die durch die Reduktion von g aufs Meeresniveau entstehen und recht beträchtlich ausfallen können, sowie von den Schwankungen in der Schwerkraft infolge lokaler Massenunregelmäfsigkeiten, welche Schwankungen gerade in den uns interessierenden Fällen der Verwertung der Schweremessungen auch wie Fehler auftreten.

Fig. 17.

§ 11. **Einflufs der Kondensation auf die Schwerkraft.** Wir ermitteln nunmehr den Maximaleffekt der Kondensation auf die Schwerkraft für einen Punkt P' im Meeresniveau, Fig. 17. Auch hierbei reicht es aus die Meeresfläche und ihre Parallelfläche als Kugelflächen zu betrachten, wie sich von selbst im Folgenden zeigen wird. Ein Massenelement dm, welches sich vor der Kondensation zwischen beiden

Flächen, der äufsern und innern Kugelfläche, in P befindet und nach der Kondensation auf der innern Kugelfläche in P_1, übt auf P' eine Anziehung aus, deren in die Richtung $P'C$ fallende Komponente gleich ist:

$$\frac{dm}{e^2} \cdot \frac{z}{e} \text{ vor der Kondensation,}$$

$$\frac{dm}{e_1^2} \cdot \frac{z_1}{e_1} \text{ nach der Kondensation.}$$

Solange sich P weitab von P' befindet, ist die Folge der Kondensation immer eine Vergröfserung der zentralen Komponente, denn es ist dann gleichzeitig

$$\frac{1}{e_1} > \frac{1}{e} \text{ und } \frac{z_1}{e_1} > \frac{z}{e}.$$

Befindet sich dagegen P in der Nähe von P', so ist auch eine Verminderung als Folge der Kondensation möglich. Liegt nämlich ein solcher Punkt P aufserhalb der äufsern Kugelfläche in P_0 gerade in der Tangentialebene der äufsern Kugelfläche bei P', so ist die Komponente null; verschiebt sich sodann P nach innen, so wächst zunächst die Komponente wie vorher; allein e nimmt nur bis dahin ab, wo PP' normal zu PC steht und wächst von da an. Obwohl nun $z:e$ stetig zunimmt, kann also doch wegen Abnehmens von $1:e$ auch die Komponente von einer gewissen Stelle an abnehmen. Zur Bestimmung des Maximaleffektes gilt es jetzt diejenige Fläche $E_1 P' E_1$ aufzusuchen, in deren Punkten P die in Rede stehende Komponente gerade so grofs ist, wie in den zugehörigen Punkten P_1.

Zur Veranschaulichung zeigt Fig. 18 zu den Strecken $P_0 P$ als Abscissen in irgend einem Mafsstabe den Gang der Ordinaten $z:e^3$. In der Figur sind die Ordinate von P_1 und die gleichgrofse, welche einem Punkte der Fläche $E_1 P' E_1$ angehört, hervorgehoben und die zwischen liegende Fläche schraffiert.

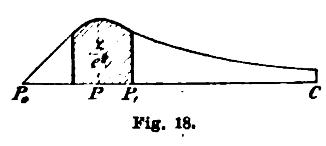


Fig. 18.

Um nun vorerst denjenigen Punkt E_1 zu erhalten, wo die Fläche in die innere Kugelfläche einschneidet, haben wir zu beachten, dafs hier die Punkte P und P_1 der Fig. 18 zusammenfallen, also die Ordinate ein Maximum wird. Wir finden dasselbe aus der Bedingung

$$\frac{\partial\left(\frac{z}{e^3}\right)}{\partial r} = 0.$$

Es ist aber

$$z = r' - r\cos\psi, \quad e = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\cos\psi, \quad \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{r - r'\cos\psi}{e}$$

und

$$\frac{\partial\left(\frac{z}{e^3}\right)}{\partial r} = \frac{1}{e^3}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{3z}{e^4}\frac{\partial e}{\partial r}.$$

Hieraus folgt nach gehöriger Reduktion

$$\frac{\partial\left(\frac{z}{e^3}\right)}{\partial r} = \frac{1}{e^5}\left\{2\cos\psi\,(r^2 + r'^2) - rr'\,(3 + \cos^2\psi)\right\}. \tag{1}$$

Dieser Differentialquotient verschwindet, wenn die Parenthese rechter Hand null wird, d. h. für

$$\cos\psi = \frac{r^2 + r'^2 \pm \sqrt{(r^2 + r'^2)^2 - 3r^2r'^2}}{rr'}. \tag{2}$$

Setzen wir nun in Anwendung auf Punkt E_1 $r = r_i$, ferner wie früher

$$r_i = r'\,(1 - \mathfrak{a}).$$

und vernachlässigen höhere Potenzen von $\mathfrak{a}$ als die zweite, so giebt der Ausdruck (2) ohne Schwierigkeit die einzig brauchbare Lösung:

$$\cos\psi = 1 - \mathfrak{a}^2.$$

Wenn wir für $\cos\psi$ jetzt die Reihenentwicklung $1 - \frac{\psi^2}{2} + \ldots$ anwenden, folgt zur Bestimmung von E_1 die Näherungsformel:

$$\psi = \mathfrak{a}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad r_i\psi = \mathfrak{a}r_i\sqrt{2}. \tag{3}$$

Wir ersehen hieraus, daſs die Ausdehnung der von der Fläche $E_1P'E_1$ abgegrenzten (in Fig. 17 stark umschriebenen) Masse so klein ist, daſs man innerhalb derselben für den jetzt vorliegenden Zweck einer Schätzung von der Konvergenz der Radien absehen kann. Schreibt man die zweite Gleichung (3) in der Form:

$$E_1M = MP'\sqrt{2}, \tag{3*}$$

so erkennt man sogleich, daſs dieses Resultat auch für einen unendlich groſsen Krümmungsradius r_i gilt, daſs man also in der That bei der Ermittlung von E_1M von der Krümmung der Meeresfläche absehen kann.

Fig. 18 und die vorstehende Entwicklung lassen erkennen, daſs alle Massenteile innerhalb des Rotationskörpers $E_1P'E_1ME_1$ bei der Kondensation auf die innere Kugelfläche eine Verminderung der zentralen Anziehung geben, alle sonstigen Massenelemente zwischen beiden Kugelflächen aber eine Vermehrung derselben. Wäre aber der ganze Raum zwischen beiden Kugelflächen mit Masse gleichförmig erfüllt, so würde die Kondensation die Anziehung nicht verändern; mithin müssen sich jene Vermehrung und Verminderung aufheben, und es giebt also die Kondensation der Masse $E_1P'E_1ME_1$ allein einen Maximaleffekt. Zur Abkürzung kann man diesen Körper wieder als Maximalkörper bezeichnen.

Bei der Ermittelung der Fläche $E_1 P' E_1$ sehen wir also jetzt von der Konvergenz der Radien ab: Fig. 19. Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen dieser Figur haben wir zur Bestimmung der Gleichung des Schnittes der Fläche durch die Rotationsaxe $P'M$ die Bedingung:

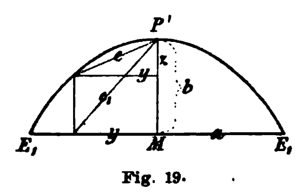


Fig. 19.

$$\frac{dm}{e^2} \cdot \frac{z}{e} = \frac{dm}{e_1^2} \cdot \frac{b}{e_1}$$

oder

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}^3} = \frac{b}{\sqrt{b^2+y^2}^3}. \tag{4}$$

Durch Reduktion auf y^2 folgt hieraus ohne weiteres

$$y^2 = z^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} \left(z^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right). \tag{5}$$

Bezeichnet man wie in Fig. 19 y für E_1 mit a, so ergiebt sich aus vorstehender Gleichung

$$a = b\sqrt{2}, \tag{6}$$

übereinstimmend mit (3*).

Die durch (5) gegebene Begrenzung ersetzen wir aus Bequemlichkeitsgründen durch die nachstehende paraboloidische

$$y^2 = 2bz. \tag{7}$$

Denn für die Begrenzung (5) läfst sich zwar die unkondensierte Anziehung des ganzen Körpers $E_1 P' E_1 M E_1$ in Richtung $P'M$ bequem berechnen, nicht aber die kondensierte. Durch Einführung der im wesentlichen mit (5) zusammenfallenden Begrenzung nach (7) wird auch die letztere Rechnung bequem. Um den Unterschied der durch die Gleichungen (5) und (7) gegebenen Kurven zu zeigen, ist folgende Tabelle berechnet:

z	Ordinate y (5)	Ordinate y (7)	Normaler Abstand der Kurven.
b	$b\sqrt{2}$	$b\sqrt{2}$	.
$\frac{64}{125} b$	$1{,}024b$	$1{,}012b$	$0{,}008b$
$\frac{8}{27} b$	$0{,}801b$	$0{,}770b$	$0{,}019b$
$\frac{1}{8} b$	$0{,}559b$	$0{,}500b$	$0{,}026b$
$\frac{1}{27} b$	$0{,}351b$	$0{,}272b$	$0{,}021b$
$\frac{1}{64} b$	$0{,}258b$	$0{,}177b$	$0{,}014b$

Bei E_1 und P' gehen die Kurven tangential in einander über; im übrigen ist der Unterschied in der Form beider Kurven so gering, daſs er im Holzschnitt unsichtbar wird. Die Differenz ist um so unerheblicher, als für Massen in der nächsten Nähe der Begrenzungsfläche $E_1 P' E_1$ bei der Kondensation die Anziehungskomponente in Richtung $P'M$ sich zufolge der Bedeutung dieser Fläche nicht ändert.

§ 12. **Fortsetzung: Berechnung des Maximaleinflusses.** Die Anziehung des nach (7) des vorigen Paragraphen begrenzten Körpers $E_1 P' E_1 M E_1$ auf P' in Richtung $P'M$ ergiebt sich aus Gleichung (4) § 3 S. 144 für $c = \text{null}$, $a = b\sqrt{2}$ und $p = b$. Sie wird gleich

$$2\pi k^2 \Theta\, b \left\{1 - \sqrt{3} + \log\text{nat}\,(2 + \sqrt{3})\right\} \cdot \tag{1}$$

Nach erfolgter Kondensation der Massen auf die Grundfläche $E_1 M E_1$ ist die Anziehung auf P' gleich

$$k^2 \int\limits_{y=0}^{y=b\sqrt{2}} \frac{b\, dm}{\sqrt{b^2 + y^2}^{\,3}}\,, \tag{2}$$

wobei dm dem Rotationscharakter entsprechend als ein ringförmiges Massenelement mit der Grundfläche $2\pi\, y\, dy$ und der Masse

$$2\pi\, y\, dy \,.\, \Theta\,(b - z)$$

zu denken ist. Wird letzteres für dm oben eingesetzt, dabei für z sein Wert $y^2 : 2b$ und für y^2 einfacher t geschrieben, so findet sich die in Rede stehende Anziehung (2) gleich

$$\frac{1}{2}\,\pi k^2 \Theta \int\limits_0^{2b^2} \frac{(2b^2 - t)\, dt}{\sqrt{b^2 + t}^{\,3}}$$

d. i. gleich

$$\frac{1}{2}\,\pi k^2 \Theta \int\limits_0^{2b^2} \left\{\frac{3b^2}{\sqrt{b^2 + t}^{\,3}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + t}}\right\} dt\,.$$

Die leicht ausführbare Integration führt zu dem Ausdrucke:

$$2\pi k^2 \Theta\, b\,(2 - \sqrt{3})\,. \tag{3}$$

Ziehen wir denselben von (1) ab und setzen für b den Wert $\mathfrak{a} r'$ oder $\mathfrak{a} R$, so erhalten wir als Maximalwert der Abnahme der Anziehung in radialer Richtung durch Kondensation für einen Punkt im Meeresniveau:

$$2\pi k^2 \Theta\, b \left\{\log\text{nat}\,(2 + \sqrt{3}) - 1\right\} \quad \text{d. i.} \quad 0{,}634\, \pi k^2 \Theta\, \mathfrak{a} R\,. \tag{4}$$

Setzen wir nun wie früher die Schwerkraft näherungsweise gleich $\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$, so zeigt sich, daſs vorstehender Betrag für $\Theta = \frac{1}{2}\,\Theta_m = 2{,}8$ und $\mathfrak{a} = 1 : 300$ gleich ist

$$0{,}00079\,.\,g\,. \tag{5}$$

Dies ist allerdings bedeutend, da die Variation von g im Niveau der Meeresfläche überhaupt nur $0{,}0053\,g$ beträgt. Allein in der Wirklichkeit tritt dieser theoretische Maximaleffekt nirgends auf, da die entsprechenden Massenformen nicht bestehen.

Selbst wenn wir uns eine Insel von der Form und Gröfse des Rotationskörpers $E_1 P' E_1 M E_1$ Fig. 17 S. 155 denken, so ist dieselbe doch in ihrem oberen Teile von Wasser umgeben, im unteren aber von Land, da die Oceane nicht die Tiefe $\varkappa R = 21^{km}$, sondern selbst an den tiefsten Stellen nur weniger als die Hälfte davon besitzen. Nehmen wir aber an, dafs die betreffende Insel bis zur Tiefe von 21^{km} von Wasser umgeben wäre, so reduziert sich der Effekt schon im Verhältnis $2{,}8 : 1{,}8$ und wird gleich $0{,}0005\,g$. Wegen der geringeren Maximaltiefe der Oceane vermindert sich dieses weiter, wie eine genaue Rechnung zeigt, die wir übergehen dürfen, auf etwa $0{,}0004\,g$.

Dieser maximalen Verminderung der Schwerkraft steht eine maximale Vermehrung gegenüber, die in der Mitte von einem kleinen tiefen See eintreten kann, jedoch in praktisch möglichen Fällen bei weitem nicht jenen Betrag erreichen dürfte. Die genauere Auswertung für diesen Fall können wir übergehen, da die Kenntnis des gröfseren Maximums, im absoluten Sinne genommen, wie wir sogleich sehen werden, ausreicht.

§ 13. **Resultat der Untersuchung über die Brauchbarkeit der Entwicklung des Potentials W nach negativen Potenzen des Radiusvektors.** Mit Rücksicht auf die Paragraphen 7 — 12 können wir nun im Anschlufs an § 6 Folgendes bemerken:

Da die Gültigkeit jener Reihenentwicklung die Kondensation der Massen aufserhalb der Parallelfläche auf diese als eine zweckmäfsige Idealisierung der Massen der Erdrinde fordert, da ferner diese Kondensation die Meeresfläche nur in unerheblichem Mafse verschiebt, so würde es als ein Fehler aufzufassen sein, wenn bei den Schwerkräften die Kondensation nicht berücksichtigt werden würde. Selbst wenn es aber trotzdem nicht geschieht, so wird man dennoch eine sehr gute Annäherung für die Gestalt der mathematischen Erdoberfläche erzielen; denn bei der Interpolation der im Meeresniveau beobachteten oder darauf reduzierten Schwerkräfte werden die Kondensationsfehler teilweise ausgeglichen. Wie schon im vorigen Kapitel S. 71 bemerkt, schmiegen sich die Schwerebeobachtungen nach der üblichen Rechnungsweise ohne Kondensation recht gut einer einfachen Formel an, aus welcher man auf die Form eines abgeplatteten Sphäroids für die Meeresfläche schliefst. Dieses Resultat ist trotz der Vernachlässigung der Kondensation zweifellos eine Annäherung, da die vernachlässigten Kondensationseffekte nicht grofs genug sind, um die gröfsten Variationen der Schwerkraft im Meeresniveau zu verwischen.

Keinesfalls braucht man zu fürchten, dafs insbesondere die Variation der Schwerkraft vom Äquator nach dem Pole um die Summe der positiven und negativen Maximalkondensationseffekte fehlerhaft wird: sie wird voraussichtlich noch nicht um den Betrag 0,0004 g des gröfseren der beiden fehlerhaft und damit (nach *Clairauts* Theorem) die Abplattung noch nicht um $^1/_8$ ihres Wertes irrig.

Für eine schärfere Berechnung der Gestalt des Geoids wird jedoch eine Reduktion der Ergebnisse der Schweremessungen wegen der Kondensation erforderlich; bei sehr weit getriebener Annäherung würde man sogar auch die Verschiebung der Meeresfläche in Rechnung ziehen müssen. Die Reduktion der Schweremessungen wird weiterhin eingehend erörtert werden, während die Verschiebung der Meeresfläche als zur Zeit unwichtig nicht besprochen wird.

Im nächsten Paragraphen untersuchen wir dagegen noch der Vollständigkeit halber die allerdings sehr geringfügigen Effekte der Kondensation auf die Schwerpunktslage des Erdkörpers und auf die Gröfse seiner Trägheitsmomente.

§ 14. **Einflufs der Kondensation auf Schwerpunktslage und Trägheitsmomente der Erde.** Die Massen aufserhalb der Parallelfläche sind in Bezug auf die Gesamtmasse M ein Bruchteil der Ordnung $\mathfrak{a}$; die Verschiebung auf die Parallelfläche ändert das statische Moment, genommen bezüglich irgend einer Ebene durch die ungeänderte Schwerpunktslage, um eine Gröfse der Ordnung $\mathfrak{a}^2 MR$. Die Schwerpunktsverschiebung ist demnach von der Ordnung $\mathfrak{a}^2 R$ und zwar voraussichtlich nur ein kleiner Bruchteil davon, d. h. wenige Meter, weil die Massen aufserhalb der Parallelfläche eine im grofsen und ganzen symmetrische Anordnung der Art haben, dafs die Änderungen ihrer statischen Momente sich teilweise aufheben.

In gleicher Weise läfst sich erkennen, dafs die Trägheitsmomente A, B und C nur um Bruchteile der Ordnung $\mathfrak{a}^2$ sich ändern und dafs sie mit gleicher Genauigkeit als Hauptträgheitsmomente aufgefafst werden können; vergl. § 5 S. 59. Diese Genauigkeit entspricht derjenigen der Entwicklungen der Paragraphen 10 und 11 S. 72 u. ff. und man kann daher sagen, dafs die daselbst S. 74 und 76 aufgeführten Ergebnisse für A, B und MK für die Trägheitsmomente der Erde selbst gelten.

Die Genauigkeit erhöht sich aber etwas, wenn wir die Schale, welche von der Meeresfläche und der Parallelfläche begrenzt ist, erfüllt denken mit homogener Masse, zu welcher an einzelnen Stellen positive oder negative Massen hinzutreten (§ 15). Die homogene Masse braucht dann nicht kondensiert zu werden, da der Effekt für W und g sehr nahe null ist. Man erzielt aber durch diese Änderung der Anschauungsweise eine günstigere Annäherung bei den Trägheitsmomenten, welche bisher sicher lediglich verkleinert wurden,

da alle Elemente der Kondensation negativ wirkten, während nunmehr Massen positiver und negativer Dichtigkeit vorkommen und demgemäfs sowohl negative als positive Änderungen der Trägheitsmomente entstehen — aufserdem aber die Menge der kondensierten Masse überhaupt wesentlich kleiner ist. Die teilweise Kompensation, die hier stattfindet, kommt bei der Frage, ob A, B und C nach erfolgter Kondensation noch als Hauptträgheitsmomente angesehen werden dürfen, übrigens schon bei der früheren Anschauung zur Geltung, da die Kondensation der homogenen Schale offenbar die Lage der Hauptaxen nur ganz unerheblich ändern kann.

Man wird daher die Ergebnisse der Schweremessungen für die Trägheitsmomente auch bei einer etwas weiter getriebenen Annäherung als derjenigen in den Paragraphen 10 und 11 S. 72 u. ff. auf die Erde selbst beziehen können, ohne dafs es einer Reduktion bedarf. Sie gelten also für die Erde selbst etwa bis zu derjenigen Grenze der Annäherung und Genauigkeit, die den Ergebnissen der Schweremessungen aus anderen Gründen, insbesondere wegen kontinentaler und lokaler Anomalieen entspricht.

§ 15. **Die Reduktion der Schwerebeobachtungen**. Die Messungen der Beschleunigung der Schwerkraft gelten unmittelbar für einen Punkt der physischen Erdoberfläche und sind daher auf die Meeresoberfläche zu reduzieren, so dafs sie alsdann als einer einzigen Niveaufläche angehörig betrachtet werden dürfen. Denn wenn auch das mittlere Niveau des Meeres keineswegs genau einer Niveaufläche, dem Geoid, angehört, so sind doch die durch Ebbe und Flut, herrschende Winde, verschiedene spezifische Gewichte und andere Ursachen erzeugten Niveauunterschiede gering in Bezug auf den vorliegenden Zweck, bei dem es auf einige Meter gar nicht ankommt, weil die Schweremessungen weder entsprechend genau sind, noch entsprechend genau reduziert werden können. (Über bekannte Höhendifferenzen des mittleren Meeresniveaus an verschiedenen Stellen der Küste Europas vergl. im 7. Kap. § 18.)

Es genügt nun aber nach dem Vorhergehenden gar nicht, lediglich aufs Meeresniveau zu reduzieren; vielmehr mufs auch noch eine Kondensation der Massen der Erdrinde in dem in Paragraph 6 angegebenen Umfange und in der daselbst angegebenen Weise stattfinden.

Wir werden übrigens die Kondensation insofern etwas abändern, als wir nicht die ganze Masse aufserhalb der Parallelfläche in der Tiefe $\mathfrak{a}R$ unter der Meeresfläche kondensieren, sondern eine Schale ausschliefsen, welche von diesen beiden Flächen begrenzt und mit Masse von der Dichtigkeit $2{,}8 = \frac{1}{2}\,\Theta_m$, der mittleren Dichtigkeit des Festlandes, gefüllt ist. Der Kondensationseffekt für diese Schale ist verschwindend klein; er würde null sein, wenn wir die Meeresfläche als Ellipsoid

betrachten dürften und als Kondensationsfläche alsdann anstatt einer genauen Parallelfläche ein konfokales Ellipsoid annehmen würden (vergl. S. 125 § 31). Obwohl nun die Meeresfläche kein Ellipsoid ist, kann man den Kondensationseffekt dennoch vernachlässigen, weil sie nur in sanften Biegungen von einem solchen abweicht, wie sicher genug aus synthetischen Untersuchungen im vierten Kapitel folgen wird, und weil für ein homogenes Sphäroid, welches nur in sanften Wellen von einem Ellipsoid abweicht, die Entwicklung des Potentials nach negativen Potenzen des Radiusvektors praktisch ausreichend als bis zur Oberfläche konvergent anzusehen ist (§ 24), sodafs also die Masse zwischen Meeres- und Kondensationsfläche überhaupt gar nicht kondensiert zu werden braucht, insoweit sie einem von der Meeresfläche begrenzten, homogenen Sphäroid angehört.

Ein kleiner Fehler in dieser Beziehung hat um so weniger Bedeutung, als die Berechnung des Kondensationseffekts wegen mangelhafter Kenntnis der Massendichtigkeit der Schichten der Erdkruste bis zur Tiefe von 21^{km} sich doch nicht scharf durchführen läfst. Übrigens sind die Fehler der letzten Art weniger erheblich, als es auf den ersten Blick scheinen mag, da die obersten Schichten der Schale von 21^{km} Stärke den gröfsten Effekt geben und für diese Schichten die Dichtigkeit mit einiger Annäherung bekannt ist.

Bisher hat man nur aufs Meeresniveau reduziert und die Reduktion wegen Kondensation unterlassen. Abgesehen davon, dafs die übliche Reduktion aufs Meeresniveau sich als solche bemängeln läfst, genügt sie allein auch nicht, um die Schweremessungen nach der Theorie der Kugelfunktionen in Strenge behandeln zu können. Nur erst durch die Reduktion wegen der Kondensation erlangt man Angaben für die Beschleunigung der Schwere, aus denen ein Schlufs von wünschenswerter Sicherheit auf die Abplattung und auch auf kontinentale Abweichungen des Geoids möglich wird.

§ 16. Die übliche Reduktion der Schweremessungen auf das Meeresniveau. Sie geht von dem Grundsatz aus, die lokalen Massenanziehungen zu beseitigen, insoweit die Massen als unregelmäfsige Anhäufungen erscheinen. Dazu werden alle Massen gerechnet, welche sich über das Meeresniveau erheben; Fig. 20.

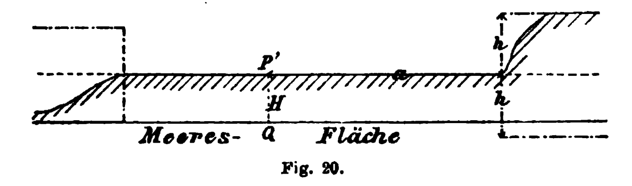


Fig. 20.

Um die übliche *Formel für horizontales, ebenes Terrain* zu gewinnen, denken wir uns um die Lotlinie $P'Q$ des betreffenden Punktes

als Axe eine Cylinderfläche mit dem noch unbestimmten Radius a gelegt und sehen vorläufig von der Krümmung der Meeresfläche ab. Nach § 2 (2) S. 142 ist für den so abgegrenzten Cylinder von der Höhe H und der Dichtigkeit Θ, wobei $c =$ null und $b = H$ zu setzen ist, die Vertikalanziehung:

$$2\pi k^2\Theta\,(H + a - \sqrt{a^2 + H^2}) \tag{1}$$

oder in Reihenentwicklung der Quadratwurzel, gültig für $H < a$:

$$2\pi k^2\Theta\, H\left(1 - \frac{H}{2a} + \ldots\right).\,. \tag{1*}$$

Um dies in Bruchteilen der Schwerkraft auszudrücken, genügt es, für letztere den nach S. 98 § 20 (23) und (24) bis auf Bruchteile von der Ordnung der Abplattung richtigen Ausdruck $\frac{4}{3}\pi k^2\Theta_m R$ zu setzen. Es folgt dann anstatt (1*):

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{H}{R}\left(1 - \frac{H}{2a} + \ldots\right). \tag{2}$$

Setzt man $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m$ und $H : R = 10000$ entsprechend $H = 637^m$, so wird (2) kleiner als $^1/_{13000}$. Vernachlässigt man nun das Glied $H : 2a$, so wird der dadurch begangene Fehler für $a > 10H$, d. i. rund 6^{km}, kleiner als rund $^1/_{250000}$ der Schwerkraft; er ist also unerheblich, und man erkennt, dafs im horizontalen Terrain in der Regel die Vertikalanziehung der P' benachbarten Massen über dem Meeresniveau hinlänglich genau durch

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{H}{R}\,g \tag{3}$$

dargestellt wird.

Dieselbe Formel erhält man aber auch für die Vertikalanziehung einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte von der Dicke H. Alle Massen aufserhalb der Entfernung $a = 6^{km}$ bei $H = 637^m$ zwischen dem Meeresniveau und der Niveaufläche von P' haben daher keinen merklichen Einflufs. Die Formel (3) genügt, wenn solche Massen den Raum zwischen den beiden genannten Flächen ganz oder teilweise erfüllen, oder ganz fehlen. Anstatt des letzten Falles kann man sich auch denken, dafs aufserhalb des Umkreises a die Massen bis zur Höhe H über das Niveau von P' steigen, weil die Vertikalanziehungen der über und unter dem Niveau von P' liegenden Massen sich aufheben. Ebenso kann man sich denken, dafs in diesem Raum nur eine teilweise Erfüllung durch Berge bis zur Höhe H über das Niveau von P' stattfindet. In allen diesen Fällen gilt (3) mit wesentlich derselben Genauigkeit.

Allgemein hat man als Beziehung von H zu a, damit Formel (3)

die Reduktion auf weniger als $^1/_{250000}$ von g genau angiebt, bei Anwendung von Metermafs:

$$H \cdot \frac{H}{a} < 68^m . \tag{4}$$

Ist für die faktische Ausdehnung a der Ebenheit die Meereshöhe H weit kleiner als es nach Formel (4) sein könnte, so dürfen bei gleicher Genauigkeit als bisher vorausgesetzt die Erhebungen und Senkungen am Rande der Ebene Werte h gegen das Niveau von P' annehmen, welche gröfser als H sind, wenn sie nur der Ungleichung

$$h \, . \, \frac{h}{a} < 68^m, \tag{4*}$$

welche $h : a$ als ächten Bruch voraussetzt, genügen.

Ist ferner a nach verschiedenen Richtungen hin verschieden, so kann man aus (4*) für jede Richtung ein besonderes gröfstes zulässiges h entnehmen. Denn die Ausgangsformel (1) für den Kreiscylinder gilt nicht blos für einen vollständigen Cylinder, sondern auch für jeden Sektor zwischen zwei beliebigen von P' ausgehenden Vertikalebenen, wobei nur statt 2π der Arcus des Horizontalwinkels zwischen letzteren zu setzen ist. Für den einzelnen Sektor hat also die Vernachlässigung in der Vertikalanziehung nach (1*) die Form

$$\psi k^2 \Theta \frac{h^2}{2a} ,$$

und wenn $h^2 : a$ die Ungleichung (4*) erfüllt, ist sie kleiner als

$$\psi k^2 \Theta \, . \, 34 ,$$

für alle Sektoren zusammen somit kleiner als

$$2\pi k^2 \Theta \, . \, 34,$$

d. i. in Bruchteilen von g wieder $^1/_{250000}$.

In der Fig. 20 ist beiderseits das dem betreffenden a entsprechende h_{max} angedeutet.

Was die Krümmung der Meeresfläche anlangt, so kommt diese gar nicht in betracht, da es sich eben nur um Nachbarmassen handelt; vergl. die Bemerkung zu (4) S. 145. Für sehr grofse Entfernungen würde sie zwar Einflufs erlangen. Indessen ist der Einflufs der Anziehung entfernter Massen, da er bei horizontaler Verschiebung von P' sich nur langsam ändert, kein lokaler mehr und also nicht zu beachten. (In § 19 dieses Kapitels wird sich bei Besprechung der Kondensation die Zulässigkeit und Notwendigkeit der Vernachlässigung entfernter Massen noch von einem anderen Gesichtspunkte aus zeigen.)

Um nun die Schwerebeobachtung in P' auf Q im Meeresniveau zu reduzieren, ist von dem beobachteten Werte g die durch (3) angegebene Anziehung abzuziehen. Aufserdem ist noch die Änderung

der Höhenlage zu berücksichtigen. § 20 des vorigen Kapitels S. 94 giebt hierzu die Änderung von g für differentiale Höhenänderungen. Da H im Verhältnis zum mittleren Erdradius R stets sehr klein ist, genügt die Differentialformel und wir erhalten nach der Formel (22) des genannten Paragraphen auf S. 98 bis auf Bruchteile von $^1/_2{}^0/_0$ im Maximum als Zunahme von g von P' bis Q in freier Luft

$$\frac{2H}{R}\,g\,. \tag{5}$$

Da der Quotient $2H:R$ immer klein ist, in praktischen Fällen meistens weit kleiner als $^1/_{1000}$, welcher Betrag erst für $H = 3185^m$ erreicht wird, so haben die Vernachlässigungen im Betrage bis zu $^1/_2{}^0/_0$ keine Bedeutung, wenn man bedenkt, dafs bei beträchtlichen Werten H zugleich der von (3) herrührende Teil der Reduktion von g wegen der Schwierigkeit einer genauen Ermittelung der Dichte Θ jedenfalls sehr unsicher wird. Bei $H = 3185^m$ giebt ein Fehler von nur $1^0/_0$ in Θ das Glied (3) schon um rund $^1/_{250000}$ von g falsch.

Ist g die Beschleunigung der Schwerkraft in P', so wird sie nach dem Vorstehenden in Q mit Beseitigung der Lokalanziehung in hinreichender Annäherung gleich

$$\left(1+\frac{2H}{R}\left[1-\frac{3}{4}\frac{\Theta}{\Theta_m}\right]\right)g\,. \tag{6}$$

Speziell für die Annahme $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m = 2{,}8$ folgt hieraus in gleicher Annäherung

$$\left(1+\frac{5}{4}\frac{H}{R}\right)g\,. \tag{6*}$$

Hierzu sind als Bedingungen der Gültigkeit (4) und (4*) zu beachten, wobei aufserdem H bezw. $h < a$ sein mufs.

Die Formel (6) nennt man die *Regel von Young*, auch *Formel von Poisson* für *ebenes Terrain*. Wir werden sie aber nach *Bouguer* bezeichnen, der zuerst derartige Beziehungen untersuchte.

Young teilt dieselbe ohne Begründung in Form einer Regel in den *Philosophical Transactions* für 1819 S. 93 mit. *Poisson* giebt die Formel noch nicht in der ersten Auflage seiner *Traité de mécanique* von 1811, sondern erst 1833, in der zweiten Auflage Bd. 1 S. 495. *Laplace* geht in der *Méc. cél.* t. II. l. III, wo von den Schweremessungen die Rede ist, auf die Reduktion überhaupt nicht ein. Erst 1825 in t. V. l. XI p. 55—56 leitet er, von der Anziehung des Cylinders ausgehend, die Formel (6) ab. Aber schon 1749 hat (nach *Todhunter*, *History of Attraction* I p. 248) *Bouguer* in seiner Schrift *La Figure de la Terre* den Einflufs einer Erhebung des Beobachtungsortes auf einen Berg untersucht. Er setzt die Schwerkraft in der Meereshöhe h, wenn Θ die Dichtigkeit der Bergmasse ist (und überhaupt unsere Bezeichnungen gelten), proportional dem Ausdrucke

$$(R-2h)\,\Theta_m+\frac{3}{2}\,h\Theta\,,$$

was völlig mit *Youngs* Regel übereinstimmt.

Den genauen Einflufs der Berge von verschiedener Form untersuchte etwas später *d'Alembert* (nach *Todhunter* I p. 382) in völlig befriedigender Weise.

§ 17. **Fortsetzung: Unebenes Terrain.** Die im vorigen Paragraphen vorausgesetzte Ebenheit wird in der Natur. keinesfalls vollständig erfüllt sein. Bedenkt man nun, dafs nach Formel (3) des vorigen Paragraphen eine ebene, horizontale Platte von 32^m Stärke und von der Dichtigkeit $\frac{1}{2}\,\Theta_m = 2,8$ auf P' eine Vertikalanziehung von rund $^1/_{250000}$ von g ausübt, so wird man erkennen, dafs in einem im allgemeinen horizontalen und ebenen Terrain Unebenheiten von ziemlichem Betrage vorkommen dürfen. Will man auf $^1/_{1000000}$ genau reduzieren, so dürfen die Unebenheiten in allernächster Nähe von P' allerdings nur etwa 8 Meter betragen; mit wachsender Entfernung, etwa von 100^m ab, dürfen sie aber um so eher beträchtlich anwachsen, als für entferntere Unebenheiten eine teilweise Kompensation der Einflüsse stattfinden wird.

Zu den Unebenheiten in allernächster Nähe ist auch ein Abstand des Punktes P' vom Terrain im Betrage einiger Meter zu rechnen, welcher also nach dem Vorigen von unerheblichem Einflusse sein wird.

Die Anwendung der Formel (6) des vorigen Paragraphen ist übrigens nicht lediglich auf horizontales Terrain beschränkt. Um ihre allgemeinere Gültigkeit zu erkennen, denken wir uns P' als Spitze eines geraden Kreiskegels von der Höhe h_1 und dem Radius a der Grundfläche; unter dem Kegel sei das Terrain bis zur Tiefe h_2 cylindrisch abgegrenzt, und die Basis des Ganzen bilde eine über dem Meeresniveau lagernde, ebene Platte von grofser Ausdehnung; Fig. 21.

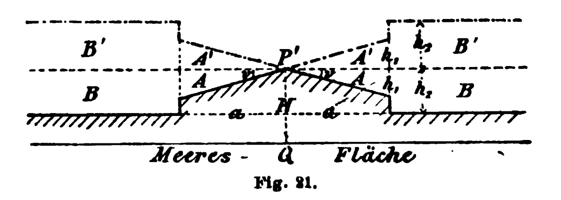


Fig. 21.

Dann haben wir als Vertikalanziehung des Kegels nach S. 142 § 2 (4) mit Rücksicht auf die jetzigen Bezeichnungen:

$$2\pi k^2 \Theta h_1 (1 - \sin\nu)\,.$$

Dagegen würde nach Formel (1*) des vorigen Paragraphen für einen Cylinder gleicher Basis und Höhe in hinreichender Annäherung folgen, falls h_1 kleiner als a ist, was bei mäfsig grofsen Werten von $\sin\nu$ zutrifft:

$$2\pi k^2 \Theta\, h_1 \left(1 - \frac{h_1}{2a}\right),$$

woraus man erkennt, dafs die Differenz von Cylinder und Kegel, d. h. der in der Fig. 21 mit A bezeichnete Raum, wenn er mit Masse

erfüllt wäre, näherungsweise eine Vertikalanziehung ausüben würde gleich

$$2\pi k^2 \Theta h_1 \left(\sin\nu - \frac{h_1}{2a}\right),$$

d. i. in gleicher Annäherung

$$2\pi k^2 \Theta h_1 \cdot \frac{h_1}{2a}. \tag{1}$$

Würde sich unter P' anstatt des Kegels und Cylinders nur ein Cylinder von der Höhe h_2 und von gleicher Basis mit jenen befinden, so wäre die entsprechende Vertikalanziehung angenähert gleich

$$2\pi k^2 \Theta h_2 \left(1 - \frac{h_2}{2a}\right);$$

folglich giebt der an einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte gleicher Stärke fehlende Raum B, mit Masse erfüllt gedacht, die Anziehung

$$2\pi k^2 \Theta h_2 \cdot \frac{h_2}{2a}. \tag{2}$$

Die gesamte Vertikalanziehung auf P' besteht aber aus der einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte von der Dicke H weniger den Anziehungen der in A und B fehlenden Massen. Sie ist also mit Rücksicht auf (1) und (2) näherungsweise gleich

$$2\pi k^2 \Theta \left(H - \frac{h_1^2 + h_2^2}{2a}\right), \tag{3}$$

oder nach Einführung von g in gleicher Annäherung:

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\left\{\frac{H}{R} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{2aR}\right\} g. \tag{4}$$

Damit man nun dafür einfach Ausdruck (3) des vorigen Paragraphen substituieren darf, mufs mit Beibehaltung der bisherigen Genauigkeitsgrenze

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h_1^2 + h_2^2}{2aR} < \frac{1}{250000}$$

sein, d. i. für $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m$ und für Metermafs:

$$\frac{h_1^2 + h_2^2}{a} < 68^m, \tag{5}$$

wobei $\frac{h_1}{a}$ und $\frac{h_2}{a}$ überdies als ächte Brüche vorausgesetzt sind.

Dies ist die Bedingung (4*) des vorigen Paragraphen in erweiterter Form. Wie dort kann man die zugehörige Figur dadurch verallgemeinern, dafs man an Stelle der leeren Räume A und B gewisse mit Masse erfüllte Räume setzt, nämlich A und A' bezw. B und B', Fig. 21, deren Anziehungen sich aufheben. Diese Räume dürfen auch durch Berge nur teilweise mit Masse erfüllt sein. Ferner sieht man ein,

dafs wie im Falle des vorigen Paragraphen a, h_1 und h_2 nach verschiedenen Richtungen hin verschieden sein dürfen, wenn nur Formel (5) erfüllt ist. Fig. 22 deutet dies karrikiert an.

Es sei dazu bemerkt: erstens, dafs h_2 auch $> H$ sein darf, ohne dafs vorstehende Betrachtungen ihre Gültigkeit verlieren; zweitens,

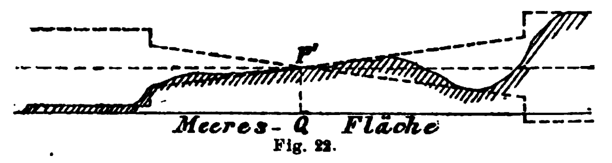


Fig. 22.

dafs in der Terrainform in der Nähe von P' Unregelmäfsigkeiten bis zur Höhe oder Tiefe von etwa 8^m in Bezug auf seinen Horizont vorkommen können, wie aus dem Eingang dieses Paragraphen hervorgeht.

§ 18. **Fortsetzung: Beliebiges Terrain.** Um bei beliebig geformter Terrainfläche und beliebiger Dichtigkeit Θ genau von P' auf Q zu reduzieren, wird man am besten die Korrektion berechnen, welche an der Reduktionsformel für ebenes, horizontales Terrain anzubringen ist. Wir reduzieren also zunächst nach Formel (6) § 16 S. 166 und setzen somit vorerst die Beschleunigung der Schwerkraft in Q gleich

$$\left(1 + \frac{2H}{R}\left[1 - \frac{3}{4}\frac{\Theta_0}{\Theta_m}\right]\right) g\,, \tag{1}$$

worin bedeuten: g die Beschleunigung in P', H dessen Meereshöhe und Θ_0 irgend eine angenommene Dichtigkeit, wofür wir hier die durchschnittliche Dichtigkeit der Massen bei P' im Umkreise bis 25^m wählen wollen. Diese Formel berücksichtigt in Strenge die Anziehung einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte unter P'.

Wir denken uns nun in einen Plan der Umgebung von P' Kreise mit wachsenden Radien, etwa gleich 25, 100, 200, 400, 600, 800, 1000, 1500, 2000^m, ... eingetragen; ferner Radien, welche den Umkreis in 8, 10. 20 und eventuell noch mehr gleiche Teile teilen; vergl. die Darstellung für einen Quadranten, Fig. 23. Mit Hülfe im Plane gegebener Höhenquoten oder Horizontalkurven läfst sich dann für jede von zwei benachbarten Kreisen und Radien begrenzte Abteilung die mittlere Höhe der Terrainfläche berechnen; vergl. hierzu Kap. 4 § 40. Innerhalb einer solchen Abteilung müssen wir letztere als in mittlerer Höhe horizontal begrenzt ansehen können: in jedem praktischen Falle wird sich leicht erkennen

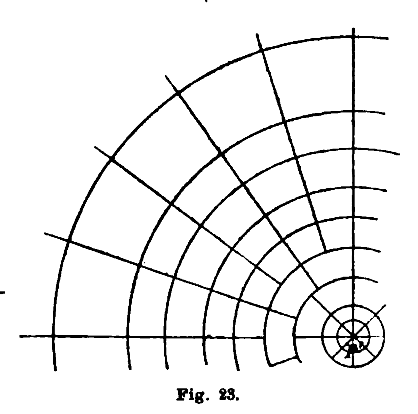


Fig. 23.

lassen, ob die Abteilungen zu diesem Behufe klein genug sind. Man wird dabei von den weiterhin folgenden Formeln für die Vertikalanziehung einer Abteilung auszugehen und zu beurteilen haben, welchen Einflufs eine Änderung der mittleren Höhe hat. Auch ist zu überlegen, ob eine Fehleranhäufung im ganzen möglich ist. Vergl. auch den Beginn von § 17 S. 167.

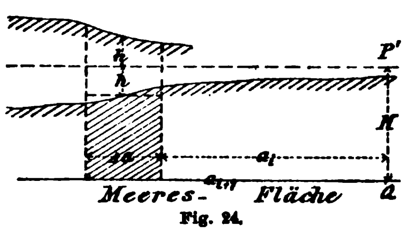


Fig. 24.

Nehmen wir an, dafs die Dichtigkeit Θ innerhalb einer Abteilung der ganzen Tiefe nach konstant sei, und nennen wir a_i und a_{i+1} den inneren und äufseren Kreisradius, n die Anzahl der Teile des Umkreises, so ist diejenige Vertikalanziehung, welche die betreffende Abteilung ausüben würde, wenn sie von der Niveaufläche von P' bis zum Meeresniveau mit Masse erfüllt wäre, nach S. 142 § 2 (2) gleich

$$\frac{2\pi}{n} k^2 \Theta \left(H + a_{i+1} - \sqrt{a_{i+1}^2 + H^2}\right)$$
$$- \frac{2\pi}{n} k^2 \Theta \left(H + a_i - \sqrt{a_i^2 + H^2}\right)$$

oder gleich

$$\frac{2\pi}{n} k^2 \Theta \left(a_{i+1} - a_i + \sqrt{a_i^2 + H^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + H^2}\right). \qquad (2)$$

Um die wirkliche Anziehung zu erhalten, ist hiervon, wenn das Terrain unterhalb der Niveaufläche von P' liegt, die Anziehung der über dem Terrain bis zum Niveau von P' fehlenden Masse abzurechnen, d. i.:

$$\frac{2\pi}{n} k^2 \Theta \left(a_{i+1} - a_i + \sqrt{a_i^2 + h^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + h^2}\right). \qquad (3)$$

Dieselbe Anziehung ist aber auch abzurechnen, wenn sich das Terrain innerhalb der Abteilung um h über das Niveau von P' erhebt; Fig. 24.

Die durch (2) gegebene Anziehung ist in (1) unter Voraussetzung $\Theta_0 = \Theta$ bereits enthalten. Wegen der Differenz beider Dichtigkeiten ist daher aufser (3) an (1) eine Korrektion im Betrage von

$$\frac{2\pi}{n} k^2 \left(\Theta_0 - \Theta\right)\left(a_{i+1} - a_i + \sqrt{a_i^2 + H^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + H^2}\right) \qquad (4)$$

erforderlich. Bezeichnen wir zur Abkürzung

$$\Theta - \Theta_0 \text{ mit } \Delta\Theta, \qquad a_{i+1} - a_i \text{ mit } \Delta a, \qquad (5)$$

und führen wir in (3) und (4) wieder g ein, so ergiebt sich als Verbesserung von (1):

Erstens *wegen der Höhenlage des Terrains* für die einzelne Abteilung:

$$+ \frac{3}{2n} \cdot \frac{\Theta}{\Theta_m} \left(\Delta a + \sqrt{a_i^2 + h^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + h^2}\right) \frac{g}{R}, \qquad (6)$$

und zweitens *wegen der Dichtigkeit* der Abteilung:

$$-\frac{3}{2n}\frac{\Delta\Theta}{\Theta_m}\left(\Delta a+\sqrt{a_i^2+H^2}-\sqrt{a_{i+1}^2+H^2}\right)\frac{g}{R}\,. \tag{7}$$

Für nicht unmittelbar zu P' benachbarte Abteilungen werden meist $h:a$ und $H:a$ so klein sein, dafs die ersten Glieder der Reihenentwicklung für die in (6) und (7) auftretenden Quadratwurzeln ausreichen. Dann folgen aus (6) und (7) bezw. die Näherungsformeln:

$$+\frac{3}{4n}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h^2}{R}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)g \tag{6*}$$

und

$$-\frac{3}{4n}\frac{\Delta\Theta}{\Theta_m}\frac{H^2}{R}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)g\,. \tag{7*}$$

Diese Formeln genügen, wie die Reihenentwicklung zeigt, für $a_i > 5h$ bezw. $5H$.

Nach diesen Formeln ist die Reduktion im Sinne einer Berichtigung von (1) nicht unbequem, besonders wenn diejenigen Radien, deren Reziproken in betracht kommen, so gewählt werden, dafs die Parenthese in (6*) und (7*) konstant ist. Letztere Annahme eignet sich allerdings nicht für die nähere Umgebung, weil dann a zu rasch anwachsen würde. Für (7) und (7*) braucht die Rechnung offenbar nicht für jede Abteilung einzeln ausgeführt zu werden, vielmehr kann man alle Abteilungen eines Ringes vereinigen, wenn unter $\Delta\Theta : n$ der Unterschied der Dichtigkeit gegen Θ_0 im Mittel für einen Ring verstanden wird.

Wie die Formeln abzuändern sind, wenn Θ sich mit der Tiefe ändert, bedarf keiner Erörterung.

Anstatt der im Vorhergehenden erörterten strengen Reduktion wird man in einzelnen Fällen sich mit Annäherungen begnügen können. Befindet sich z. B. P' auf der Höhe eines Berges, so wird man oftmals der Wirklichkeit ziemlich nahe kommen, wenn man für den Berg die Anziehung eines geraden Kreiskegels oder Rotationsparaboloids in Rechnung zieht und für das Terrain, auf welches sich der Berg aufsetzt, die Anziehung einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte annimmt. Reduziert man zuerst wie für horizontales Terrain nach S. 166 § 16 (6), so hat man nachträglich die zuviel abgezogene Anziehung wieder beizufügen, nämlich für einen *Kegel* von der Höhe h und dem Radius a der Basis nach S. 143 § 2 (4):

$$+\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\,g \tag{8}$$

und für ein *Paraboloid* gleicher Höhe und Basis nach S. 144 § 3 (4), darin $b = h$, $c =$ null und $2pb = a^2$ gesetzt:

$$+\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\left(\sqrt{a^2+h^2}-\frac{a^2}{2h}\,\mathrm{lognat}\left[1+\frac{2h}{a^2}\sqrt{a^2+h^2}+\frac{2h^2}{a^2}\right]\right)\frac{g}{R}\,\cdot \tag{9}$$

Da h fast immer so klein sein wird, dafs der Einflufs von $h^2 : a^2$ zu vernachlässigen ist, erhält man in meist ausreichender Annäherung als *Verbesserung des bereits für horizontales Terrain korrigierten* g im Falle (Fig. 25)

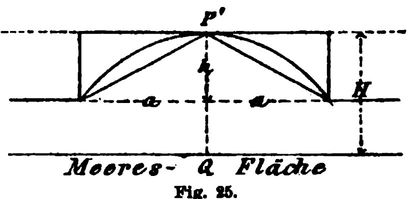


Fig. 25.

des Kegels: $$+\frac{2h}{R}\frac{3}{4}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{a}\,g \qquad (8^*)$$

des Paraboloids: $$+\frac{2h}{R}\frac{3}{4}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{2}{3}\frac{h}{a}\,g \qquad (9^*)$$

und, wie wir zur Vergleichung nach S. 164 (2) hinzufügen:

des Cylinders: $$+\frac{2h}{R}\frac{3}{4}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{1}{2}\frac{h}{a}\,g. \qquad (10)$$

Die strenge Reduktion wegen der Anziehung des Terrains führt *C. A. F. Peters* 1855 im 40. Bde. der *Astronom. Nachr.* No. 939 S. 45 u. ff. für die Beobachtung in Güldenstein mittelst einer Zerlegung des Grundrisses in Quadrate aus. Die Formel, welcher man bei dieser Zerlegung bedarf, ist jedoch sehr kompliziert: sie enthält nicht nur zwölf verschiedene Quadratwurzelausdrücke, sondern auch vier Logarithmen und vier Arcustangens.

§ 19. **Die Reduktion der Schwerebeobachtungen wegen der Kondensation.** Wie schon bemerkt wurde, genügt die übliche Reduktion aufs Meeresniveau nicht: sie bildet nur einen Teil der auszuführenden Reduktionen. Für sich allein betrachtet erscheint jene Reduktion einerseits nicht konsequent, insofern sie nur Massenunregelmäfsigkeiten *über* dem Meeresniveau berücksichtigt, dagegen diejenigen *unterhalb* desselben, also insbesondere bei Inseln die Existenz der umgebenden Wassermassen, ignoriert; sie erscheint andererseits in ihrer Berechtigung fraglich, weil die Massenunregelmäfsigkeiten vielfach gar keinen lokalen Charakter haben, wie insbesondere die allgemeine Erhebung der Kontinente übers Meeresniveau.*) Unsere Reduktions-

*) *Stokes* giebt in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung *On the Variation of Gravity* zunächst an, dafs man aufs Meeresniveau nur nach der Formel $g\left(1+\frac{2H}{R}\right)$ reduzieren müsse. Hierzu gelangt er durch die Annahme, dafs man sich die über das Meeresniveau hervortretenden Massen ohne wesentliche Änderung der Form der Meeresfläche auf dieselbe kondensiert denken könne. Haben diese Massen aber in der Umgebung des betreffenden Punktes die Form einer horizontalen Platte, so ist die Vertikalanziehung vor der Kondensation auf jenen Punkt P' annähernd dieselbe, wie nachher auf den dicht über dem Meeresniveau liegenden Punkt Q vertikal unter P'. — Weiterhin bemerkt nun *Stokes*,

weise hat nun, ganz abgesehen von ihrer früher anderweit begründeten Notwendigkeit, den Vorteil, diese Mängel zu beseitigen, dabei aber doch die Wirkung wirklich lokaler Massenunregelmäfsigkeiten abzuschwächen, indem dieselben um rund 21^{km} nach dem Erdinnern zu verschoben werden.

Bei der Berechnung des Kondensationseffekts kann man, was nunmehr zunächst wichtig zu bemerken ist, *von der Krümmung der Meeresfläche absehen.* Um dieses nachzuweisen, betrachten wir letztere als Kugelfläche, indem dies sicherlich einen hohen Grad von Annäherung für den vorliegenden Zweck giebt. Auch denken wir uns dabei der Einfachheit halber die Massenunregelmäfsigkeiten auf diese Kugelfläche kondensiert und nehmen zunächst die Massendichtigkeit an allen Stellen einer den Punkt P' zentrisch umgebenden Scheibe der Kugelfläche konstant, etwa gleich Θh, an.

Ist nun r der Radius der Kugelfläche, r' der Abstand des Punktes P' vom Zentrum C derselben, Ψ der Zentriwinkel am Rande der Scheibe in Bezug auf die Linie $P'C$, so ist mit Rücksicht auf Fig. 13 S. 144 nach Formel (3) S. 145, wenn Θh für Θdr geschrieben wird, die Anziehung der Scheibe auf P' gleich

$$2\pi k^2\,\Theta h\,\frac{r^2}{r'^2}\left(1+\frac{r-r'\cos\Psi}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Psi}}\right).$$

Vor der Kondensation können wir für unsern Zweck $r = r'$ setzen und erhalten als Anziehung:

$$2\pi k^2\,\Theta h\left(1+\sin\frac{\Psi}{2}\right). \tag{1}$$

Nach derselben setzen wir in der Parenthese $r = r' - \mathfrak{a}r'$. Der Faktor vor der Parenthese ist nach der Kondensation derselbe wie vorher. Es folgt als Anziehung:

$$2\pi k^2\,\Theta h\left\{1+\frac{2\sin^2\frac{\Psi}{2}-\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+4(1-\mathfrak{a})\sin^2\frac{\Psi}{2}}}\right\}. \tag{2}$$

Der Effekt der Kondensation ergiebt sich durch Subtraktion von (1)

---

dafs allerdings die lokalen Anomalieen von g auf diese Weise erhalten blieben und dafs es daher doch besser sei, (wohl insofern g nur in einigen Punkten gegeben ist) nach *Youngs* Regel zu reduzieren. Dafs er aber die Reduktion nach $g\left(1+\frac{2H}{R}\right)$ für die allein richtige halten würde, wenn g überall gegeben wäre, geht daraus hervor, dafs er den Einflufs der Reduktionsgröfsen nach *Young* aufs Endresultat für diesen Fall schätzt (nach Formel (10) § 32 dieses Kapitels, wobei in dieser Formel für g die *Young*sche Reduktion zu setzen ist, so dafs die rechte Seite dieser Gleichung dann den Fehler in $G\mathfrak{b}_2$ anzeigt). Nach seiner Rechnung ist der Fehler in $\mathfrak{b}_2$ nur $-0{,}0000012$, also verschwindend.

und (2), wenn wir zugleich für g den Näherungsausdruck $\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ einführen, näherungsweise gleich einer Verminderung der Anziehung um

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+4(1-\mathfrak{a})\sin^2\frac{\Psi}{2}}}+\sin\frac{\Psi}{2}\left[1-\frac{2\sin\frac{\Psi}{2}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+4(1-\mathfrak{a})\sin^2\frac{\Psi}{2}}}\right]\right\}g. \tag{3}$$

Dagegen erhält man aus der Formel (2) des § 1 S. 141 unter Annahme einer ebenen Scheibe als Verminderung der Anziehung infolge der Kondensation, $z = \mathfrak{a}r'$ und $a = \Psi r'$ gesetzt:

$$2\pi k^2 \Theta h \frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+\Psi^2}}, \tag{4}$$

oder näherungsweise unter Einführung von g wie oben:

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+\Psi^2}}\right\}g. \tag{5}$$

Es sind nunmehr die Ausdrücke (3) und (5) zu vergleichen. Für $\Psi =$ null giebt in beiden Fällen die geschlungene Parenthese den Wert 1; bei wachsendem Ψ nimmt die Parenthese in (3) sicher zunächst rascher zu als in (5), da $2\sin\frac{\Psi}{2} < \Psi$ und mithin schon der erste Teil der Parenthese (3) gröfser als die Parenthese (5) ist, der zweite Teil jener aber positiv bleibt, solange $4\sin^2\frac{\Psi}{2} < \mathfrak{a}$, d. h. näherungsweise $\Psi < {}^1/_{17}$ genommen wird. Durch Probieren findet man, dafs beiläufig für $\Psi = \mathfrak{a}$ bis $2\mathfrak{a}$ der Überschufs von (3) über (5) ein Maximum wird im Betrage von rund

$$+\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\frac{g}{900}.$$

Um für gröfsere Werte von Ψ als solche von der Ordnung $\mathfrak{a}$ bequemer den Verlauf des Unterschiedes von (3) und (5) zu erkennen, wenden wir für die in (3) auftretende Quadratwurzel die Reihenentwicklung nach dem binomischen Satze an, indem wir vorerst schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}^2+4(1-\mathfrak{a})\sin^2\frac{\Psi}{2}}} = \frac{1}{2\sin\frac{\Psi}{2}\sqrt{1-\mathfrak{a}+\frac{\mathfrak{a}^2}{4\sin^2\frac{\Psi}{2}}}}.$$

An Stelle von (2) tritt dann der Ausdruck

$$2\pi k^2 \Theta h\left\{1+\sin\frac{\Psi}{2}-\frac{\mathfrak{a}\cos^2\frac{\Psi}{2}}{2\sin\frac{\Psi}{2}}\left(1+\frac{3}{4}\mathfrak{a}-\frac{1}{8}\mathfrak{a}^2\frac{1-5\sin^2\frac{\Psi}{2}}{\sin^2\frac{\Psi}{2}}\right)+\ldots\right\} \tag{2*}$$

und an Stelle von (3):

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\left\{\frac{\mathfrak{a}\cos^2\frac{\Psi}{2}}{2\sin\frac{\Psi}{2}}\left(1+\frac{3}{4}\mathfrak{a}-\frac{1}{8}\mathfrak{a}^2\frac{1-5\sin^2\frac{\Psi}{2}}{\sin^2\frac{\Psi}{2}}\right)+\ldots\right\}g. \tag{3*}$$



Diese Entwicklung gilt für $\frac{\mathfrak{a}^2}{4\sin^2\frac{\Psi}{2}} - \mathfrak{a} < 1$, oder abgerundet für

$$\Psi > \mathfrak{a}\,.$$

Geht man nur bis $\Psi = 1$, so kann man in (3^*) für sin und cos mit Vorteil die Anfänge der Reihenentwicklung einführen und erhält in ausreichender Annäherung:

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\Psi}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{a}^2}{\Psi^2}+\frac{3}{4}\mathfrak{a}-\frac{5}{24}\Psi^2\right)+\ldots\right\} g\,, \tag{6}$$

während (5) bei entsprechender Entwicklung übergeht in:

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\Psi}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{a}^2}{\Psi^2}+\ldots\right)\right\} g\,. \tag{7}$$

Die Differenz der geschlungenen Parenthesen von (6) und (7) ist gleich

$$\frac{3}{4}\frac{\mathfrak{a}^2}{\Psi}-\frac{5}{24}\mathfrak{a}\Psi\,, \tag{8}$$

woraus man erkennt, dafs mit wachsendem Ψ der Unterschied von (6) und (7), und somit auch derjenige von (3) und (5), abnimmt, bis er bei $\Psi =$ rund $^1/_9$ verschwindet und weiterhin negativ wird.

Das Anwachsen des Unterschieds im Negativen findet nahezu ohne Aufhören statt bis zum Grenzwert $\Psi = \pi$. Zunächst bis $\Psi = 1$ zeigt dies die Differenz (8). Für gröfsere Werte von Ψ kann man aber die geschlungene Parenthese in (3^*) auf $\mathfrak{a}\cos^2\frac{\Psi}{2} : 2\sin\frac{\Psi}{2}$, diejenige in (5) auf $\mathfrak{a} : \Psi$ abkürzen und bemerkt nun leicht mittelst des ersten Differentialquotienten von

$$\mathfrak{a}\left\{\frac{\cos^2\frac{\Psi}{2}}{2\sin\frac{\Psi}{2}}-\frac{1}{\Psi}\right\},$$

dafs dieser Unterschied im Negativen wächst bis $\Psi =$ rund $\frac{5}{6}\pi$ und von da wieder etwas, jedoch nur wenig, abnimmt. Es wird für $\Psi = \frac{5}{6}\pi$ bis π der Überschufs von (3) über (5) rund

$$-\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\frac{g}{900}\,.$$

Nach dem Vorstehenden ist zwischen der sphärischen und ebenen Berechnung des Kondensationseffektes einer homogenen Scheibe ein Unterschied, der mit wachsendem Radius der Scheibe erst wächst bis zu einem positiven Maximum, dann im wesentlichen abnimmt bis zu einem negativen Maximum. Der gröfste Unterschied entspricht also einer ringförmigen homogenen Scheibe, deren innerer und äufserer

Radius etwa den Zentriwinkeln $\Psi = \mathfrak{a}$ und π zukommen. Denkt man sich innerhalb des ersteren Radius die Dichtigkeit und also das Produkt Θh bei gleichem absoluten Werte von entgegengesetztem Vorzeichen wie aufserhalb, so addiren sich die Berechnungsunterschiede zu

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m}\frac{h}{R}\frac{g}{300}.$$

Setzen wir $\Theta h : \Theta_m R = {}^1/_{3000}$, was innerhalb des Zentriwinkels $\Psi = \mathfrak{a}$ bei $\Theta = 2{,}8$ einem Gebirge von 4^{km} Höhe, aufserhalb bei $\Theta = 1{,}8$, als Differenz von 2,8 und 1, einem 6^{km} tiefen Ocean entspricht, so ist dieser maximale Berechnungsfehler ${}^1/_{600000}$ von g. Aber es dürfte ein solcher Betrag in praktischen Fällen nie eintreten.

Bei vorstehender Untersuchung wurde nun allerdings alle Masse in einer Niveaufläche mit dem angezogenen Punkt vorausgesetzt. Man erkennt aber ohne Schwierigkeit, dafs die Berücksichtigung der speziellen Terrainform zu keinem wesentlich anderen Maximalfehler führen kann, indem die Kondensation aufs Niveau des angezogenen Punktes zwischen ebener und sphärischer Rechnung Unterschiede derselben Art giebt, wie sie oben betrachtet wurden. Nur sind sie numerisch geringfügiger und selbst fürs Himalaya-Gebirge nicht erheblich.

§ 20. **Fortsetzung: Die Ausführung der Reduktion für die Kondensation** beginnt mit der Vervollständigung der üblichen Reduktion auf das Meeresniveau wegen der dabei vernachlässigten Ungleichmäfsigkeiten in der Dichtigkeit der Massen unterhalb desselben. Es kommen wieder die Formeln des § 18 S. 169 u. ff. zur Anwendung:

Im Grundrifs denken wir uns eine Zerlegung nach konzentrischen Kreisen, wie Fig. 23 S. 169 sie andeutet; im Ringe a_i bis a_{i+1} sei zwischen zwei benachbarten Radien der n. Teil der Peripherie enthalten. Ist nun in einer solchen Abteilung von der Meeresfläche bis zur Tiefe t die Dichtigkeit gleich Θ anstatt $2{,}8 = \frac{1}{2}\Theta_m$, der Dichtigkeit der nach S. 162 § 15 nicht zu berücksichtigenden homogenen Schale zwischen Meeres- und Kondensationsfläche, so wird die Verbesserung des wie üblich, insbesondere nach § 18 reduzierten g wegen dieser Abteilung mit Rücksicht auf Formel (7) S. 171 gleich

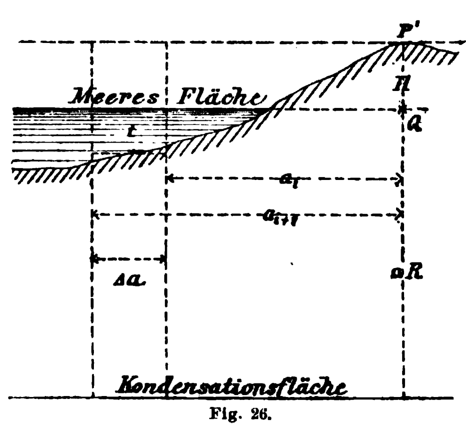


Fig. 26.

$$+\frac{3}{2n}\frac{\varDelta\Theta}{\Theta_m}\left\{\begin{matrix}\sqrt{a_{i+1}{}^2+(H+t)^2} & -\sqrt{a_i^2+(H+t)^2}\\ -\sqrt{a_{i+1}{}^2+H^2} & +\sqrt{a_i^2+H^2}\end{matrix}\right\}\frac{g}{R}, \qquad (1)$$

worin $\Theta_m = 5{,}6$ die mittlere Dichtigkeit der Erde ist, R deren mittleren Radius bezeichnet und $\varDelta\Theta$ durch die nachfolgende Gleichung definiert wird:

$$\varDelta\Theta = \Theta - 2{,}8\,. \qquad (2)$$

Für Werte von $a_i > 5(H+t)$ genügt anstatt (1) die Näherungsformel, vergl. (7*) S. 171:

$$-\frac{3}{4n}\frac{\varDelta\Theta}{\Theta_m}\frac{(H+t)^2-H^2}{R}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)g\,. \qquad (1^*)$$

Die Formel (1) bezw. (1*) ist mit $\Theta = 1$ unmittelbar für alle Abteilungen eines Meeresbeckens anwendbar, das sich in der Umgebung des Beobachtungsortes P' befindet, vergl. Fig. 26. Wie sie anzuwenden ist, wenn die Dichtigkeit einer Abteilung bis zur Tiefe $t = \mathfrak{a}R =$ rund 21^{km} Änderungen erleidet, bedarf keiner Ausführung. Wohl aber ist noch darauf hinzuweisen, dafs in (2) anstatt 2,8 auch irgend eine andere normale Dichtigkeit Θ_0 eingeführt werden darf, was von Vorteil wird, wenn dies für viele Abteilungen die Reduktion zu null macht — überhaupt also die Rechnung erleichtert — nur mufs man sich dessen erinnern, wenn später die Anziehung der kondensierten Massen auf Q ermittelt wird.

Nachdem in der angegebenen Weise der erste Teil der Reduktion ausgeführt worden ist, kommt als zweiter Teil an die Reihe die Berechnung der Anziehung der kondensierten Massen auf Q. Diese Anziehung ist dem bisher reduzierten Werte der Beschleunigung g hinzuzufügen. Ihre Berechnung vereinfacht sich dadurch, dafs jetzt alle Massen in einer Ebene im Abstande $\mathfrak{a}R =$ rund 21^{km} von Q liegend gedacht werden.

Im Grundrifs nehmen wir die Zerlegung wie früher. Als Dichtigkeit in einer Abteilung ist, insoweit die Massen *über* dem Meeresniveau in betracht kommen, das Produkt $\Theta\,.\,h$ aus deren konstant gedachter Dichtigkeit und der Meereshöhe des Terrains einzuführen, wozu noch das Produkt $\varDelta\Theta\,.\,t$ hinzutritt, wenn *unter* dem Meeresniveau die Dichtigkeit bis zur Tiefe t von der normalen Dichtigkeit 2,8 bezw. Θ_0 um $\varDelta\Theta = \Theta - 2{,}8$ bezw. $\Theta - \Theta_0$ abweicht. Wie der Ausdruck für die Dichtigkeit bei mehrfacher Schichtung zu bilden ist, geht hieraus deutlich genug hervor. Bleiben wir also bei dem einfachen Ausdruck $\Theta\,.\,h + \varDelta\Theta\,.\,t$ stehen, so wird die vertikale Komponente der Anziehung der betreffenden Abteilung mit Rücksicht auf Formel (2) § 1 S. 141, in welcher für Θdz jetzt $\Theta\,.\,h + \varDelta\Theta\,.\,t$ zu substituieren ist, wenn wir auch sofort g mit Hilfe des mehrfach benutzten Näherungsausdruckes einführen, gleich

$$+\frac{3\mathfrak{a}}{2n}\,\frac{\Theta.h+\Delta\Theta.t}{\Theta_m}\left(\frac{1}{\sqrt{a_i^2+\mathfrak{a}^2R^2}}-\frac{1}{\sqrt{a_{i+1}^2+\mathfrak{a}^2R^2}}\right)g\,. \qquad (3)$$

Diese Formel kann für $a_i > 150^{km}$ ohne merklichen Fehler auf

$$+\frac{3\mathfrak{a}}{2n}\,\frac{\Theta.h+\Delta\Theta.t}{\Theta_m}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)g \qquad (3^*)$$

abgekürzt werden. In diesen Formeln kann man genau genug

$$\mathfrak{a}=\frac{1}{300} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}^2R^2 = 450 \text{ Quadr.-Kilom.}$$

setzen.

In Bezug auf die maximale Distanz a_i, bis zu welcher man vorstehende Formeln anzuwenden hat, wird man leicht bemerken, dafs erheblich weiter zu gehen ist, als bei der üblichen Reduktion aufs Meeresniveau. Wenn der Ocean mit in betracht kommt, wird man die Rechnung bis mindestens 1000^{km} Distanz auszudehnen haben, wie die Formeln (1^*) und (3^*) zeigen. Eine grofse Schwierigkeit erwächst jedoch aus dieser weiten Ausdehnung des Berechnungsbezirks deshalb nicht, weil nur für Distanzen von der Ordnung $\mathfrak{a}R$ die Berechnung eine scharfe zu sein braucht und also nur für diese Distanzen die Berechnungselemente genau ermittelt werden müssen. Die genannten Formeln zeigen nämlich, dafs bei arithmetischer Progression der a die Einflüsse der aufeinanderfolgenden Ringe annähernd mit dem umgekehrten Quadrate der Entfernung sich ändern.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir hier noch Folgendes: Bei der vorstehend auseinandergesetzten Reduktionsrechnung wird die Anziehung der Massen über der Kondensationsfläche *vor* der Kondensation von der Schwerkraft abgezogen und *nach* der Kondensation wieder addiert. Die erstere Anziehung wird auf P', die letztere auf Q bezogen. Ein Teil der Reduktion rührt somit von der Ortsveränderung her. Auf die Ortsveränderung bezieht sich aber auch das Reduktionsglied $\frac{2H}{R}g$, vergl. S. 169 § 18 (1), wobei die ganze Erdmasse berücksichtigt ist, insoweit sie nach aufsen wie eine homogen geschichtete Kugel anziehend wirkt. Damit nun für die Massen aufserhalb der Kondensationsfläche die Reduktion wegen der Ortsveränderung nicht zweimal angebracht wird, mufs bei der Kondensation von diesen Massen eine gewisse, homogene Schale ausgeschlossen werden, deren Anziehungsunterschied auf P' und Q schon in dem Gliede $\frac{2H}{R}g$ enthalten ist. Die Dichtigkeit dieser Schale würde für Θ_0 einzuführen sein, wenn nicht der Umstand dieses unnötig machte, dafs infolge der Vernachlässigung der Krümmung der Meeresfläche bei der Kondensation für eine homogene Schale der Anziehungsunterschied auf P' und Q verschwindend klein wird. Folglich ist Θ_0, wie bisher angenommen, auch in dieser Hinsicht beliebig.

§ 21. Kondensations-Reduktion für eine Inselstation. Bei der im vorigen Paragraphen angegebenen Vervollständigung der üblichen Reduktion aufs Meeresniveau wird man sich aus praktischen Gründen auf die Berücksichtigung der stärksten bekannten Unregelmäßsigkeiten in der Dichtigkeit der Erdkruste beschränken müssen. Ganz besonders wird man den Einfluſs der Oceane aufzusuchen haben.

Wir wollen hier und im nächsten Paragraphen eine Näherungsformel für kleine Inseln und für Küsten aufstellen, wobei wir annehmen, daſs der Beobachtungsort im Meeresniveau liegt. Weiterhin werden wir dann noch einen einfachen Fall für Gebirgsstationen betrachten.

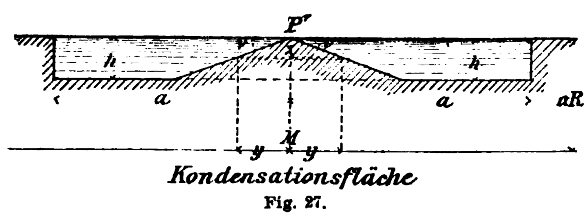


Fig. 27.

Die Insel denken wir uns als geraden Kreiskegel von der Dichtigkeit Θ, den Ocean mit dem Radius a kreisförmig, konzentrisch zur Station P' auf der Inselspitze, begrenzt, Fig. 27. Als normale Dichtigkeit der Erdkruste nehmen wir $\frac{1}{2}\Theta_m = 2{,}8$.

Um nun auf diejenige Anziehung zu kommen, welche P' erleiden würde, wenn Ocean und Insel die Dichtigkeit 2,8 hätten, müssen wir erstens subtrahieren die Anziehung des Inselkegels mit der Dichtigkeit $(\Theta - 1)$ und zweitens addieren die Anziehung eines geraden Kreiscylinders von der Tiefe und äuſseren Begrenzung des Oceans bei der Dichtigkeit 1,8. Um sodann die Kondensation zum Ausdruck zu bringen, ist die Anziehung der ersteren Masse zu addieren, der zweiten zu subtrahieren, nachdem diese Massen auf die Kondensationsfläche verschoben gedacht worden sind.

Nach S. 142 § 2 (4) ist die negative Anziehung des Inselkegels auf seine Spitze P' in dem Falle, daſs $(\Theta - 1)$ die Dichtigkeit ist, gleich

$$-2\pi k^2 \,.\, (\Theta - 1)\, h\,(1 - \sin v)\,. \qquad (1)$$

Nach Formel (2) am gleichen Orte ist die positive Anziehung eines geraden Kreiscylinders von der Höhe h, dem Radius a und der Dichte 1,8 auf die Mitte P' seiner oberen Fläche gleich

$$+\,2\pi k^2 \,.\, 1{,}8\,(h + a - \sqrt{a^2 + h^2})$$

oder angenähert:

$$+\,2\pi k^2 \,.\, 1{,}8\,h\left(1 - \frac{h}{2a} + \ldots\right). \qquad (2)$$

Um die positive Anziehung des Inselkegels nach der Kondensation zu erhalten, zerlegen wir denselben in scheibenförmige Elemente vom Radius y und der Dicke dz, und kondensieren diese Elemente einzeln. Für das einzelne kondensierte Element ist nach S. 141 § 1 (2) die Vertikalanziehung gleich

$$2\pi k^2 \,.\, (\Theta - 1)\left(1 - \frac{\mathfrak{a}R}{\sqrt{\mathfrak{a}^2R^2 + y^2}}\right) dz\,.$$

Dies ist zu integrieren von y gleich null bis $h \cot\nu$. Rechnen wir z von P' bis zur Anfangslage des Elements, so wird $z = y \tan\nu$ und $dz = \tan\nu \,.\, dy$; die positive Anziehung des kondensierten Inselkegels wird daher

$$+ 2\pi k^2 \,.\, (\Theta - 1) \tan\nu \int_0^{h\cot\nu} \left(1 - \frac{\mathfrak{a}R}{\sqrt{\mathfrak{a}^2R^2 + y^2}}\right) dy$$

oder gleich

$$+ 2\pi k^2 .(\Theta - 1)\, h \left\{1 - \frac{\mathfrak{a}R\tan\nu}{h} \log\text{nat} \frac{h + \sqrt{h^2 + \mathfrak{a}^2R^2\tan^2\nu}}{\mathfrak{a}R\tan\nu}\right\}. \qquad (3)$$

Die negative Anziehung des kondensierten Cylinders wird nach S. 141 § 1 (2) gleich

$$- 2\pi k^2 \,.\, 1{,}8h \left(1 - \frac{\mathfrak{a}R}{\sqrt{a^2 + \mathfrak{a}^2R^2}}\right)$$

oder angenähert:

$$- 2\pi k^2 \,.\, 1{,}8\, h \left(1 - \frac{\mathfrak{a}R}{a} + \ldots\right). \qquad (4)$$

Die Verbesserung der beobachteten Beschleunigung g ergiebt sich hiermit, wenn noch zur Reduktion auf Bruchteile von g der Näherungswert $\frac{4}{3}\pi k^2\, \Theta_m R$ mit $\Theta_m = 5{,}6$ angewandt wird:

$$- \frac{3}{2}\, \frac{\Theta - 1}{5{,}6}\, \frac{h}{R} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{a}R\tan\nu}{h} \log\text{nat} \frac{h + \sqrt{h^2 + \mathfrak{a}^2R^2\tan^2\nu}}{\mathfrak{a}R\tan\nu} \\[2ex] - \sin\nu - \frac{1{,}8}{\Theta - 1}\, \frac{\mathfrak{a}R - \frac{1}{2}h}{a} + \ldots \end{array} \right\} g\,. \qquad (5)$$

Dieselbe ist in der Regel negativ, denn nach § 11 S. 155 schneidet die Insel gerade diejenigen Massendefekte aus, welche bei der Kondensation eine Vermehrung der Anziehung geben würden — allerdings unter der Voraussetzung, daſs nicht die Dichtigkeit der Insel abnorm klein und ihr Böschungswinkel vielleicht auſserdem abnorm groſs ist. Bei der Beurteilung des letzten Gliedes ist übrigens immer zu beachten, daſs der Minimalwert von a gleich $h : \tan\nu$ ist, mithin dieses Glied den Betrag von

$$\frac{1{,}8}{\Theta - 1}\, \frac{\mathfrak{a}R}{h\cot\nu}$$

keinesfalls überschreiten kann. Aber im offenen Ocean tritt der Betrag dieses Gliedes ganz zurück, so daſs man es bei einer Schätzung vernachlässigen wird. Auch das Glied $\sin\nu$ in der Parenthese (5) kann man in der Regel seiner relativ geringen Gröſse halber vernachlässigen.

Als Näherungsformel für Inseln im offenen Ocean (bis 100 Meilen Abstand von Kontinenten) hat man damit

$$-\frac{3}{2}\,\frac{\Theta-1}{5{,}6}\,\frac{h}{R}\,\frac{\log\text{nat}\,(n+\sqrt{n^2+1})}{n}\,g$$

für $\qquad$ (6)

$$n = h\cot\nu : \mathfrak{a}R\,.$$

Hiernach ergiebt sich z. B. für $\Theta = 2{,}8$, $h = 3500^m$ und $\cot\nu = 30$ die Reduktion gleich rund $-g : 8000$.

§ 22. **Küstenstation.** Wir denken uns die Küste von oben gesehen geradlinig durch P' hindurch begrenzt, den Abfall des Festlandes unter dem Winkel ν bis zur Tiefe h: Fig. 28. Quer zur Längsrichtung der Küste denken wir uns ferner Kontinent und Meer sehr breit. Dann kommt bei der Kondensation nur ein Abschnitt des Festlandes von der Form eines geraden Prismas mit dem Querschnitt ABP' in betracht. Denn wäre auch dieses Prisma mit Wasser erfüllt, so würde der Kondensationseffekt gleich null sein, weil er nach S. 142 § 1 nicht nur null ist für jede weit ausgedehnte Scheibe, sondern zufolge der Symmetrie auch für jede durch einen Vertikalschnitt durch P' gebildete Hälfte einer solchen.

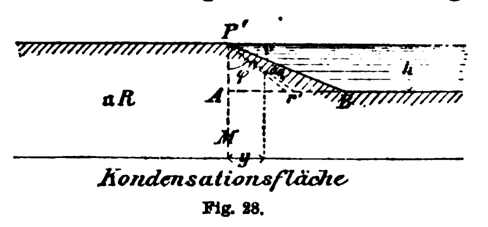


Fig. 28.

Das Prisma zerlegen wir der Länge nach in Elemente vom Querschnitt dq. Hat ein solches von P' den kürzesten Abstand r, welcher im Querprofil, Fig. 28, gemessen wird, so ist die Anziehung des Elements in Richtung r abzüglich der des Wassers gleich

$$k^2\,(\Theta-1)\int_{-L}^{+L}\frac{r\,dq\,dx}{\sqrt{r^2+x^2}^{\,3}}\,,$$

wenn Θ die konstante Dichtigkeit des Prismas ist und x einen Abstand vom Querprofil in der Längsrichtung bezeichnet, der von $-L$ bis $+L$ variiert. Nach bekannten Grundformeln ist diese Anziehung gleich

$$k^2\,(\Theta-1)\,\frac{2L\,dq}{r\sqrt{r^2+L^2}}\,, \qquad (1)$$

d. i. in allen hier in betracht kommenden Fällen, bei denen die Küstenlänge L beiderseits von P' eine bedeutende sein wird, ausreichend genau gleich

$$2k^2(\Theta - 1)\frac{dq}{r}. \tag{1*}$$

Hiervon kommt gegenwärtig die vertikale Komponente in betracht, die durch Multiplikation von (1*) mit $\cos\varphi$, φ der Winkel zwischen r und der Vertikalen, hervorgeht. Setzen wir $dq = r\,d\varphi\,.\,dr$, so wird die Vertikalanziehung des Prismas auf P' gleich

$$2k^2(\Theta - 1)\int_0^{\frac{\pi}{2}-\nu}\int_0^{r'}\cos\varphi\,d\varphi\,dr \quad \text{d. i.} \quad 2k^2(\Theta - 1)\int_0^{\frac{\pi}{2}-\nu} r'\cos\varphi\,d\varphi$$

oder, weil $r'\cos\varphi = h$ ist, gleich

$$2k^2(\Theta - 1)\,h\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right). \tag{2}$$

Diese Anziehung ist von der in P' beobachteten Beschleunigung abzuziehen. Nach erfolgter Kondensation denken wir uns alle Elemente, welche in derselben Vertikalen im Abstand y von M liegen, vereinigt. In Formel (1*) tritt dann an Stelle von r die $\sqrt{\mathfrak{a}^2R^2 + y^2}$ und an Stelle von dq das Produkt $(h - y\tan\nu)\,dy$, da $h - y\tan\nu$ die Höhe des Prismenprofils im Abstand y ist. Die vertikale Komponente wird daher gleich

$$2k^2(\Theta - 1)\int_0^{h\cot\nu}\frac{\mathfrak{a}R\,(h - y\tan\nu)}{\mathfrak{a}^2R^2 + y^2}\,dy\,.$$

Das unbestimmte Integral ist

$$h\arctan\frac{y}{\mathfrak{a}R} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{a}R\tan\nu\;\text{lognat}\,(\mathfrak{a}^2R^2 + y^2) + \mathit{Konst.}$$

Beachtet man, daſs $\arctan u = \frac{\pi}{2} - \text{arccot}\,u = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{u}$ gesetzt werden kann, so findet man nun ohne Schwierigkeit als Vertikalanziehung nach der Kondensation:

$$2k^2(\Theta - 1)h\left\{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mathfrak{a}R\tan\nu}{h} - \frac{\mathfrak{a}R\tan\nu}{h}\,\text{lognat}\frac{\sqrt{h^2 + \mathfrak{a}^2R^2\tan^2\nu}}{\mathfrak{a}R\tan\nu}\right\}. \tag{3}$$

Zieht man hiervon (2) ab, so folgt als Reduktion wegen der Kondensation für das beobachtete g unter üblicher Einführung des Näherungswertes für g:

$$-\frac{3}{2\pi}\,\frac{\Theta - 1}{5{,}6}\,\frac{h}{R}\left\{\frac{1}{n}\,\text{lognat}\sqrt{n^2 + 1} + \arctan\frac{1}{n} - \nu\right\} g \tag{4}$$

mit

$$n = h\cot\nu : \mathfrak{a}R\,.$$

Vernachlässigen wir das meist unbedeutende ν, so läfst sich (4) mit dem entsprechenden Ausdruck (6) für eine Inselstation leicht vergleichen, und man erkennt, dafs (4) ungefähr $^1/_3$ von jenem Ausdruck (6) unter sonst gleichen Verhältnissen ist. Da aber die Küsten der Kontinente durchschnittlich langsamer abfallen als diejenigen der kleinen Inseln der Oceane, so wird der Bruchteil noch kleiner.

Für die Werte $h = 3500^m$, $\cot\nu = 48$ und $\Theta = 2{,}8$ folgt die Korrektion gleich rund $-g : 30000$.

§ 23. **Gebirgsstation.** Die übliche Reduktion befreit die beobachtete Beschleunigung zwar mehr oder weniger richtig von der Anziehung der Massen, welche sich über die Meeresfläche erheben, unterläfst aber völlig die Berücksichtigung der Anziehung der kondensierten Gebirgsmasse. Diese kann bei ausgedehnten Gebirgsmassen bedeutend werden. Als Beispiel betrachten wir einen im Verhältnis zur Breite sehr langen Gebirgsrücken mit dem Querprofil ABC, einem gleichschenkeligen Dreieck.

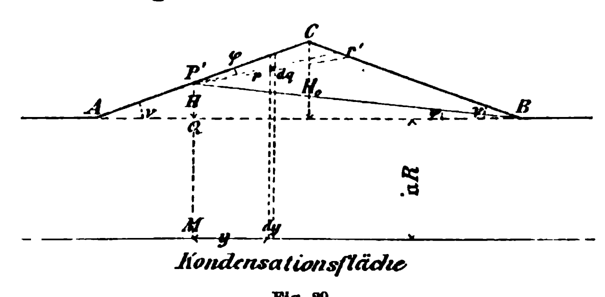


Fig. 29.

Vor der Kondensation ist die vertikale Anziehung auf einen im mittleren Querprofil liegenden Punkt P', Fig. 29, durch den Ausdruck

$$2k^2\,\Theta \int\!\!\int \cos\left(\frac{\pi}{2} + \nu - \varphi\right) d\varphi\, dr \tag{1}$$

gegeben, den man mit Rücksicht auf die veränderte Bedeutung von φ aus dem vorigen Paragraphen, Formel (1*) und folgende Zeilen, leicht entnimmt. Die Integration nach r ergiebt r', den Radiusvektor des Contours CBA in der durch φ bezeichneten Richtung.

Wenn der Endpunkt von r' auf CB liegt, d. h. φ sich zwischen null und $\nu + \psi$ befindet, so ist

$$r' = P'C \cdot \frac{\sin 2\nu}{\sin(2\nu - \varphi)} = \frac{2(H_0 - H)\cos\nu}{\sin(2\nu - \varphi)}\,. \tag{2}$$

Liegt dagegen der Endpunkt von r' auf BA, d. h. φ zwischen $\nu + \psi$ und π, so ist

$$r' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \nu - \varphi\right) = H\,. \tag{3}$$

Hiermit giebt (1):

$$2k^2\Theta\left\{2(H_0-H)\cos\nu\int_0^{\nu+\psi}\frac{\sin(\varphi-\nu)}{\sin(2\nu-\varphi)}d\varphi+H\int_{\nu+\psi}^{\pi}d\varphi\right\},$$

oder unter Ausführung des zweiten Integrals und mit Einführung von $\varphi'=2\nu-\varphi$ im ersten Integral:

$$2k^2\Theta\left\{H(\pi-\nu-\psi)-2(H_0-H)\cos\nu\int_{\nu-\psi}^{2\nu}\frac{\sin(\varphi'-\nu)}{\sin\varphi'}d\varphi'\right\}.$$

Durch Auflösung von $\sin(\varphi'-\nu)$ folgt ohne Schwierigkeit:

$$2k^2\Theta\left\{H(\pi-\nu-\psi)-2(H_0-H)\cos\nu\left[(\nu+\psi)\cos\nu-\sin\nu\log\text{nat}\frac{\sin 2\nu}{\sin(\nu-\psi)}\right]\right\}.\quad(4)$$

Führen wir endlich noch den mehrfach benutzten Näherungswert von g ein, so geht der vorstehende Ausdruck für die Vertikalanziehung des Gebirgsrückens auf P' über in:

$$\frac{3}{2}\frac{\Theta}{5{,}6}\left\{\frac{H}{R}\left(1-\frac{\nu+\psi}{\pi}\right)-\frac{H_0-H}{R}\left[2\frac{\nu+\psi}{\pi}\cos^2\nu-\frac{\sin 2\nu}{\pi}\log\text{nat}\frac{\sin 2\nu}{\sin(\nu-\psi)}\right]\right\}g.\,(5)$$

Die Formel zur Reduktion auf das Meeresniveau für horizontales Terrain berücksichtigt von der geschlungenen Parenthese nur das Hauptglied $H:R$; doch ist der Fehler, da man jene Formel eben nur bei kleinen Werten von ν anwenden und sonst strenger reduzieren wird, jedenfalls gering. Um dieses bei dem mit dem lognat behafteten Gliede einzusehen, beachten wir, dafs nach Fig. 29

$$\frac{\sin 2\nu}{\sin(\nu-\psi)}=\frac{P'B}{P'C}=\frac{P'B\,.\sin\nu}{H_0-H}$$

ist und erhalten:

$$\frac{H_0-H}{R}\frac{\sin 2\nu}{\pi}\log\text{nat}\frac{\sin 2\nu}{\sin(\nu-\psi)}= \qquad (6)$$

$$\frac{H_0}{R}\frac{\sin 2\nu}{\pi}\cdot\frac{H_0-H}{H_0}\left(\log\text{nat}\frac{P'B\,.\sin\nu}{H_0}+\log\text{nat}\frac{H_0}{H_0-H}\right).$$

Da H_0-H und $P'B$ mit wachsendem H abnehmen, falls nur das Profil ACB bei C stumpf ist, was hier lediglich in betracht kommt, so hat der mit dem ersten Logarithmus gebildete Teil vorstehenden Ausdrucks sein Maximum bei H gleich null; dasselbe ist gleich

$$\frac{H_0}{R}\frac{\sin 2\nu}{\pi}\log\text{nat}(2\cos\nu)\,. \qquad (7)$$

Da ferner allgemein $u\log\text{nat}\,u$ für $u=$ null und eins gleich null ist, für $u=\frac{1}{e}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, aber ein negatives Maximum hat, so erhält der mit dem zweiten Logarithmus gebildete Teil von (6) den Wert null für $H=H_0$ und für H gleich

null, einen Maximalwert aber für $H_0 : (H_0 - H) = e = 2,7 \ldots$. Dieses Maximum ist rund gleich

$$\frac{H_0}{R} \frac{\sin 2\nu}{2,7\,\pi}. \tag{8}$$

Nachdem hiermit bewiesen worden, dafs man, wie oben bemerkt, in (5) die geschlungene Parenthese durch $H : R$ bis auf meist unerhebliche Glieder der Ordnung $H_0 \sin\nu : R$ ersetzen kann, gehen wir zur Ableitung einer Formel für die vertikale Komponente der Anziehung des Gebirgsrückens nach seiner Kondensation über.

Legen wir in den Abständen y und $y + dy$ von $P'QM$, Fig. 29, parallele Vertikalebenen in die Längsrichtung des Prismas, so giebt die Kondensation der Masse des Prismenstreifens zwischen diesen beiden Ebenen in Bezug auf Q als vertikale Komponente der Anziehung mit Rücksicht auf S. 182 (1*):

$$2\,k^2\Theta\, \frac{\mathfrak{n}R\,(H + y\tan\nu)}{\mathfrak{n}^2R^2 + y^2}\, dy \tag{9}$$

falls die Schnittebenen zwischen A und C zu liegen kommen. Liegen dagegen die Schnittebenen zwischen C und B, so lautet der entsprechende Ausdruck:

$$2\,k^2\Theta\, \frac{\mathfrak{n}R\,(2H_0 - H - y\tan\nu)}{\mathfrak{n}^2R^2 + y^2}\, dy\,. \tag{10}$$

Die gesamte Vertikalanziehung folgt aus (9) und (10) durch Integration nach y von $y = -H\cot\nu$ bis $y = (H_0 - H)\cot\nu$ bezw. von hier bis $y = (2H_0 - H)\cot\nu$. Es ergiebt sich ohne Schwierigkeit unter Einführung des Näherungswertes von g:

$$+\frac{3}{2\pi}\frac{\Theta}{5,6}\frac{H_0}{R}\left\{\begin{matrix}\frac{n}{n_0}\operatorname{arc\,tan} n + \frac{2n_0-n}{n_0}\operatorname{arc\,tan}(2n_0-n) - 2\frac{n_0-n}{n_0}\operatorname{arc\,tan}(n_0-n) \\ + \frac{1}{n_0}\log\operatorname{nat}\frac{(n_0-n)^2+1}{\sqrt{(n^2+1)\,([2n_0-n]^2+1)}}\end{matrix}\right\} g\,, \tag{11}$$

worin gesetzt ist

$$n_0 = H_0 \cot\nu : \mathfrak{n}R\,,$$
$$n = H \cot\nu : \mathfrak{n}R\,.$$

Der Ausdruck (11) stellt die positive Korrektion des wie üblich, und zwar streng, aufs Meeresniveau reduzierten Beobachtungswertes von g dar. Dieselbe nimmt jedenfalls von oben nach unten ab.

Das Maximum bei $n = n_0$, wo P' sich auf dem Kamm des Gebirgsrückens befindet, wird gleich:

$$+\frac{3}{2\pi}\frac{\Theta}{5,6}\frac{H_0}{R}\left\{2\operatorname{arc\,tan} n_0 - \frac{1}{n_0}\log\operatorname{nat}(n_0^2+1)\right\} g\,. \tag{12}$$

Dagegen ist das Minimum bei $n =$ null, d. h. P' am Fufse des Gebirgsrückens, gleich:

$$+\frac{3}{2\pi}\frac{\Theta}{5,6}\frac{H_0}{R}\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{n_0}\log\text{nat}\frac{n_0^2+1}{\sqrt{4n_0^2+1}}\\+2\,\text{arc}\tan 2n_0-2\,\text{arc}\tan n_0\end{array}\right\}g\,. \qquad (13)$$

Wenn, wie in der Regel bei gröfseren Erhebungen, n_0 die Einheit übersteigt, so erscheint es vorteilhaft, in (12) und (13) von der Relation $\text{arc}\tan u + \text{arc}\tan\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$ Gebrauch zu machen. Diese Formeln gehen alsdann über in folgende:

$$+\frac{3}{2\pi}\frac{\Theta}{5,6}\frac{H_0}{R}\left\{\pi - 2\,\text{arc}\tan\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0}\log\text{nat}\,(n_0^2+1)\right\}g\,, \quad (12^*)$$

und

$$+\frac{3}{2\pi}\frac{\Theta}{5,6}\frac{H_0}{R}\left\{\frac{1}{n_0}\log\text{nat}\frac{n_0^2+1}{\sqrt{4n_0^2+1}} + 2\,\text{arc}\tan\frac{1}{n_0} - 2\,\text{arc}\tan\frac{1}{2n_0}\right\}g\,. (13^*)$$

Daraus ist ersichtlich, dafs selbst dann, wenn P' am Fufse eines grofsen Gebirgsrückens liegt, die Vertikalanziehung nach der Kondensation erheblich ausfällt.

Für $H_0 = 5000^m$, $\Theta = 2,8$, $\cot\nu = 60$ und $n_0 = 14$, welche Werte in roher Annäherung dem *Himalaya* entsprechen, ist die Korrektion des wie üblich reduzierten g rund gleich:

im Maximum (Kamm) $+ g : 2050$
im Minimum (Fufs) $+ g : 22000$.

Im ersten Falle beträgt sie nahezu soviel, als bei der Reduktion auf den Meeresspiegel für Lokalanziehung subtrahiert worden ist, d. i. nach Formel (5), in welcher $\psi = \nu$, $H = H_0$ zu setzen ist, $- g : 1700$, sodafs die totale Reduktion sich auf $- g : 10000$ stellt.

§ 24. **Hilfssatz: Für ein homogenes Sphäroid, welches von einem schwach abgeplatteten Rotationsellipsoid nur wenig abweicht, ist es erlaubt, die Entwicklung des Potentials aufserhalb nach negativen Potenzen des Radiusvektors für die praktischen Zwecke als bis zur Oberfläche konvergent zu betrachten.**

In § 15 S. 163 wurde die Gültigkeit vorstehenden Satzes angenommen, um die Zulässigkeit des nachfolgend entwickelten Kondensationsverfahrens darzuthun. Es ist jetzt der Beweis des Satzes zu liefern. Um uns direkt auf die irdischen Verhältnisse zu beziehen, denken wir uns zu dem homogenen Sphäroid von der Dichte Θ innerhalb der konzentrisch zum Schwerpunkt eingeschriebenen Kugel noch solche Massen in Form von konzentrischen Kugelschalen beigefügt, dafs die mittlere Dichte $\Theta_m = 5,6$ herauskommt. Für Θ setzen wir schliefslich 2,8. Das Sphäroid soll vom Rotationsellipsoid so abweichen, wie das Geoid vom Erdellipsoid. Die Abweichungen sind charakterisiert durch die maximale normale Erhebung und Senkung und die Lotabweichung. Wir nehmen an, dafs die in § 15 S. 163 angedeu-

teten Untersuchungen den Betrag der ersteren auf $< 500^m$, der letzteren auf $\leq 1{,}5'$ festgestellt haben. Für die Zwecke der Untersuchung reicht es aber aus, der Wellenform die Kreiskegelform zu substituieren, welche eher ungünstiger als günstiger wie jene ist. Als Maximum der Höhe eines Kreiskegels setzen wir 1000^m an, als konstantes Gefälle seiner Seitenfläche $1:5000$, entsprechend einer durchschnittlichen Lotablenkung von $^3/_4{}'$.

Wir betrachten zunächst einen Kegel, welcher auf das Ellipsoid aufgesetzt ist und untersuchen, wie sich für einen Punkt P' seiner Oberfläche Potential und Schwerkraft ändern, wenn wir denselben auf eine Parallelfläche zur Ellipsoidfläche im Abstand $\mathfrak{a}R$ nach innen kondensieren. Zur Veranschaulichung der Situation kann Fig. 29 S. 183 dienen, AB als Ellipsoidfläche gedacht.

Vor der Kondensation hat man als Vertikalanziehung des Kegels sehr nahe, wenn N die Höhe von P' über dem Ellipsoid bezeichnet:

$$\frac{3}{2}\,\frac{\Theta}{5{,}6}\,\frac{N}{R}\,g, \tag{1}$$

indem hier die Formel (3) § 16 S. 164 für eine horizontale Platte zur Anwendung gelangen darf, wie bei dem geringen Gefälle der Seitenflächen ohne weiteres klar ist, aber auch durch die Ungleichung (5) S. 168 verifiziert werden kann, wenn man darin im Maximum $h_1 = h_2 = h = 1000^m$, $h : a = 1 : 5000$ setzt.

Um die Anziehung nach erfolgter Kondensation auf bekannte Formeln zurückzuführen, substituieren wir ein Mal dem Kegel ein unendlich langes Prisma von dem Querschnitt, wie ihn Fig. 29 zeigt, ein zweites Mal einen Kegel, dessen Spitze P' und dessen Höhe gleich N ist, bei demselben Gefälle des Mantels wie für den grofsen Kegel. Offenbar erhalten wir so zwei Grenzwerte, die den richtigen Wert zwischen sich enthalten.

Für den Fall der Substitution des Prismas folgt nach Formel (11) S. 185 als Anziehung nach der Kondensation:

$$\frac{3}{2\pi}\,\frac{\Theta}{5{,}6}\,\frac{N_0}{R}\left\{\begin{array}{c}\frac{n}{n_0}\operatorname{arctan} n + \frac{2n_0-n}{n_0}\operatorname{arctan}(2n_0-n) - 2\frac{n_0-n}{n_0}\operatorname{arctan}(n_0-n)\\ + \frac{1}{n_0}\operatorname{lognat}\frac{(n_0-n)^2+1}{\sqrt{(n^2+1)([2n_0-n]^2+1)}}\end{array}\right\}g, \tag{2}$$

worin gesetzt ist:

$$\begin{aligned} n_0 &= N_0 : \mathfrak{a}R\tan\nu \\ n &= N : \mathfrak{a}R\tan\nu, \end{aligned} \tag{3}$$

wenn N_0 die Höhe des ganzen Kegels und $\tan\nu$ das Gefälle seines Mantels bezeichnet. Eigentlich ist $\mathfrak{a}R$ um N zu vergröfsern, da der angezogene Punkt bei der Kondensation nicht von P' nach Q verschoben wird, sondern in unveränderter Lage bleibt; aber für vorliegende Schätzung genügt $\mathfrak{a}R$ auch.

Wird der kleine Kegel substituiert, so ist nach S. 180 § 21 (3), wenn daselbst Θ für $\Theta - 1$ gesetzt und g eingeführt wird, die Anziehung:

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{5{,}6} \frac{N}{R} \left(1 - \frac{1}{n} \operatorname{lognat} [n + \sqrt{n^2 + 1}]\right) g. \tag{4}$$

Um vorstehende Ausdrücke zu deuten, mufs man beachten, dafs für die in betracht kommenden Werte $\mathfrak{a} R = 21000^m$ und $\tan \nu \leq 1 : 5000$ die Hilfsgröfsen n_0 und n die Einheit sicher überschreiten, wenn N_0 und N gröfser als $4{,}2^m$ werden.

Schliefsen wir nun zunächst Fälle aus, wo N_0, N oder auch $N_0 - N$ kleiner als 17^m ist, so wird n_0 sowohl wie n und $n_0 - n$ gröfser als 4. Dies findet statt bei Wellen gröfserer Erhebung für alle Lagen von P', welche nicht sehr nahe am Fufse oder an der Kuppe sich befinden. In Formel (2) kann man nun, weil n, $2n_0 - n$ und $n_0 - n$ grofse Zahlen bezeichnen, von nachstehender, für grofse u vorteilhaften Relation Gebrauch machen:

$$\operatorname{arctan} u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} - \dots .$$

Die Glieder in (2) mit $3u^3$ im Nenner für $u = n$, $2n_0 - n$ und $n_0 - n$ können aber wegbleiben, da sie weniger als 1 Milliontel g geben. Aufserdem heben sich die Glieder $1 : u$ für die 3 Werte von u zusammengenommen auf, und es bleibt für (2) nach naheliegender Reduktion:

$$\left\{\frac{3}{2} \frac{\Theta}{5{,}6} \frac{N}{R} + \frac{3}{2} \frac{\Theta}{5{,}6} \mathfrak{a} \tan \nu \cdot \frac{1}{\pi} \operatorname{lognat} \frac{(n_0 - n)^2 + 1}{\sqrt{(n^2 + 1)([2n_0 - n]^2 + 1)}}\right\} g, \tag{5}$$

während (4) in entsprechender Schreibweise lautet:

$$\left\{\frac{3}{2} \frac{\Theta}{5{,}6} \frac{N}{R} - \frac{3}{2} \frac{\Theta}{5{,}6} \mathfrak{a} \tan \nu \,.\, \operatorname{lognat} [n + \sqrt{n^2 + 1}]\right\} g. \tag{6}$$

Die Vergleichung von (1) mit den Grenzwerten (5) und (6) zeigt, dafs die zweiten Teile der letzteren Ausdrücke Grenzwerte der Änderung der Schwerkraft in P' infolge der Kondensation der kegelförmigen Erhebung bezeichnen. Diese Änderung ist aber für jede Lage von P' unerheblich. Setzt man zum Zwecke des Nachweises im zweiten Teile von (5) $n_0 - n = u$ und führt austatt n überall u ein, so wird der mit n veränderliche Faktor

$$\operatorname{lognat} \frac{(n_0 - n)^2 + 1}{\sqrt{(n^2 + 1)([2n_0 - n]^2 + 1)}} = \operatorname{lognat} \frac{u^2 + 1}{\sqrt{([n_0 + u]^2 + 1)([n_0 - u]^2 + 1)}}.$$

Die Differentiation nach u giebt den Differentialquotienten des letzten Ausdrucks gleich

$$\frac{2n_0^2 u (n_0^2 + 3 - u^2)}{(u^2 + 1)([n_0 + u]^2 + 1)([n_0 - u]^2 + 1)},$$

welcher für $u =$ null bis n_0 stets positiv ist. Hiernach genügt es, die äufsersten in betracht kommenden Werte von u ins Auge zu

fassen. Als solche nehmen wir null und n_0, da die Bedingung n_0, n und $n_0 - n > 4$ sich nicht auf den zweiten Teil von (5) bezieht. Für $u =$ null ist $n = n_0$ und der in (5) auftretende lognat gleich $-$ lognat $(n_0^2 + 1)$; für $u = n_0$ ist $n =$ null und derselbe lognat gleich lognat $(n_0^2 + 1) - \frac{1}{2}$ lognat $(4n_0^2 + 1)$. Der Wert des zweiten Teils von (5) liegt also für $\Theta = 2{,}8$, $\tan v = 1 : 5000$ und $N = 1000^m$ mit $n_0 = 240$ zwischen rund

$$-\frac{1}{500000}g \quad \text{und} \quad +\frac{1}{1000000}g. \tag{7}$$

Der zweite Teil von (6) wird am gröfsten für $n = n_0$, und zwar ist sein Wert unter denselben Voraussetzungen wie vorher alsdann gleich rund

$$-\frac{1}{300000}g. \tag{8}$$

Da nun für kleinere Werte von v und N die entsprechenden Werte der zweiten Glieder in (5) und (6) noch kleiner sind, so erkennt man, dafs für alle Lagen von P' auf der Seitenfläche einer kegelförmigen Erhebung, welche in Höhe von Fufs oder Kuppe um mehr als 17^m abstehen, die Kondensation nur einen unerheblichen Effekt auf die Schwerkraft hat. Dasselbe gilt aber auch für Lagen von P' bis zum Fufse und zur Kuppe; wenn dieses noch eines Beweises bedürfte, so würde es ausreichen für den Fufs und die Kuppe die Gültigkeit zu zeigen, was wir aber unterlassen können.

Vorstehendes läfst die Unerheblichkeit des Kondensationseffekts einer kegelförmigen bezw. wellenförmigen Erhebung der eingangs angegebenen Art auf die Gröfse der Schwerkraft für Punkte in der Nähe der Sphäroidoberfläche deutlich erkennen.

Für das Potential bedarf es keiner längeren Rechnung; hier können wir sogleich an die Ergebnisse in § 7 S. 149, insbesondere an Formel (4) S. 151 anschliefsen. Dieselbe giebt die Änderung des Potentials, welche durch Kondensation einer homogenen, unendlich dünnen Scheibe der Kugelfläche vom Radius r auf die Kugelfläche vom Radius r_i entsteht, wobei die Ausdehnung der Platte so genommen ist, dafs der Kondensationseffekt ein Maximum wird. Betrachten wir nun das dem Sphäroid zu grunde liegende Ellipsoid als Kugel, was für den Zweck der Ermittelung des Kondensationseffektes ausreicht, und umschliefsen wir diese Kugeloberfläche konzentrisch durch eine zweite aufserhalb im Abstand von 500^m, so enthalten beide alle zu kondensierenden, wellenförmigen Erhebungen zwischen sich, und die erwähnte Formel (4) stellt den überhaupt möglichen maximalen Betrag des Effektes dar, wenn für $r - r_i$ gesetzt wird $\mathfrak{a}R$ und für dr der Betrag von 500^m. Das kleine Glied $E_r : r'$ in (4) dürfen wir vernachlässigen. Es folgt

$$2\pi k^2 \Theta \mathfrak{a} R \, . \, 500,$$

woraus nach *Bruns'* Theorem S. 148 durch Division mit $g = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ als maximale Verschiebung der Flächen konstanten Potentials in der Nähe der Oberfläche sich rund $^5/_4{}^m$ ergeben. Diese Verschiebung entspricht einem Fehler in dem Betrage der Schwerkraft aufserhalb von etwa $^1/_{2500000}$ desselben; sie ist also ganz unerheblich.

Bisher wurden nur Erhebungen über das Ellipsoid betrachtet. Dafs Senkungen kein wesentlich verschiedenes Resultat geben werden, ist unmittelbar klar. Es bleibt nur das eine Bedenken, ob die Entwicklung nach negativen Potenzen des Radiusvektors noch genügt für Punkte P', welche in einer Senkung liegen: zwar aufserhalb der Oberfläche des Sphäroids, aber doch innerhalb derjenigen des Ellipsoids. Um dieses Bedenken zu beseitigen, denken wir uns innerhalb des Ellipsoids ein konzentrisches, koaxiales Ellipsoid, welches die Senkungen gerade noch ausschliefst, dessen Axen also nach unseren Annahmen um eine Gröfse von etwa 500^m kleiner sind, als diejenigen des ursprünglichen Ellipsoids. Die Oberflächen beider Ellipsoide können hier als Parallelflächen angesehen werden. Wir kondensieren nun die ganze Schicht aufserhalb des inneren Ellipsoids.

Auf einen Punkt P' der Sphäroidfläche in der Senkung wirkt diese Schicht wegen des geringen Gefälles der Senkungsfläche, abgesehen von der Krümmung der Ellipsoidoberfläche, in Richtung der Vertikalen anziehend wie eine unterhalb gelegene, horizontale, unendliche Platte von der Stärke $P'Q'$, Fig. 30, wobei $P'Q' = N_0 - N$ ist. Durch die Kondensation ändert sich hieran aber nichts. Denn ohne die Senkung würde die Schicht zwischen den Ellipsoidoberflächen nach der Kondensation noch anziehen wie eine horizontale, unendliche Platte von der Stärke N_0. Die durch die Senkung abgeschnittenen Massen ziehen zufolge obiger Untersuchungen nach der Kondensation in vertikaler Richtung beinahe an, wie eine Platte von der Stärke N; da diese Anziehung abgeht, so bleibt die Anziehung einer Platte von der Stärke $N_0 - N$, wie vor der Kondensation. Hat demnach diese letztere auf die Schwerkraft keinen erheblichen Einflufs, so ist ihr Einflufs überhaupt als unerheblich anzusehen, da auch der Kondensationseffekt bezüglich des Potentials verschwindet, was die obigen Untersuchungen ohne weiteres erkennen lassen.

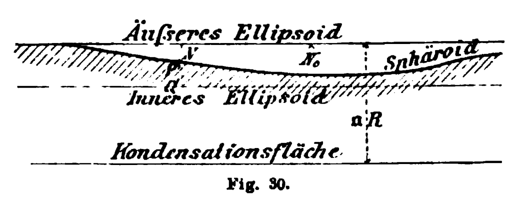


Fig. 30.

Für das Sphäroid mit kondensierter Oberflächenschicht ist aber die Entwicklung nach negativen Potenzen des Radiusvektors bis zur Oberfläche konvergent; sie ist es nach vorstehenden Untersuchungen also auch in hinreichender Annäherung für die Massen des Sphäroids in der ursprünglichen Lagerung.

§ 25. Ältere Pendelbeobachtungen zur Bestimmung der Intensität der Schwere. Wir gehen nun dazu über, auf das vorhandene Beobachtungsmaterial die Kondensationstheorie anzuwenden, um dann die Abplattung der Meeresfläche abzuleiten.

Die epochemachenden Messungen von *Kater*, *Sabine*, *Foster* u. a. (vergl. S. 85 Anm.) wurden mit sehr einfach konstruierten, invariablen Pendeln ausgeführt, die man mittelst einer Schneide auf einer Achatplatte schwingen liefs, welche auf einem stabilen Gerüst an einer Wand oder auf einem breitbasierten, schweren und beschwerten Metallstativ befestigt war.*) Wir geben die Resultate dieser Messungen mit Benutzung von *Bailys* Arbeit in den *Memoirs of the Royal Astronomical Society* VII 1834. *Bailys* Reduktionen der Beobachtungen sind adoptiert, aber nicht seine Verkuppelung der Reihen verschiedener Beobachter, sodafs die im Folgenden gegebenen Schwingungszahlen z. T. mit *Bailys* Haupttabelle S. 96—97 a. a. O. differieren.

1. *Kater* 1818—19 mit einem Pendel (bestehend aus einer flachen Stange mit Linse), welches auf einer Achatplatte auf einem schweren, gufseisernen Rahmen schwang. Letzterer war über der an einer Wand aufgestellten Uhr (an deren verlängerten Rückwand) befestigt. Publiziert in *Phil. Transact.* 1819. Die Stationen liegen nahe bei Stationen der *Trigonometrical Survey*. In *Unst* beobachtete *Kater* dicht bei dem Orte, wo früher (um 1808) *Biot* beobachtet hatte.

Die Beobachtungen begannen in *London* und endeten, abgesehen von *Shanklin Farm*, wo zuletzt beobachtet wurde, in *London*. Beide Ergebnisse für *London* stimmen auf 0,03 Schwingungen. Ob *Kater* hier das Konsol und die Achatplatte des oben beschriebenen Apparates, oder des gleich zu erwähnenden Reversionspendels benutzte, ist nicht angegeben; vergl. dazu Nr. 6 weiterhin.

In der folgenden Tabelle giebt die zweite Kolumne die geogr. Breite, die dritte die Meereshöhe H in Metern, die vierte die korrigierten täglichen Schwingungszahlen nach *Baily*, die fünfte die Länge des Sekundenpendels in Metern, die sechste die Korrektion an den Werten der fünften Kolumne, in Einheiten der sechsten Decimalstelle, wenn nicht nach *Bouguer-Young* mit $2HF:R$, sondern einfach mit $2H:R$ auf den Meeresspiegel reduziert wird, als wäre das Terrain über letzterem bis zur Station nicht vorhanden. Die siebente Kolumne giebt den Faktor F, der zu den Werten der fünften Kolumne gehört. F wurde nach *Young* für ebenes Terrain in der Regel zu 0,6, bei umgebenden Hügeln etwas gröfser angenommen.

*) Ein Abrifs der älteren und neueren Beobachtungsmethoden findet sich in *Clarkes Geodesy* S. 323—339. Vergl. auch *Wüllner, Experimentalphysik*, Bd. 1 1882 S. 124 u. ff.



1	2	3	4	5	6	7
Shanklin Farm bei Dunnose, I. Wight	50° 37′ 24″	74^m	86061,77	0,994042	+ 7	0,7
London	51 31 8	25	065,54	4129	+ 3	0,66
Arbury Hill	52 12 55	225	069,00	4209	+21	0,7
Clifton	53 27 43	104	072,79	4297	+10	0,68
Leith	55 58 41	21	083,29	4539	+ 2	0,66
Portsoy	57 40 59	29	089,96	4693	+ 4	0,6
Unst...............	60 45 28	9	100,61	4939	+ 1	0,5

Gemeinsame Korrektion nach der
weiterhin folgenden Ausgleichung: + 14.

Die Meereshöhe für *London* hat sich später, vergl. Nr. 6, genauer zu 28^m ergeben; die Differenz von 3^m mit dem oben angenommenen Werte hat aber auf die Reduktion keinen bemerkenswerten Einflufs.

Bei der Berechnung der 5. Kolumne aus der 4. wurde für *London*, Mr. *Brownes* Haus (Portland Place), einstweilen der Wert angesetzt, zu dem *Kater* mittelst des von ihm angegebenen Reversionspendels gelangte. Derselbe fand, *Phil. Transact.* 1819 p. 415:

$$\mathfrak{L}_0 = 39{,}13929 \text{ Zoll engl.},$$

wobei die geogr. Breite nach der trigonometrischen Vermessung wie oben angegeben wird. Mit Rücksicht auf den (S. 86 angegebenen) Verwandlungslogarithmus von engl. Zollen in Meter:

$$8{,}4048298 - 10$$

folgt hieraus $\mathfrak{L}_0 = 0{,}9941289^m$.

Gehört nun zu $\mathfrak{L}_0$ die Schwingungszahl n_0, zu einem beliebigen $\mathfrak{L}$ aber n, so ist zur Berechnung von $\mathfrak{L}$ (vergl. S. 86) anzusetzen:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^2.$$

Der *Kater*sche Wert von $\mathfrak{L}_0$ kann übrigens nicht die Sicherheit neuerer absoluter Bestimmungen beanspruchen; jedenfalls würde er mit Rücksicht auf *Bailys* Versuche, *Phil. Transact.* 1832, einer Umrechnung wegen der Ungleichheit des Luftmitschwingens in beiden Pendellagen infolge der unsymmetrischen Form des Pendels bedürfen. Die Ausgleichung aller Beobachtungen ergab weiterhin für dieses $\mathfrak{L}_0$ als Korrektion + 0,011^{mm}, wovon aber ein Teil Mafsstabsreduktion ist.

2. *Goldingham* 1820—21 mit einem invar. *Kater*schen Pendel an der Wand; *Phil. Transact.* 1822 p. 127—170. In *London* beobachtete vor der Absendung des Pendels *Kater* im Juli 1820 — ob auf der Achatplatte des Apparates oder seiner eigenen, ist nicht angegeben. Zwei grofse Reihen in *Madras* stimmen im Mittelwert auf 0,05 Schwingungen überein, aber es fehlt die Rückkehr des Pendels nach *London*.

Die Beobachtung in *Gaunsah Lout* ist später gemacht und nicht publiziert. Wir folgen bei der Angabe der Schwingungszahlen wie oben *Baily*; überhaupt gelten die zu der Aufstellung der vorigen Tabelle gegebenen Bemerkungen auch hier sowie weiterhin, wenn nichts Besonderes bemerkt ist.

1	2	3	4	5	6	7
Gaunsah Lout Westküste v. Sumatra	0° 1′ 49″	?	86173,36	0,991063	+ 0	·
Madras Observator.	13 4 9	8^m	179,06	1194	+ 1	0,66
London........	51 31 8	·	306,56	4129	+ 3	·

Gemeinsame Korrektion — 8.

Die Meereshöhe auf *Gaunsah Lout*, einem Eiland, ist mangels anderer Angabe zu null angenommen. Die gemeinsame Korrektion ist als Mittel der Korrektionen für *London* und *Madras* abgeleitet. Es wird nämlich nach der weiterhin folgenden Ausgleichung erhalten für *London* 0,994140, für *Madras* nach Nr. 19 0,991168; die Verbesserungen der Angaben der 5. Kolumne sind also bezw. + 11 und — 26, im Mittel — 8 Einheiten der 6. Decimalstelle.

3. *Hall*, unterstützt von *Foster*, 1820—23 mit einem invar. *Kater*schen Pendel an der Wand; *Phil. Transact.* 1823 p. 211—288. Die Beobachtungen begannen und endeten in *London*; wahrscheinlich infolge eines Unfalls auf *San Blas* differieren die Ergebnisse für *London* um 0,95 Schwingungen. Ob daselbst auf der Achatplatte des Apparats oder der des *Kater*schen Reversionspendels beobachtet wurde, ist nicht bemerkt. Je zwei in *San Blas* und *Rio* angestellte Reihen von *Hall* und *Foster* differieren um 1,15 bezw. 0,15 Schwingungen.

1	2	3	4	5	6	7
Galapagos	+ 0° 32′ 19″	4^m	86107,64	0,991014	+ 0	0,66
San Blas de California	+ 21 32 24	35	131,87	1572	+ 4	0,6
Rio Janeiro	— 22 55 22	22	137,96	1712	+ 2	0,6
London.........	+ 51 31 8	·	242,87	4129	+ 3	·

Gemeinsame Korrektion + 5.

4. *Brisbane* 1822 mit einem invar. *Kater*schen Pendel an der Wand; *Phil. Transact.* 1823 p. 308—325. In *London* beobachteten *Kater*, *Brisbane* und *Rümker* vor Absendung des Pendels; nachher ist dort nicht wieder beobachtet. In *Paris* beobachteten *Brisbane* und *Dunlop* je eine Reihe mit 0,65 Schwingungen Differenz. Welchen Wert *Baily* bei *Paramatta* für *F* annimmt, ist nicht zu ersehen — *Brisbane* reduziert überhaupt nicht aufs Meeresniveau; wir haben für

F einen plausiblen Wert vorausgesetzt, der jedenfalls zur Berechnung der Korrektion in der 6. Kolumne genügt.

1	2	3	4	5	6	7
Paramatta	— 33° 48′ 43″	23ᵐ	86024,74	0,992553	+ 2	0,66
London........	+ 51 31 8	·	093,00	4129	+ 3	·

Gemeinsame Korrektion + 11.

Die gemeinsame Korrektion ergiebt sich durch Berücksichtigung des Ausgleichungsergebnisses 0,994140 für *London*.

5. *Sabine* 1819—20 mit 2 Pendeln; *Phil. Transact.* 1821 p. 163 bis 190. Diese Beobachtungen hat *Baily* nicht aufgeführt; auch *Sabine* selbst verwendet sie nicht in seiner unter Nr. 6 zu erwähnenden Schrift. Jedoch verdienen nur die wenigen Beobachtungen in *Brassa* und *Hare Island*, die a. a. O. ebenfalls mitgetheilt sind, dieses Schicksal. Der angewandte Apparat, welcher unter *Katers* Aufsicht entstanden war, unterscheidet sich insofern von dem üblichen Pendelapparat, als die Pendel zugleich Uhrpendel waren; die Uhr wurde durch ein starkes Holzstativ gehalten. Mit diesen Uhrpendeln hat *Sabine* auch auf seiner grofsen Reise, vergl. Nr. 6, nebenbei beobachtet, ohne die Resultate weiter zu benutzen. Dieselben sind weniger genau als diejenigen unabhängiger Pendel, mit denen sie bis zu zwei Schwingungen differieren.

In *London* wurde in einem Nebenzimmer des früheren Beobachtungsraumes beobachtet (wohl auf der Diele); in *Melville* auf einem, einige Zoll in den gefrornen Boden versenkten Holzlager, an welchem das Stativ befestigt war. Die Beobachtungen in *London* vor und nach der Reise differieren um 0,23 bezw. 0,03 Schwingungen. Obwohl in *London* und *Melville* die Einzelwerte der Beobachtungen einer Reihe gut übereinstimmen, weichen doch die 4 Differenzen *M.-Lo.*, welche den 4 Kombinationen der 2 Pendel und der 2 Uhrwerke entsprechen, bis zu 1,57 Schwingungen von einander ab.

In der 4. Kolumne der folgenden Tabelle sind die Mittel der den 4 Kombinationen entsprechenden Schwingungszahlen für jeden Ort nach S. 188 aufgeführt. Wegen des Mitschwingens der Luft ist nicht korrigiert; indessen ist der Einflufs auf den Unterschied *M.-Lo.* unerheblich, da der Barometerstand an beiden Orten bis auf 0,3 Zoll, die Lufttemperatur bis auf 2° F. im Mittel übereinstimmten. Die Reduktionen aufs Meeresniveau haben wir nachträglich mit $F = 0,6$ bewirkt.

1	2	3	4	5	6	7
London	51° 31′ 8″	·	86455,51	0,994129	+ 3	·
Melville	74 47 12	10ᵐ	86530,32	5850	+ 1	0,6

Gemeinsame Korrektion + 11.

Die gemeinsame Korrektion bestimmt sich durch den Ausgleichungswert für *London.*

6. *Sabine* 1822—24 mit den beiden invar. *Kater*schen Pendeln Nr. 3 und 4; *An Account of Experiments to determine the Figure of the Earth,* 1825. *Sabine* beobachtete 1821 zuerst in *London,* Mr. *Browne*s Haus; dann 1822 auf den Südstationen *St. Thomas—New York,* wobei die *Kater*sche Aufstellung an der Wand benutzt wurde. 1823 wurde zunächst wieder in *London* beobachtet, dann auf den Stationen des Polarkreises, wobei ein 200 Pfund schweres, gufseisernes Stativ von der Form eines gleichseitigen Dreiecks mit $6^1/_2$ Fufs Seite in der Vorderansicht zur Aufhängung des Pendels diente. Die Uhr stand innerhalb des Stativs ganz isoliert auf einem Holzdreifufs. Zuletzt, 1823—24, wurde nochmals in *London* beobachtet. Die Differenz beider Pendel war in *London* 1821 11,25 Schwingungen; 1823 11,20 und 9,70; 1823—24 9,75; auf den Südstationen 9,39 bis 10,00, im Mittel 9,68; auf den Polarstationen 9,27 bis 9,74, im Mittel 9,51. Die gröfseren Differenzen in *London* 1821 und 1823 zu Anfang erklärten sich dadurch, dafs in *London* mit *Kater*s Achatplatte beobachtet worden war; als diejenigen des Apparats benutzt wurden, ging die Differenz 1823 auf 9,70 herab. Die Ergebnisse in *London* 1823 und 1823—24 stimmen für beide Pendel bis auf 0,1 Schwingungen überein. Die folgende Tabelle giebt wieder nach *Baily* die Schwingungszahlen, u. s. f., vergl. Nr. 1.

1	2	3	4	5	6	7
St. Thomas, Guineainseln	+ 0° 24′ 41″	6ᵐ	86032,97	0,991120	+ 1	0,6
Maranham	— 2 31 43	23	023,33	0898	+ 3	„
Ascension	— 7 55 48	5	036,69	1205	+ 1	„
Sierra Leone	+ 8 29 28	58	031,67	1090	+ 7	„
Trinidad	+ 10 38 56	6	030,91	1072	+ 1	„
Bahia	— 12 59 21	65	036,51	1201	+ 8	„
Jamaica	+ 17 56 7	3	048,74	1483	+ 0	„
New York	+ 40 42 43	20	121,94	3171	+ 2	„
London	+ 51 31 8	28	163,48	4129	+ 3	„
Drontheim	+ 63 25 54	37	202,31	5025	+ 4	„
Hammerfest	+ 70 40 5	9	224,75	5543	+ 1	„
Grönland	+ 74 32 19	10	234,31	5764	+ 1	„
Spitzbergen	+ 79 49 58	6	246,80	6053	+ 1	„

Gemeinsame Korrektion + 14.

7. *Foster* 1824—25 mit dem Pendel Nr. 3 von *Sabine*; *Phil. Transact.* 1826 I p. 1—70. Es wurde mit dem Dreifufs beobachtet, der in *Greenwich* auf dem soliden Steinflur stand. Hier ist vor und nach der Reise beobachtet, mit 0,2 Schwingungen Differenz. Wir geben die Schwingungszahlen nach *Baily*, ohne diesem im Anschlufs der Beobachtungen an die früher mit Pendel Nr. 3 erhaltenen zu folgen; denn da *Foster* neue Achatplatten anwandte, scheint uns ein Anschlufs an die älteren Beobachtungen unzulässig.

1	2	3	4	5	6	7
Greenwich	51° 28′ 40″	55^m	86158,40	0,994119	+ 6	0,6
Port Bowen ...	73 13 39	37	229,25	5754	+ 4	0,66

Gemeinsame Korrektion + 24.

Die Höhe ist für *Greenwich* um 7^m zu grofs, vergl. Nr. 11 weiterhin; welchen Wert *Baily* angewandt hat, ist nicht zu ersehen. Jedenfalls ist der Einflufs unerheblich. Die gemeinsame Korrektion ergiebt sich mit Rücksicht auf den Ausgleichungswert für *Greenwich*.

8. *Fallows* 1825—28 mit dem Pendel Nr. 4 von *Sabine*; *Phil. Transact.* 1830 p. 153—175. Im Juli und August 1825 beobachtete *Ronald* in *London*, November 1828 *Fallows* auf dem *Kap*; nachher ist nicht wieder in *London* beobachtet. Für *London* ist nach *Baily* das Mittel aus *Sabines* Angabe mit demselben Pendel und *Ronalds* Wert angesetzt; beide weichen übrigens nur 0,02 Schwingungen von einander ab. Auf dem *Kap* wurden 3 Reihen von 3 Beobachtern genommen; sie differieren um 0,15 Schwingungen im Maximum.

Die geogr. Breite für den Beobachtungsort nahe bei dem Observatorium auf dem *Kap* giebt *Fallows* vorläufig zu — 33° 55′ 56″ an; unter der Annahme, dafs seit 1830 das Observatorium nicht verlegt ist, setzten wir daher die Breite desselben nach neueren Bestimmungen an. *F* ist bei *Baily* fürs *Kap* nicht angegeben; wir setzten dafür 0,66: sein Betrag hat nur geringen Einflufs.

1	2	3	4	5	6	7
Kap der guten Hoffnung	— 33° 56′ 3″	10^m	86101,64	0,992587	+ 1	0,66
London........	+ 51 31 8	·	168,50	4129	+ 3	·

Gemeinsame Korrektion + 2.

9. *Sabine* 1827 mit den Pendeln Nr. 7 und 8; *Phil. Transact.* 1828 p. 35—77. Die Aufhängung erfolgte wie früher mittelst eines Dreifufses, in *Paris* im *Observatoire royal, Salle de la Méridienne*, wo auch *Biot* beobachtet hatte. Es wurde erst in *Paris*, dann in *London* beobachtet — nicht nochmals in *Paris*. Beide Pendel differieren im

Mittelwert um 0,05 Schwingungen, die 13 Einzelwerte für jedes Pendel bis zu 1 Schwingung. Wir geben die Schwingungszahlen nach *Baily*; mit welchen Meereshöhen und Koefficienten *F* derselbe reduziert hat, ist nicht zu ersehen.

1	2	4	5
Paris	48° 50′ 14″	85930,86	0,993860
London ...	51 31 8	85942,49	4129

Gemeinsame Korrektion + 17.

10. *Sabine* 1828—29 mit dem Pendel Nr. 12; *Phil. Transact.* 1829 p. 83—102 und 1830 p. 239—255. Es wurde in *London* und *Greenwich*, dann nach Revision der Schneide wieder in *London* und *Greenwich*, sodann in *Altona* und endlich nochmals in *Greenwich* beobachtet. Die Beobachtung in *Altona* erfolgte an einem Wandkonsol mit besonderer Achatplatte, das später von *C. F. W. Peters* benutzt wurde (Nr. 21); über die Beobachtungsweise in *Greenwich* und *London* ist nichts mitgetheilt. Die wiederholten Beobachtungen stimmen im Endwert bis auf 0,22 Schwingungen. Wir geben die Schwingungszahlen nach *Baily* mit der Modifikation, dafs wir seine Angaben S. 88—89 unter Nr. 9 und 10 für *Greenwich* und *London*, als wesentlich auf denselben Beobachtungen beruhend, zusammenfassen. Welche Werte der Meereshöhen und Koefficienten *F Baily* zur Reduktion angewandt hat, ist auch hier nicht zu ersehen.

1	2	4	5
Greenwich	51° 28′ 40″	85970,30	0,994145
London ...	51 31 8	85969,59	4129
Altona ...	53 32 45	85978,54	4336

Gemeinsame Korrektion + 5.

11. *Foster* 1828—31, nach *Bailys* Bearbeitung in den *Memoirs of the Royal Astronom. Soc.* VII 1834 p. 81. Es wurden 2 invariable *Kater*sche Pendel von Messing, Nr. 10 und 11, und 2 unsymmetrische *Kater*sche Reversionspendel von Eisen bezw. Kupfer benutzt; in folgender Tabelle giebt die Zahl in Klammer hinter der Schwingungszahl, welche für *London* auf 86400 reduziert ist, die Anzahl der benutzten Schneiden, wobei die Reversionspendel als je 2 invariable behandelt sind. *Foster* benutzte für jedes Pendel stets dieselbe Achatplatte, deren beinahe jedes Pendel seine besondere hatte. Auch wandte er 2 breitbasierte Eisen-Stative an, je eines für eine Pendel-Gruppe. Die Uhr hing an einem besonderen Holz-Stativ. *Foster* begann mit *London* und *Greenwich*; indessen wurde am ersteren Orte, Mr. *Brownes* Haus (51° 31′ 8″ Breite, 28^m Höhe), nicht auf dem Stativ

beobachtet, sondern an der Wand, wo 1818 *Kater* mit dem Reversionspendel beobachtet hatte. Auch kamen daselbst nur 2 Pendel zur Anwendung. Die *Greenwich*er Beobachtungen sind nach *Baily* p. 45 nicht einwurfsfrei, vielleicht infolge eines Irrtums bei der Pendelaufhängung; dieselben sind daher besser nicht zu benutzen. Obwohl wir dies gethan haben, sind sie doch von uns wenigstens in nachfolgende Tabelle mit aufgenommen worden, weil die Differenz der beiden Pendel 103,08 Schwingungen vom Mittelwert der Differenz auf allen Stationen 103,44 nicht sehr abweicht. *Baily* beobachtete nach der Rückkehr der Apparate, da *Foster* auf der Reise verunglückte, nochmals in *London* in seinem Hause (51°31′26″ Breite, 31^m Höhe); die Ergebnisse stimmen bei den beiden vorher benutzten Pendeln auf 0,7 Schwingungen im Mittel. Im allgemeinen differieren die Pendel auf verschiedenen Stationen, *Baily* p. 71, bis zu 2,5 Schwingungen täglich.

Die geogr. Breite des *Kap d. g. H.* setzt *Baily* gleich — 33°54′37″; da aber im Observatorium beobachtet ist, nehmen wir — 33°56′3″, vergl. Nr. 8.

1	2	3	4	5	6	7
Para	— 1°27′ 0″	12^m	86260,61 (6)	0,990924	+ 1	0,666
Maranham	— 2 31 35	24	258,74 (4)	0881	+ 2	„
Fernando do Noronha	— 3 50 0	11	271,20 (2)	1167	+ 1	„
Ascension	— 7 55 23	5	272,25 (6)	1192	+ 0	„
Porto Bello	+ 9 32 30	4	272,01 (2)	1186	+ 0	„
Trinidad	+10 38 55	6	267,24 (6)	1077	+ 1	„
St. Helena	—15 56 7	9	288,29 (4)	1560	+ 1	„
Kap d. g. H.	—33 56 3	10	331,33 (6)	2549	+ 1	„
Montevideo	—34 54 26	4	334,36 (2)	2619	+ 0	„
[Greenwich]	+51 28 40	48	398,90 (2)	[4104]	+ 5	„
London	+51 31 17	30	400,00 (6)	4129	+ 3	„
Staten Island	—54 46 23	5	415,22 (6)	4479	+ 0	„
Kap Horn	—55 51 20	12	417,98 (2)	4543	+ 1	„
Süd Shetland Inseln	—62 56 11	7	444,52 (6)	5154	+ 1	„

Gemeinsame Korrektion + 22.

12. *Lütke* 1826—29 mit *Halls* Pendel. Wir haben im Folgenden die Angaben von *Borenius*, vergl. die S. 87 angegebene Schrift, benutzt. Sie weichen etwas von denjenigen *Bailys* ab, entsprechen aber der neueren Angabe *Lütkes* im 3. Bd. der *Mémoires prés. à l'Académie imp. de St. Pétersbourg* 1837. In *Kandalaks* ist nicht von *Lütke*, sondern von *Reinecke* beobachtet. Die Schwingungszahlen sind so redu-

ziert, dafs sie *Fosters* Angabe für *St. Helena* entsprechen; ebenso wurde von uns vorläufig $\mathfrak{L}$ für diesen Ort adoptiert. Die geogr. Breite desselben ist nach *Baily* angesetzt. Die zur Reduktion aufs Meeresniveau angewandten Werte der Meereshöhe und von F sind uns nicht bekannt.

1	2	4	5
Ualan, Carolinen I..	+ 5° 21′ 16″	86275,64	0,991269
Guam, Ladronen I..	+13 26 18	280,85	1389
St. Helena.....	−15 54 59	288,29	1560
Bonin Insel....	+27 4 9	322,10	2338
Valparaiso.....	−33 2 30	328,44	2483
Greenwich.....	+51 28 40	399,25	4112
Petropawlowsk.	+53 0 59	408,87	4333
Sitka..........	+57 3 0	420,62	4604
Petersburg.....	+59 56 31	432,39	4875
Kandalaks.....	+67 7 43	452,55	5339

Gemeinsame Korrektion + 17.

13. *Parrot* 1829—33, mit einem 24 Zoll langen invar. Pendel auf einer Chalcedonplatte an der Wand; nach *Stebnitzki*, *Astronom. Nachr.* 1882 Bd. 103 Nr. 2472 S. 375, mitgeteilt. Diese Beobachtungen, welche *Baily* noch nicht zugänglich sein konnten, verdienen Vertrauen. In *Dorpat* wurde vor und nach der Reise beobachtet; wir haben das $\mathfrak{L}$ für diesen Ort einstweilen nach *Sawitsch*, vergleiche Nr. 17[a] weiterhin, angesetzt.

Die Koefficienten F haben wir bei *Tiflis* und *Ararat* rückwärts aus den a. a. O. ebenfalls mitgeteilten Schwingungszahlen ohne Reduktion aufs Meeresniveau unter Voraussetzung der Benutzung von *Bouguers* Formel berechnet. Bei *Dorpat* ist F von uns zu 0,625 angenommen; hier scheint ein Druckfehler vorzuliegen, da die Reduktion aufs Meeresniveau hier nur im Betrage von + 0,25 anstatt + 0,50 Schwingungen eingeführt ist; dadurch entsteht 0,005^{mm} Unsicherheit in $\mathfrak{L}$ — wir haben die fürs Meeresniveau angegebene Zahl beibehalten.

1	2	3	4	5	6	7
Ararat, Kloster des heiligen Jakob.......	39° 46′ 12″	1883^m	110819,67	0,992901	+ 225	0,62
Tiflis...........	41 41 27	435	834,38	3165	+ 56	0,59
Dorpat.........	58 22 51	47	921,47	4726	+ 6	0,625

Gemeinsame Korrektion + 21.

14. *Freycinet* 1817—20 mit 3 Pendeln, davon das eine (Nr. 3), wie invariable *Kater*sche, mit flacher, zwei andere mit runder Stange; *Voyage autour du monde entrepris par l'ordre du Roi*, *Observations du Pendule*, *Paris* 1826 p. 29. Vergl. auch *Phil. Transact.* 1828 p. 38. Auf den *Falklandinseln* wurde nur 1 Pendel beobachtet. Nach *Baily* differieren die Unterschiede der Ergebnisse der 3 Pendel für die verschiedenen Stationen bis zu 6,5 Schwingungen täglich; doch meint er, dafs die Anwendung der 3 Pendel die Fehler eliminiere. Er reduziert soweit nötig; für die *Falklandinseln* ist die Reduktion wegen der runden Form der Pendelstange etwas zweifelhaft. Hierauf kommt jedoch wegen der Unsicherheit der Messungen wenig an, ebenso wie auf den Umstand, dafs uns die im Original angegebenen Meereshöhen und Koefficienten *F* fehlen. Für *Paris* haben wir $\mathfrak{C}$ vorläufig nach *Sabine*, Nr. 9, angesetzt.

1	2	4	5
Rawak	— 0° 1′ 34″	86279,35	0,990948
Guam	+13 27 51	300,86	1442
Isle de France Port Louis	—20 9 56	315,97	1790
Mauwi Sandw. I.	+20 52 7	315,41	1776
Rio Janeiro..........	—22 55 13	311,39	1684
Port Jackson	—33 51 34	351,96	2617
Kap d. g. H.	—33 55 15	349,48	2560
Paris	+48 50 14	406,00	3860
Falkland Inseln French Bay	—51 35 18	414,64	4059

Gemeinsame Korrektion + 18.

15. *Duperrey* 1822—25 mit *Freycinets* Pendeln Nr. 1 und 3; publiziert (nach Angabe *Bailys*) in den *Connaissance des temps* 1830. Auf *Ascension* und *Isle de France* schwang nur Nr. 3. Nach *Baily* differieren die Unterschiede der Pendelergebnisse bis zu 2,0 Schwingungen. Für *Paris* haben wir $\mathfrak{C}$ vorläufig nach *Sabine* angesetzt; Angaben für Meereshöhe und Koefficient *F* fehlen uns.

1	2	4	5
Ascension	— 7°55′48″	90132,96	0,991182
Isle de France	—20 9 23	159,63	1768
Port Jackson	—33 51 40	196,55	2581
Toulon	+43 7 20	232,31	3368
Paris............	+48 50 14	254,65	3860
Falkland Inseln St. Louis	—51 31 44	266,44	4120

Gemeinsame Korrektion + 34.

16. *Biot* u. *Mathieu* 1808—24 (?) mit einem Decimalsekundenpendel. Wir entlehnen aus *Biot*, *Mémoire sur la Figure de la Terre* (*Mémoires de l'Ac. royale des Sciences de l'Institut de France* t. 8 1829), da *Baily* diese Messungen nicht aufführt. Die Angaben bei *Biot* (im Folgenden, Kolumne 6) sind nur mit $2H:R$ aufs Meeresniveau reduziert; wir haben daher (in der 5. Kolumne) auch die Werte nach *Bouguers* Formel mit $F = {}^5/_8$ beigefügt. Inwieweit vorstehende Werte sonst reduziert sind, ist nicht angegeben. Die Unterschiede in den geogr. Breiten mit den Angaben von *Kater* unter Nr. 1 für *Unst* und *Leith* sind wohl nicht ganz reell.

1	2	3	5	6	7
Lipari	38° 28′ 37″	9m	0,993078	0,993079	0,625
Formentera	38 39 56	203	3046	3070	„
Barcelona	41 23 15	4	3232	3232	„
Figeac	44 36 45	223	3432	3458	„
Bordeaux	44 50 26	17	3451	3453	„
Fiume	45 19 0	65	3576	3584	„
Padua	45 24 3	31	3604	3607	„
Mailand	45 28 1	150	3530	3548	„
Clermont-Ferrand	45 46 48	406	3535	3582	„
Paris	48 50 14	70	3859	3867	„
Dünkirchen	51 2 10	4	4080	4080	„
Leith	55 58 37	21	4529	4531	„
Unst	60 45 25	9	4945	4946	„

Gemeinsame Korrektion + 19.

Bessel hat in seiner Abhandlung über die *Länge des Sekundenpendels in Königsberg* (*Abh. der Berl. Ak.* 1826; Werke Bd. 3 S. 164) die Beobachtungen von *Biot*, *Arago* und *Humboldt* in *Greenwich* 1817—18 und in *Paris* (vor- und nachher) mit 2 unveränderlichen Pendeln, die nahezu Sexagesimalsekunden schwangen, reduziert. Man vergl. auch *Biot et Arago, Receuil d'Observations géod.* 1821, sowie *Walker, Account of the pendulum operations* (der genaue Titel dieses engl. indischen Pendel-Werkes folgt unter Nr. 19) App. 2 p. 32. Nach *Sabine*, *Phil. Transact.* 1828 p. 35, zeigten allerdings die Beobachtungen keine gute Übereinstimmung; immerhin scheint uns die Bestimmung vergleichsweise nicht ohne Wert, da beide Pendel die Differenz *Paris-Greenwich* bis auf $0{,}000034^m$ übereinstimmend geben.

Setzt man die Schwere in *Paris* gleich 1, so wird sie darnach in *Greenwich* gleich 1,0002523; hierbei fehlt die Reduktion aufs Meeresniveau. Nimmt man $\mathfrak{L}$ für *Greenwich* gleich 0,994145, so wird es für

Paris 0,993894; nimmt man ferner die *Bouguer*sche Reduktion für beide Orte bezw. gleich + 11 und + 16 Einh. der 6. Stelle, so folgt

1	2	5
Paris	48° 50′ 14″	0,993899
Greenwich	51 28 40	4145
Gemeinsame Korrektion — 10.		

§ 26. **Neuere Pendelbeobachtungen und absolute Bestimmungen.** Um den Einflufs der Luft vollständiger zu eliminieren, als es bei Anwendung invariabler Pendel oder auch unsymmetrischer *Kater*scher Reversionspendel möglich ist, wurden in neuerer Zeit die relativen Schwerebeobachtungen mit invariablen Pendeln im Vacuum (nach *Airy*s Vorschlag) oder mit symmetrischen Reversionspendeln (nach *Bessel, Astronom. Nachr.* 1850 Bd. 30 Nr. 697 S. 1) ausgeführt. Leider hat sich herausgestellt, dafs im letzteren Falle die Stative mehrfach derjenigen Festigkeit und breiten Basis, sowie hinreichend soliden Untergrundes ermangelten, wie zu einwurfsfreien Beobachtungen nötig. Wenn auch diese Fehlerursache bei den relativen Beobachtungen gröfstenteils unschädlich bleibt, so besitzen doch infolge dessen nicht alle neueren Messungen eine im Vergleich zu den älteren Bestimmungen erhöhte Genauigkeit, wie man gehofft hatte. Denn bei letzteren wurde an der Wand beobachtet oder es kam ein sehr festes breites Stativ zur Anwendung. (Von der Solidität des *Sabine*schen Stativs haben sich weitere Kreise auf der *Loan Collection* in *London* 1876 durch Augenschein überzeugt; vergl. auch den *Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung* von 1876 S. 190).

Das Mitschwingen des Stativs bei den neueren Reversionspendeln konstatierte *C. S. Peirce* für seinen Apparat gelegentlich seiner Beobachtungen in *Berlin* 1875, wobei er abwechselnd das Pendel an der Wand und auf dem Stativ schwingen liefs*). Weitere Untersuchungen von *E. Plantamour* zeigten, dafs auch das Fundament des Stativs von Einflufs ist. Für das $^3/_4$-Sekunden-Reversionspendel der *Schweiz* von *Repsold* ist darnach wegen des Mitschwingens eine Korrektion nötig von

$$+0{,}1724^{mm} = 0{,}0764 \text{ par. Lin. für festes Holzfundament,}$$
$$+0{,}1302 \text{ bis } +0{,}1357^{mm} = 0{,}0577 \text{ bis } 0{,}0602 \text{ par. Lin. für Steinfundament.}$$

*) Nach einer Bemerkung von *C. Bruhns* in den *Verhandlungen der perm. Kommission der europ. Gradmessung zu Brüssel* 1876 (publ. 1877) S. 48. Vergl. auch die *Verhandl. der allgemeinen Konferenz zu Stuttgart* 1877 (publ. 1878) S. 22 u. Annex Ib S. 171.

Hieraus erkennt man, dafs ohne Beachtung des Untergrundes eine Unsicherheit von mehreren Hundertelmillimetern entstehen kann*).

17*. *Sawitsch*, *Lenz* und *Smyslof* 1865—68 mit zwei *Repsold*schen 3/4-Sekunden-Reversionspendeln auf Stahlplatten; *Memoirs of the Royal Astronomical Society* 1870—71 vol. 39. Vergl. auch *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1874 Bd. 9 S. 44 und *Clarke, Geodesy* p. 343.

1	2	3	4	5	6	7
Ismail	45° 20′ 34″	30m	440,4479	0,993534	+ 4	0,625
Kischinef	47 1 30	92	5278	3714	+ 11	„
Kamenetz	48 40 39	178	5844	3842	+ 21	„
Kremenetz	50 6 8	297	6533	3997	+ 35	„
Bélin	52 2 22	141	7268	4163	+ 16	„
Wilna	54 41 2	101	8353	4408	+ 12	„
Jakobstadt	56 30 3	83	8900	4531	+ 10	„
Dorpat	58 22 47	68	9762	4726	+ 8	„
Reval	59 26 37	3	441,0190	4820	+ 0	„
St. Petersburg	59 56 30	8	0319	4852	+ 1	„
Nicolaistadt	63 5 33	14	1293	5071	+ 2	„
Tornéa	65 50 43	4	2525	5349	+ 0	„

Gemeinsame Korrektion + 16.

Die 4. Kolumne giebt die ursprünglich beobachteten Werte der Länge des Sekundenpendels in par. Linien um eine Konstante nach *Lütkes* Beobachtung (vergl. im vorigen Paragraphen Nr. 12) derartig vermehrt, dafs sich die Zahlen den von *Kater* und *Sabine* erhaltenen Längen einreihen. Für uns ist der Betrag dieser Konstanten gleichgültig, da *Sawitsch* auf grund späterer Messungen eine zweite Korrektion angebracht hat. Es wurden nämlich von *Zinger* in *Pulkowa* und von *Heaviside* in *Kew* mit dem Apparat die Pendellängen gemessen und die Konstanten des Apparats neubestimmt. Folgendes Täfelchen giebt diese Pendellängen in par. Lin. und Metern sowie die früher ermittelte Länge für *Petersburg*, welche nach der älteren Berechnung 440,958 par. Lin. gegeben hatte, neu berechnet; *Memoirs of the Royal Astronom. Soc.* 1877—79 Bd. 44 (publ. 1879) S. 307—315.

*) *Verhandlungen der perm. Kommission zu Hamburg* 1878 (publ. 1879) S. 9; ausführlich in der Abh.: *Recherches expérimentales sur le mouvement simultané d'un pendule et de ces supports par E. Plantamour* am Schlusse der Publikation über die *Verhandl. der allgem. Konf. zu Stuttgart* 1877 S. 51.

1	2	3	4	5	6	7
Kew	51° 28′ 6″	.	440,6405	0,994156	.	.
Pulkowa	59 46 19	75^m	9428	4838	+ 9	0,625
Petersburg	59 56 30	8	9488	4852	+ 1	„

Gemeinsame Korrektion + 16.

Für das 1. Täfelchen haben wir mit Rücksicht auf die Neuberechnung für *Petersburg* die 5. Kolumne aus der 4. durch Verwandlung der par. Lin. in Meter mit dem Logarithmus 7,3533062 — 10 und unter Beifügung von — $0{,}041^{mm}$ konstanter Korrektion ermittelt. Dieselbe berücksichtigt auch das Mitschwingen des Stativs, welches im Mittel für beide Pendel nach *Kuhlberg*s Untersuchung, *Astronom. Nachr.* 1882 Bd. 101 Nr. 2416 S. 243, eine Korrektion von + 0,0650 par. Lin. erfordert. Bei der 2. Tabelle ist diese Korrektion an den Angaben der 4. Kolumne beim Übergang zur 5. angebracht worden. Wegen mangelnder Berücksichtigung des Untergrundes haften vielleicht an einzelnen Werten $\mathfrak{L}$ noch Fehler bis zu + $0{,}040^{mm}$, da nicht überall dieselben Verhältnisse wie bei den Versuchen von *Kuhlberg* stattfanden, der in der Regel auf Steinpfeilern beobachtete und vermutlich auch dafür die Korrektion bezüglich des Mitschwingens bestimmt hat*).

In Bezug auf die erlangte Genauigkeit ist noch Folgendes zu bemerken: die Bestimmungen haben nach der Anordnung der Beobachtungen mit Rücksicht auf alle Korrektionen die Bedeutung von absoluten Messungen. In *Kew*, wo 1873—74 *Heaviside* beobachtete, führten beide Pendel bis auf 0,0004 Zoll engl. zu demselben Werte, und der hieraus unter Beifügung der Korrektion für das Mitschwingen des Stativs berechnete, oben angegebene Wert**) stimmt mit einem weiterhin unter Nr. 19 aufgeführten, absoluten Werte, der mittelst eines anderen Apparats erhalten worden ist, auf $0{,}006^{mm}$. Diese Differenz erscheint für zwei wesentlich verschiedene absolute Bestimmungen ganz unerheblich, wenn man beachtet, dafs *Sawitsch* nach

*) Hr. *Sawitsch* korrigiert in der 2. Abhandlung mit dem *Plantamour*schen Wert der Korrektion gleich 0,0765 par. Lin. Auf briefliche Anfrage erteilte aber derselbe seine Zustimmung zur Anwendung des inzwischen bekannt gewordenen *Kuhlberg*schen Wertes. Bei dieser Gelegenheit wurden wir freundlichst in Kenntnis gesetzt über die Meereshöhen der Stationen und den Betrag des Koefficienten $F = {}^5/_8$.

**) Nach S. 258 des in Nr. 19 zu erwähnenden engl. indischen Pendel-Werkes ist die Pendellänge für *Kew* nach denselben Beobachtungen zu 39,1345 Zoll engl., d. i. mit den Verwandlungslogarithmen 8,4048298 — 10 auf Meter und weiter mit 2,6466938 auf par. Lin. gleich 440,6394 par. Lin., anstatt 440,6405 wie oben, angegeben. Die geringe Differenz haben wir weiter nicht beachtet.



S. 262 des engl. indischen Pendel-Werkes in *Petersburg* zwischen seinen beiden Pendeln sogar 0,018 par. Lin. Differenz hatte.

S. 299 des ebengenannten Werkes wird als Endresultat zahlreicher Untersuchungen des russischen Apparates in England und Indien hervorgehoben, dafs er entschieden den invariablen Pendeln mit festen Schneiden und soliderer Aufstellung nachstehe*). Selbst in der Anwendung mit festgestellten Schneiden und Achatplatten zeigte sich der russische Apparat den invariablen Pendeln nachstehend, wie dies folgende Zusammenstellung von Bestimmungen nach S. 298 a. a. O. zeigt, wobei für alle Pendel in *Kew* die Länge des Sekundenpendels zu 39,1401 Zoll engl. angenommen ist:

	Invar. Pendel		Russische Pendel	
	Nr. 4	Nr. 1821	Nr. 1	Nr. 2
Ismailia	39,0644	39,0646	39,0660	39,0655
Aden	0243	0243	0241	0246
Colaba	0367	0366	0366	—
Kaliana	0584	0585	0608	0546.

17ᵇ. *Kuhlberg* 1879—80 mit denselben beiden Pendeln wie vorher; *Astronom. Nachr.* 1881 Bd. 99 Nr. 2370 S. 281. Die Schneiden sind während der ganzen Beobachtungsreihe in derselben Lage belassen, wie bei den letzten Beobachtungen von *Heaviside* in *Kew* (vergl. auch S. 200—242 des engl. ind. Pendel-Werkes). Um die Resultate denen unter Nr. 17ᵃ anreihen zu können, ist eine Korrektion angebracht, weshalb wir die Beobachtungen der Täfelchen von 17ᵃ und 17ᵇ als eine Reihe ansehen dürfen.

1	2	3	4	5	6	7
Jelisabethpol . . .	40° 40′ 53″	427ᵐ	440,1714	0,993098	+ 50	0,625
Batum	41 39 28	2	2522	3280	+ 0	„
Tiflis	41 41 29	435	2126	3179	+ 56	0,59
Duschett	42 4 49	846	1368	3062	+ 100	0,625
Gudaur	42 29 17	2247	1476	3087	+ 265	„
Wladikawkas . . .	43 1 59	693	2629	3305	+ 82	„

Gemeinsame Korrektion + 16.

Die Korrektion wegen des Mitschwingens des Stativs ist auch hier beim Übergang von der 4. zur 5. Kolumne berücksichtigt. Wäh-

*) Der Umstand, dafs die Schneiden für den Zweck absoluter Bestimmungen nicht ganz fest angebracht worden sind, veranlafste wahrscheinlich auch bei Versuchen zu *Kaliana* einen Fehler von 0,01 Zoll engl. in dem Ergebnis mit einem der beiden russischen Pendel.

rend *Kuhlberg* sich noch der *Plantamour*schen Werte bedient: + 0,0577 par. Lin. im allgemeinen, + 0,0764 für *Gudaur* und *Duschett*, wo das Stativ auf Holzboden stand, haben wir die neuere, oben erwähnte *Kuhlberg*sche Bestimmung benutzt und demgemäfs im allgemeinen + 0,0650 par. Lin. angewandt, wie auch für *Tiflis*, wo *Stebnitzki* beobachtete, bei anderer Gelegenheit geschieht.*) Für *Gudaur* und *Duschett* haben wir die Korrektion auf + 0,0837 erhöht, um dem Holzboden Rechnung zu tragen. Einige Unsicherheit ist bei diesen Korrektionen allerdings nicht zu umgehen.

18. *Albrecht* 1869—70 mit einem *Repsold*schen Sekunden-Reversionspendel; *Publikationen des kön. preufs. geod. Instituts, astronom. geodät. Arbeiten* 1870 und 1872, 1869 und 1867 (publ. 1871 und 1874); vergl. auch *A. Fischer, Astronom. Nachr.* 1876 Bd. 88 Nr. 2094 S. 84. Die 4. Kolumne des folgenden Täfelchens zeigt die Beobachtungsergebnisse in Metern ohne Rücksicht auf das Mitschwingen des Stativs; beim Übergang zur 5. Kolumne ist deshalb die Korrektion + 0,0001820^m angebracht, die so bemessen ist, dafs für *Berlin* sich *Bessels* 𝔏 ergiebt. Wegen der Unmöglichkeit, den Untergrund zu berücksichtigen, entsteht auch hier eine nicht geringe Unsicherheit.

1	2	3	4	5	6	7
Mannheim	49°29′11″	125^m	0,9937207	0,993903	+ 8	0,732
Bonn	50 43 45	62	38869	4069	+ 5	„
Inselsberg	50 51 11	910	38926	4075	+ 77	„
Seeberg	50 56 6	353	38835	4066	+ 30	„
Gotha	50 56 38	315	38036	3986	+ 27	„
Leyden	52 9 20	0	40252	4207	+ 0	„
Berlin	52 30 17	36	40498	4232	+ 3	„

Gemeinsame Korrektion + 3.

Die gemeinsame Korrektion ist mit Rücksicht auf den Ausgleichungswert für *Berlin* angesetzt. Bezüglich *Mannheims* mufs bemerkt werden, dafs die Erdschicht daselbst nur 100^m dick ist, 25^m

*) *Astronom. Nachr.* 1882 Bd. 103 Nr. 2472 S. 375. Allerdings folgt mit + 0,0650 für *Tiflis* 440,2776 anstatt 440,2792, wie daselbst angegeben ist. Die kleine Differenz haben wir ebensowenig beachtet, wie die in der Breite, deren Sekunden daselbst zu 31 notiert sind. Dagegen haben wir im obigen Täfelchen *Tiflis* mit den im vorigen Paragraphen unter Nr. 13 gegebenen, neueren Daten reduziert (mit den *Kuhlberg*schen Daten $H = 471^m$, $F = 0,625$ wurde $𝔏 = 0,993191$).

der angegebenen Höhe kommen auf einen Turm. Bei *Inselsberg* ist in der Publ. 1874 S. 225 bei der Reduktion aufs Meeresniveau für 1800 par. Fuſs der Höhe eine parabolische Bergkuppe gesetzt, dabei aber eine falsche Reduktionsformel angewandt. Indessen ist der entstehende Fehler wegen der geringen Abweichung vom ebenen Terrain unerheblich (etwa $0{,}002^{mm}$) und innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Reduktion überhaupt enthalten.

19. *Basevi* und *Heaviside* 1864—74 mit 2 invariablen Pendeln (davon eines das Pendel Nr. 4 von *Sabine*) im Vacuum auf Achatplatten an festen groſsen Holzstativen; *Account of the operations of the great trigonometrical survey of India*, vol. V: *Details of the pendulum operations*, *Calcutta* 1879. Die Stationen bilden z. T. eine Reihe von 2 zu 2 Grad Breitendifferenz auf dem mittleren Meridian *Vorderindiens*, z. T. sind es Küstenstationen. In *Madras* ist in demselben Observatorium beobachtet, wo *Goldingham* die Länge des Sekundenpendels ermittelte. Der Unterschied der täglichen Schwingungszahl beider Pendel schwankt nach S. 133 a. a. O. von 49,69 bis 50,91; die in *Kew* 1864 und 1873 erhaltenen Schwingungszahlen differieren für das eine Pendel um 0,1, fürs andere um 0,5 Schwingungen. Ebenso günstig ist die Übereinstimmung bei wiederholten Beobachtungen in *Kaliana* 1866, 70 und 73.

Heaviside bestimmte 1873 mittelst *Katers* renoviertem Reversionspendel für *Kew* die absolute Länge des Sekundenpendels zu

$$39{,}14008 \text{ Zoll engl.} = 0{,}994150^m$$

(a. a. O. S. 293). Diese Zahl ist in der 5. Kolumne des folgenden Tableaus eingeführt, vergl. a. a. O. S. 133.

Die Kolumne 4* giebt die Anziehung des Terrains nach dem 2. Gliede von *Bouguers* Formel mit $F = 0{,}625$ in Schwingungen; in einigen Fällen ist darunter die unregelmäſsige Terrainanziehung bemerkt. Diese dem Original entlehnten Angaben übersetzt die 6. Kolumne in Metermaſs.

1	2	3	4	4*	5	6
Punnae........	8° 9′ 28″	15^m	85982,88	+ 0,07	0,991005	+ 2
Kúdankolam ...	8 10 21	51	85982,99	+ 0,26	0,991008	+ 6
Minicoy	8 17 1	2	85987,02	+ 0,01	0,991101	+ 0
Mallapatti	9 28 45	88	85983,34	+ 0,44	0,991016	+ 10
Alleppy	9 29 39	2	85985,90	+ 0,01	0,991075	+ 0
Pachapaliam ...	10 59 40	296	85984,77	+ 1,50	0,991049	+ 35
Aden	12 46 53	2	85991,68	+ 0,01	0,991208	+ 0
Mangalore	12 51 37	2	85988,89	+ 0,01	0,991144	+ 0

1	2	3	4	4*	5	6
Bangalore, Süd.	13° 0′ 41″	950m	85986,47	+ 4,83	0,991088	+ 111
Bangalore, Nord	13 4 56	917	85987,08	+ 4,66	0,991102	+ 107
Madras	13 4 8	8	85989,10	+ 0,04	0,991149	+ 1
Namthábád	15 5 52	358	85990,71	+ 1,82	0,991186	+ 42
Cocanáda	16 56 21	3	85998,25	+ 0,02	0,991360	+ 0
Kodangal	17 7 57	584	85995,91	+ 2,96	0,991306	+ 68
Damargida	18 3 17	593	85996,03	+ 3,01	0,991309	+ 69
Colaba (Bombay)	18 53 46	11	86005,28	+ 0,05	0,991522	+ 1
Somtana	19 5 0	522	86000,69	+ 2,66 / — 0,04	0,991416	+ 60
Badgaon	20 44 23	342	86005,13	+ 1,73	0,991518	+ 40
Calcutta	22 32 55	6	86012,73	+ 0,03	0,991693	+ 1
Ahmadpúr	23 36 21	516	86012,62	+ 2,62 / — 0,07	0,991691	+ 59
Kaliánpúr	24 7 11	538	86014,87	+ 2,73	0,991743	+ 63
Pahárgarh	24 56 7	500	86015,30	+ 2,54	0,991752	+ 58
Usira	26 57 6	247	86023,50	+ 1,25 / — 0,11	0,991942	+ 26
Datairi	28 44 5	218	86028,57	+ 1,11	0,992059	+ 26
Kaliána	29 30 55	247	86029,33	+ 1,25	0,992077	+ 29
Nojli	29 53 28	269	86029,87	+ 1,36	0,992089	+ 31
Dehra	30 19 29	683	86026,89	+ 3,47 / — 0,29	0,992020	+ 73
Mussoorie	30 27 41	2109	86030,47	+10,72 / — 1,17	0,992103	+ 220
Ismailia	30 35 55	10	86036,01	+ 0,05	0,992230	+ 1
Meean Meer	31 31 37	215	86036,36	+ 1,09	0,992238	+ 25
Moré	33 15 39	4696	86024,48	+23,86 / — 0,41	0,991965	+ 540
Kew	51 28 6	5	86119,19	+ 0,02	0,994150	+ 0

Gemeinsame Korrektion + 19.

Die gemeinsame Korrektion ist nach Maſsgabe des Ausgleichungswertes für *Kew* angesetzt.

20. *Bessel*, *Schumacher*, *C. F. W. Peters* mit *Bessels* Faden-Pendelapparat. Derselbe wurde von *Bessel* in *Königsberg* und *Berlin*, von *Schumacher* in *Güldenstein* angewandt; *Peters* wiederholte nach Ablauf von 4 Decennien die Beobachtungen in *Königsberg* und *Berlin* auf Anordnung des Präsidenten des kön. preuſs. geodät. Instituts, *Baeyer*, um die Unveränderlichkeit der dem Apparat beigegebenen Toise zu prüfen. Die Enden derselben sind allerdings nicht völlig unbeschädigt

erhalten, jedoch wohl nicht in dem Grade, dafs die Bedeutung der Resultate illusorisch würde. Vergl. die *Abhandlungen der Berliner Akademie der Wiss.* von 1826 und 1835 sowie das Referat in der *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1876 Bd. 11 S. 33 mit Angabe der anderen Litteratur und sonstigen Bemerkungen. Die 4. Kolumne des folgenden Täfelchens giebt $\mathfrak{L}$ in par. Lin., die 5. dasselbe in Metern.

1	1*	2	3	4	5	6	7
Berlin	Bessel 1835	52° 30′ 16″	34m	440,7390	0,994232	+ 3	0,75
Güldenstein	Schumacher 1829—30	54 13 9	67	440,8076	4386	+ 5	0,74
	Peters 1871			8018	4374		
Königsberg.	Bessel 1826—27.....	54 42 50	22	440,8179	4410	+ 0	1
	Peters 1870.........			8294	4436		

Gemeinsame Korrektion für B. u. Sch. + 13
" " " Peters + 11.

21. *C. F. W. Peters* 1869 mit *Lohmeyers* symmetrischem Reversionspendel mit festen Schneiden; *Astronom. Nachr.* 1880 und 81, Bd. 97 S. 1, 98 S. 65, 99 S. 129 und 380 (Nr. 2305, 2333, 2361, 2376). Vergl. auch 1870 Bd. 76 Nr. 1810 S. 145. Diese Beobachtungen sind an festen Wandkonsolen ausgeführt; in *Altona* fand sich noch das *Sabine*sche mit Achatplatte vor. Dasselbe wurde auch in *Berlin* und *Königsberg* benutzt. Nur hinsichtlich des Metermafsstabes besteht eine kleine Unsicherheit des absoluten Wertes, die jedoch die Differenzen der Angaben nicht wesentlich beeinflufst. Für *Berlin* haben wir in der 5. Kolumne $\mathfrak{L}$ vorläufig nach *Bessel* angesetzt.

1	2	3	4	5	6	7
Berlin	52° 30′ 16″	34m	0,9941860	0,994232	+3	0,75
Altona...........	53 32 45	31	0,9943007	4347	+2	0,76
Königsberg.......	54 42 50	22	0,9944061	4452	+0	1

Gemeinsame Korrektion — 4.

22. *C. S. Peirce*; *Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey for* 1876. Bei diesen Beobachtungen, deren Ergebnisse wir aus dem *American Journal of Science* 1880 2. Hälfte S. 327 entlehnen, wurde ein *Repsold*sches Sekunden-Reversionspendel benutzt und wegen Mitschwingens des Stativs korrigiert*). Nur be-

*) *Verhandlungen der allgem. Konferenz der europ. Gradmessung zu Stuttgart* 1877 (publ. 1878) S. 173.

achtete *Peirce* nach *E. Plantamour* und *Cellerier* noch nicht genügend die Verschiedenheit des Fundaments*), und es besteht hinsichtlich des Metermafsstabes eine geringe Unsicherheit. Die Differenz mit *Bessel* für *Berlin* ist z. T. dem Umstande zuzuschreiben, dafs das Meter jetzt um etwa $0{,}008^{mm}$ kleiner definiert ist, als gesetzlich aus der Toise (*Annual Report upon the Surveys of nothern and northwestern lakes in charge of C. B. Comstock* 1881 p. 2788).

1	2	3	4	5	6	7
Hoboken	40° 44′ 31″	9^m	0,9932074	0,993207	+ 1	0,74
Paris	48 50 14	70	39500	3950	+ 5	„
Kew	51 28 6	6	41790	4179	+ 0	„
Berlin	52 30 16	35	42482	4248	+ 3	„

Gemeinsame Korrektion — 13.

In vorstehender Tabelle ist die 5. Kolumne lediglich eine Abkürzung der vierten. Die Meereshöhe für *Hoboken* haben wir rückwärts aus den Originalangaben für die Länge des Sekundenpendels ohne Reduktion berechnet und dabei F so angenommen, dafs damit für *Paris*, *Kew* und *Berlin* die bekannten Werte von H herauskamen. Auch die geogr. Breite für *Hoboken* ist rückwärts berechnet aus den Angaben von *Peirce* für die Reduktion auf den Äquator; sie ist auf 2″ sicher.

§ 27. **Zusammenstellung von Bestimmungen am gleichen oder nahezugleichen Orte.** Nachstehende Tabelle giebt für diese Bestimmungen diejenigen vier Decimalstellen der Längen $\mathfrak{L}$ des Sekundenpendels, welche hinter 0,99 folgen. In den Fällen, wo die geogr. Breite gleichnamiger Stationen bei verschiedenen Beobachtern verschieden ist, wurde mit $+0{,}000001.5 \sin 2B\, \Delta B$, für ΔB in Minuten, auf die angegebene Breite reduziert. Diese Reduktion entspricht der Variation $0{,}0053\, \mathfrak{L} \sin^2 B$ in $\mathfrak{L}$. Während *New York* und *Hoboken* bei 4^{km} Distanz mit Rücksicht auf diese Reduktion noch als eine Station betrachtet werden durften, ist dies bei *Kew*, *London* und *Greenwich* nicht geschehen, da hier die Distanzen successive 2 und 1 geogr. Meile betragen. Die gleichnamigen Stationen *Falklandinseln* bei *Freycinet* und *Duperry* sind bei 1 Meile Abstand wegen sehr verschiedener orographischer Verhältnisse als verschiedene Stationen aufgefafst; ebenso *Guam* bei *Lütke* und *Freycinet* wegen 3 Meilen Abstand. Diese Stationen brauchten in der Tabelle gar nicht aufgeführt zu werden.

*) *Verhandlungen der allgem. Konferenz der europ. Gradmessung zu München* 1880 (publ. 1881) S. 6 Annex IIa, Bericht über die Pendelbeobachtungen.

	Maranham — 2° 31′ 39″	Ascension — 7° 55′ 36″	Trinidad + 10° 38′ 56″	[Madras] + 13° 4′ 8″	St. Helena — 15° 56′ 7″	Isle de France — 20° 9′ 40″	Rio Janeiro — 22° 55′ 17″	Port Jackson — 33° 51′ 37″	Kap d. g. H. — 33° 56′ 3″	Hoboken + 40° 44′ 31″	Tiflis 41° 41′ 28″	Paris 48° 50′ 14″	Kew 51° 28′ 6″	Greenwich 51° 28′ 40″	London 51° 31′ 8″	Berlin 52° 30′ 16″	Altona 53° 32′ 45″	Güldenstein 54° 13′ 9″	Königsberg 54° 42′ 50″	Leith 55° 58′ 39″	Dorpat 58° 22′ 49″	Petersburg 59° 56′ 30″	Unst 60° 45′ 27″
1. Kater	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4129	.	.	.	.	4539	.	.	4939
2. [Goldingham]	.	.	.	[1194]	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	[4129]	.	.	.	.	.	.	.	.
3. Hall	.	.	.	.	.	.	1712	.	.	.	.	.	.	.	4129	.	.	.	.	.	.	.	.
6. Sabine	0898	1205	1072	.	.	.	.	.	.	3174	.	.	.	.	4129	.	.	.	.	.	.	.	.
8. Fallows	.	.	.	.	.	.	.	.	2587	.	.	.	.	.	4129	.	.	.	.	.	.	.	.
9. Sabine	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3860	.	.	4129	.	.	.	.	.	.	.	.
10. Sabine	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4145	4129	.	4336	.	.	.	.	.	.
11. Foster	0881	1192	1077	.	1560	.	.	.	2549	.	.	.	.	[4104]	4129	.	.	.	.	.	.	.	.
12. Lütke	.	.	.	.	1561	.	.	.	.	.	.	.	.	4112	.	.	.	.	.	.	.	4875	.
13. Parrot	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3165	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4726	.	.
14. Freycinet	.	.	.	.	.	1790	1684	2617	2561	.	.	3860	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15. Duperry	.	1182	.	.	.	1768	.	2581	.	.	.	3860	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16. Biot	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3859	.	.	.	.	.	.	.	4529	.	.	4945
— Biot, Arago u. Humboldt	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3899	.	4145	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17. Sawitsch und Kuhlberg	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3179	.	4156	.	.	.	.	.	.	.	4726	4852	.
19. [Basevi und Heaviside]	.	.	.	[1149]	.	.	.	.	.	.	.	.	[4150]	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20. Bessel und Schumacher	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4232	.	4386	4410	.	.	.	.
— Peters	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4374	4436	.	.	.	.
21. Peters	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4232	4347	.	4452	.	.	.	.
22. Peirce	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3207	.	[3950]	4179	.	.	4248	.	.	.	.	.	.	.

Als besonders brauchbar sind zu nennen die Reihen 1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 19 und 21. Die Genauigkeit beeinträchtigende Momente liegen vor bei Reihe 2, *Goldingham*: das Pendel ist nach der weiten Seereise nicht zurückgekehrt;

14, *Freycinet*: grofse Differenzen, gemildert durch Anwendung von 3 Pendeln;

15, *Duperry*: ziemlich grofse Differenzen, zwar kleiner als bei *Freycinet*, aber auch nur 2 Pendel;

17, *Sawitsch* u. *Kuhlberg*, 22, *Peirce*: nicht völlig befriedigende Berücksichtigung des Untergrunds; Schneiden nicht absolut fest;

20, *Bessel*, *Schumacher* u. *Peters*: absolute Bestimmung.

Über 12 und 16 sind uns nähere Umstände nicht bekannt.

Für die Ausgleichung der Ergebnisse gemeinsamer Stationen wurde noch Folgendes erwogen: Aus den Reihen 6, 10, 21 und 22 gelangt man mit *London* = 0,994129 auf 2 Wegen zu *Kew*, und zwar findet sich *Kew* = 0,994146 und 52, im Mittel 0,994149, was mit den Werten für *Kew* in Reihe 17 und 19 leidlich pafst. Nun sieht man aber, dafs die Reihen 2 und 19 nicht harmonieren, sondern für *Madras* stark von einander abweichen. Mit Rücksicht auf obige Bemerkung zu Reihe 2 wurde daher ihre Angabe für *Madras* als in der Ausgleichung nicht stimmfähig weggelassen, womit die Reihen 2 und 19 überhaupt aus der Ausgleichung herausfielen. Ausgeschlossen wurde auch der Wert für *Paris* nach 22; derselbe wird nämlich, wenn *Kew* = 0,994150 gesetzt wird, gleich 0,993921, was mit den älteren Bestimmungen ganz und gar nicht stimmt und vielleicht auf die gerade bei *Paris* zweifelhafte Berücksichtigung des Untergrunds in Reihe 22 zurückzuführen ist.

§ 28. **Ausgleichung der mehrfachen Bestimmungen.** Dieselbe erfolgte nach einer Annäherungsmethode (vergl. *Ausgleichungsrechnung* S. 154—158), wobei alle Bestimmungen als relative aufgefafst wurden. Es ergaben sich die Resultate beistehender Tabelle (S. 213).

Die konstanten Korrektionen der einzelnen Reihen, welche sich zunächst fanden, wurden um eine gemeinsame Korrektion so vermehrt, dafs den absoluten Bestimmungen von *Heaviside*, *Bessel*, *Schumacher* und *Peirce* möglichst genügt wird, also die Summe der Reihenkorrektionen zu 17, 19, 20 und 22 null giebt: Diese Korrektionen sind gegenwärtig + 16, + 19, + 13 und — 13 Mikrons (Tausendelmillimeter); denkt man sich aber mit Rücksicht auf die Bemerkung zu § 26 Nr. 22 über die neue metrische Längeneinheit die Angaben in Nr. 17, 19 und 20 durch Beifügung von + 8 auf neues Metermafs reduziert, so sind die Reihenkorrektionen nunmehr + 8, + 11, + 5 und — 13. Da jedoch in den beiden ersten Fällen

	Maranham.	Ascension.	Trinidad.	St. Helena.	Isle de France.	Rio Janeiro.	Port Jackson.	Kap d. g. Hoff.	Hoboken.	Tiflis.	Paris.	Kew.	Greenwich.	London.	Berlin.	Altona.	Güldenstein.	Königsberg.	Leith.	Dorpat.	Petersburg.	Unst.	Gewicht.	Reihenkorr.	[λ]	Anzahl	[λλg]
1. Kater	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4143 −3	.	.	.	.	4553 −3	.	.	4953 +6	2	+ 14	0	3	108
3. Hall	.	.	.	.	.	1717 −5	.	.	.	.	.	.	.	4134 +6	.	.	.	.	.	.	.	.	2	+ 5	+ 1	2	122
6. Sabine	0912 −4	1219 −2	1086 +5	.	.	.	.	.	3188 +3	.	.	.	.	4143 −3	.	.	.	.	.	.	.	.	3	+ 14	− 1	5	189
8. Fallows	.	.	.	.	.	.	.	2589 −9	.	.	.	.	.	4131 +9	.	.	.	.	.	.	.	.	2	+ 2	0	2	324
9. Sabine	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3877 +5	.	.	4146 −6	.	.	.	.	.	.	.	.	2	+ 17	− 1	2	122
10. Sabine	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4150 −7	4134 +6	.	4341 +1	.	.	.	.	.	.	3	+ 5	0	3	258
11. Foster	0903 +5	1214 +3	1099 −8	1582 −1	.	.	.	2571 +9	.	.	.	.	.	4151 −11	.	.	.	.	.	.	.	.	2	+ 22	− 3	6	602
12. Lütke	.	.	.	1578 +3	.	.	.	.	.	.	.	.	4129 +14	.	.	.	.	.	.	.	4892 −16	.	1	+ 17	+ 1	3	461
13. Parrot	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3186 +4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4747 −3	.	.	2	+ 21	+ 1	2	50
14. Freycinet ..	.	.	.	.	1808 −3	1702 +10	2635 −10	2579 +1	.	.	3878 +4	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	+ 18	+ 2	5	226
15. Duperry ...	.	1216 +1	.	.	1802 +3	.	2615 +10	.	.	.	3894 −12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	+ 34	+ 2	4	254
16. Biot	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3878 +4	.	.	.	.	.	.	.	4548 +2	.	.	4964 −5	2	+ 19	+ 1	3	90
— B., A. u. H..	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3889 −7	.	4135 +8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	− 10	+ 1	2	113
17. Saw. u Kuhlb.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3195 −5	.	4172 −3	.	.	.	.	.	.	.	4742 +2	4868 +8	.	2	+ 16	+ 2	4	204
20. B. u. Sch. ..	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4245 −10	.	4399 −7	4423 +18	.	.	.	.	2	+ 13	+ 1	3	946
— Peters	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4385 +7	4447 −6	.	.	.	.	2	+ 11	+ 1	2	170
21. Peters	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4228 +7	4343 −1	.	4448 −7	.	.	.	.	3	− 4	− 1	3	297
22. Peirce	.	.	.	.	.	.	.	.	3194 −3	.	.	4136 +3	.	.	4235 0	.	.	.	.	.	.	.	2	− 13	0	3	36
Ausgleichungswerte	0908	1217	1091	1581	1805	1712	2625	2580	3191	3190	3882	4169	4143	4140	4235	4342	4392	4441	4550	4744	4876	4959	$\Sigma[\lambda\lambda g] = 4572$				
$[\lambda g]$	− 2	+ 1	− 1	+ 1	0	0	0	+ 1	+ 3	− 2	+ 3	0	+ 1	− 1	+ 1	0	0	+ 3	− 2	− 2	0	+ 2					
Anzahl	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2	5	2	3	7	3	2	2	3	2	2	2	2	Gesamtanzahl = 57.				
$[g]$	5	6	5	3	2	3	2	5	5	4	7	4	5	17	7	6	4	7	4	4	3	4					

dasselbe englische Normalmafs zu grunde liegt, haben diese beiden Korrektionen nur zusammen das gleiche Gewicht wie die 3. und 4. erhalten. Die Summe von $\frac{1}{2}(8 + 11) + 5 - 13$ ist in der That genügend genau gleich null.

Die Tabelle zeigt also die Zahlen der vorhergehenden Tabelle, vermehrt um die den einzelnen Reihen zukommenden konstanten Korrektionen. Unter jedem Wert ist die Verbesserung λ in Mikrons angesetzt, welche die Ausgleichung fordert. Die Gewichte g sind nach Mafsgabe der Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen geschätzt. Dafs nun wirklich sehr nahe eine Ausgleichung nach der Methode der kl. Qu. vorliegt, zeigt sich darin, dafs für jede Horizontalreihe die Summe $[\lambda]$ und für jede Vertikalkolonne die Summe $[\lambda g]$ nahezu null wird. (S. vorh. Seite.)

Die Anzahl der Unbekannten der Ausgleichung ist gleich $21 + 18 = 39$, indem relative Werte für 22 Orte aus 18 Reihen mit 18 Reihenkorrektionen bestimmt sind. Hiermit folgt der m. F. einer Beobachtung vom Gew. 1 in Mikrons gleich

$$\sqrt{\frac{4572}{57-39}} \text{ d. i. } \pm 16.$$

Fürs Gew. 2 und 3 wird er bezw. ± 11 und ± 9 Mikrons.

Bildet man die Durchschnittswerte von $\lambda\lambda g$ für die 3 Gewichtsklassen, so erhält man

$$\begin{array}{lll} \text{Gew. } 1 & 1054 : 14 = 75 \\ \quad\;\, „ \;\; 2 & 2774 : 32 = 87 \\ \quad\;\, „ \;\; 3 & \;\;744 : 11 = 68, \end{array}$$

woraus man erkennt, dafs die Gewichte im allgemeinen ziemlich richtig angesetzt sind.

Mit Rücksicht auf die Relation $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 n^2 : n_0^2$ (vergl. S. 192) findet man, dafs den m. F. 9, 11 und 16 Mikrons in der Länge $\mathfrak{L}$ des Sekundenpendels die nachstehenden m. F. in der tägl. Schwingungszahl entsprechen:

$$\pm 0{,}4, \quad 0{,}5 \text{ und } 0{,}7,$$

Beträge, die recht plausibel erscheinen.

Günstig erscheint das Ergebnis der Ausgleichung auch insofern, als der kassierte *Foster*sche Wert für *Greenwich* durch dieselbe in 0,994126 übergeht und nur noch 17 Mikrons Fehler aufweist. Günstig ist auch, dafs die in den Reihen 17 und 19 auftretenden absoluten Bestimmungen für *Kew* durch die Ausgleichung sich bis auf 3 Mikrons nähern.

Über die konstanten Korrektionen derjenigen Reihen, welche sich nicht in der Ausgleichung befinden, ist schon bei den Aufstellungen in § 25 und § 26 das Nötige gesagt.

§ 29. Übersicht der Längen des Sekundenpendels.

Nr.	Name.	Geographische Breite *B*.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. ℒ	Autorität.	0,002636 × cos 2*B*.	ℒ reduziert auf 45° Br. ℒ'	Kondens.-Red.	ℒ' reduziert wegen Massen-kond. ℒ''	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe *H*.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
1.	Rawak .... Insel a. d. Westspitze von Neu-Guinea.	0° 1′ 34″ *S*	128° 35′ *E*	0,99 0966	Freyc.	+ 2636	0,99 3602	− 25	0,99 3577	− 28	(*I*)	.	Teil eines Archipels: Küstencharakter. Thätig vulkan. Gegend; Sandlager.
2.	Gaunsah Lout ..... Eiland a. d. Südwestküste v. Sumatra.	0 1 49 *N*	96 30 *E*	1055	Gold.	+ 2636	3691	− 50	3641	− 92	*I*	.	Teil eines Archipels; thätig vulkan. Gegend.
3.	St. Thomas .... Guineainseln.	0 24 41 *N*	4 24 *E*	1134	Sabine	+ 2636	3770	+ 1 − 55	3716	− 167	*I*	6m	Thätig vulkan. Gegend; Basalt; 15 □ Mln. Fläche.
4.	Galapagos	0 32 19 *N*	93 50 *W*	1019	Hall	+ 2636	3655	− 96	3559	− 10	*I*	4	Thätige Vulkane; Lava mit Höhlen; steile Küste. In 4km ein 600m hoher Berg. 70 □ Mln. Fläche (größte I., wo die Stat. lag).
5.	Para	1 27 0 *S*	50 46 *W*	0948	Foster	+ 2633	3581	+ 1 − 10	3572	− 23	*K*	12	Sand und Lehm 10m tief; 15 Mln. von der Küste an breitem Fluſs.
6.	Maranham	2 31 39 *S*	46 40 *W*	0908	Ausgl.	+ 2626	3534	+ 2 − 12	3524	+ 25	(*I*)	23	Insel von Küstencharakter; alluvialer Boden; Sand.
7.	Fernando do Noronha	3 50 0 *S*	34 41 *W*	1189	Foster	+ 2612	3801	+ 1 − 230	3572	− 23	*I*	11	Gebirgige Insel, erloschener Vulkan, Basalt, Hornblende, Porphyr; 1 □ Ml. Fläche. 40 Mln. v. d. Küste.
8.	Ualan, Carolinen Inseln	5 21 16 *N*	160 41 *E*	1286	Lütke	+ 2590	3876	− 100	3776	− 227	*I*	.	Kl. vulkanische Insel; Basalt.
9.	Ascension	7 55 36 *S*	16 42 *W*	1217	Ausgl.	+ 2535	3752	+ 1 − 170	3583	− 34	*I*	5	Erloschener Vulkan, Lava, Schlacken; nahe Berge 300m hoch, höchster Gipfel 800m; 12km Durchmesser.
10.	Punnae	8 9 28 *N*	75 20 *E*	1014	B. u. H.	+ 2531	3545	+ 2 − 20	3527	+ 22	*K*	15	700m von der Küste; sandig.
11.	Kudankolam	8 10 21 *N*	75 24 *E*	1027	"	+ 2530	3557	+ 6 − 20	3543	+ 6	*K*	51	Steiniger Rücken 1300m v. d Küste.
12.	Minicoy, Maldive Inseln	8 17 1 *N*	70 42 *E*	1120	"	+ 2527	3647	− 150	3497	+ 52	*I*	2	Koralleneiland 60 Mln. v. d. Küste.

Nr.	Name.	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. $\mathfrak{L}$	Autorität.	0,002636 $\times \cos 2B$.	$\mathfrak{L}$ reduziert auf 45° Br. $\mathfrak{L}'$	Kondens.-Red.	$\mathfrak{L}'$ reduziert wegen Massenkond. $\mathfrak{L}''$	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
				0,99			0,99		0,99				
13.	Sierra Leone	8° 29′ 28″ N	15° 35′ W	1104	Sabine	+ 2522	3626	+ 7 − 27	3606	− 57	K	58ᵐ	Erdschicht auf mürbem Granit.
14.	Mallapatti	9 28 45 N	75 43 E	1035	B. u. H.	+ 2494	3529	+ 10	3539	+ 10	F	88	Granithügel.
15.	Alleppy	9 29 39 N	74 0 E	1094	"	+ 2493	3587	− 14	3573	− 24	K	2	200ᵐ v. d. Küste am Hafen, der durch eine Landzunge vom Meere getrennt ist.
16	Porto Bello	9 32 30 N	81 55 W	1208	Foster	+ 2492	3700	− 50	3650	− 101	K	4	Landenge v. Panama; 100 b. 500ᵐ hohe Berge, 8ᵏᵐ nahe; Porphyr, Basalt.
17.	Trinidad	10 38 56 N	63 55 W	1091	Ausgl.	+ 2456	3547	+ 1 − 17	3581	+ 18	(I)	6	Insel, aber ganz Küstencharakter; Fläche 82 □ Mln.; 8ᵐ tiefe Lehm- und Pechschicht; nördl. eine Reihe Vulkane, auch Gebirge bis zu 1000ᵐ hoch in der Nähe.
18.	Pachapalium	10 59 40 N	75 20 E	1068	B. u. H.	+ 2445	3513	+ 35	3548	+ 1	F	296	Sehr gebirgig.
19.	Aden	12 46 53 N	42 42 E	1227	"	+ 2378	3605	− 20	3585	− 36	K	2	Halbinsel von etwa 6ᵏᵐ Durchmesser; an der Nordküste, in 1ᵏᵐ Abstand. Allgemeine Erhebung 150ᵐ, Berge bis 500ᵐ; vulkan. Ursprung.
20.	Mangalore	12 51 37 N	72 33 E	1163	"	+ 2375	3538	− 20	3518	+ 31	K	2	In 30ᵏᵐ Abstand steigt das Land rasch zu dem südlichen Plateau Vorderindiens an.
21.	Bahia	12 59 21 S	40 51 W	1215	Sabine	+ 2370	3585	+ 8 − 40	3553	− 4	K	65	Sehr steile Küste; tiefe Erdschicht über Sandstein; erloschener Vulkan.
22.	Bangalore S.	13 0 41 N	75 17 E	1107	B. u. H.	+ 2369	3476	+ 111	3587	− 38	F	950	Hochplateau.
23.	Madras	13 4 8 N	77 57 E	1168 [1186]	" Gold.	+ 2367	3535	+ 1 − 20	3516 [3534]	+ 33 [+ 15]	K	8	5ᵏᵐ von der Küste.
24.	Bangalore N	13 4 56 N	75 22 E	1121	B. u. H.	+ 2366	3487	+ 107	3594	− 45	F	917	Hochplateau.
25ᵃ.	Guam, Ladronen Inseln	13 26 18 N	142 26 E	1406	Lütke	+ 2351	3757	− 150	3607	− 58	I	.	Kalkeilande mit flachen Küsten und Korallenriffen. Die nördlich gelegenen Inseln sind thätige Vulkane.
25ᵇ.	"	13 27 51 N	142 38 E	1460	Freyc.	+ 2350	3810	− 150	3660	− 111	I	.	

Nr.	Name.	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. $\mathfrak{L}$	Autorität.	0,002636 × cos 2 B.	$\mathfrak{L}$ reduziert auf 45° Br. $\mathfrak{L}'$	Kondens.-Red.	$\mathfrak{L}'$ reduziert wegen Massenkond. $\mathfrak{L}''$	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
26.	Namthabad	15° 5′ 52″ N	75° 19′ E	0,99 1205	B. u. H.	+ 2278	0,99 3483	+ 42	0,99 3525	+ 24	F	358m	Hochebene; Boden sandig über black cotton soil.
27.	St. Helena	15 56 7 S	8 1 W	1581	Ausgl.	+ 2239	3820	+ 1, − 175	3646	− 97	I	9	Erloschener Vulkan, Basalt, Quarzfels, Erde; nahe Berge bis 1000m; steile Küste; Fläche 2 □ Mln.
28.	Cocanada	16 56 21 N	79 58 E	1379	B. u. H.	+ 2189	3568	− 20	3548	+ 1	K	8	50km nördl. Berge bis 900m hoch.
29.	Kodangal	17 7 57 N	75 21 E	1325	„	+ 2179	3504	+ 68	3572	− 23	F	584	Hochland, etwas wellig, nördl. zerrissen und in einigen Km. steil abfallend. Black cotton soil.
30.	Jamaica	17 56 7 N	79 14 W	1497	Sabine	+ 2136	3633	− 20	3613	− 64	(I)	8	301 □ Mln. grofs; Kalk.
31.	Damargida	18 3 17 N	75 23 E	1328	B. u. H.	+ 2130	3458	+ 69	3527	+ 22	F	593	Hochland; auf einer Hügelkette am Flufsufer mit langsamem Abfall. Black cotton soil.
32.	Colaba (Bombay) ..	18 53 46 N	70 31 E	1541	„	+ 2083	3624	+ 1, − 20	3605	− 56	K	11	Spitze einer kl. Halbinsel; trap rock. In 60km Distanz steigt das grofse Tafelland an, Berge bis 1200m.
33.	Somtana	19 5 0 N	75 22 E	1435	„	+ 2073	3508	+ 60	3568	− 19	F	522	Auf einem Berge des Hochlands; 75m tief steiler Abfall. Trap rock.
34.	Isle de France	20 9 40 S	55 8 E	1805	Ausgl.	+ 2009	3814	− 170	3644	− 95	I	.	Erloschener Vulkan mit steilen Küsten; Berge von 900m.
35.	Badgaon	20 44 28 N	75 19 E	1537	B. u. H.	+ 1975	3512	+ 40	3552	− 3	F	342	Auf einer sanften Anschwellung eines ausgedehnten Rückens.
36.	Mauwi, Sandwich I. ..	20 52 7 N	159 2 W	1794	Freyc.	+ 1967	3761	− 150	3611	− 62	I	.	Vulkanisch; Fläche 35 □ Mln.
37.	San Blas de California	21 32 24 N	107 36 W	1577	Hall	+ 1926	3503	+ 4, − 27	3480	+ 69	K	35	Plateau eines cylindr. Basaltfelsens von 150m Durchmesser. Südlich Vulkane.
38.	Calcutta	22 32 55 N	86 4 E	1712	B. u. H.	+ 1861	3573	+ 1, − 10	3564	− 15	K	6	15 Mln. v. d. Küste; angeschwemmtes Land.
39.	Rio Janeiro	22 55 17 S	45 38 W	1712	Ausgl.	+ 1837	3549	+ 2, − 13	3538	+ 11	K	22	Granit; erloschener Vulkan in der Nähe.
40.	Ahmadpur	23 36 21 N	75 23 E	1710	B. u. H.	+ 1791	3501	+ 59	3560	− 11	F	516	Hochland; auf einem isolierten Sandsteinhügel, 90m über der Umgegend.

Nr.	Name.	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. $\mathfrak{L}$	Autorität.	0,002636 $\times \cos 2B$.	$\mathfrak{L}$ reduziert auf 45° Br. $\mathfrak{L}'$	Kondens.-Red.	$\mathfrak{L}'$ reduziert wegen Massenkond. $\mathfrak{L}''$	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
				0,99			0,99		0,99				
41.	Kalianpur	24° 7′ 11″ N	75°22′ E	1762	B. u. H.	+ 1756	3518	+ 63	3581	− 32	F	538m	Hochland; hügeliger Felsboden.
42.	Pahargarh	24 56 7 N	75 24 E	1771	„	+ 1699	3470	+ 58	3528	+ 21	F	500	Hochland; flacher Gipfel eines 45m hohen Sandsteinhügels.
43.	Usira	26 57 6 N	75 20 E	1961	„	+ 1553	3514	+ 26	3540	+ 9	F	247	Auf einem Hügel 60m über der Umgebung. Rother Sandstein.
44.	Bonin Insel	27 4 9 N	140 0 E	2356	Lütke	+ 1545	3901	− 120	3781	− 232	I	.	Vulkanisch, Basalt; tiefes Wasser ringsum. Fläche der ganzen Gruppe 5 □Mln.
45.	Dataira	28 44 5 N	75 21 E	2078	B. u. H.	+ 1417	3495	+ 26	3521	+ 28	F	218	Flacher Alluvialboden.
46.	Kaliana	29 30 55 N	75 22 E	2096	„	+ 1356	3452	+ 29	3481	+ 68	F	247	Ebener, sandiger Boden.
47.	Nojli	29 53 28 N	75 23 E	2108	„	+ 1327	3435	+ 31	3466	+ 83	F	269	Desgl.
48.	Dehra	30 19 29 N	75 46 E	2039	„	+ 1292	3331	+ 73	3404	+ 145	F	683	Am Fuße des Himalaya; von hier rascher Anstieg!
49.	Mussoorie	30 27 41 N	75 47 E	2122	„	+ 1281	3403	+ 220	3623	− 74	F	2109	Gipfel eines Berges im südlichen Ausläufer des Himalaya.
50.	Ismailia	30 35 55 N	29 56 E	2249	„	+ 1270	3519	+ 1	3520	+ 29	F	10	—
51.	Meean Meer	31 31 37 N	72 6 E	2257	„	+ 1195	3452	+ 25	3477	+ 72	F	215	Flacher, sandiger Boden.
52.	Valparaiso	33 2 30 S	74 2 W	2500	Lütke	+ 1068	3568	− 40	3528	+ 21	K	.	Granit.
53.	Moré	33 15 39 N	75 34 E	1984	B. u. H.	+ 1050	3034	+ 540	3574	− 25	F	4696	Im Himalaya; Boden: verwitterter Felsen. In 6km Abstand 750m höher.
54.	Paramatta	33 48 43 S	148 40 E	2564	Brisb.	+ 1004	3568	+ 2 − 35	3585	+ 14	K	23	30km von der Küste.
55.	Port Jackson	33 51 37 S	149 0 E	2625	Ausgl.	+ 1000	3625	− 35	3590	− 41	K	.	Die ganze Bai von Felsen umsäumt.
56.	Kap d. g. Hoff.	33 56 3 S	16 9 E	2580	„	+ 993	3673	+ 1 − 33	3641	− 92	K	10	Sand mit Steinen. Berge in 4km Abstand 1000m hoch.
57.	Montevideo	34 54 26 S	58 30 W	2641	Foster	+ 910	3551	− 7	3544	+ 5	K	4	Station auf kl. Eiland dicht am Gestade im Hafen. Granit und Glimmerschiefer.
58.	Lipari	38 28 37 N	12 37 E	3097	Biot	+ 595	3692	+ 1 − 10	3688	− 134	I	9	Thätig vulkan. Gegend; Erhebungen nahebei 300—900m.

Nr.	Name.	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. $\mathfrak{L}$	Autorität.	$0{,}002636 \times \cos 2B$.	$\mathfrak{L}$ reduziert auf 45° Br. $\mathfrak{L}'$	Kondens.-Red.	$\mathfrak{L}'$ reduziert wegen Massen-kond. $\mathfrak{L}''$	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
				0,99			0,99		0,99				
59.	Formentera	38° 39′ 56″ N	0° 55′ W	3065	Biot	+ 578	3643	+ 24 − 40	3627	− 78	I	203ᵐ	2 □ Min. Fläche.
60.	Ararat	39 46 12 N	42 2 E	2922	Parrot	+ 478	3400	+ 225	3625	− 76	F	1883	1840 noch thätiger Vulkan.
61.	Jelisabethpol	40 40 53 N	44 1 E	3114	Kuhlb.	+ 396	3510	+ 50	3560	− 11	F	427	Im Thale des Kur südl. vom Kaukasus.
62.	Hoboken-New York	40 44 31 N	76 22 W	3191	Ausgl.	+ 391	3582	+ 2 − 23	3561	− 12	K	15	Flache Küste; in N. Y. 30ᵐ Sand auf Serpentin.
63.	Barcelona	41 23 15 N	0 12 W	3251	Biot	+ 332	3583	− 27	3556	− 7	K	4	Steiler Küstenabfall.
64.	Batum	41 39 28 N	39 18 E	3296	Kuhlb.	+ 307	3603	− 20	3583	− 34	K	2	—
65.	Tiflis	41 41 28 N	42 28 E	3190	Ausgl.	+ 304	3494	+ 56	3550	− 1	F	435	Flufsthal.
66.	Duschett..........	42 4 49 N	42 22 E	3078	Kuhlb.	+ 268	3346	+ 100	3446	+ 103	F	846	Kaukasus; meist Kalkgebirge.
67.	Gudaur	42 29 17 N	42 8 E	3103	„	+ 231	3334	+ 265	3599	− 50	F	2247	Kaukasus; Abhang des Kasbek.
68.	Wladikawkas......	43 1 59 N	42 21 E	3321	„	+ 180	3501	+ 82	3583	− 34	F	693	Kaukasus; Pafs am Kasbek: Berg 5043ᵐ hoch aus Trachytporphyr.
69.	Toulon	43 7 20 N	3 36 E	3402	Dup.	+ 172	3574	− 27	3547	+ 2	K	.	—
70.	Figeac............	44 36 45 N	0 17 W	3451	Biot	+ 36	3487	+ 26	3513	+ 36	F	223	Hochland.
71.	Bordeaux	44 50 26 N	2 54 W	3470	„	+ 15	3485	+ 2	3487	+ 62	F	17	7 Min. v. d. langsam abfallenden Küste entfernt.
72.	Fiume	45 19 0 N	12 8 E	3595	„	− 29	3566	+ 8	3574	− 25	(K)	65	Kontinental wegen geringer Tiefe des Adriatischen Meeres. Der 1000ᵐ hohe Karst nahebei.
73.	Ismail	45 20 34 N	26 29 E	3550	Saw.	− 32	3518	+ 4	3522	+ 27	F	30	12 Min. v. d. Küste des Schwarzen Meeres.
74.	Padua	45 24 3 N	9 32 E	3623	Biot	− 37	3586	+ 3	3589	− 40	F	31	4 Min. v. d. Küste.
75.	Mailand	45 28 1 N	6 51 E	3549	„	− 43	3506	+ 18	3524	+ 25	F	150	Am Fufse der Alpen.
76.	Clermont-Ferrand ..	45 46 48 N	0 46 E	3554	„	− 72	3482	+ 47	3529	+ 20	F	406	Gebirgig; in 9ᵏᵐ Abstand ein 1200ᵐ hoher Berg.
77.	Kischinef	47 1 30 N	26 29 E	3730	Saw.	− 186	3544	+ 11	3555	− 6	F	92	—

Nr.	Name.	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. $\mathfrak{L}$	Autorität.	0,002636 $\times \cos 2B$.	$\mathfrak{L}$ reduziert auf 45° Br. $\mathfrak{L}'$	Kondens.-Red.	$\mathfrak{L}'$ reduziert wegen Massenkond. $\mathfrak{L}''$	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
				0,99			0,99		0,99				
78.	Kamenetz	48°40′39″ N	24°14′ E	3858	Saw.	— 338	3520	+ 21	3541	+ 8	F	178m	—
79.	Paris	48 50 14 N	0 0	3882 [3937]	Ausgl. Peirce	— 352	3530	+ 8	3538 [3593]	+ 11 [— 44]	F	70	—
80.	Mannheim	49 29 11 N	6 8 E	3906	Albr.	— 412	3494	+ 8	3502	+ 47	F	125	Ebene Gegend.
81.	Kremenetz	50 6 8 N	23 23 E	4013	Saw.	— 467	3546	+ 35	3581	— 32	F	297	Hochland.
82.	Shanklin Farm Insel Wight.	50 37 24 N	3 32 W	4042	Kater	— 514	3528	+ 7	3535	+ 14	[I]	74	Festlandscharakter wegen geringer Meerestiefe. Hügelig; Thon und Kalk.
83.	Bonn	50 43 45 N	4 46 E	4072	Albr.	— 523	3549	+ 5	3554	— 5	F	62	Flach; Hügel nahe.
84.	Inselsberg	50 51 11 N	8 8 E	4078	„	— 535	3543	+ 77	3620	— 71	F	910	Einer der höchsten Gipfel der Gegend.
85.	Seeberg	50 56 6 N	8 28 E	4069	„	— 542	3527	+ 30	3557	— 8	F	353	Gebirgig.
86.	Gotha	50 56 38 N	8 23 E	3989	„	— 543	3446	+ 27	3473	+ 76	F	315	Desgl.
87.	Dünkirchen	51 2 10 N	0 3 E	4099	Biot	— 551	3548	+ 0	3548	+ 1	(K)	0	Wegen geringer Kanaltiefe von kontinentalem Charakter.
88.	Kew	51 28 6 N	2 39 W	4169	Ausgl.	— 590	3579	+ 0	3579	— 30	F	5	Eben.
89.	Greenwich	51 28 40 N	2 20 W	4143	„	— 591	3552	+ 6	3558	— 9	F	48	Auf einem Hügel.
90.	London	51 31 8 N	2 26 W	4140	„	— 595	3545	+ 3	3548	+ 1	F	28	Hügelig; Thon, Kiesel, Kalk.
91a.	Falkland Inseln St. Louis	51 31 44 S	60 28 W	4154	Dup.	— 596	3558	— 15	3543	+ 6			Küstencharakter, da der Meeresboden bis zum Kontinent geringe Tiefe besitzt.
91b.	French Bay	51 35 18 S	60 24 W	4077	Freyc.	— 601	3476	— 15	3461	+ 88	(I)	.	
92.	Belin	52 2 22 N	22 53 E	4179	Saw.	— 641	3538	+ 16	3554	— 5	F	141	Weithin Sümpfe.
93.	Leyden	52 9 20 N	2 9 E	4210	Albr.	— 652	3558	+ 0	3558	— 9	(K)	0	Ebene Gegend, Alluvium. Von kontinentalem Charakter wegen geringer Tiefe der Nordsee.
94.	Arbury Hill	52 12 55 N	3 33 W	4223	Kater	— 657	3566	+ 21	3587	— 38	F	225	Kalk u. Serpentin; Bergeshöhe 245m.
95.	Berlin	52 30 16 N	11 4 E	4235	Ausgl.	— 683	3552	+ 3	3555	— 6	F	35	Sandboden.
96.	Petropawlowsk	53 0 59 N	156 23 E	4350	Lütke	— 729	3621	— 33	3588	— 39	K	.	Steile Küste; Quarzfels.

Nr.	Name.	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. $\mathfrak{L}$	Autorität.	0,002636 × cos 2 B.	$\mathfrak{L}$ reduziert auf 45° Br. $\mathfrak{L}'$	Kondens.-Red.	$\mathfrak{L}'$ reduziert wegen Massenkond. $\mathfrak{L}''$	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
				0,99			0,99		0,99				
97.	Clifton	53° 27′ 43″ N	3° 33′ W	4311	Kater	— 767	3544	+ 10	**3554**	— 5	F	104m	Lehm und Schieferthon; Bergeshöhe 127m.
98.	Altona............	53 32 45 N	7 36 E	4342	Ausgl.	— 774	3568	+ 2	**3570**	— 21	F	31	Hügeliges Ufer.
99.	Güldenstein	54 13 9 N	8 30 E	4392	„	— 834	3558	+ 5	**3563**	— 14	F	67	Hügelig.
100.	Wilna	54 41 2 N	22 58 E	4424	Saw.	— 874	3550	+ 12	**3562**	— 13	F	101	—
101.	Königsberg	54 42 50 N	18 10 E	4439	Ausgl.	— 877	3562	+ 2	**3564**	— 15	F	22	Eben. Wir haben $\mathfrak{L}$ nach Bouguers Formel, mit 0,625 als Koeff. reduziert, angesetzt.
102.	Staten Island......	54 46 23 S	66 19 W	4501	Foster	— 882	3619	— 10	**3609**	— 60	(I)	5	Küstencharakter; 12 □Mln. Fläche. Grauwacke, Quarzfels vermischt mit Lehmschichten; nördl. Berge bis 600m.
103.	Kap Horn.........	55 51 20 S	69 50 W	4565	„	— 975	3590	+ 1 / — 7	**3584**	— 35	K	12	Stat. ganz nahe der Küste, nur 50m Abstand; steile Felsmassen, Grünstein, Hornblende; Berg von 600m Höhe nahe.
104.	Leith	55 58 39 N	5 30 W	4550	Ausgl.	— 986	3564	+ 2	**3566**	— 17	(K)	21	Festlandscharakter wegen geringer Tiefe der See; Sandstein u. zerstreuter Basaltfels; hügelig.
105.	Jakobstadt........	56 30 3 N	23 26 E	4547	Saw.	— 1031	3516	+ 10	**3526**	+ 23	F	83	Ebene Gegend.
106.	Sitka.............	57 3 0 N	137 40 W	4621	Lütke	— 1076	3545	— 17	**3528**	+ 21	K	.	Insel von festländischem Charakter.
107.	Portsoy...........	57 40 59 N	5 2 W	4707	Kater	— 1129	3578	+ 4	**3582**	— 33	(K)	29	Festlandscharakter wegen geringer Tiefe der See. Plateau. Serpentin und Granit.
108.	Dorpat	58 22 49 N	24 24 E	4744	Ausgl.	— 1177	3567	+ 7	**3574**	— 25	F	58	Hügelig; die Höhe im Mittel der Angaben.
109.	Reval	59 26 37 N	22 25 E	4836	Saw.	— 1274	3562	+ 0	**3562**	— 13	(K)	3	Festlandscharakter wegen geringer Tiefe der See; flach.
110.	Pulkowa..........	59 46 19 N	27 59 E	4854	„	— 1300	3554	+ 9	**3563**	— 14	F	75	Hügelig.
111.	Petersburg........	59 56 30 N	27 59 E	4876	Ausgl.	— 1314	3562	+ 1	**3563**	— 14	F	8	Kalkstein.
112.	Unst	60 45 27 N	3 11 W	4959	„	— 1378	3581	+ 1	**3582**	— 33	[I]	9	Festlandscharakter wegen geringer Tiefe der See. Serpentin.

Nr.	Name.	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. $\mathfrak{L}$	Autorität.	0,002686 × cos 2 B.	$\mathfrak{L}$ reduziert auf 45° Br. $\mathfrak{L}'$	Kondens.-Red.	$\mathfrak{L}'$ reduziert wegen Massenkond. $\mathfrak{L}''$	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
				0,99			0,99		**0,99**				
113.	Süd Shetland I. . . .	62° 56′ 11″ S	62° 51′ W	5176	Foster	— 1545	3631	$+\frac{1}{20}$	**3612**	— 63	I	7m	Thätige Vulkane; Tuff, Lava. Im N. E. Berge von 600m.
114.	Nicolaistadt	63 5 33 N	19 17 E	5087	Saw.	— 1557	3530	+ 2	**3582**	+ 17	(K)	14	Festlandscharakter wegen geringer Tiefe der See.
115.	Drontheim	63 25 54 N	8 3 E	5039	Sabine	— 1582	3457	+ 4	**3461**	+ 88	(K)	37	Desgl.; Thon auf Glimmerschiefer.
116.	Tornea	65 50 43 N	21 54 E	5365	Saw.	— 1753	3612	+ 0	**3612**	— 63	(K)	4	Desgl.
117.	Kandalaks	67 7 43 N	30 6 E	5356	Lütke	— 1840	3516	+ 0	**3516**	+ 33	(K)	.	Desgl.; Niederung; Granit.
118.	Hammerfest	70 40 5 N	21 25 E	5557	Sabine	— 2058	3499	+ 1	**3500**	+ 49	(K)	9	Halbinsel am Hafen in tiefem Wasser; doch im ganzen kontinentaler Charakter. Glimmerschiefer.
119.	Port Bowen	73 18 39 N	91 15 W	5778	Foster	— 2198	3580	+ 4	**3584**	— 35	[I]	37	Insel von Kontinentalcharakter. Kalkstein.
120.	Grönland, Ostküste . .	74 32 19 N	21 10 W	5778	Sabine	— 2261	3517	$+\frac{1}{20}$	**3498**	+ 51	K	10	Sandstein.
121.	Melville, Südostseite .	74 47 12 N	113 8 W	5861	„	— 2273	3588	$+\frac{1}{10}$	**3579**	— 30	K	10	900 □Mln. große Insel. Sandsteinchen mit Sand.
122.	Spitzbergen	79 49 58 N	9 20 E	6067	„	— 2472	3595	$+\frac{1}{10}$	**3586**	— 37	K	6	1500 □Mln. große Insel; vor der Küste liegen 1—2 Mln. breit die Wallroßbänke; Berge bis 1800m hoch. Quarzfels.

Zu vorstehender Zusammenstellung der Längen des Sekundenpendels $\mathfrak{L}$, reduziert mit *Bouguers* Formel, wie sie sich zufolge der Ausgleichung ergeben, ist noch zu erwähnen, dafs die geogr. Längen teils nach den Originalangaben, teils mit Benutzung vorhandener Zusammenstellungen (von *Borenius* und *A. Fischer*) unter Kontrolle durch Karten angesetzt sind.*) Die Zahl 0,002636, welche zur Reduktion der Pendellängen auf 45° dient, entspricht einer vorläufigen Ausgleichung. Diese reduzierten Pendellängen $\mathfrak{L}'$ enthalten selbstverständlich ebenfalls sämtlich nur die *Bouguer*sche Reduktion; die Reduktion nach der Kondensationsmethode auf die Werte $\mathfrak{L}''$ erfordert weitere Reduktionsglieder, welche nach Näherungsformeln berechnet sind, wie es der nächste Paragraph angeben wird.

Die Bemerkungen über lokale Verhältnisse sind zumeist den Originalquellen entlehnt, teilweise aber auch aus Karten entnommen. Der allgemeine geologische Charakter: Festland, Küste oder Insel, ist durch *F*, *K* und *I* bezeichnet. Eine Parenthese um diese Symbole bedeutet, dafs für die Kondensation ein anderer Charakter mafsgebend war.

§ 30. **Die Kondensations-Reduktionen** vorstehender Tabelle konnten wegen uns mangelnder genauer Spezialkarten nur mehr oder weniger roh ausgeführt werden. Dabei wurde ausgegangen für kleine Inseln von der Formel (6) S. 181, welche für die Länge $\mathfrak{L}$ des Sekundenpendels, insofern dieselbe der Schwerkraft proportional ist, als Reduktion giebt in Bruchteilen von $\mathfrak{L}$:

$$-\frac{3(\Theta-1)}{11,2}\,\frac{h}{R}\,\frac{1}{n}\,\log\mathrm{nat}\,(n+\sqrt{n^2+1}) \tag{1}$$

mit

$$n = h\cot\nu : \mathfrak{a}R\,, \tag{2}$$

für Küsten von der Formel (4) S. 182:

$$-\frac{3(\Theta-1)}{11,2}\,\frac{h}{R}\,\frac{1}{n}\,\frac{\log\mathrm{nat}\sqrt{n^2+1}+n\arctan\frac{1}{n}}{\pi}\,. \tag{3}$$

Hierin ist Θ die Dichtigkeit der Insel- bezw. Küstenmasse, h die Tiefe des Meeres in der weiteren Umgebung, $\mathfrak{a}R$ die lineare Abplattung der Erde, $\tan\nu$ das Gefälle der Böschung.

Mit Rücksicht auf die Unvollkommenheit dieser Formeln behufs einer genauen Darstellung der Reduktionen erschien es ausreichend, dieselben in folgender Weise zu vereinfachen. Es wurde allgemein $\mathfrak{L} = 1^m$, $\Theta = 2,8$, $\mathfrak{a}R = 21^{km}$ gesetzt; da sich ferner n in allen Fällen mindestens gleich 2,5, meist aber mehr als doppelt so grofs fand, wurde

*) Der Meridian von *Ferro* liegt 20° westlich *Paris*, derjenige von *Greenwich* = 2° 20′ westlich *Paris*.

$$\log(n + \sqrt{n^2+1}) = \log 2n\,, \qquad \log\sqrt{n^2+1} = \log n$$

und

$$n \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{n} = 1$$

$$\frac{\operatorname{lognat} n + 1}{n} = \frac{\operatorname{lognat} 2n}{3}$$

gesetzt. Letzteres giebt einen Fehler, der indes in den ungünstigsten vorkommenden Fällen kaum einige Mikrons in $\mathfrak{L}$ ausmacht und sich überdies z. T. mit einer Vernachlässigung, die in (3) bereits eingeführt ist, kompensiert.

Die Formeln werden nun für Mikrons als Längeneinheit:

$$\underset{\text{für Inseln}}{\text{Red.}} = -\,1600 \tan\nu \operatorname{lognat} 2n \tag{4}$$

mit

$$n = h^{km} \,.\, \cot\nu : 21\,, \tag{5}$$

und

$$\left\{\underset{\text{für Küsten}}{\text{Red.}}\right\} = \frac{1}{3}\,.\left\{\underset{\text{für Inseln}}{\text{Red.}}\right\}. \tag{6}$$

Um die Berechnung des Ausdruckes rechter Hand in (4) zu erleichtern und zugleich bequem erkennen zu lassen, welchen Einfluſs Änderungen von h und $\tan\nu$ auf die Reduktionsgröſse haben, wurde eine graphische Tafel für diesen Ausdruck nach *Lalannes* Methode hergestellt.*) Wird die negative Reduktion (4) mit C bezeichnet, so giebt (4):

$$\log C = \log(1600 \tan\nu) + \log(\operatorname{lognat} 2n)\,.$$

Betrachtet man nun $\log(1600\tan\nu)$ als Abscisse x, $\log(\operatorname{lognat} 2n)$ als Ordinate y, so stellt

$$\log C = x + y$$

für konstantes C die Gleichung einer Geraden vor, die gegen die Koordinatenaxen unter 45^0 geneigt ist. Die zu verschiedenen C gehörigen Geraden sind parallel.

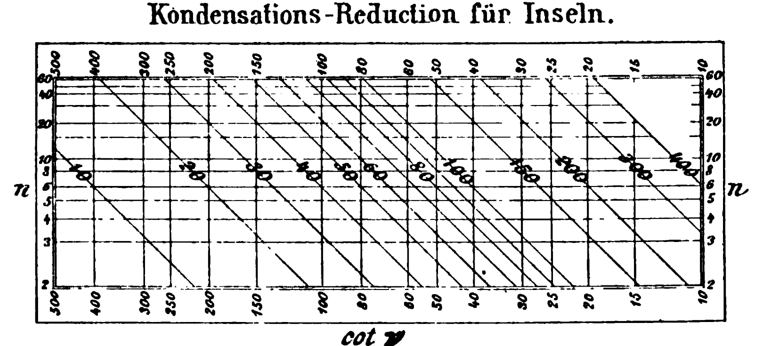
Fig. 31 zeigt die Geraden für $C = 10, 20, \ldots 400$ Mikrons. Jeder Geraden ist der betreffende Wert C fett aufgedruckt. Das Koordinatennetz der x und y ist unterdrückt; es sind vielmehr für verschiedene Werte von n und $\cot\nu$ Parallelen zur x- und y-Axe angegeben. Ein Versuch wird dem Leser zeigen, daſs die Konstruktion der Tafel sehr rasch und, da nur gerade Linien vorkommen, verhältnismäſsig genau zu bewerkstelligen ist.

Die Reduktionselemente n und $\tan\nu$ wurden fast ausschlieſslich mittelst der Tiefenkarten abgeleitet, welche *Richard Andrees allgemeiner Handatlas* giebt. Es fand sich, daſs für die Küsten die Unsicherheit der Reduktion im Durchschnitt kaum 5 Mikrons beträgt, also wesentlich kleiner ist, als die Unsicherheit der meisten Pendellängen infolge von Beobachtungsfehlern, vergl. S. 214. Erheblich ungenauer

*) Vergl. *Vogler*, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln etc. Berlin 1877.

aber sind die Inselreduktionen, weil jene Karten die Böschungsverhältnisse der Inseln nicht genau genug erkennen lassen. Da indessen nur auf wenigen kleinen Inseln beobachtet worden ist, die Inselwerte

Kondensations-Reduction für Inseln.



Die Reduction ist für die Länge des Sekundenpendels in Mikrons zu verstehen.

Fig. 31.

zur Ableitung der Abplattung auch nicht benutzt werden, so wurde mit Rücksicht auf die entstehende gröfsere Mühe eine genaue Reduktion für jetzt nicht in Angriff genommen.

Erwähnt sei noch, dafs in einigen Fällen weder genau die Küsten-, noch genau die Inselformel zur Anwendung kam, sondern eine Schätzung in der Weise vorgenommen wurde, dafs die Ergebnisse dieser Formeln mit einem Faktor multipliziert auftreten. In dieser Beziehung genügt es darauf hinzuweisen, dafs für einen Punkt auf einer Landenge die Reduktion annähernd das Doppelte der Küstenkorrektion sein wird, und ferner, dafs bei verschiedenen Böschungsverhältnissen einer Insel auf verschiedenen Seiten die Reduktion sich zusammensetzt aus den, den verschiedenen Verhältnissen entsprechenden Werten der Reduktionen, multipliziert mit dem entsprechenden Bruchteil des Umfanges.

Die Kondensationsreduktion auf dem Festlande und überhaupt für Erhebungen des Beobachtungsortes über das Meeresniveau wurde einfach nach Mafsgabe des in der *Bouguer*schen Formel auftretenden Gliedes, welches von der Anziehung der zwischen dem Meeresniveau und dem Beobachtungsorte liegenden Schicht abhängt, ausgeführt, dergestalt, dafs dieses Glied im Endwerte ganz beseitigt erscheint. Hierbei sind die Angaben der Spezialtabellen §§ 25 und 26 zu vergleichen. In einigen wenigen Fällen war die angewandte Meereshöhe uns unbekannt; dann ist vorstehende Reduktion unterblieben. Übrigens ist in diesen Fällen die Meereshöhe jedenfalls klein, der Fehler also gering.

Völlig streng ist das auf dem Festlande eingeschlagene Verfahren allerdings nur im weithin ebenen Terrain; im Gebirge also werden bei einer strengen Kondensation nach Vorschrift von § 20 noch Änderungen eintreten. Trotzdem diese z. T. nicht unerheblich ausfallen, (vergl. S. 186 § 23), so haben wir doch auch hier vom strengen Ver-

fahren abgesehen, weil eine Überschlagsrechnung zeigte, dafs die weiterhin gezogenen Resultate nicht wesentlich beeinflufst werden. Es sind der Fälle, wo eine bedeutende Vernachlässigung stattfindet, verhältnismäfsig nicht viele, und z. T. tritt eine Kompensation ein, wie im *Himalaya*, dem *Kaukasus* und in *Thüringen*, wo zu den negativen Fehlern der Hochstationen positive Fehler von Stationen am Fufse der Gebirge kommen.

§ 31. **Erfolg der Kondensationsmethode.** Aus den auf 45° Breite reduzierten Werten $\mathfrak{L}'$ für die Länge des Sekundenpendels wurden nun Mittelwerte gebildet für die acht Breitenintervalle 0° bis 10°, 10° bis 20° u. s. f., wie dies nachfolgende Tabelle zeigt. Für den Zweck der Aufstellung einer Interpolationsformel ist noch der hundertste Teil des arithmetischen Mittels der Reduktion auf 45° Breite beigefügt.

Breite.	Charakt.	Anzahl.	Mittelwert von $\mathfrak{L}'$ (unkondens.)	Kond.-Red.	Mittelwert von $\mathfrak{L}''$ (kondens.)	Koefficient f. d. Ausgleich.
0—10°	*F*	1	0,99 3529	+ 10	0,99 3539	+ 24,9
	K	8	3591	— 20	3572	+ 25,6
	I	7	3742	— 121	3621	—
10—20	*F*	7	0,99 3490	+ 70	0,99 3560	+ 22,9
	K	8	3579	— 21	3558	+ 22,9
	I	3	3796	— 158	3638	—
20—30	*F*	8	0,99 3487	+ 42	0,99 3529	+ 16,1
	K	3	3542	— 14	3527	+ 18,8
	I	3	3825	— 147	3679	—
30—40	*F*	6	0,99 3357	+ 181	0,99 3537	+ 10,9
	K	5	3597	— 29	3567	+ 9,9
	I	2	3668	— 13	3655	—
40—50	*F*	16	0,99 3494	+ 44	0,99 3538	+ 0,0
	K	4	3586	— 24	3562	+ 3,0
	I	—	—	—	—	—
50—60	*F*	26	0,99 3548	+ 11	0,99 3559	— 7,8
	K	6	3568	— 16	3552	— 8,1
	I	—	—	—	—	—
60—70	*F*	5	0,99 3539	+ 1	0,99 3540	— 16,2
	K	—	—	—	—	—
	I	1	3631	— 19	3612	—
70—80	*F*	2	0,99 3540	+ 2	0,99 3542	— 21,3
	K	3	3567	— 12	3554	— 23,3
	I	—	—	—	—	—

Der Erfolg der Kondensationsreduktion zeigt sich zunächst in einer besseren Übereinstimmung der Werte in verschiedenen Breiten für jeden der drei Charaktere *F*, *K* und *I*; er tritt ferner deutlich hervor in einer grofsen gegenseitigen Annäherung der Werte für Festland-, Küsten- und Inselcharakter. Für *F* und *K* ist beinahe jeder Unterschied geschwunden. Berechnet man aus den sieben Differenzen $F - K$ einen Mittelwert des Unterschiedes der Pendellängen, indem man dabei diesen Differenzen Gewichte $n_1 n_2 : (n_1 + n_2)$ beilegt, n_1 Anzahl für *F*, n_2 für *K*, so folgt für Mikrons als Längeneinheit:

$$F = K - 8 \pm 6\,,$$

wobei ± 6 den aus der Übereinstimmung berechneten mittleren Fehler bezeichnet. Dagegen folgt

$$F = I - 105 \pm 16\,.$$

Man kann hiernach in der That $F - K$ als null annehmen, selbst wenn man berücksichtigt, dafs bei genauerer Reduktion der Festlandsstationen die Differenz sich um ein paar Mikrons vergröfsern würde. Von null verschieden ist aber unzweifelhaft die Differenz $F - I$. Vielleicht liegt dieses z. T. daran, dafs die Inselreduktionen trotz entgegen wirkender Vernachlässigungen der Formel (4) des vorigen Paragraphen etwas zu klein sind, weil die Formel konstante Böschung voraussetzt, während diese vielleicht in der Nähe der Meeresfläche steiler als in gröfserer Tiefe ist. Zum Teil liegt es auch wohl an der Annahme 2,8 für die Dichtigkeit, die jedenfalls in mehreren Fällen einen um etwa 0,3 höheren Wert hat. Ein Teil der Differenz dürfte aber reell sein. Es läfst sich dieselbe auch nicht wesentlich vermindern durch eine ein wenig veränderte Tiefe der Kondensationsfläche. Die Formel (1) S. 223 zeigt, dafs eine Vergröfserung der Inselreduktionen von durchschnittlich 130 auf 230 eine so aufserordentliche Verkleinerung von *n* d. h. eine so bedeutende Vergröfserung der Tiefe der Kondensationsfläche erfordert, dafs sich dadurch auch die Gestalt der Meeresfläche in einem Betrage ändern würde, der nicht mehr zu vernachlässigen ist.

Übrigens braucht man, wenn wirklich wie es scheint, $I > F$ ist, noch nicht anzunehmen, dafs auch auf dem Meere im allgemeinen die Länge des Sekundenpendels gröfser ist, als auf dem Festlande. Wenn die Inseln Massenanhäufungen sind, denen unterhalb in der Erdrinde nicht Massendefekte entsprechen, würde vielmehr notwendig $I > F$ sein, wenn auch auf Meer und Festland im allgemeinen gleiche Länge des Sekundenpendels vorhanden wäre. Die Entscheidung der Frage kann nur durch Messungen der Schwerkraft auf dem Meere selbst erfolgen und wird einen Beitrag liefern zur Kenntnis der Konstitution der Erdrinde.*)

*) Man vergleiche hierzu auch einen Aufsatz von *Faye*, *C. R.* 1880 Bd. 90 S. 1444. Derselbe empfiehlt ebenfalls in der *Bouguer*schen Formel das Terrain-

Es mag bemerkt werden, dafs eine ähnliche Frage die ist, ob auf den Bergen die Schwerkraft im allgemeinen, nach gehöriger Reduktion, eine andere ist als in der Ebene. Zur Entscheidung dieser Frage sind gerade in diesem Falle unsere Kondensationsrechnungen nicht scharf genug; wenn sie zeigen, dafs auf hohen Bergen $\mathfrak{C}''$ (mit Kondensation) gröfser ist als in der Ebene, am Fuſse hoher Berge aber kleiner als in der Ebene (vergl. nachstehende Tabelle, deren Werte ohne und mit Kondensation mit 0,993550 als Normalwert für Festland im Meeresniveau verglichen werden können), so liegt dies, namentlich bei den Bergkuppen, gröfstenteils an Reduktionsfehlern.*)

Ort.	Höhe. m	Ohne Kondensation $\mathfrak{C}$	Mit Kondensation. $\mathfrak{C}''$	Bemerkungen.
Bangalore S...	950	0,99 3476	0,99 3587	Plateau
„ N...	917	3487	3594	Plateau
Dehra	683	3331	3404	Fufs des Himalaya
Mussoorie	2109	3403	3623	Ausläufer des „
Meean Meer...	215	3452	3477	Fufs des „
Moré	4696	3034	3574	Himalaya
Ararat........	1883	3400	3625	
Duschett......	846	3346	3446	Fufs des Kaukasus
Gudaur	2247	3334	3599	Abhang des Kasbek
Wladikawkas ..	693	3501	3583	Pafs am „
Inselsberg	910	3543	3620	
Seeberg.......	353	3527	3557	
Gotha	315	3446	3473	Fufs des Seeberg.

Da sich die Anomalieen der vierten Kolumne durch genauere Rechnung vermindern oder heben, so scheint es, dafs in der That

glied wegzulassen; für die Inseln aber empfiehlt er die Anziehung des Inselpfeilers, seine Dichtigkeit vermindert um 1, abzuziehen. Es ist nun in der That richtig, dafs man auf diese Weise findet, dafs auf dem Meere und Festland ein Unterschied der Schwere nicht besteht (wir haben dies für obige Inseln mittelst der im 4. Kapitel § 17 entwickelten Näherungsformel durchgeführt und zufällig gerade das gewünschte Resultat erhalten). Der Übelstand ist nur, dafs man bei *Fayes* Verfahren von der Wahl der Pfeilerhöhe in hohem Grade abhängt, was bei der Kondensationsmethode nicht der Fall ist. Auch ist *Fayes* Verfahren kein methodisches: es giebt nicht an, wie die Reduktion wird bei nicht kleinen Inseln, bei Küsten u. s. w. Unser strenges Verfahren hat stets eine konsequente Antwort und läfst namentlich für den wichtigen Fall, dafs Küsten in betracht kommen, nicht im stich.

*) Im 6. Kap. § 16 wird erwähnt, dafs wiederholt mit leidlichem Erfolge durch Bestimmung der Pendellänge am Fufse und auf dem Gipfel eines Berges

unter hohen Bergen und Gebirgen Massendefekte auftreten, die der Anziehung der sichtbaren Massenanhäufung entgegenwirken. Vergl. hierzu auch im 4. Kapitel § 38.

§ 32. **Die Ermittelung der Interpolationsformel für die Schwerkraft** g. Wäre g im Meeresniveau überall auf der Erdoberfläche bekannt, so würde man zur Herstellung einer Entwicklung von g nach Kugelfunktionen der geographischen Breite B und Länge L nach § 28 (1) S. 116 verfahren. Darnach ist g im Punkte (B', L') gleich

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n \, g \cos B \, dB \,, \tag{1}$$

wobei die P_n als Funktionen von B', L', B und L (anstatt φ', λ', φ und λ) nach Maſsgabe von § 4 S. 57 aufzufassen sind. Leitet man andererseits g aus dem Potential W der Schwerkraft ab, so nimmt es die Form an:

$$g = G\,(1 + U_2' + U_3' + U_4' + \ldots)\,, \tag{2}$$

wenn U_2', U_3' U_4' ... Kugelfunktionen von B' und L' zweiten, dritten, vierten, ... Ranges bedeuten. Auf diese Ableitung kommen wir in § 39 dieses Kapitels.

Eine Kugelfunktion ersten Ranges fehlt in (2), wie a. a. O. sich zeigen wird und überdies im zweiten Kapitel unter Voraussetzung gewisser Normalformen für W schon hervorgetreten ist.

Von dieser Formel interessiert uns besonders die Bestimmung der Glieder G und GU_2'. Dieselbe ergiebt sich aus der Vergleichung mit den entsprechenden Gliedern in (1). Es ist, da $P_0 = 1$, das erste Glied von (1), (d. h. der Mittelwert aller g, vergl. S. 66):

$$G = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos B \, dB \,. \tag{3}$$

---

die mittlere Dichtigkeit der Erde bestimmt worden ist; in solchen Fällen würde natürlich die wegen Kondensation reduzierte Pendellänge des Gipfels ein erhebliches Zuviel aufweisen. Immer aber ist dies nicht der Fall. Dies zeigte oben bereits *Moré*.

So fand auch *Foster* auf *Ascension* auf einem 680^m hohen Berge die tägliche Schwingungszahl $n = 85878{,}96$. Mit $nH : R$ reduziert giebt das 85888,13. Am Fuſse des Berges in 9^m Höhe war $n = 85887{,}44$, reduziert: 85887,56. Hier ist nur ein Zuviel von 0,57 Schwingungen oder von 14 Mikrons in $\mathfrak{L}$ (mit roher Kondensationsreduktion).

Nach *Laplace, Méc. cél.* t. 5 l. 11 p. 56, zeigen auch schon *Bouguers* Messungen in *Quito* eine ganz ähnliche Erscheinung; hier erklärt *Laplace* sich dieselbe durch den vulkanischen Charakter der Gegend, infolge dessen viele Hohlräume unterhalb der Bergmassen vorhanden sein würden.

Ferner ist das zweite Glied:

$$G U_2' = \frac{5}{4\pi} \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_2 \, g \cos B \, dB \,, \tag{4}$$

wobei nach S. 57

$$\begin{aligned} P_2 = {} & \frac{9}{4}\left(\sin^2 B - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) \\ & + 3 \cos B \cos B' \sin B \sin B' \cos(L - L') \\ & + \frac{3}{4} \cos^2 B \cos^2 B' \cos 2(L - L') \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Werden aber für die Entwicklung des Potentials W wie im zweiten Kapitel § 5 S. 59 die drei Hauptträgheitsaxen der Erde als Koordinatenaxen gewählt, so fallen in W und also auch in g, vergl. weiterhin § 39, die Glieder mit $\cos L'$, $\sin L'$ und $\sin 2L'$ weg und es bleiben nur die Glieder mit $\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right)$ sowie $\cos 2L'$ übrig. Ganz ist dies indessen bei obiger Entwicklung nicht durchführbar: man bezieht zwar die Breiten auf die Äquatorebene, es ist also die eine Koordinatenaxe die Erdaxe und somit Hauptaxe, aber die geographischen Längen kann man nicht von einer der beiden in der Äquatorebene liegenden Hauptaxen abrechnen, weil deren Lage unbekannt ist. Werden nun die geographischen Längen von einem beliebigen Meridian ab gezählt, so verschwindet (wie schon S. 60 in Parenthese erwähnt) das Glied mit $\sin 2L'$ nicht. Hiermit wird

$$\begin{aligned} G U_2' = {} & \frac{45}{16\pi}\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \left(\sin^2 B - \frac{1}{3}\right) \cos B \, dB \\ & + \frac{15}{16\pi} \cos^2 B' \cos 2L' \int_0^{2\pi} \cos 2L \, dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos^3 B \, dB \\ & + \frac{15}{16\pi} \cos^2 B' \sin 2L' \int_0^{2\pi} \sin 2L \, dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos^3 B \, dB \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Ausführung der Integrationen würde $G U_2'$, wenn man rechter Hand G als Faktor zieht, die Form annehmen

$$G U_2' = G \left\{ \mathfrak{b}_2 \left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) + \mathfrak{b}_2' \cos^2 B' \cos 2L' + \mathfrak{b}_2'' \cos^2 B' \sin 2L' \right\} \,. \tag{7}$$

Unterbleibt die Bestimmung von $\mathfrak{b}_2'$ und $\mathfrak{b}_2''$ ebenso wie diejenige der Koefficienten der höheren Kugelfunktionen, so erhält man hiermit zur Ermittelung der Formel

$$g = G\left\{1 + \mathfrak{b}_2\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) + \dots\right\} \tag{8}$$

die beiden Gleichungen

$$G = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos B \, dB \tag{9}$$

$$G\mathfrak{b}_2 = \frac{45}{16\pi}\int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \left(\sin^2 B - \frac{1}{3}\right)\cos B \, dB\,. \tag{10}$$

Nach diesen strengen Gleichungen kann jedoch die Ermittelung der Konstanten von (8) wegen mangelnden Beobachtungsmaterials nicht stattfinden. Man begnügt sich damit, und mufs dies thun, den gegebenen Werten von g eine Formel (8), oder eine äquivalente Formel, nach der Methode der kleinsten Quadrate anzupassen.

Zunächst wollen wir nun zeigen, dafs die Methode der kleinsten Quadrate streng richtige Werte ergeben würde, wenn g überall auf der Oberfläche bekannt wäre.

§ 33. **Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate** geht von Fehlergleichungen der Form

$$g + \delta = G + G\mathfrak{b}_2\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) + \dots \tag{1}$$

aus, wenn wir für g rechter Hand denjenigen Ausdruck beibehalten, welcher aus der Entwicklung nach Kugelfunktionen folgt, und wenn wir ferner mit δ eine Verbesserung des Beobachtungswertes von g bezeichnen. Da man nun g innerhalb des Elementes $d\sigma' = \cos B' dB' dL'$ der Kugeloberfläche vom Radius 1 als konstant betrachten darf, so legen wir der Gleichung (1) das Gewicht $d\sigma$ bei und denken uns die ganze Oberfläche dieser Kugel in Elemente $d\sigma'$ zerlegt und für jedes Element die Gleichung (1) angesetzt. Dann führt die übliche Bildung der Normalgleichungen zu den nachstehenden Gleichungen, die Integration über die ganze Kugeloberfläche erstreckt:

$$G\int d\sigma' = \int g \, d\sigma' \tag{2}$$

$$G\mathfrak{b}_2 \int \left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right)^2 d\sigma' = \int g \left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) d\sigma' \tag{3}$$

u. s. f.

Jede Gleichung enthält nur einen der unbekannten Koefficienten G, $G\mathfrak{b}_2$ u. s. f. Bilden wir nämlich zunächst die Normalgleichung (2) für G, so ist die Fehlergleichung (1) mit $1 \, . \, d\sigma'$ zu multiplizieren und dann zu integrieren. In Gleichung (2) nimmt nun der aus der rechten Seite von (1) hervorgehende Ausdruck zunächst die Form an:

$$G\int d\sigma' + G\int U_2'\,d\sigma' + G\int U_3'\,d\sigma' + G\int U_4'\,d\sigma' + \ldots,$$

wenn wir die rechte Seite von (1) in die Form

$$G(1 + U_2' + U_3' + U_4' + \ldots)$$

gebracht denken, worin U_2', U_3', U_4' ... die Kugelfunktionen zweiten, dritten, vierten Ranges u. s. f. von B' und L' bezeichnen. Nach § 7 (5) S. 66 oder nach der allgemeinen Gleichung (3) § 28 S. 116 verschwinden aber alle Glieder mit Ausnahme des ersten. Hiermit ist (2) als richtig nachgewiesen.

Was (3) anbetrifft, so ist ersichtlich, dafs diese Normalgleichung aus der Fehlergleichung (1) entstehen mufs, wenn dieselbe mit $\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) d\sigma'$ multipliziert und integriert wird. Die Glieder, welche aus der rechten Seite entstehen, lauten zunächst:

$$G\int\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) d\sigma' + G\int U_2'\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) d\sigma'$$
$$+ G\int U_3'\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) d\sigma' + G\int U_4'\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) d\sigma' + \ldots$$

und hier verschwinden alle Glieder bis auf das zweite nach dem Satze (4) § 28 S. 116. Es folgt also, wenn wir für $G U_2'$ nunmehr den Ausdruck (7) S. 230 restituieren:

$$G\mathfrak{b}_2\int\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right)^2 d\sigma' + G\mathfrak{b}_2'\int\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right)\cos^2 B' \cos 2L'\,d\sigma'$$
$$+ G\mathfrak{b}_2''\int\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right)\cos^2 B' \sin 2L'\,d\sigma'.$$

Man bemerkt leicht, dafs wegen $\cos 2L'$ und $\sin 2L'$ die letzten beiden Integrale verschwinden, und so bleibt nur das erste Glied, womit auch Gleichung (3) verifiziert ist.

In gleicher Weise würde sich finden, dafs bei der Bildung der Normalgleichungen aller Konstanten der in (1) etwa noch angesetzten Glieder immer nur das betreffende sogenannte quadratische Glied übrig bleibt.

Berechnet man nun zu (2) und (3) die Integrale linker Hand, nämlich

$$\int d\sigma' = 4\pi \tag{4}$$

und

$$\int\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right)^2 d\sigma' \ \text{ d. i. } \int_0^{2\pi} dL' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right)^2 \cos B'\, dB' = \frac{16}{45}\pi, \ (5)$$

so sieht man sofort, dafs (2) und (3) für G und $G\mathfrak{b}_2$ ganz dieselben Werte geben wie (9) und (10) des vorigen Paragraphen.

Mit Hilfe der S. 57 angegebenen Werte von P_3 und P_4 läfst sich die Übereinstimmung beider Methoden durch direkte Ausrechnung für alle Koefficienten der Glieder bis zum vierten Range incl. nachweisen. Es ist dieses aber nicht nötig, wenn man Satz (2) § 28 S. 116 beachtet, welcher einen allgemeinen Nachweis der Übereinstimmung gestattet. Wir überlassen dieses aber dem Leser und beschränken uns darauf, nur an dem oben entwickelten Glied zweiten Ranges dieses Verfahren zu zeigen, welches leicht auf ein beliebiges Glied übertragen werden kann.

In Gleichung (2) S. 116 nehmen wir $n = 2$ und $K_2 = \sin^2 B - \frac{1}{3}$; dann verschwinden bei der Integration wegen des Auftretens von L in P_2, vergl. (5) S. 230, diejenigen Teile von P_2, die nicht in $\left(\sin^2 B - \frac{1}{3}\right)$ multipliziert sind. Es entsteht also, da sich überdies der Faktor $\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right)$ linker Hand gegen $K_2' = \sin^2 B' - \frac{1}{3}$ rechter Hand aufhebt, die neue Relation:

$$\frac{5}{4\pi}\cdot\frac{9}{4}\int\left(\sin^2 B - \frac{1}{3}\right)^2 d\sigma = 1\,.$$

Aus (3) des laufenden Paragraphen folgt hiermit

$$G\mathfrak{b}_2 = \frac{5}{4\pi}\cdot\frac{9}{4}\int g\left(\sin^2 B' - \frac{1}{3}\right) d\sigma'\,,$$

nicht wesentlich verschieden von Formel (10) des vorigen Paragraphen, dem Ergebnis der Entwicklung nach Kugelfunktionen.

§ 34. **Fortsetzung.** Da g nicht für die ganze Erdoberfläche gegeben ist, sondern nur in einzelnen Punkten, die ungleichmäfsig verteilt sind, so giebt die Methode der kleinsten Quadrate nicht die richtigen Werte. Diese zu erlangen ist aber auf keinem Wege möglich. Übrigens ist die ungleichmäfsige Verteilung wenigstens den geographischen Breiten nach, nicht beträchtlich, wie die Tabelle des § 31 S. 226 zeigt, wobei allerdings der Unterschied der Vorzeichen in den Breiten nicht beachtet ist. Eine gleichmäfsige Verteilung nach den Breiten verlangt nämlich, dafs die Anzahl der beobachteten Werte der Schwerkraft g bezw. der Pendellänge $\mathfrak{L}$ in der Breite B proportional $\cos B$, nämlich proportional dem Radius des Parallel-

kreises auf der Kugel vom Radius 1 sei. Im grofsen und ganzen ist dieser Bedingung bei dem zur Zeit vorliegenden Beobachtungsmaterial genügt; man kann ihr aber bei der Ausgleichung dadurch noch besser nachkommen, dafs man den Fehlergleichungen in bevorzugten Breiten Gewichte kleiner als 1 erteilt. Übrigens hat die Gewichtsannahme thatsächlich bei der Auswertung des gegebenen Materials wenig Einflufs, wie wir weiterhin bei der numerischen Rechnung finden werden.

Weit ungleichmäfsiger als nach den Breiten überhaupt ist die Verteilung nach nördlichen und südlichen Breiten und nach den geographischen Längen. Dadurch erhalten die kontinentalen Glieder in g bezw. $\mathfrak{C}$ (die Kugelfunktionen von höherem Range als dem zweiten) einen Einflufs, der weit schädlicher sein kann, als derjenige der Glieder lokalen Charakters. Denn während dieser mit dem Orte rasch wechselt und also den Charakter eines zufälligen Beobachtungsfehlers hat, wird jener oftmals ganze Gruppen von Beobachtungsorten in nahezu gleicher Weise beeinflussen.

Hierzu treten noch die Mängel der Reduktion, insofern nämlich die Kondensation nur die erkennbaren Massenunregelmäfsigkeiten berücksichtigen kann. Diese Mängel erzeugen Fehlerglieder lokalen und kontinentalen Charakters.

Die Fehler, welche bei der Ausgleichung infolge ungleicher Verteilung nach den geographischen Längen und infolge von Reduktionsmängeln in G und $G\mathfrak{b}_2$ entstehen, kann man nach den Gleichungen (9) und (10) § 32 S. 231 schätzen, unter der Voraussetzung, dafs die Verteilung der g nach den Breiten, nördliche und südliche durcheinander gerechnet, proportional $\cos B$ ist. Wir entwickeln die Formel zur Schätzung des Fehlers in $G\mathfrak{b}_2$.

Indem wir zunächst g als überall gegeben voraussetzen, denken wir uns für dieselbe Breite $\pm B$ den Mittelwert g_B gebildet und haben sodann aus (10) S. 231

$$G\mathfrak{b}_2 = \frac{45}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_B \left(\sin^2 B - \frac{1}{3}\right) d\,(\sin B)\,. \tag{1}$$

Durch die oben genannten Ursachen entstehen in den g_B Fehler δg_B, die man nach Gutdünken zu schätzen hat. Es ist dann der entsprechende Fehler in $G\mathfrak{b}_2$ gleich

$$\delta\,(G\mathfrak{b}_2) = \frac{45}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta g_B \,.\left(\sin^2 B - \frac{1}{3}\right) d\,(\sin B)\,. \tag{2}$$

Für Gruppenbildung von 10 zu 10 Grad folgt näherungsweise richtig:

$$\delta\,(G\,\mathfrak{b}_2) = \frac{45}{4}\left\{\begin{array}{c} \delta g_5\,.\left(\sin^2 5^0 - \frac{1}{3}\right)\left(\sin 10^0 - \sin 0^0\right) \\ + \delta g_{15}\,.\left(\sin^2 15^0 - \frac{1}{3}\right)\left(\sin 20^0 - \sin 10^0\right) + \ldots \\ + \delta g_{85}\,.\left(\sin^2 85^0 - \frac{1}{3}\right)\left(\sin 90^0 - \sin 80^0\right) \end{array}\right\},$$

worin δg_5, δg_{15} u. s. f. nun Mittelwerte der Fehler innerhalb der Gruppen $0 - 10^0$, $10 - 20^0$ u. s. f. bezeichnen. Ausgerechnet hat man die Näherungsrelation:

$$\begin{aligned} \delta\,(G\,\mathfrak{b}_2) = &- 0{,}64\;\delta g_5 - 0{,}50\;\delta g_{15} - 0{,}27\;\delta g_{25} - 0{,}00\;\delta g_{35} \\ &+ 0{,}23\;\delta g_{45} + 0{,}38\;\delta g_{55} + 0{,}41\;\delta g_{65} + 0{,}30\;\delta g_{75} \\ &+ 0{,}11\;\delta g_{85}\,. \end{aligned} \qquad (3)$$

Da nun die Länge $\mathfrak{L}$ des Sekundenpendels proportional g ist und angenähert 1^m beträgt, so kann man hiernach auch setzen

$$\begin{aligned} \delta\,\mathfrak{b}_2 = &- 0{,}64\;\delta\mathfrak{L}_5 - 0{,}50\;\delta\mathfrak{L}_{15} - 0{,}27\;\delta\mathfrak{L}_{25} - 0{,}00\;\delta\mathfrak{L}_{35} \\ &+ 0{,}23\;\delta\mathfrak{L}_{45} + 0{,}38\;\delta\mathfrak{L}_{55} + 0{,}41\;\delta\mathfrak{L}_{65} + 0{,}30\;\delta\mathfrak{L}_{75} \\ &+ 0{,}11\;\delta\mathfrak{L}_{85}\,. \end{aligned} \qquad (3^*)$$

Mit Rücksicht auf das *Clairaut*sche Theorem hat man noch für die Abplattung $\mathfrak{a}$ sehr nahe

$$\delta\,\mathfrak{a} = -\,\delta\,\mathfrak{b}_2\,.$$

Diese Formeln gestatten u. a. den Einflufs der Inselstationen zu schätzen. Auf Inseln ist $\mathfrak{L}$ sowohl ohne als mit Kondensation gröfser wie an Küsten und auf dem Festlande. Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ist ferner im Mittel für die nördliche und südliche Erdhälfte das Verhältnis von Wasser und Land in allen Breiten annähernd dasselbe. Die Tabelle des § 31 S. 226 zeigt aber, dafs die Anzahl der Inselstationen keineswegs für verschiedene Breiten in konstantem Verhältnis zur Anzahl der Küsten- und Festlandsstationen, welche man zusammennehmen darf, steht. Eine Berechnung von $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{a}$, welche diese ungleiche, rein zufällige Verteilung bestehen läfst, kann gar keinen Wert haben; denn eine Vermehrung der Anzahl der Stationen führt der Wahrheit nicht erkennbar näher. Bei den älteren bisherigen Berechnungen, vergl. 2. Kap. § 16 S. 85 u. ff., wurde $\mathfrak{a}$ um $^1/_{289}$ herum gefunden. Dabei war in äquatorialen Gegenden die Anzahl der Festlands- und Küstenstationen gering im Verhältnis zur Anzahl der Inselstationen. *Clarke* nahm neuerdings die indischen Stationen hinzu, vermehrte so in dieser Zone die Festlands- und Küstenstationen und mufste zufolge (3*) und (4) einen gröfseren Wert für $\mathfrak{b}_2$ und einen kleineren für $\mathfrak{a}$ als frühere Rechner erhalten. Dafs er den richtigen Werten näher gekommen sei, kann aber auf grund seiner Berechnung nicht behauptet werden.

Bezüglich des Ansatzes der Fehlergleichungen für die Ausgleichung ist es ganz gleichgültig, ob man nach (1) § 33 S. 231 ansetzt:

$$g + \delta = G + G\mathfrak{b}_2\left(\sin^2 B - \frac{1}{3}\right) \tag{4}$$

oder

$$g + \delta = A + B\sin^2 B \tag{5}$$

nimmt. Es folgt dieses daraus, daſs (5) aus (4) durch die linearen Substitutionen $G = A + \frac{B}{3}$ und $G\mathfrak{b}_2 = B$ hervorgeht und die dem Minimum der Fehlerquadrate entsprechenden Gleichungssysteme

$$\frac{\partial[\delta\delta]}{\partial G} = 0 \qquad \frac{\partial[\delta\delta]}{\partial(G\mathfrak{b}_2)} = 0 \tag{4*}$$

und

$$\frac{\partial[\delta\delta]}{\partial A} = 0 \qquad \frac{\partial[\delta\delta]}{\partial B} = 0 \tag{5*}$$

mittelst jener Substitutionen in einander übergeführt werden können.

An Stelle von (5) kann man endlich auch die Form wählen:

$$g + \delta = C - D\cos 2B\,. \tag{6}$$

Ebenso wie g kann man auch die Länge $\mathfrak{L}$ des mathematischen Sekundenpendels durch Formeln darstellen, die denen für g ganz analog sind, da g und $\mathfrak{L}$ einander proportional sind. Dagegen ist es nicht erlaubt, die tägliche Schwingungszahl eines mathematischen Pendels von konstanter Länge l in ganz derselben Weise zu behandeln. Nach der Formel für die Schwingungszeit

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ist die Schwingungszahl n proportional $\sqrt{g}$. Geht man daher von n aus, so muſs die Form $p + q\sin^2 B$ für n^2 gewählt werden und nicht für n selbst, d. h. man muſs setzen

$$n^2 + \delta = p + q\sin^2 B \tag{7}$$

und $[\delta\delta]$ zu einem Minimum machen. Da n wenig variiert, darf man auch, wie u. a. *Baily* und *Clarke* gethan haben, setzen:

$$(n + \delta)^2 = p + q\sin^2 B\,, \tag{8}$$

wobei dann rechter Hand δ^2 zu vernachlässigen und die Summe der $(n\delta)^2$, oder was nahezu dasselbe giebt, der δ^2, zu einem Minimum zu machen ist.

Würde man aber (wie *Borenius*, vergl. die Anmerk. S. 87) die Gleichung

$$n + \delta = p_1 + q_1\sin^2 B \tag{9}$$

ansetzen, so würde man damit eine Formel zu grunde legen, die der gesuchten Formel (4) gar nicht entspricht, beim Übergang zu g

noch ein Glied vierten Ranges und trotzdem nicht die besten Werte von G und $G\mathfrak{k}_2$ ergiebt.

Es ist hier der Ort, auf eine scheinbare Differenz mit den Angaben auf S. 43 von *H. Bruns*, *Figur der Erde*, hinzuweisen. Daselbst wird behauptet und durch ein Beispiel erläutert, dafs die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer Anwendung auf die Schwere wegen der Störungen auch bei gleichmäfsiger Verteilung der Angaben für g nicht notwendig denjenigen Wert von $\mathfrak{k}_2$ liefert, den man im Sinne des zweiten Kapitels zur Bestimmung eines Niveausphäroids erwartet. Dies steht in direktem Gegensatz zu unseren Angaben, jedoch wesentlich nur deshalb, weil wir uns g wegen Kondensation gewisser Massen in der Erdkruste reduziert denken, während *Bruns* den wie üblich aufs Meeresniveau ohne Kondensation reduzierten Wert g voraussetzt. *Stokes* dagegen glaubte auch ohne Reduktion wegen Kondensation das richtige $\mathfrak{k}_2$ zu erhalten; es ist also für diese Ansicht durch *Bruns* eine Berichtigung gegeben. Aber letzterer teilt nicht mit, wie zu dem besten Werte von $\mathfrak{k}_2$ zu gelangen oder wie der Fehler bei dem Ergebnis des gewöhnlichen Verfahrens zu schätzen ist. Unsere Methode hat nun u. a. den Vorteil, zu einer Schätzung dieses Fehlers zu führen: man hat nur nötig, Formel (3) auf die geschätzten Kondensationsbeträge anzuwenden und daraus $\delta\mathfrak{k}_2$ sowie mittelst *Clairauts Theorem* $\delta\mathfrak{a}$ zu berechnen. Sie giebt auch wesentlich dasselbe Niveausphäroid, welches *Bruns* annimmt, weil die Kondensation Schwerpunktslage, Axenlage und Trägheitsmomente der Erde nur unerheblich ändert, sodafs in den, den Niveausphäroiden U zu grunde gelegten einfachen Potentialausdrücken bei *Bruns* und hier (im 2. Kapitel) wesentlich dieselben Konstanten auftreten.

Wir müssen nun allerdings erwähnen, dafs immerhin auch nach Berücksichtigung der Kondensation sich für die theoretische Richtigkeit der *Bruns*schen Behauptung noch ein Grund ergiebt, den wir gleich hier im Anschlusse an den weiterhin folgenden § 39 erledigen. Daselbst wird nach einem Näherungsverfahren aus dem allgemeinen Ausdrucke für das Potential W der allgemeine Ausdruck für g in Kugelfunktionen abgeleitet. Wenn man diese Entwicklung dahin verbessert, dafs bei Ableitung von g aus Gleichung (4) daselbst für r' überall, wo einfach R gesetzt ist, der elliptische Wert angewandt wird, so erscheint der Koefficient $\mathfrak{k}_2$ beeinflufst von den Koefficienten der höheren Kugelfunktionen von W: er gestaltet sich somit etwas anders als bei der Entwicklung aus U. Da nun die oben behandelte Berechnung einer Interpolationsformel für g den ersteren Wert von $\mathfrak{k}_2$ ergiebt, so pafst dieser nicht streng zu dem Niveausphäroid. Allein die Substitution von R für r' genügt, wie auch am Schlusse von § 39 bemerkt wird, und wie man leicht verifizieren kann, völlig für Kugelfunktionen von mäfsig hohem Range, wie sie kontinentalen Störungen entsprechen. Den lokalen Störungen genügt die Rechnung freilich nicht; diese äufsern sich aber wenig in der Form des Geoids, vielmehr wesentlich nur in g, woselbst sie gleiche Ordnung wie die kontinentalen erlangen. Ihr Einflufs auf $\mathfrak{k}_2$ kann indessen aus den Abweichungen der Einzelwerte g gegen die Interpolationsformel seinem mittleren Betrage nach geschätzt werden, wenn man die hierbei unschädliche Fiktion macht, dafs alle diese Abweichungen lediglich zufälligen Ursprungs seien.

§ 35. Ableitung einer Interpolationsformel für die Länge des Sekundenpendels und für die Schwerkraft.

Wir untersuchen zuerst die Verteilung von Festland F und Meer M in verschiedenen Breiten für die nördliche und südliche Erdhälfte, sowie für beide zusammen. Folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Längengrade für beide Charaktere F und M.

Breite	Nord		Süd		Zusammen	
	F	M	F	M	F	M
0°— 10°	100°	260°	110°	250°	210°	510°
10 — 20	120	240	90	270	210	510
20 — 30	150	210	90	270	240	480
30 — 40	170	190	40	320	210	510
40 — 50	210	150	10	350	220	500
50 — 60	230	130	—	360	230	490
60 — 70	290	70	30	330	320	400
70 — 80	120	240	90	270	210	510

Es zeigt sich hier die merkwürdige Thatsache, dafs für die nördliche und südliche Erdhälfte zusammengenommen F in nahezu konstantem Verhältnis zu M steht. Infolge dieses Umstandes ist es möglich unter der Voraussetzung, dafs in allen Breiten die Schwerkraftsdifferenz $M - F$ konstant ist, ohne Kenntnis der Schwerkraft auf dem Meere, nur aus den Beobachtungen der Schwerkraft auf dem Lande, den zur Berechnung der Abplattung $\mathfrak{a}$ geeigneten Wert von $\mathfrak{b}_2$ abzuleiten. Die Inselbeobachtungen, welche doch nicht die Schwerkraft auf dem offenen Meere geben, lassen wir als zu ungleichmäfsig verteilt aufser acht.

Verstehen wir unter $\mathfrak{L}$ eine beobachtete und gehörig aufs Meeresniveau, sowie wegen Kondensation reduzierte Länge des Sekundenpendels, so setzen wir mit Rücksicht auf S. 236 (6), wenn δ eine Verbesserung, B die geographische Breite und x und y zu bestimmende Konstanten sind:

$$\mathfrak{L} + \delta = x - y \cos 2B \,. \tag{1}$$

Für y setzen wir unter Einführung eines Näherungswertes

$$0{,}002636 \left(1 - \frac{\eta}{100}\right)$$

und erhalten

$$\mathfrak{L} + \delta = x - 0{,}002636 \left(1 - \frac{\eta}{100}\right) \cos 2B$$

oder

$$\mathfrak{L}' + \delta = x + 0{,}00002636 \cos 2B \,.\, \eta \,, \tag{2}$$

wobei

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} + 0{,}002636 \cos 2B \tag{3}$$

ist. Die Werte von $\mathfrak{L}''$ für die einzelnen Orte giebt die Haupttabelle § 29 S. 215 u. ff. und nach derselben die Tabelle § 31 S. 226 für Gruppenmittel. Diese Vereinigung in Gruppenmittel empfiehlt sich, um die nach § 34 notwendige Verteilung nach der geographischen Breite annähernd herzustellen. Darnach soll die Anzahl der Beobachtungen in der Breite B proportional $\cos B$ sein. Es ist daher den Gruppenmitteln strenggenommen ein Gewicht proportional dem Mittelwerte von $\cos B$ für die Gruppe beizulegen.

Um auch in geographischer Länge innerhalb jeder Gruppe eine möglichst günstige Verteilung herzustellen, vereinigen wir im allgemeinen in jeder Gruppe die Werte von $\mathfrak{L}''$ für F und K zu einem einfachen Mittel mit Rücksicht darauf, dafs die K-Werte besser verteilt sind, als die F-Werte. In einigen Fällen wird aber davon abgewichen. Der Vorgang ist im einzelnen folgender:

Gruppe 0 — 10°. Da für F nur ein Wert existiert, werden die Werte $\mathfrak{L}''$ für F und K mit Rücksicht auf ihre Anzahlen 1 und 8 zu einem Mittel vereinigt. Strenggenommen ist hierbei noch die Differenz $F - K = -8$ zu berücksichtigen, die wir aber als zu unsicher ignorieren. Das Mittel wird 0,993568.

Gruppe 10 — 20° bis mit 50 — 60°. Hier wird einfach gemittelt ohne Rücksicht auf die Anzahlen. Das ist sehr nötig, weil von 10—30° alle F-Werte lediglich in Indien genommen sind und bei 50 — 60° nur in Europa; bei 30—40° und 40—50° sind sie zwar etwas besser verteilt, doch auch nur auf zwei oder drei Gebiete.

Gruppe 60—70°. Hier giebt es zwar nur F-Werte, indessen haben dieselben teilweise nahezu Küstencharakter bei leidlicher Verteilung.

Gruppe 70—80°. Hier ist nach der Anzahl zu mitteln; Verteilung ziemlich gut.

Die zu (2) notwendigen Faktoren 0,00002636 cos 2B oder 26,36 cos 2B in Mikrons giebt für die einzelnen Gruppen die letzte Kolumne der Tabelle S. 226. Dieselben sind für die Mittelwerte der $\mathfrak{L}''$ aus den F- und K-Werten in derselben Weise zu vereinigen wie die $\mathfrak{L}''$ selbst. Damit ergeben sich nachstehende Fehlergleichungen, Mikrons als Längeneinheit genommen:

$$\begin{array}{r|c|c|l}
99\,3568 & +\,\delta_1 & = & x + 25{,}5\,\eta \\
3559 & +\,\delta_2 & = & x + 22{,}9\,\eta \\
3528 & +\,\delta_3 & = & x + 17{,}5\,\eta \\
3552 & +\,\delta_4 & = & x + 10{,}4\,\eta \\
3551 & +\,\delta_5 & = & x + 1{,}5\,\eta \\
3555 & +\,\delta_6 & = & x - 8{,}0\,\eta \\
3540 & +\,\delta_7 & = & x - 16{,}2\,\eta \\
3549 & +\,\delta_8 & = & x - 22{,}5\,\eta
\end{array} \qquad (4)$$

Sehen wir nun zunächst von der Annahme der Gewichte proportional zu $\cos B$ ab und nehmen für alle Gleichungen das Gewicht 1 an, so folgt aus (4) durch Bildung der Normalgleichung für x nach Division mit 8:

$$993550 = x + 3{,}9\,\eta\,. \tag{5}$$

Zieht man diese Gleichung von den Gleichungen (4) ab, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 18 + \delta_1 &= 21{,}6\,\eta \\ 9 + \delta_2 &= 19{,}0\,\eta \\ -22 + \delta_3 &= 13{,}6\,\eta \\ 2 + \delta_4 &= 6{,}5\,\eta \\ 1 + \delta_5 &= -2{,}4\,\eta \\ 5 + \delta_6 &= -11{,}9\,\eta \\ -10 + \delta_7 &= -20{,}1\,\eta \\ -1 + \delta_8 &= -26{,}4\,\eta\,, \end{aligned} \tag{6}$$

deren Summe, abgesehen von den δ, wie es sein mufs, hinreichend gleich null ist.

Als Normalgleichung für η folgt aus (6):

$$439 = 2304\,\eta\,; \tag{7}$$

es wird daher

$$\eta = +0{,}19 \quad \text{und} \quad y = 0{,}002631\,,$$

und ferner mit Rücksicht auf (5):

$$\mathfrak{L} = 0{,}993549 - 0{,}002631 \cos 2B\,,$$

oder unter Einführung von $\sin^2 B$:

$$\mathfrak{L} = 0{,}990918 + 0{,}005262 \sin^2 B = 0{,}990918 \left\{1 + 0{,}005310 \sin^2 B\right\}. \tag{8}$$

Die Verbesserungen δ werden in Mikrons

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -13{,}9 & \delta_5 &= -1{,}5 \\ \delta_2 &= -5{,}4 & \delta_6 &= -7{,}3 \\ \delta_3 &= +24{,}6 & \delta_7 &= +6{,}2 \\ \delta_4 &= -0{,}8 & \delta_8 &= -4{,}0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt $[\delta\delta] = 937$ und der mittlere Fehler μ einer Gleichung demnach gleich

$$\mu = \sqrt{\frac{937}{6}} = \pm 12{,}6\,.$$

Mit Rücksicht auf (7) wird darnach der mittlere Fehler in η gleich

$$\frac{12{,}6}{\sqrt{2304}} \quad \text{d. i.} \quad \pm 0{,}26;$$

es ist somit y mit seinem mittleren Fehler gleich

$$y = 0{,}002631\ (1 \pm 0{,}0026)\,.$$

Endlich folgt hieraus der mittlere Fehler des Koefficienten 5310 von $\sin^2 B$ in (8) gleich $\pm$ 14. Als Resultat der Ausgleichung ergiebt sich somit *die Länge des mathematischen Sekundenpendels für Festland und Küsten, nach der Kondensationsmethode aufs Meeresniveau reduziert*, gleich

$$\mathfrak{L} = 0{,}990918 \left\{1 + [0{,}005310 \pm 14] \sin^2 B\right\} \text{ Meter}\,. \tag{8*}$$

Durch Multiplikation mit π^2 wird für die entsprechend reduzierte *Schwerkraft* erhalten

$$g = 9{,}7800 \left\{1 + [0{,}005310 \pm 14] \sin^2 B\right\} \text{ Meter}. \tag{9}$$

Im zweiten Kapitel S. 85 ist hierzu die Abplattung berechnet worden; mit Angabe des mittleren Fehlers wird

$$\mathfrak{a} = 0{,}0033416 \pm 140 = \frac{1}{299{,}26 \pm 1{,}26}\,. \tag{10}$$

§ 36. **Fortsetzung: Plausible Grenzen der Abplattung.** Wir haben zunächst noch nachzuweisen, dafs die Vernachlässigung in der Gewichtsannahme bei der Ausgleichung des Systemes (4) keinen wesentlichen Fehler giebt. Die mittleren Werte von $\cos B$, also die Gewichte, sind für die Gleichungen (4) der Reihe nach sehr nahe

1,00	0,71
0,97	0,57
0,91	0,42
0,82	0.26 .

Bildet man hiermit die Normalgleichungen, so findet sich x wie früher,

ferner $$\eta = +\,0{,}25$$

und $$y = 0{,}002629\,,$$

mithin kein wesentlich anderes Resultat.

Wir weisen jetzt nach, dafs die südliche Halbkugel, wo weniger Beobachtungen als auf der nördlichen vorliegen, keine nennenswerte Abweichung von der nördlichen verrät. Zu diesem Zwecke stellen wir nach der Tabelle des § 29 S. 215 die Verbesserungen zusammen, die sich für die südlichen Stationen ergeben. Da die Werte in der Tabelle mit $0{,}002636 \cos 2B$ reduziert sind, ist noch eine kleine Verbesserung wegen des Überganges auf $0{,}002631 \cos 2B$ anzubringen und sodann mit 0,993549 zu vergleichen.

Südstationen.

Ort	Breite	l''	Verb.	Char.	Mittelwerte der Verb.
Rawak..........	0°	0,99 3572	— 23	(*I*)	— 4
Para............	1	3567	— 18	*K*	
Maranham	3	3519	+ 30	(*I*)	
Fernando	4	3567	(— 18)	*I*	
Ascension	8	3578	(— 29)	*I*	
Bahia	13	3548	+ 1	*K*	+ 1
St. Helena.......	16	3642	(— 93)	*I*	
Isle de France...	20	3640	(— 91)	*I*	
Rio Janeiro	23	3534	+ 15	*K*	+ 15
Valparaiso	33	3526	+ 23	*K*	— 17
Paramatta.......	34	3533	+ 16	*K*	
Port Jackson	34	3588	— 39	*K*	
Kap d. g. Hoffn..	34	3639	— 90	*K*	
Montevideo......	35	3542	+ 7	*K*	
Falkland Inseln..	52	3544 3462	+ 5 + 87	(*I*)	— 2
Staten Jsland	55	3611	— 62	(*I*)	
Kap Horn.......	56	3586	— 37	*K*	
Süd Shetland Ins.	63	3615	(— 66)	*I*	

Schliefst man die *I*-Werte aus, so bemerkt man in der That kein Vorherrschen eines Vorzeichens der Verbesserung. Hiermit ist eine wesentliche Grundlage unserer Rechnung ziemlich gesichert: die Gleichheit beider Erdhälften, wenigstens insoweit Festland- und Küstenmessungen dies erkennen lassen.

Was die andere Grundlage anlangt, dafs die Differenz der Pendellängen für Meer und Festland in allen Breiten konstant sei, so ist allerdings hierfür das Beobachtungsmaterial sehr dürftig, da in höheren Breiten nur eine Insel, Süd-Shetland, vorkommt. Jedoch bestätigt auch diese die Annahme der Konstanz der Differenz $M - F$.

Nehmen wir aber einmal an, dafs in höheren nördlichen und südlichen Breiten diese Differenz nur halb so grofs sei wie am Äquator und von hier nach den Polen hin allmählich abnähme, so ist leicht zu erkennen, dafs nun zwei Drittel des Betrages der halben Differenz für äquatoriale Gegenden auf Verminderung des Koefficienten 5310 in (9) wirken, weil nach der Tabelle auf S. 238 in geographi-

scher Länge die Verteilung von Festland und Meer rund wie 1 : 2 sich verhält. Setzen wir nach S. 227, indem wir für $M - F$ schätzungsweise $I - F$ nehmen, $M - F$ am Äquator gleich 100, so würde sich also 5310 um $\frac{2}{3} \cdot 50$ d. i. 33 vermindern und in 5277 übergehen, die Abplattung aber würde von 0,0033416 auf 0,003375 oder $^1/_{296}$ anwachsen.

Eine noch gröfsere Abplattung erscheint uns nicht wahrscheinlich; jedenfalls ist $^1/_{289}$, zu dem Koefficienten 5200 gehörend, zu grofs. Denn um diesen Koefficienten herauszubringen, mufs man annehmen, dafs die Differenz $M - F$ am Äquator um 160 Mikrons gröfser ist als an den Polen. Dieser Betrag ist selbst mit Rücksicht auf vernachlässigte, unbekannte Kondensationseffekte höchst unwahrscheinlich. Auch derjenige Wert, den *Clarke* sowohl aus den Gradmessungen wie aus den Pendelbeobachtungen für die Abplattung $\mathfrak{a}$ findet (vergl. Bd. 1 S. 610 und Bd. 2 S. 89), nämlich $^1/_{294}$, erscheint uns nicht sehr wahrscheinlich.

Wie wir weiterhin im 6. Kapitel § 7 finden, führen die Mondstörungen zu dem Werte $\mathfrak{a} = {}^1/_{297,8}$, und obgleich dieser Wert zufolge seiner Ableitung um mehrere Einheiten unsicher erscheint, giebt er doch eine wertvollere Kontrolle als die Gradmessungen für das Ergebnis der Pendelmessungen und dient zur Bestätigung unserer Rechnung. Im 6. Kapitel werden wir ferner sehen, dafs wohl diese Abplattung, aber nicht $^1/_{289}$, mit den Ergebnissen der Präzession und Nutation zu einer plausiblen Funktion für die Dichtigkeitsänderung im Erdinnern führt.

Die Haupttabelle § 29 S. 215 u. ff. zeigt die Abweichungen der einzelnen Längen $\mathfrak{L}''$ von den entsprechenden Formelwerten, wobei allerdings nicht der günstigste Koefficient 2631, sondern 2636 zur Anwendung gelangt ist, was jedoch bei der Gröfse der Einzelabweichungen bedeutungslos bleibt. Diese Einzelabweichungen machen ganz den Eindruck lokaler Anomalieen; nur bei den Inseln ist vielleicht ein Teil kontinental, jedoch gestattet das vorliegende Beobachtungsmaterial nicht dieses zu entscheiden. (Vergl. S. 227 sowie § 38 im 4. Kap.)

§ 37. Die Schwerkraft auf der physischen Erdoberfläche.

Im § 20 des 2. Kap. S. 97 ist angegeben worden, wie man mittelst der Formel, welche die Variation der normalen Schwerkraft im Meeresniveau mit der Breite darstellt, für einen Ort in der Meereshöhe H den normalen Wert der Schwerkraft ableiten kann. Wenn nun an einem Orte der physischen Erdoberfläche g nicht beobachtet ist, so kann die Frage von Interesse sein, welche Verbesserungen am Normalwerte von g anzubringen sind, um dem wirklichen Werte

möglichst nahe zu kommen. Insbesondere fragt es sich, inwieweit die Anziehung des Terrains zwischen physischer und mathematischer Erdoberfläche zu berücksichtigen ist.

Wenn wir aber auf die Ableitung der Formel (9) für die Schwerkraft g bezw. (8*) für die Länge des Sekundenpendels $\mathfrak{L}$ im Meeresniveau auf S. 241 zurückblicken, so kann es nicht zweifelhaft sein, dafs der Übergang vom Meeresniveau zu der Meereshöhe H so zu geschehen hat, als erfolge er in freier Luft. Denn bei dem umgekehrten Übergang eliminiert sich durch die Kondensationsmethode die Terrainanziehung ebenfalls — wenn auch nicht vollständig, so doch gröfstenteils. Die Vorschriften im § 20 S. 97 reichen daher völlig aus, um für die physische Erdoberfläche g aus Formel (9) S. 241 (und entsprechend $\mathfrak{L}$) herzuleiten. Eine Berücksichtigung der Terrainanziehung im Sinne des Gliedes (3) S. 164 würde im allgemeinen von der Wahrheit entfernen. Nur für kleine Inseln im offenen Ocean hat man den erhaltenen Wert der Pendellänge um etwa 200 Mikrons zu vergröfsern, wie die Angaben auf S. 226 erkennen lassen.

Die Fehler, welche in dieser Weise berechnete Pendellängen gegen die wirklichen haben können, zeigt die Kolumne „Verb." der Tabelle des § 29 S. 215 u. ff.; nur ist bei den Inselwerten + 100 hinzuzufügen. Die mittlere Abweichung, berechnet aus den ersten Potenzen, (*Ausgleichungsrechnung* S. 19) wird gleich:

$$\pm 34 \text{ Mikrons}$$

oder

$$\pm \frac{1}{30000} \text{ des Betrages}$$

von g bezw. $\mathfrak{L}$.

§ 38. **Allgemeines über die Ermittelung kontinentaler Undulationen des Geoids.** Nachdem in diesem Kapitel eine solche Reduktion der Schwerebeobachtungen auf den Meeresspiegel angegeben worden ist, dafs die Entwicklung der Potentialfunktion W der Schwerkraft nach negativen Potenzen des Radiusvektors aufserhalb bis zur Geoidfläche gültig erscheint und die hierauf aufgebauten Entwicklungen des zweiten Kapitels einwurfsfrei sind, entsteht die Frage, ob es möglich ist, aus den Schwerebeobachtungen die Form des Geoids im Detail zu erkennen. Denn das zweite Kapitel lehrt nur die Bestimmung der Form irgend eines Niveausphäroids, entsprechend einer einfachen Interpolationsformel für die Beschleunigung g der Schwerkraft im Meeresniveau, eines Niveausphäroids, das mit einem Rotationsellipsoid fast ganz identisch ist: des Normalsphäroids (§ 17 S. 89). Wenn wir uns aber den hierbei eingeschlagenen Gang vergegenwärtigen, so leuchtet ein, dafs es nur einer Interpolationsformel mit mehr Gliedern für g bedarf, um die Formen des Geoids detaillierter zu erkennen.

Allein dieser sich unmittelbar darbietende Weg ist praktisch von geringer Bedeutung, erstens wegen zu geringen Materials an Beobachtungen für g, zweitens wegen der Schwierigkeit der Ableitung einer gliederreichen Interpolationsformel. Der erste Grund führt zu einer Änderung der Methode, der zweite zu einer Änderung der Rechnungsvorschriften. Unter der Voraussetzung genügenden Beobachtungsmaterials hat *Stokes* eine Formel gegeben, um ohne Ableitung einer Interpolationsformel die Abweichung des Geoids von einem gewissen einfachen Niveausphäroid an irgend einer Stelle zu berechnen. Man kann diese Formel als eine strenge bezeichnen; sie bedarf aber eigentlich zu ihrer Anwendung die Kenntnis von g auf der ganzen Oberfläche. Kennt man g nur an einer Stelle und will hieraus, d. h. aus seiner Abweichung von dem entsprechenden Wert der dem Niveausphäroid zu grunde liegenden Formel, die Abweichung des Geoids an der betreffenden Stelle berechnen, so kann das offenbar ohne Hypothesen (welche die mangelnde Kenntnis von g auf der ganzen Oberfläche ersetzen) nicht geschehen. Diese Methode führt also nur zu Näherungsformeln. Leider wird sich zeigen, dafs diese Formeln wertlos sind und selbst bei gehöriger Vervollständigung wohl eine Bedeutung, aber nicht die gewünschte, erlangen.

Alle diese Wege sind analytischer Natur. Ein synthetischer bietet sich dar bei der (sicher nicht korrekten) Annahme, dafs die sichtbaren Massenunregelmäfsigkeiten der Erdrinde allein Ursache der Abweichungen des Geoids seien. Das Potential T dieser Unregelmäfsigkeiten läfst sich schätzen, und das *Bruns*sche Theorem (§ 5 S. 148) gestattet sodann die Berechnung der Abweichungen. Dieser Weg, obwohl nicht geeignet zur Ermittelung der wahren Beträge der Abweichungen des Geoids, bietet doch viel Interesse. Er wird den Gegenstand des vierten Kapitels bilden, während wir hier noch die anderen, oben angedeuteten Fragen erörtern.

§ 39. **Strenge Relationen für die Abweichungen des Geoids vom zugehörigen Normalsphäroid.** Das Potential W der Schwerkraft setzt sich zusammen aus dem Potential V der Anziehung und dem Potential der Zentrifugalkraft. Es ist also, vergl. § 5 (7) S. 60:

$$W = V + \frac{1}{2}\,\omega^2 r'^2 \cos^2\varphi' \qquad (1)$$

und dabei mit Rücksicht auf S. 66 § 7 (4):

$$V = \frac{K_0'}{r'} + \frac{K_2'}{r'^3} + \frac{K_3'}{r'^4} + \frac{K_4'}{r'^5} + \dots \qquad (2)$$

Hierbei sind r', φ' und λ' bezw. Radiusvektor, geozentrische Breite und Länge des angezogenen Punktes, und es bezeichnen K_0', K_2', K_3', K_4' u. s. f. Kugelfunktionen von φ' und λ' nullten, zweiten, dritten, vierten

Ranges u. s. f. Die besonderen Werte von K_0' und K_2' zeigt die erwähnte Gleichung (4) unschwer, speziell K_0' ist gleich Mk^2. Im Vergleiche zu dort ist jetzt Mk^2 in K_3' u. s. f. mit inbegriffen.

Multipliziert man Gleichung (1) mit $r' : W$, so folgt mit Rücksicht auf (2):

$$r' = \frac{1}{W}\left\{K_0' + \frac{K_2'}{r'^2} + \frac{K_3'}{r'^3} + \frac{K_4'}{r'^4} + \ldots + \frac{1}{2}\,\omega^2 r'^3 \cos^2\varphi'\right\}. \quad (3)$$

Andrerseits wird die radiale Komponente der Schwerkraft gleich

$$-\frac{\partial W}{\partial r'} = \frac{1}{r'^2}\left\{K_0' + \frac{3K_2'}{r'^2} + \frac{4K_3'}{r'^3} + \frac{5K_4'}{r'^4} + \ldots - \omega^2 r'^3 \cos^2\varphi'\right\}. \quad (4)$$

Beide Gleichungen denken wir uns auf die Geoidfläche $W = W_0$ bezogen. Wenn wir nun dieselbe Genauigkeit in den weiteren Entwicklungen festhalten wie in § 10 und § 11 des zweiten Kapitels S. 72 u. ff., dabei aber die Glieder mit K_3', K_4' u. s. f. ebenso berücksichtigen wie dasjenige mit K_2', so ist zunächst $-\frac{\partial W}{\partial r'}$ gleich der Schwerkraft g selbst, und es ist ferner (unter einer gewissen noch zu besprechenden Voraussetzung) erlaubt, rechter Hand von (3) und (4) in den Parenthesen für r' den mittleren Radius R einzuführen. Diese Gleichungen gehen hiermit, und wenn wir (um alles in Kugelfunktionen darzustellen) für $\cos^2$ schreiben $\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \sin^2\right)$, über in:

$$r' = \frac{1}{W_0}\left\{\begin{array}{c}\left(K_0' + \frac{1}{3}\,\omega^2 R^3\right) + \frac{1}{2}\,\omega^2 R^3\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)\\ + \frac{K_2'}{R^2} + \frac{K_3'}{R^3} + \frac{K_4'}{R^4} + \ldots\end{array}\right\} \quad (5)$$

und

$$g = \frac{1}{r'^2}\left\{\begin{array}{c}\left(K_0' - \frac{2}{3}\,\omega^2 R^3\right) - \omega^2 R^3\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)\\ + \frac{3K_2'}{R^2} + \frac{4K_3'}{R^3} + \frac{5K_4'}{R^4} + \ldots\end{array}\right\}. \quad (6)$$

Mit Rücksicht auf die Bemerkung zu Gleichung (5) S. 66 ist das Glied nullten Ranges in (5) der Mittelwert R der Radienvektoren der Geoidfläche (im Sinne von S. 66), und man hat daher

$$R = \frac{1}{W_0}\left(K_0' + \frac{1}{3}\,\omega^2 R^3\right) = \frac{K_0'}{W_0}\left(1 + \frac{1}{3}\,\mathfrak{c}\right), \quad (7)$$

sowie ferner, immer mit gleicher Genauigkeit der Entwicklungen:

$$r' = R\left\{1 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + \frac{K_2'}{K_0' R^2} + \frac{K_3'}{K_0' R^3} + \frac{K_4'}{K_0' R^4} + \ldots\right\}, \quad (8)$$

wobei für $\omega^2 R^3 : K_0'$ das Symbol $\mathfrak{c}$ gesetzt wurde, welches hier als übereinstimmend mit der in (12) § 11 S. 76 eingeführten Gröfse $\mathfrak{c}$ zu betrachten ist.

Hieraus folgt

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{1}{R^2}\left\{1 - \mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) - \frac{2K_2'}{K_0'R^2} - \frac{2K_3'}{K_0'R^3} - \frac{2K_4'}{K_0'R^4} - \dots\right\}$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks für $1 : r'^2$ in (6) mit üblichen Vernachlässigungen:

$$g = \frac{K_0'}{R^2}\left\{\begin{array}{l}\left(1 - \frac{2}{3}\mathfrak{c}\right) - 2\mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) \\ + \frac{K_2'}{K_0'R^2} + \frac{2K_3'}{K_0'R^3} + \frac{3K_4'}{K_0'R^4} + \dots\end{array}\right\}. \tag{9}$$

Der Mittelwert von g im Sinne von S. 66 ist hiernach

$$G = \frac{K_0'}{R^2}\left(1 - \frac{2}{3}\mathfrak{c}\right). \tag{10}$$

Wir führen denselben in den Ausdruck (9) für g ein und setzen zugleich

$$\frac{K_2'}{K_0'R^2} = k_2, \qquad \frac{2K_3'}{K_0'R^3} = k_3, \qquad \frac{3K_4'}{K_0'R^4} = k_4, \qquad \text{u. s. f.}, \tag{11}$$

womit (9) und (8) übergehen in:

$$g = G\left\{1 - 2\mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2 + k_3 + k_4 + \dots\right\}, \tag{12}$$

$$r' = R\left\{1 + \frac{1}{2}\mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2 + \frac{1}{2}k_3 + \frac{1}{3}k_4 + \dots\right\}. \tag{13}$$

Diese Näherungsformeln, in denen für φ' und λ' auch geographische Breite B und Länge L gesetzt werden dürfen, zeigen zunächst, in welcher Weise für die Geoidfläche die höheren Kugelfunktionen in g übergehen auf den Radiusvektor: je höher der Index, desto geringer ist der Einfluſs auf r'. Lokale Einflüsse in g, welchen immer Kugelfunktionen von sehr hohem Index entsprechen, werden daher den Radiusvektor der Meeresfläche wenig beeinflussen — eine Sache, die übrigens synthetisch sehr leicht einzusehen ist (vergl. das 4. Kap.).

Berücksichtigt man ferner die aus dem Eingang dieses Kapitels ersichtliche Thatsache, daſs die Anziehung einer ausgedehnten Platte auf Punkte über ihrem mittleren Teile wesentlich nur von der Stärke derselben abhängt, so leuchtet nun andererseits ein, daſs kontinentale Massenunregelmäſsigkeiten die Schwerkraft g nur etwa von gleicher Ordnung beeinflussen wie lokale, daſs daher in einer Darstellung von g nach Kugelfunktionen der geographischen Breite und Länge die Koefficienten in k_3, k_4 u. s. f. bis zu hohen Indices durchschnittlich annähernd gleiche Ordnung besitzen werden, und daſs daher, weil in den Kugelfunktionen mit wachsenden Indices auch die Anzahl der Koefficienten wächst (vergl. S. 65), eine sehr groſse Anzahl von Koefficienten notwendig werden würde zu einer einigermaſsen vollstän-

digen Darstellung von g. An eine solche Darstellung ist natürlich wegen mangelnden Beobachtungsmaterials nicht zu denken, aber auch die Rechnung würde kaum zu bewältigen sein; sie würde schon bei Beschränkung auf die wichtigsten kontinentalen Glieder erheblich werden und Hunderte von Koefficienten betreffen.

Deshalb hat *Stokes* in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung eine Formel entwickelt, welche gestattet, die Anomalieen in r' aus denen in g ohne Reihenentwicklung zu berechnen. Diese Formel hat freilich gegenwärtig nur theoretischen Wert, aber sie ist insofern von Wichtigkeit, als sie den einzig richtigen Weg zur Berechnung der Anomalieen im Radiusvektor, d. h. der Unterschiede N zwischen dem Geoid und seinem Niveausphäroid (Normalsphäroid), aus Schwerebeobachtungen zeigt. Auch ist die Möglichkeit einer praktischen Verwendung der Formel in nicht zu ferner Zeit zu hoffen.

Bei der Entwicklung dieser Formel im nächsten Paragraphen behalten wir die Näherungsrelationen (12) und (13) bei, da dies für unsere Zwecke einer allgemeinen Orientierung in der Sache ausreicht. Sollen die erwähnten Relationen strenger entwickelt werden, so ist dies nach Mafsgabe (und event. mit Benutzung) der Entwicklungen der §§ 12 bis 15 des vorigen Kapitels S. 77 u. ff. leicht zu bewerkstelligen. Es werden dadurch übrigens in den Gliedern obiger Formeln mit Kugelfunktionen fünften und höheren Ranges keine Änderungen herbeigeführt. Da man ferner die zweiten Potenzen der Kugelfunktionen vom dritten und höheren Range, und ebenso ihre Produkte in Koefficienten der Kugelfunktionen vom zweiten Range vernachlässigen kann, bleiben die Ausdrücke für g und r' frei von Gliedern ersten Ranges.

Zu bemerken ist aufserdem, dafs die Zulässigkeit der Substitution von R für r' ebenso wie eventuell diejenige von B und L für φ' und λ' in den Parenthesen der Gleichungen (3) und (4) bei den Gliedern von sehr hohem Range zweifelhaft erscheint. Denn offenbar weicht z. B. r'^{100} von R^{100} sehr ab, obgleich r' und R wenig verschieden sind. Die weitere Erörterung dieser Frage kann indessen hier unterbleiben, weil aus praktischen Gründen jede Anwendung der Entwicklungen dieses und des folgenden Paragraphen nur kontinentale Anomalieen ins Auge fassen kann.

Die Beziehung zwischen den Kugelfunktionen von höherem als dem zweiten Range in W, g und r', sowie dem Krümmungsradius ϱ (genauer: der Gradeslänge) erörtert schon *Laplace, Méc. cél.* t. II, l. III p. 97. Vergl. auch *Thomson und Tait*, *Handbuch der theor. Physik* I, 2 S. 344 — 346 und 336. Wir beschränken uns auf das hier Gegebene, da die betreffenden Relationen ihrem Wesen nach synthetisch weit leichter zu erlangen sind (4. Kap.). Vergl. übrigens noch den Schlufsparagraphen des dritten Kapitels.

Es mag hier auch erwähnt werden, dafs die Anwendung des *Clairaut*schen Theorems auf Teile der Erde unstatthaft ist. Wollte man also

für g eine Formel $p + q \sin^2 B$ aus Beobachtungen ableiten, die sich nur über einen Kontinent erstrecken, so würde das nach *Clairauts* Theorem berechnete $\mathfrak{a}$ wohl allenfalls ein Näherungswert für die Erdabplattung sein, aber nimmermehr für die spezielle Abplattung des Kontinents. Dies tritt aus den Entwicklungen des § 39 deutlich hervor, da diese eben nur gelten, wenn die ganze Erde ins Auge gefafst wird. Hier besteht ein wesentlicher Unterschied mit Gradmessungen, welche ja auch für einen Teil der Erde allein die Krümmungsverhältnisse angeben können.

Borenius versucht S. 26 seiner früher (S. 87) erwähnten Abhandlung eine Formel für spezielle Abplattung aufzustellen; allein sie ist zu hypothetisch, um erwähnt zu werden.

§ 40. Formel von Stokes zur Schätzung kontinentaler Abweichungen des Geoids.

Ist für die Beschleunigung g der Schwerkraft eine Interpolationsformel $g_a\,(1 + \mathfrak{b} \sin^2 B)$ angenommen, so weichen deren Ergebnisse von den wirklichen Werten g ab. Für diese haben wir nach (12) des vorigen Paragraphen den Ausdruck

$$g = G\left\{1 - 2\mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2 + k_3 + k_4 + \ldots\right\}, \qquad (1)$$

für jene, welche wir mit γ bezeichnen wollen, dagegen

$$\gamma = G\left\{1 - \mathfrak{b}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)\right\}. \qquad (2)$$

Der letztere Ausdruck folgt aus $g_a(1 + \mathfrak{b}\sin^2 B)$, wenn zunächst für $\sin^2 B$ geschrieben wird $\left(\sin^2\varphi' - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$ und sodann für $g_a\left(1 + \frac{\mathfrak{b}}{3}\right)$ das Symbol G gesetzt wird.

Die G beider Formeln sind identisch, da sie denselben Mittelwert vorstellen. Wir werden übrigens am Schlusse der Entwicklungen nachweisen, dafs eine Differenz der G nichts ausmacht. Aus (1) und (2) folgt nun durch Subtraktion, wenn

$$g = \gamma + \varDelta g \qquad (3)$$

gesetzt wird:

$$\varDelta g = G\left\{(\mathfrak{b} - 2\mathfrak{c})\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2 + k_3 + k_4 + \ldots\right\}. \qquad (4)$$

Für den Radiusvektor r' hat man nach (13) des vorigen Paragraphen, entsprechend der Gleichung (1) für g:

$$r' = R\left\{1 + \frac{1}{2}\mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2 + \frac{1}{2}k_3 + \frac{1}{3}k_4 + \ldots\right\}. \qquad (5)$$

Dagegen ist der Radiusvektor, welcher der Gleichung (2) für γ entspricht und dem Normalsphäroid $U = W_0$ angehört, gegeben durch den Ausdruck

$$R\left\{1 + \mathfrak{a}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)\right\}, \qquad (6)$$

welcher aus dem bekannten Ausdrucke $a\,(1 - \mathfrak{a}\sin^2\varphi')$ hervorgeht, wenn $\sin^2\varphi'$ in $\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)$ zerlegt und für $a\left(1 + \frac{\mathfrak{a}}{3}\right)$ der mittlere Radius R des Normalsphäroids gesetzt wird, der nach (7) S. 246 für Geoid $W = W_0$ und Sphäroid $U = W_0$ übereinstimmt. Zu (6) bestimmt sich $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{b}$ nach dem *Clairaut*schen Theorem $\mathfrak{a} = \frac{5}{2}\mathfrak{c} - \mathfrak{b}$.

Bezeichnen wir nun den Überschufs von r' über den durch (6) gegebenen Wert mit N:

$$r'_{\text{nach (5)}} = r'_{\text{nach (6)}} + N, \tag{7}$$

so folgt durch Subtraktion von (5) und (6):

$$N = R\left\{\left(\mathfrak{b} - 2\mathfrak{c}\right)\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2 + \frac{1}{2}k_3 + \frac{1}{3}k_4 + \ldots\right\}. \tag{8}$$

Dieses N kann ohne weiteres bei der hier festgehaltenen Genauigkeit als Erhebung des Geoids über das durch (6) bezeichnete Normalsphäroid (Erdellipsoid) aufgefafst werden.

Ziehen wir in (4) und (8) die beiden ersten Glieder

$$\left(\mathfrak{b} - 2\mathfrak{c}\right)\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2$$

in ein Glied k_2^* zusammen, so folgt:

$$\varDelta g = G\left\{k_2^* + k_3 + k_4 + \ldots\right\} \tag{9}$$

$$N = R\left\{k_2^* + \frac{1}{2}k_3 + \frac{1}{3}k_4 + \ldots\right\}. \tag{10}$$

Wir können hier sogleich darauf hinweisen, dafs ein in $\mathfrak{b}$ und demgemäfs in der Bestimmung des Niveausphäroids (6) begangener Fehler sich bei Benutzung der Gleichungen (9) und (10) dergestalt verbessert, dafs die Gestalt des Geoids korrekt erhalten wird. Bei völlig richtiger Bestimmung von $\mathfrak{b}$ müfste k_2^* bis auf Glieder mit der geographischen Länge verschwinden. Im allgemeinen denken wir uns in (1) und (5) k_2 in

$$k_2^* + \left(2\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\right)\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)$$

zerlegt und erhalten:

$$g = G\left\{1 - \mathfrak{b}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2^* + k_3 + k_4 + \ldots\right\}$$

$$r' = R\left\{1 + \left(\frac{5}{2}\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\right)\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + k_2^* + \frac{1}{2}k_3 + \frac{1}{3}k_4 + \ldots\right\}.$$

Bringt man aber $G\left\{1 - \mathfrak{b}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)\right\}$ bezw. $R\left\{1 + \left(\frac{5}{2}\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\right)\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right)\right\}$ nach links, so gelangt man wieder zu den Gleichungen (9) und (10).

§ 41. **Fortsetzung: Summierung.** Die Entwicklung (9) des vorigen Paragraphen ist eine Entwicklung nach Kugelfunktionen. Wir können aber andererseits mit Rücksicht auf (1*) § 28 S. 116 für den Wert Δg in einem bestimmten Punkte P' setzen:

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n \, \Delta g \, d\sigma \, , \tag{1}$$

wobei die Integration über die ganze Kugelfläche vom Radius 1 auszudehnen ist und die P_n die S. 57 (1) angegebenen Funktionen des Winkels zwischen den Radienvektoren nach P' und nach demjenigen Punkte, auf welchen sich $\Delta g d\sigma$ bezieht, vorstellen. Bei der Annahme der Koordinaten ist man in Formel (1), was zu bemerken wichtig ist, nicht an Breite und Länge gebunden, sondern man kann offenbar u. a. auch denjenigen Punkt der Kugelfläche, welcher dem durch Formel (1) dargestellten Δg entspricht, als Pol annehmen. Dies wollen wir thun und als Koordinaten Poldistanzen ψ (anstatt Breiten) und Längen χ einführen, sodafs

$$d\sigma = \sin\psi \, d\psi \, d\chi \tag{2}$$

wird.

Vergleicht man (1) mit (9) des vorigen Paragraphen Glied für Glied, so folgt für irgend einen Index n, insbesondere also auch für $n = 2$ bis ∞:

$$k_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n \frac{\Delta g}{G} \, d\sigma \, . \tag{3}$$

Die Einführung dieser Relation in (10) des vorigen Paragraphen giebt endlich

$$N = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \int P_n \frac{\Delta g}{G} \, d\sigma \, , \tag{4}$$

welche Reihe nun zu summieren ist*). Um dieses auszuführen, betrachten wir mit *Stokes* die Reihe

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n \, . \, \zeta^{n-1}$$

d. i. also

$$S = 5 P_2 \zeta + \frac{7}{2} P_3 \zeta^2 + \frac{9}{3} P_4 \zeta^3 + \dots . \tag{5}$$

Ist diese Summe gebildet, so wird

$$N = \frac{R}{4\pi} \int \frac{\Delta g}{G} \, S_{\zeta=1} \, d\sigma \, . \tag{6}$$

---

*) In einem ähnlichen, jedoch einfacheren Falle summiert bereits *Laplace*, *Méc. cél.* t. II p. 70 etc., eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe.

Aus (5) folgt

$$\frac{dS}{d\zeta} = 5P_2 + 7P_3\zeta + 9P_4\zeta^2 + \ldots$$

und weiter hiermit

$$\frac{1}{2}\int_0^{\zeta} \zeta^{\frac{3}{2}} \frac{dS}{d\zeta}\, d\zeta = P_2\zeta^{\frac{5}{2}} + P_3\zeta^{\frac{7}{2}} + P_4\zeta^{\frac{9}{2}} + \ldots.$$

Nach den Gleichungen (5) und (8) S. 50 und 51 ist aber bei beliebigem Werte von ψ für $\zeta^2 < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2}} = 1 + P_1\zeta + P_2\zeta^2 + P_3\zeta^3 + P_4\zeta^4 + \ldots.$$

Diese Entwicklung gilt nach S. 53 § 3 aufserdem für $\zeta^2 = 1$, falls $\cos^2\psi < 1$ ist. Man hat nun

$$\frac{1}{2}\int_0^{\zeta} \zeta^{\frac{3}{2}} \frac{dS}{d\zeta}\, d\zeta = \sqrt{\zeta}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2}} - 1 - P_1\zeta\right\} = \sqrt{\zeta}\,.\, Z, \quad (7)$$

wenn die Parenthese für den Augenblick mit Z bezeichnet wird. Aus (7) folgt durch Differentiation

$$dS = 2\zeta^{-\frac{3}{2}}\, d\,(Z\sqrt{\zeta})$$

und hieraus mittelst teilweiser Integration

$$S = 2\,\frac{Z}{\zeta} + 3\int_0^{\zeta} Z\,\zeta^{-2}\, d\zeta\,, \quad (8)$$

wobei die untere Integrationsgrenze ohne weiteres zu null angenommen werden konnte, weil einerseits zufolge (5) für $\zeta =$ null auch S null ist, andererseits wegen $Z = P_2\zeta^2 + P_3\zeta^3 + \ldots$ das erste Glied der rechten Seite und also überhaupt die ganze rechte Seite der vorigen Gleichung für $\zeta =$ null in null übergeht.

Aus (8) folgt mit Berücksichtigung des Wertes von P_1, der nach der ersten Gleichung (9) S. 51 gleich $\cos\psi$ ist:

$$S_{\zeta=1} = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 2\,(1 + \cos\psi) + 3\int_0^1 Z\,\zeta^{-2}\, d\zeta \quad (9)$$

mit

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2}} - 1 - \zeta\cos\psi\,. \quad (10)$$

Um das in (9) auftretende Integral zu erhalten, beachten wir zunächst, dafs

$$d\,\frac{\sqrt{1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2}}{\zeta} = \left\{\frac{\cos\psi}{\zeta\sqrt{1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2}} - \frac{1}{\zeta^2\sqrt{1 - 2\zeta\cos\psi + \zeta^2}}\right\} d\zeta\,.$$

Es wird daher mit Rücksicht auf die zugehörige Integralformel:

$$\int Z\zeta^{-2}\,d\zeta = -\frac{\sqrt{1-2\zeta\cos\psi+\zeta^2}}{\zeta} + \int\frac{\cos\psi}{\zeta\sqrt{1-2\zeta\cos\psi+\zeta^2}}\,d\zeta$$
$$-\int\left(\frac{1}{\zeta^2}+\frac{\cos\psi}{\zeta}\right)d\zeta\,. \qquad (11)$$

Den Wert des ersten Integrales rechter Hand findet man leicht, wenn man für ζ setzt $1:z$; es geht damit über in

$$-\int\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-2z\cos\psi+z^2}}\,dz\,,$$

und dieses ist gleich

$$-\cos\psi\ \text{log nat}\left\{2z-2\cos\psi+2\sqrt{1-2z\cos\psi+z^2}\right\}+\textit{Konst.}$$

Hiermit, sowie unter Auswertung des zweiten Integrales rechter Hand in (11) geht diese Gleichung über in

$$\int Z\zeta^{-2}\,d\zeta = \frac{1-\sqrt{1-2\zeta\cos\psi+\zeta^2}}{\zeta} \qquad (12)$$
$$-\cos\psi\ \text{log nat}\left\{2-2\zeta\cos\psi+2\sqrt{1-2\zeta\cos\psi+\zeta^2}\right\}+\textit{Konst.}$$

Für $\zeta = 1$ giebt die rechte Seite dieser Gleichung

$$1-2\sin\frac{\psi}{2}-\cos\psi\ \text{log nat}\left\{2(1-\cos\psi)+4\sin\frac{\psi}{2}\right\}+\textit{Konst.}; \qquad (13)$$

für ζ = null giebt sie mit Rücksicht auf die Reihenentwicklung der $\sqrt{1-2\zeta\cos\psi+\zeta^2}$ nach Potenzen von ζ:

$$\cos\psi-\cos\psi\ \text{log nat}\ 4+\textit{Konst.} \qquad (14)$$

Man hat daher aus Gleichung (9):

$$S_{\zeta=1} = \csc\frac{\psi}{2}-2\left(1+\cos\psi\right)$$
$$+3\left\{1-2\sin\frac{\psi}{2}-\cos\psi-\cos\psi\ \text{log nat}\left(\frac{1-\cos\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right)\right\}, \qquad (15)$$

und es ist endlich nach (6) und (2):

$$N = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\chi\int_0^{\pi}\frac{\Delta g}{G}\left\{\begin{array}{l}\csc\frac{\psi}{2}+1-6\sin\frac{\psi}{2}-5\cos\psi\\ -3\cos\psi\ \text{log nat}\left(\sin\frac{\psi}{2}\left[1+\sin\frac{\psi}{2}\right]\right)\end{array}\right\}\sin\psi\,d\psi\,. \qquad (16)$$

Da in der letzten Gleichung die Integration nach ψ die Werte ψ = null und π einschliefst, so ist noch zu untersuchen, ob die Gleichung (15) auch für diese beiden Fälle gilt. (*Stokes* erwähnt dieses nicht.)

Betrachten wir zunächst den Fall ψ = null. Hier geben die Formeln (5) und (15) beide für $S_{\zeta=1}$ den Wert unendlich; allein unendlich grofse Werte sind nicht ohne weiteres vergleichbar, und es ist also eine Prüfung erforderlich.

Für $\psi = \pi$ giebt (15) $S_{\zeta=1} = 1 + 3 \operatorname{lognat} 2$. Dagegen giebt (5)

$$S_{\zeta=1} = 5 - \frac{7}{2} + \frac{9}{3} - \ldots \pm \frac{2n+1}{n-1} \mp \ldots,$$

oder wie man leicht findet:

$$S_{\zeta=1} = 3\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots \pm \frac{1}{n-1} \mp \ldots\right) + 2\left(1 - 1 + 1 - \ldots \pm \;1\; \mp \ldots\right).$$

Von den beiden Reihen rechter Hand hat nur die erste eine bestimmte Summe, nämlich lognat 2; der Wert der zweiten oscilliert zwischen null und + 1. (15) setzt dafür augenscheinlich $\frac{1}{2}$. Übereinstimmung ist hier nicht, aber es handelt sich nur um eine endliche Unsicherheit, welche nichts ausmacht, da sie bei der Integration nur für ein differentiales Oberflächenelement in betracht kommt.

Somit bleibt noch der Einflufs der Anwendung der Formel (15) auf (16) für ψ = null zu prüfen. In Bezug hierauf ist es aber gleichgültig, ob Δg konstant oder veränderlich ist, weil die Prüfung sich nur auf die unendlich nahe Umgebung des Punktes ψ = null zu erstrecken hat. Nehmen wir Δg konstant, so zeigt die direkte Ausrechnung von (16), welche wir im nächsten Paragraphen geben, dafs N den richtigen Wert null erlangt. Mithin ist Formel (16) überhaupt richtig.

§ 42. **Fortsetzung: Probe und Übersicht.** Wir haben bisher angenommen, dafs in den Formeln (1) und (2) des § 40 S. 249 G denselben Wert habe; ist er verschieden, so erhält die rechte Seite von (9) S. 250 noch ein konstantes Glied k_0. Man sieht aber sofort, dafs dieses die folgenden Entwicklungen nicht ändert. Deshalb mufs die Gleichung (16) für N null ergeben, wenn Δg konstant gesetzt wird. Überdies folgt dieses auch unmittelbar aus Gleichung (4) S. 251, wenn man die Relation (5) S. 66 beachtet. Es mufs also

$$\int_0^\pi \left\{ \begin{array}{l} \csc\frac{\psi}{2} + 1 - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi \\ - 3\cos\psi \operatorname{lognat}\left(\sin\frac{\psi}{2}\left[1 + \sin\frac{\psi}{2}\right]\right) \end{array} \right\} \sin\psi\, d\psi \qquad (1)$$

gleich null sein. Hierin liegt eine Prüfung der Entwicklungen der letzten beiden Paragraphen.

Beachtet man, dafs $\sin\psi\, d\psi = 4 \sin\frac{\psi}{2}\, d \sin\frac{\psi}{2}$, so ist behufs Ermittlung von (1), wenn für $\sin\frac{\psi}{2}$ geschrieben wird u:

$$\int_0^\pi \csc\frac{\psi}{2} \cdot \sin\psi\, d\psi = 4\int_0^1 du = +4\,;$$

$$\int_0^\pi 1 \,.\, \sin\psi\, d\psi = +2\,;$$

$$-6\int_0^\pi \sin\frac{\psi}{2} \cdot \sin\psi\, d\psi = -24\int_0^1 u^2\, du = -8\,;$$

$$-5\int_0^\pi \cos\psi \sin\psi\, d\psi = 0\,;$$

$$-3\int_0^\pi \cos\psi \log\mathrm{nat}\left(\sin\frac{\psi}{2}\left[1 + \sin\frac{\psi}{2}\right]\right) \sin\psi\, d\psi$$

$$= -12\int_0^1 \log\mathrm{nat}\,(u\,[1+u]).(u - 2u^3)\, du\,.$$

Letzteres Integral giebt durch teilweise Integration:

$$-12\left\{\left[\log\mathrm{nat}(u[1+u]) \cdot \frac{u^2-u^4}{2}\right]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 \frac{u^2-u^4}{2u} du - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2-u^4}{1+u} du\right\},$$

und hieraus folgt, wenn man unter den Integralzeichen ausdividiert und dann integriert, da die eckige Parenthese an beiden Grenzen verschwindet, als Wert des Ausdruckes $+2$.

Mithin ist (1) in der That gleich null. Um einen Überblick darüber zu gewinnen, wie in Formel (16) die verschiedenen Werte Δg der ganzen Oberfläche eingehen, denken wir uns in diese Formel die Mittelwerte der Δg für konstantes ψ, also für konstanten sphärischen Abstand eingeführt. Wir bezeichnen diese mit Δg_ψ und erhalten

$$N = R\int_0^\pi \frac{\Delta g_\psi}{G} F\, d\psi, \tag{2}$$

wobei

$$F = \left\{\begin{array}{c} \csc\frac{\psi}{2} + 1 - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi \\ -3\cos\psi \log\mathrm{nat}\left(\sin\frac{\psi}{2}\left[1 + \sin\frac{\psi}{2}\right]\right) \end{array}\right\} \frac{\sin\psi}{2}\,. \tag{3}$$

Nachstehende Tabelle giebt eine Übersicht des Faktors F, welchem für die numerische Rechnung die folgende, bequemere Form zu geben ist:

$$F = \cos\frac{\psi}{2} - \frac{\sin\psi}{2}\left\{6\sin\frac{\psi}{2} - 1 + \cos\psi\left(5 + 3\log\mathrm{nat}\left[\frac{1-\cos\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right]\right)\right\}. \tag{3*}$$

ψ	F	ψ	F
0°	+ 1,00	180°	0,00
10	+ 1,22	170	+ 0,26
20	+ 0,94	160	+ 0,46
30	+ 0,47	150	+ 0,56
40	− 0,06	140	+ 0,53
50	− 0,54	130	+ 0,36
60	− 0,90	120	+ 0,08
70	− 1,08	110	− 0,27
80	− 1,08	100	− 0,62
90	− 0,91	90	− 0,91

(4)

Hieraus erkennt man vor allem sehr deutlich, dafs die Δg in der Umgebung eines Ortes allein ganz und gar nicht zu einer sicheren Bestimmung von N ausreichen. Immerhin haben die Δg der nächsten Umgebung den meisten Einflufs, denn obgleich F den Wert 1 auch in gröfseren Abständen erreicht, so gehören doch in solchen Distanzen zur Bildung eines Δg_ψ vergleichsweise mehr einzelne Werte Δg als in der Nähe, und es hat also dann das einzelne Δg weniger Einflufs. Jedoch müssen Schlüsse auf N, die Δg nur in der Umgebung eines Punktes beachten, trügerisch ausfallen.

Was die Anwendbarkeit der Formel (2) anlangt, so glaubt Verfasser, dafs in nicht zu ferner Zeit für einzelne günstig gelegene Orte eine solche möglich werden wird.*) Ein Ort ist günstig, wenn Δg in seiner Umgebung bis $\psi = 30°$ bestimmbar ist und wenn in die Gebiete um $\psi = 60°$ bis $100°$ und $140°$ bis $170°$ nicht zu viele Gegenden der Erdoberfläche fallen, welche nicht wenigstens eine Schätzung von Δg zulassen.

*) Im 4. Kapitel § 37 machen wir eine Anwendung von Formel (2) auf ein synthetisches Beispiel.

Im übrigen hängt die Anwendung dieser Formel davon ab, dafs es gelingt, mit Elasticitätsapparaten Beobachtungsreihen für die Schwerkraft auf dem offenen Meere zu erhalten. Inwieweit das hierher gehörige *Bathometer* von *William Siemens* als *Schweremesser* brauchbar ist, blieb uns zweifelhaft, da wir aufser den verschiedenen, wesentlich beschreibenden Mitteilungen (vergl. u. a.

A. W. Hofmann, Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876. Braunschweig 1878 und 1881 S. 203 und 565.)

nur eine Beobachtungsreihe auffinden konnten, die mit demselben angestellt worden ist, auf grund deren sich indessen nichts entscheiden läfst. Im vierten Kapitel werden wir am Schlusse des § 38 auf diese Beobachtungen näher einzugehen Veranlassung haben.

Selbstredend kann nur eine Bestimmung des kontinentalen Teiles von N versucht werden; für den geringfügigen lokalen ist das Verfahren nicht beabsichtigt und nicht geeignet. Die Δg müssen thunlichst von lokalen Einflüssen befreit werden: es müssen also die g nicht nur aufs Meeresniveau, sondern nach unseren Angaben auch wegen Kondensation reduziert werden. Andernfalls ist ja überhaupt die Zulässigkeit der Reihenentwicklung für W und somit der ganzen Entwicklung nicht vorhanden.

Die Auswertung des Integrales für N würde mit der (meist interpolatorischen) Bildung der Werte Δg_ψ, am bequemsten an der Hand eines Globus, beginnen und (ohne Anwendung numerischer mechanischer Quadratur) am besten und ganz ausreichend graphisch bewirkt werden, wobei die Werte $F \Delta g_\psi : G$ als Ordinaten zu Abscissen ψ (als Arcus gen.) und das Integral als Fläche auftreten. Eine Genauigkeitsschätzung für N ist dabei leicht zu erhalten, indem der Einflufs der Unsicherheit in den Δg_ψ auf diese Fläche ermittelt wird.

§ 43. Allgemeine Sätze für die Verteilung der kontinentalen Wellen des Geoids.

I. Wenn man berücksichtigt, dafs in dem Ausdrucke (8) S. 250 für N, d. h. für die Differenz der Radienvektoren des Geoids und des Normalsphäroids gleichen Potentialwertes, ein konstantes Glied fehlt, so erkennt man zunächst leicht, dafs *beide Flächen wesentlich gleiche Volumina* einschliefsen, weil jedes Integral der Form $\int K' d\sigma'$, worin K' eine Kugelfunktion von mehr als nulltem Range bezeichnet, über die ganze Kugeloberfläche ausgedehnt, nach S. 66 (5) verschwindet. Allerdings sind bei diesem Nachweise gleicher Volumina Bruchteile des Radius R von der Ordnung des Quadrats der Abplattung in N vernachlässigt; aber eine genauere Untersuchung, die wir übergehen dürfen, bestätigt den gefundenen Satz. Ganz streng allerdings existiert Gleichheit der Volumina nicht, und zwar schon deshalb nicht, weil die zur Gültigkeit der Entwicklung vorausgesetzte Kondensation gewisser Massen die Geoidfläche etwas verschiebt.

II. Im Anschlufs an § 39 S. 246 (8) haben wir für den Radiusvektor des Geoids die Näherungsrelation:

$$r' = R\left\{1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots\right\}, \tag{1}$$

wenn die in erwähnter Gleichung (8) auftretenden Kugelfunktionen 2., 3., 4. Ranges u. s. f. mit $u_2, u_3, u_4 \dots$ bezeichnet werden. Koordinatenanfang ist der Schwerpunkt der Erde. Die Gleichung (1) bedeutet aber, da u_1 fehlt, *dafs mit diesem Schwerpunkt der Volumenschwerpunkt des Geoids zusammenfällt.*

Hierauf macht *Stokes* in seiner wiederholt genannten Abhandlung



aufmerksam. Um den Satz zu beweisen, denken wir uns drei rechtwinkelige Koordinatenaxen durch den Erdschwerpunkt, dergestalt dafs

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \varphi' \cos \lambda' \\ y' &= r' \cos \varphi' \sin \lambda' \\ z' &= r' \sin \varphi' \end{aligned} \tag{2}$$

wird, vergl. § 4 S. 5. Wir denken uns ferner das Volumen des Geoids vom Erdschwerpunkt aus in Elementarpyramiden mit dem körperlichen Winkel $d\sigma'$ zerlegt und haben dann, da der Schwerpunkt jeder Elementarpyramide im Abstand $\frac{3}{4} r'$ von der Spitze liegt, als statische Momente des Volumens des Geoids beziehungsweise für die yz-, xz- und xy-Ebene die über die Oberfläche der Kugel vom Radius 1 auszudehnenden Integrale:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\int r'^3 x' d\sigma' \text{ d. i. } \frac{1}{4}\int r'^4 \cos \varphi' \cos \lambda' \, d\sigma' \\ &\frac{1}{4}\int r'^3 y' d\sigma' \text{ d. i. } \frac{1}{4}\int r'^4 \cos \varphi' \sin \lambda' \, d\sigma' \\ &\frac{1}{4}\int r'^3 z' d\sigma' \text{ d. i. } \frac{1}{4}\int r'^4 \sin \varphi' \, d\sigma' . \end{aligned} \tag{3}$$

Hierzu giebt Gleichung (1), wenn die bei der Entwicklung dieser Gleichung angenommene Genauigkeit festgehalten wird:

$$r'^4 = R^4 \left\{1 + 4u_2 + 4u_3 + 4u_4 + \ldots\right\} . \tag{4}$$

Beachtet man nun, dafs $\cos \varphi' \cos \lambda'$, $\cos \varphi' \sin \lambda'$ und $\sin \varphi'$ Kugelfunktionen 1. Ranges sind (vergl. S. 65 § 7), in r'^4 aber gerade diese fehlen, so müssen nach Satz (4) § 28 S. 116 die drei Integrale (3) verschwinden, womit das Zusammenfallen von Erdschwerpunkt und Volumenschwerpunkt des Geoids erwiesen ist.

Allerdings ist dieses Zusammenfallen kein ganz vollständiges. Wenn man in § 39 S. 246 etwas strenger entwickelt und beim Übergang von (1) zu (4) im laufenden Paragraphen auch die Quadrate und Produkte der u mitnimmt, so entsteht in (4) nach Zerlegung in Kugelfunktionen auch ein Glied mit einer Kugelfunktion 1. Ranges. Die Integrale (3) sind dann nicht null; aber da die Koefficienten dieses Gliedes erheblich kleiner als von der Ordnung $\mathfrak{a}^2$ sein werden, so sind auch jene voraussichtlich weit kleiner als Bruchteile des Produktes aus dem Volumen in den mittleren Radius R von der Ordnung $\mathfrak{a}^2$. Aus diesem Grunde kann also der Abstand von Massen- und Volumenschwerpunkt nur wenige Meter betragen.

Eine ebenso geringfügige Differenz ergiebt sich aus dem Umstande, dafs die Entwicklungen des § 39 und also auch diejenigen des laufenden Paragraphen nicht für das wirkliche Potential der Erde

gelten, sondern nur für dasjenige, welches nach der Kondensation gewisser Massen übrig bleibt. Indessen ist, wie früher gezeigt, die entsprechende Verschiebung der Geoidfläche sehr klein.

Zufolge des nahen Zusammenfallens des Volumenschwerpunktes des Geoids mit dem Schwerpunkt der Erde hat nun dieser letztere eine mittlere Lage zur Oberfläche des Meeres. Denkt man sich dazu das Normalsphäroid, gegen welches die Meeresfläche Ein- und Ausbiegungen zeigt, so erkennt man sofort, daſs keinesfalls auf einer Hälfte der Meeresfläche nur Ein- und auf der anderen nur Ausbiegungen vorkommen können, wie man auch den die beiden Hälften trennenden Zentralschnitt durch die Erde legen möge.

Bestünde die Erdoberfläche zur einen Hälfte aus einem Kontinent, zur anderen aus einem Ocean und wären unsichtbare Massenunregelmäſsigkeiten nicht vorhanden, so würde zwar jedenfalls in der Nähe der Küste das Geoid gegen sein Normalsphäroid im Kontinent gehoben, im Ocean gesenkt erscheinen, aber jene Hebung und diese Senkung könnten nach dem oben entwickelten Satze keinesfalls überall im Kontinent bezw. im Ocean vorhanden sein. Die wirkliche Erdoberfläche kann man aber, wie ein Globus zeigt, in 2 Hälften teilen, deren eine hauptsächlich vom stillen Ocean nebst Australien und der Südpolarregion erfüllt wird, während die andere die gröſseren Teile der Kontinente und die kleineren Oceane enthält. Hierdurch wird es plausibel, daſs die gröſsten Depressionen des stillen Oceanes nicht im Zentrum desselben, sondern vielmehr in einiger Nähe der Küsten von Asien und Amerika stattfinden. (Vergl. dazu das 4. Kap. § 38, wo noch gezeigt wird, daſs jedenfalls auch unsichtbare Massenstörungen existieren müssen.)

§ 44. Relation zwischen Schwerestörung, Störung im Radiusvektor und Dichtigkeit der störenden Schicht für einen Punkt des Geoids.

Wir knüpfen an S. 147 § 5 an und verstehen in Fig. 14 unter der Niveaufläche $W = W_0$ die Geoidfläche, unter der Fläche $U = W_0$ ein Normalsphäroid. Für irgend einen Punkt setzen wir wie dort

$$W = U + T, \tag{1}$$

wobei U den normalen Teil von W bezeichnet, für welchen die Schwerkraft durch das Symbol γ ausgedrückt wurde.

Im Punkte Q des Geoids ist nun zufolge (1):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial h}\right)_Q = \left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_Q + \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_Q, \tag{2}$$

wobei es wegen der geringen Lotabweichung gleichgültig ist, ob man sich h in Richtung der Normale des Geoids oder in Richtung der Normale der durch Q führenden Fläche U = Konst. denkt. Es ist daher

$$\left(\frac{\partial W}{\partial h}\right)_Q = -g\,, \tag{3}$$

wenn g die Schwerkraft im Meeresniveau bezeichnet, und es ist ferner

$$\left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_Q = -\left\{\gamma + \left(\frac{d\gamma}{dh}\right)_0 N + \cdots\right\}, \tag{4}$$

wobei in ausreichender Annäherung

$$\left(\frac{d\gamma}{dh}\right)_0 = -\frac{2\gamma}{R} \tag{4*}$$

gesetzt werden darf.

Auf den Differentialquotienten von T nach h wenden wir die Formel (8) § 4 S. 147 an, indem wir vorläufig annehmen, daſs die störenden Massen lediglich in der Erdrinde ihren Sitz haben, und indem wir ferner die zulässige Voraussetzung der Kugelgestalt der Erdoberfläche machen. Dann ist nach der erwähnten Gleichung:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_Q = -2\pi k^2 \vartheta - \frac{T}{2R} + \cdots. \tag{5}$$

ϑ bezeichnet hierin die störende Masse für die Flächeneinheit derjenigen Fläche, auf welcher wir uns die störenden Massen ausgebreitet denken. Zufolge der Bedingungen, welche (5) zu grunde liegen, muſs man die Meeresfläche selbst als diese Fläche nehmen.

Indem wir beachten, daſs nach S. 148 (2) in der hier innegehaltenen Genauigkeit

$$T = N\gamma\,,$$

auſserdem aber ebenso genau

$$\gamma = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$$

gesetzt werden kann, folgt aus (5):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_Q = -\gamma\left\{\frac{3\vartheta}{2\Theta_m R} + \frac{N}{2R}\right\} + \cdots. \tag{6}$$

Führen wir (3), (4*) und (6) in (2) ein, so ergiebt sich:

$$g = \gamma + \frac{3\gamma}{2R}\left(\frac{\vartheta}{\Theta_m} - N\right) + \cdots \tag{7}$$

Bezeichnen wir $g - \gamma$ mit Δg und denken uns ϑ aus der Kondensation einer Schicht von der Dicke D und der Dichtigkeit $\frac{1}{2}\Theta_m$ entstehen, setzen wir also

$$g - \gamma = \Delta g \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{1}{2}\Theta_m D\,, \tag{8}$$

so folgt

$$\Delta g = \frac{3\gamma}{2R}\left(\frac{D}{2} - N\right) + \cdots \tag{9}$$

oder $$D = 2\left\{\frac{2R}{3\gamma}\Delta g + N\right\} + \ldots . \tag{10}$$

Für γ kann man hierin den Mittelwert G setzen.

Diese Näherungsformel giebt also die Dicke D der störenden Schicht, wenn Δg und N bekannt sind. Sie erlangt aber erst Bedeutung, wenn mittelst der *Stokes*schen Formel N aus den Δg für einzelne Erdorte berechnet werden kann. Da diese letztere Formel nach unserer Darstellung g und Δg mit Kondensationsreduktion verlangt, mufs auch in (10) Δg so gedacht werden.

Bei der jetzt gegebenen Darstellung ist angenommen, dafs nur in der Nähe der Meeresfläche störende Massen vorhanden seien. Die Potentialtheorie lehrt aber, dafs man immer unbeschadet der Wirkung aufserhalb alle Massen innerhalb einer geschlossenen Fläche in einer bestimmten Weise auf derselben verteilen kann. Wir können uns also auch etwa vorhandene störende Massen im Erdinnern auf die Meeresfläche verschoben denken, wobei aber Gröfse und Richtung der Verschiebung unbekannt bleiben. Ein aus Formel (10) ermitteltes D bezieht sich auf diese ideelle störende Massenschicht. Wenn man also dereinst von Formel (10) wird Gebrauch machen, so erhält man nur die ideelle störende Massenschicht; nicht die wirklichen störenden Massen nach Gröfse und Lage. Trotzdem wird man aus dem Verlauf von D in der ideellen Schicht immerhin Vermutungen über die wirklichen störenden Massen aufstellen können, da die Dichtigkeiten im Erdkörper an gewisse Grenzwerte gebunden sind.

Vorläufig ist eine strenge Anwendung von (10) noch nicht möglich. Wir werden aber im § 38 des nächsten Kapitels sehen, dafs die jetzt bekannten Beobachtungen über die Schwerkraft bereits Anhaltspunkte über die kontinentale Verteilung der Störungsmassen gewähren. Auch über mehr oder weniger lokale Störungen sind Untersuchungen mit Erfolg möglich, vergl. in diesem Kapitel § 31 S. 228 und im nächsten Kapitel § 41.

Über den Beweis des angezogenen Satzes der Potentialtheorie, der von *Gaufs* aufgestellt wurde, ist zu vergleichen:

Gaufs, *Allgemeine Lehrsätze* u. s. f. Art. 36 (vollständiger Titel auf S. 29) oder

Dirichlet, *Vorlesungen* u. s. f. S. 151 (voller Titel S. 14).

Wenn die einschliefsende Fläche als Kugelfläche angenommen wird, so kann man mit Hilfe der Theorie der Kugelfunktionen aus den gegebenen störenden Massen auf die äquivalenten, auf der Kugel ausgebreiteten Massen wie folgt schliefsen.

Wir nehmen den Mittelpunkt der umhüllenden Kugel als Koordinatenanfang. Dann ist nach S. 64 (1) das Potential der eingeschlossenen Massen auf einen Punkt aufserhalb im Zentrumsabstand r' gleich

$$v = \frac{k^2}{r'}\left\{M + \frac{1}{r'}\int P_1 r\,dm + \frac{1}{r'^2}\int P_2 r^2\,dm + \frac{1}{r'^3}\int P_3 r^3\,dm + \ldots\right\}, \tag{a}$$

wenn M die betreffenden Massen bezeichnet.

Denken wir uns nun andererseits auf der Kugeloberfläche einen Massenbelag, so ist dessen Dichtigkeit ϑ nach Kugelfunktionen entwickelt

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \dots,$$

wobei rechter Hand der Index den Rang der Kugelfunktionen anzeigt. Wir können aber die Formel (a) für v auch auf diesen Belag anwenden, wobei nun für $r = a$ als Kugelradius $dm = a^2 \vartheta \, d\sigma$ wird und die Integration über die Kugelfläche auszudehnen ist.

Dieselbe ergiebt:

$$v = \frac{4\pi a^2 k^2}{r'} \left\{ \vartheta_0 + \frac{a\vartheta_1'}{3r'} + \frac{a^2\vartheta_2'}{5r'^2} + \frac{a^3\vartheta_3'}{7r'^3} + \dots \right\}, \tag{b}$$

wenn man die Sätze berücksichtigt, welche im § 28 S. 116 unter (2) und (3) gegeben sind. ϑ_i' bedeutet, dafs in ϑ_i für φ und λ die zu dem angezogenen Punkte gehörigen Werte φ' und λ' zu setzen sind.

Die Vergleichung der Ausdrücke (a) und (b) führt, falls nur (a) wirklich explicite vorliegt, zu dem Werte $\vartheta_0 = M$ und zu den Werten der in den ϑ_i auftretenden Koefficienten.

Der umgekehrte Schlufs: von den Massen ϑ auf diejenigen im Erdinnern, ist im allgemeinen unmöglich. Man wird nur, wenn ϑ von 2,8 so sehr abweicht, dafs aus physikalischen Gründen die Massenstörung nicht lediglich in der Erdkruste stattfinden kann, auf Massenstörungen im Erdinnern schliefsen müssen.

§ 45. Die sogenannten Näherungsformeln zur Berechnung des Abstandes von Geoid und Normalsphäroid aus der Schwerestörung. Die Entwicklung im vorhergehenden Paragraphen benutzt z. T. eine Entwicklung von *Bruns*, Figur der Erde, S. 26. Daselbst wird aber der Punkt P der Meeresfläche nicht wie bei uns ein wenig überhalb der störenden Schicht vorausgesetzt, sondern in derselben. Mithin verschwindet in der Endformel (10) die Gröfse D und es wird in der Gleichung:

$$N = -\frac{2R}{3\gamma} \Delta g \tag{1}$$

ein Mittel zur Schätzung von N aus Δg erhalten.

Bruns bemerkt indessen, dafs lokale Störungen die Brauchbarkeit dieser Formel beeinträchtigen können, und er verwirft in einer Besprechung in den *Fortschritten der Mathematik von 1877* (herausgegeben 1879), welche die Abhandlung von *Listing*, *Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers*, betrifft, dessen Vorgehen S. 37 u. ff., aus einer derartigen Formel spezielle Werte von N abzuleiten, wobei es ganz gleichgültig ist, dafs *Listing* infolge anderer Herleitung einen etwas anderen Koefficienten benutzt.

In der That ist Formel (1) für die wirkliche Ausrechnung eines N ganz *wertlos*. Man kann dieses im 4. Kapitel an synthetischen, den irdischen Verhältnissen entsprechenden Beispielen bestätigt sehen; denn bei diesen Beispielen kennt man N, D und Δg. Die Formel

(1) giebt vielfach sogar das Vorzeichen falsch. Ebenso führt sie zu ganz falschen Resultaten, wenn man als Normalform des Geoids die Kugelfläche nimmt. Wir wollen aber dieses nicht weiter ausführen. Ursache der Wertlosigkeit der Formel (1) ist, dafs N, D und $\Delta g \frac{R}{\gamma}$ im allgemeinen Gröfsen von gleicher Ordnung sind. Man darf daher in einer Formel, worin sie alle drei auftreten, nicht eine derselben vernachlässigen. Formel (1) vernachlässigt aber thatsächlich die störende Schicht D, welche unterhalb des betreffenden Punktes der Meeresfläche liegt (ob die etwa noch darüberliegende Schicht in betracht kommt, hängt von der Art der Reduktion von g ab).

In seiner Abhandlung *On Gravity* etc. beschäftigt sich *Stokes* 1849 u. a. auch mit dem Einflufs der sichtbaren Massenunregelmäfsigkeiten der Erdoberfläche auf die Gestalt der Meeresfläche und auf die Schwerkraft. Dabei denkt er sich dieselben auf das Meeresniveau kondensiert und zeigt nun, dafs einerseits die Hebung der Meeresfläche infolge der Existenz des Potentials T jener Massen $T:g$ beträgt, andererseits mit dieser Hebung wegen des vermehrten Abstandes vom Erdzentrum eine Verminderung von g gleich $2T:R$ verbunden ist. Der Verminderung steht eine Vermehrung durch die Anziehung der störenden Massen entgegen, für welche *Stokes* $T:2R$ ableitet, indem er das Mittel der Vertikalanziehungen für einen aufserhalb der Meeresfläche und einen innerhalb derselben ihr naheliegenden Punkt nimmt, also die Anziehung der Nachbarmassen ignoriert. Hier haben wir wieder das Resultat der *Bruns*schen Entwicklung; der Gang ist bei letzterer durch Vermeidung der entbehrlichen Kugelfunktionen vereinfacht. Schliefslich berücksichtigt aber *Stokes* für die Kontinente noch die Vermehrung der Schwerkraft durch die Anziehung der zwischen ungestörter und gestörter Niveaufläche liegenden Schicht Festland, womit bei einer Dichtigkeit gleich der halben mittleren Erddichte eine Verminderung um $\frac{3}{4} T:R$ in der Schwerkraft für die Erhebung $T:g$ übrig bleibt. (*Stokes* hat anstatt $\frac{3}{4}$ die Zahl 0,82 weil er eine etwas andere Dichtigkeit voraussetzt).

Hiernach würde also auf den Kontinenten der Abnahme der, augenscheinlich nach *Young*s Regel reduziert vorausgesetzten Schwerkraft um Δg eine Erhebung der Meeresfläche von $\frac{4}{3} \frac{\Delta g}{g} R$ entsprechen. Auf dem Ocean wäre dieselbe Formel anzuwenden, indem man sich denkt, dafs hier eine darüber gelegene Schicht von der halben mittleren Dichtigkeit der Erde in Wegfall gekommen ist. Das auf den Inseln beobachtete g würde ebenfalls einfach aufs Meeresniveau nach der genannten Regel zu reduzieren sein (strenggenommen müfste man noch die Anziehung der im Meere an der halben mittleren Erddichte fehlenden Massen berücksichtigen). *Stokes* wendet übrigens für diese Fälle anstatt $\frac{4}{3}$ den Koefficienten $\frac{2}{3}$ an. Denn er benutzt seine Formeln keineswegs zur Schätzung der Abstände von Geoid und Sphäroid, sondern nur zur Ermittelung des Anteiles der sichtbaren Massenunregelmäfsigkeiten (Erhebung der Kontinente übers Meer, geringere Dichtigkeit des Wassers im Ocean als des

Festlandes) an den Störungen in der Lage des Meeresniveaus und in der Schwerkraft.

Diese letztere Aufgabe behandelt 1868 auch *Ph. Fischer* in seinen *Untersuchungen über die Gestalt der Erde* S. 289—292, allerdings mathematisch insofern weniger vollkommen, als er sich nicht der Potentialtheorie bedient und die Anziehung der nicht benachbarten störenden Massen deshalb nicht durch $T:2R$ ausdrücken kann, sodafs er sie nur bis zu einem gewissen Umkreis berücksichtigt. Er bemüht sich aber, den Einflufs der speziellen Gestaltsverhältnisse der Kontinentalküsten darzustellen.

Wenn nun *Hann* u. a. in der *Gaea* 1876 Bd. 12 S. 81 unter Beziehung auf *Stokes* und *Ph. Fischer* das Pendel als Instrument zur Bestimmung der Abstände von Geoid und Erdellipsoid hinstellt, so ist das insofern nicht zutreffend, als die letztgenannten Autoren bei den entsprechenden Entwicklungen nur rein synthetisch die Störungen der Lage der Meeresfläche und der Gröfse der Schwerkraft für bekannte Massenstörungen ableiten wollten, allerdings mit Seitenblicken auf die vorhandenen Schwerestörungen. Ebenso wenig kann die von *Listing* a. a. O. S. 37 und die von *Hann* a. a. O. S. 139 gegebene Ableitung der Formel zur Berechnung der Erhebung N aus der Schwerestörung $\Delta g = g - \gamma$ befriedigen. Denn diese Formeln bringen die Erhebung N und die Differenz Δg einfach durch *Youngs* Regel in Beziehung. Mit unseren Zahlen (S. 166) wird also gesetzt:

$$N = -\frac{4R}{5g}\Delta g. \tag{2}$$

Durch die nahe Übereinstimmung dieser Formel mit (1) darf man sich aber über ihren Wert nicht täuschen lassen!

§ 46. Zusammenhang zwischen dem Mittelwert der reziproken Krümmungsradien in einem Punkte einer Niveaufläche und dem Differentialquotienten der Schwere nach der Höhe.

Im 1. Kapitel S. 37 (11) war die Relation gefunden worden:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) = \left[\frac{1}{\varrho}\right] = \frac{W_{1.1}+W_{2.2}}{2\,W_3}, \tag{1}$$

worin ϱ_1 und ϱ_2 die bei nach aufsen convexer Krümmung positiv gerechneten Hauptkrümmungsradien in einem Punkte P_0 einer Niveaufläche, $\left[\frac{1}{\varrho}\right]$ den Durchschnittswert aller $1:\varrho$ daselbst, $W_{1.1}$ den 2. Differentialquotienten von W nach ξ, $W_{2.2}$ denselben nach η und W_3 den ersten nach ζ bezeichnen; wobei ferner die Normale in P_0 nach aufsen als positive ζ-Axe dient, während die ξ- und η-Axe in die Tangentialebene der Niveaufläche von P_0 gelegt sind. Man hat also noch

$$g = -W_3. \tag{2}$$

Nun ist nach S. 34 (8) allgemein in irgend einem Punkte bei beliebiger Lage des rechtwinkeligen Axensystemes (wie sich leicht durch Transformation zeigen läfst):

$$W_{1.1}+W_{2.2}+W_{3.3} = -4\pi k^2\Theta + 2\omega^2, \tag{3}$$

wenn Θ die Dichtigkeit in diesem Punkte und ω die Winkel-



geschwindigkeit der Erdrotation bezeichnet. Beachtet man nun noch, dafs

$$W_{3.3} = \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial W_3}{\partial \zeta} = -\frac{\partial W_3}{\partial h} \tag{4}$$

ist, so erhält man aus (1) durch Elimination von $W_{1.1} + W_{2.2}$ mittelst (3) und Benutzung der (2) und (4):

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = -\frac{1}{2g}\frac{dg}{dh} + \frac{2\pi k^2 \Theta - \omega^2}{g}. \tag{5}$$

Um hieraus k^2 zu eliminieren, führen wir im Nenner rechter Hand die Näherungsrelation

$$g = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$$

ein und erhalten so:

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = -\frac{1}{2g}\frac{dg}{dh} + \frac{1}{R}\left\{\frac{3}{2}\frac{\Theta}{\Theta_m} - \frac{\omega^2 R}{g}\right\}. \tag{6}$$

Hierin beziehen sich g, $dg : dh$ und Θ auf denjenigen Punkt, für welchen $[1 : \varrho]$ gilt.

Auf diese Relation macht *H. Bruns* in seiner *Figur der Erde* S. 14 aufmerksam.

Mit Rücksicht auf die starken Schwankungen, welchen $1 : \varrho$ bekanntlich in der Nähe der Erdoberfläche ausgesetzt ist, kann man das Glied $\omega^2 R : g$, welches nach S. 84 § 16 gleich rund $^1/_{289}$ ist, vernachlässigen; für Niveauflächen in der Luft aufserdem noch das Glied mit $\Theta : \Theta_m$, d. i. rund $^1/_{4500}$. Man erhält also für Niveauflächen in der Luft angenähert:

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = -\frac{1}{2g}\frac{dg}{dh}. \tag{7}$$

Bei der geringen Genauigkeit, mit welcher man gegenwärtig im Stande ist, $dg : dh$ zu messen, reicht diese Relation zur Bestimmung von $[1 : \varrho]$ sicher aus. Man vergl. weiterhin im 4. Kapitel § 3.

Wir entwickeln hier noch im Anschlufs an § 39 S. 245 mittelst (7) eine Gleichung, welche zeigt, wie die höheren Kugelfunktionen in der Entwicklung von W auf den Mittelwert $[1 : \varrho]$ übergehen. Aus (4) S. 246 folgt mit Beibehaltung der daselbst erörterten Genauigkeit successive:

$$g = \frac{1}{r'^2}\left\{K_0' + \frac{3K_2'}{r'^2} + \frac{4K_3'}{r'^3} + \frac{5K_4'}{r'^4} + \dots \qquad - \omega^2 r'^3 \cos^2\varphi'\right\}$$

und

$$-\frac{dg}{dh} = \frac{2}{r'^3}\left\{K_0' + \frac{3.4}{2}\frac{K_2'}{r'^2} + \frac{4.5}{2}\frac{K_3'}{r'^3} + \frac{5.6}{2}\frac{K_4'}{r'^4} + \dots + \frac{1}{2}\omega^2 r'^3 \cos^2\varphi'\right\};$$

mit Rücksicht auf (7) ist demnach

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = \frac{1}{r'}\left\{1 + \frac{2.3\,K_2'}{2r'^2K_0'} + \frac{3.4\,K_3'}{2r'^3K_0'} + \frac{4.5\,K_4'}{2r'^4K_0'} + \ldots + \frac{3\omega^2 r'^3\cos^2\varphi'}{2K_0'}\right\},$$

oder mit Einführung der S. 247 schon benutzten Abkürzungen und Vereinfachungen:

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = \frac{1}{r'}\left\{1 + \frac{3}{2}\,\mathfrak{c}\cos^2\varphi' + \frac{2.3}{2.1}\,k_2 + \frac{3.4}{2.2}\,k_3 + \frac{4.5}{2.3}\,k_4 + \ldots\right\}.$$

Nun ist nach S. 247 (13):

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{R}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) - k_2 - \frac{1}{2}\,k_3 - \frac{1}{3}\,k_4 - \ldots\right\},$$

und es wird daher

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = \frac{1+\mathfrak{c}}{R}\left\{\begin{array}{l} 1 + \mathfrak{c}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi'\right) + \frac{2.3-2}{2.1}\,k_2 \\ + \frac{3.4-2}{2.2}\,k_3 + \frac{4.5-2}{2.3}\,k_4 + \ldots \end{array}\right\}. \qquad (8)$$

Diese Gleichung zeigt im Vergleich mit (12) S. 247, daſs die Kugelfunktionen höheren Ranges in g in dem Durchschnittswerte der reziproken Krümmung sehr groſsen Einfluſs erlangen.

Viertes Kapitel.

Synthetische Untersuchungen über die Einflüsse gegebener Massen auf die Niveauflächen in der Nähe der Erdoberfläche.

§ 1. Deformation der Niveauflächen auſserhalb durch einen kugeligen Massenzuwachs oder einen kugeligen Massendefekt unterhalb des Terrains. Die Erde ersetzen wir durch eine Kugel vom Radius R, deren Anziehung so beschaffen ist, als wäre ihre Masse

$$M = \frac{4}{3}\,\pi R^3 \Theta_m \qquad (1)$$

im Mittelpunkt C, dem Schwerpunkt, vereinigt. Wir setzen also ihr Anziehungspotential auſserhalb der Oberfläche für einen Punkt im Abstand H von derselben gleich

$$W = k^2\,\frac{M}{R+H} = \frac{4}{3}\,\pi k^2 \Theta_m\,\frac{R^3}{R+H}. \qquad (2)$$

Das Symbol W, welches bisher bei den strengen Betrachtungen das Potential der Zentrifugalkraft mit einschloſs, behalten wir bei, obwohl wir von der Zentrifugalkraft als unwesentlich ganz absehen, und zwar um daran zu erinnern, daſs es sich für uns in W um den Repräsentanten des Schwerkraftspotentials der Erde handelt.

Tritt nun zur Masse M innerhalb deren Oberfläche noch eine störende, positive oder negative Masse m, deren Anziehung aufserhalb jener Oberfläche als von ihrem Schwerpunkt m ausgehend angesehen werden darf, dann ist das Potential in einem Punkte P, der nach aufsen um $H + h$ von der erwähnten Oberfläche absteht, Fig. 32, gleich

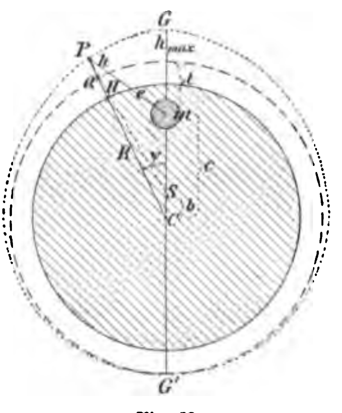


Fig. 32.

$$W = k^2 \left(\frac{M}{R + H + h} + \frac{m}{e} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{R + H + h} + k^2 \frac{m}{e}, \quad (3)$$

worin e den Abstand mP bezeichnet. Verstehen wir unter W in (2) und (3) denselben konstanten Wert W_0, so stellen sie die Gleichung einer Niveaufläche aufserhalb für denselben Potentialwert im ursprünglichen und im gestörten Zustande dar*). Aus der Subtraktion von (2) und (3) folgt dann mit Rücksicht auf den jedenfalls kleinen Betrag von h und H gegen R in hinreichender Annäherung:

$$h = \frac{m}{M} \frac{R^2}{e} = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi \Theta_m R} \cdot \frac{1}{e} . \quad (4)$$

Hiernach ist das Produkt he für die gestörte Niveaufläche konstant. Dem kleinsten e entspricht das gröfste h.

Um zu erkennen, wie grofs h werden kann, setzen wir für m die Masse einer Kugel vom Radius a und der Dichtigkeit Θ:

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 \Theta .$$

Dann giebt (4) für h die Formel:

$$h = a \frac{a^2}{eR} \frac{\Theta}{\Theta_m} . \quad (4^*)$$

Der Faktor von a rechter Hand ist ein kleiner Bruch, da nach der Voraussetzung $e \geq a$ sein mufs und $\Theta : \Theta_m$ höchstens einige Einheiten beträgt. (Für eine Platinkugel wird $\Theta : \Theta_m$ nach Abzug von 2,8 für die normale Dichtigkeit der Erdrinde etwa 3, für eine Bleikugel 1,5, für einen Hohlraum — 0,5.) Es wird somit h nur ein Bruchteil des Halbmessers der Massenstörung im Betrage von kaum 1%, sobald wir festsetzen, dafs die Ausdehnung der Massenstörung den Betrag einiger Meilen nicht überschreitet. Alsdann dürfen wir e anstatt auf P auf den in Richtung PC liegenden Punkt Q der un-

*) Bei negativen Werten h mufs $H + h$ doch positiv genommen werden, sonst gilt (3) nicht streng.

gestörten Niveaufläche beziehen und können also in ausreichender Annäherung setzen:

$$e^2 = (R + H)^2 + c^2 - 2(R + H)c \cos \psi . \tag{5}$$

Nach dieser Gleichung ist e für ψ = null ein Minimum im Betrage von

$$t = R + H - c ; \tag{6}$$

das Maximum von h tritt also in der Geraden Cm in G ein und ist gleich

$$h_{max} = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi \Theta_m Rt} = \frac{a^3}{Rt} \frac{\Theta}{\Theta_m} . \tag{7}$$

Nehmen wir $a = 5000^m$, womit der Kubikinhalt der störenden Masse rund $1^1/_4$ Kubikmeile wird, so folgt für eine Bleikugel $h_{max} \leq 6^m$. Für einen Hohlraum ist $\Theta : \Theta_m$ wie bemerkt etwa gleich $-0,5$; der absolute Wert von h_{max} ist hierbei $\leq 2^m$.

Von dem Maximalwert an nimmt h absolut genommen stetig ab bis zum Punkte G' diametral gegenüber G. Alle h haben also einerlei Zeichen.

Dies wird anders, wenn wir die gestörte Niveaufläche auf eine Fläche beziehen, die den Niveausphäroiden des 2. Kapitels entspricht. Eine Entwickelung von W, welches durch (3) gegeben ist, nach Kugelfunktionen würde aber beginnen mit $(M + m) : r$, wenn r den Radiusvektor vom Massenschwerpunkt S aus bezeichnet. Als Normalform der Niveauflächen nehmen wir nun diejenige, deren Potential gleich $(M + m) : r$ ist, wobei wir für r setzen $R + H'$, Fig. 33.

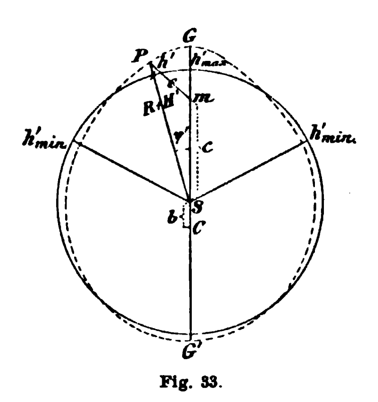


Fig. 33.

Wir haben also einerseits für die Normalform, eine Kugelfläche konzentrisch um S mit dem Radius $R + H'$, das konstante Potential gleich

$$W_0 = k^2 \frac{M + m}{R + H'} ; \tag{8}$$

andererseits für die Niveaufläche selbst, bezogen auf S, indem in (3), solange $m : M$ ein kleiner Bruch ist, $R + H + h$ in ausreichender Annäherung gleich $R + H' + h' + b \cos \psi'$ gesetzt wird, wenn b die Distanz CS und h' die Erhebung der Niveaufläche über ihre Normalform bedeutet:

$$W_0 = k^2 \left\{ \frac{M}{R + H' + h' + b \cos \psi'} + \frac{m}{e} \right\} . \tag{9}$$

Die Subtraktion der Gleichung (8) von (9) führt mit zulässigen Vernachlässigungen zu der Gleichung für h':

$$h' = \frac{mR^2}{M}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{R}\right) - b \cos \psi'.$$

Nimmt man für den Schwerpunktsabstand CS den leicht zu verifizierenden Annäherungswert

$$CS = b = \frac{m}{M} R, \tag{10}$$

welcher genügt, solange m in der Erdrinde vorausgesetzt wird, so folgt endlich

$$h' = R\frac{m}{M}\left\{\frac{R}{e} - [1 + \cos \psi']\right\}, \tag{11}$$

wobei es nach Analogie von (5) ausreicht zu setzen (vergl. Fig. 33, in welcher c' für c zu lesen ist):

$$e^2 = (R + H')^2 + c'^2 - 2(R + H')\, c' \cos \psi'. \tag{12}$$

Für grofse Werte von ψ' kann man hierin auch H' vernachlässigen.

Man bemerkt nun leicht, dafs die Niveaufläche und ihre Normalform gleiches Volumen haben, wie auch aus dem 3. Kapitel § 43 S. 257 bekannt ist. Es wird nämlich, was hiermit gleichbedeutend, das über die Kugelfläche vom Radius 1 ausgedehnte Integral

$$\int h' (R + H')^2\, d\sigma' \tag{13}$$

gleich null, wobei $d\sigma'$ das Oberflächenelement der Kugel vom Radius 1 ist. Mit Rücksicht auf den Rotationscharakter der Niveauflächen in Bezug auf die Linie $CSmG$ kann man für dieses Integral schreiben

$$2\pi \int_0^\pi h' (R + H')^2 \sin \psi' d\psi'$$

und wird nun leicht mit Rücksicht auf (11) und (12) bestätigt finden, dafs der Wert des Integrales innerhalb zulässiger Vernachlässigungen (die überdies durch genauere Aufstellung des Ausdruckes für h' vermieden werden können) null ist.

In Bezug auf die Verteilung der h' nach ihrer Gröfse ist wesentlich, dafs der Massenschwerpunkt S auch den Volumenschwerpunkt der gestörten Niveaufläche bezeichnet, wie auch aus § 43 des 3. Kapitels hervorgeht. Zum Zwecke eines direkten Nachweises bilden wir in Bezug auf eine durch S gelegte zu SG normale Ebene die statischen Momente der Volumenelemente; hierbei kann das Volumen der Kugel $R + H'$ wegbleiben. In hinreichender Annäherung wird die Summe der statischen Momente gleich dem über die ganze Kugelfläche vom Radius 1 ausgedehnten Integral

$$\int h' \cdot (R + H')^3 \cos \psi' d\sigma', \tag{14}$$

wofür man mit Rücksicht auf den Rotationscharakter der Niveaufläche schreiben kann

$$2\pi \int_0^\pi h' (R + H')^3 \cos\psi' \sin\psi' \, d\psi' .$$

Die Integration bereitet keine Schwierigkeit, wenn man die durch teilweise Integration leicht herzustellende Formel

$$\int \frac{-u\,du}{\sqrt{1-u}} = 2u\sqrt{1-u} + \frac{4}{3}\sqrt{1-u}^{\,3} + \text{Konst.}$$

beachtet. Man erhält in der That null innerhalb zulässiger Vernachlässigungen.

Wir bringen h' nach (11) unter Substitution der Werte von M und m noch auf die Form:

$$h' = a \frac{a^2}{R^2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \left\{ \frac{R}{e} - \left[1 + \cos\psi'\right] \right\} \cdot \tag{15}$$

Die Differentiation nach ψ' zeigt, daſs h' seinen gröſsten Wert im Punkte G hat, von da abnimmt bis zu einem gröſsten negativen Wert, der ungefähr für $e = \sqrt[3]{R^2 c}$ d. i. nahezu für $e = R$ und $\psi' = 60^0$ eintritt, und dann wieder zunimmt bis G'. h' ist null für $R = 2e\cos^2\frac{\psi'}{2}$; dies findet statt bei ψ' gleich rund 30^0 und 115^0, wenn die störende Masse in der Erdrinde liegt.

Für eine daselbst befindliche Bleikugel von 5000^m Radius wird die Schwerpunktsverschiebung $4{,}6^{mm}$, h' in G' gleich $2{,}3^{mm}$ und h' in $G < 6^m$.

§ 2. **Fortsetzung: Lotablenkung, Krümmungsradius.** Da h und h' sich in der Nähe der störenden Masse verhältnismäſsig nur wenig unterscheiden, behalten wir für die weitere Untersuchung h bei. Die Figur 34 zeigt die ungestörte Niveaufläche, d. i. die Kugelfläche $R + H$ konzentrisch um C, und die gestörte Niveaufläche. Betrachten wir einen Punkt P der letzteren und einen unendlich nahen Punkt P_1 derselben, nach G hin gelegen, so wächst h um dh von P bis P_1, und diesem Wachstum entspricht eine Lotablenkung im Sinne der Figur gleich

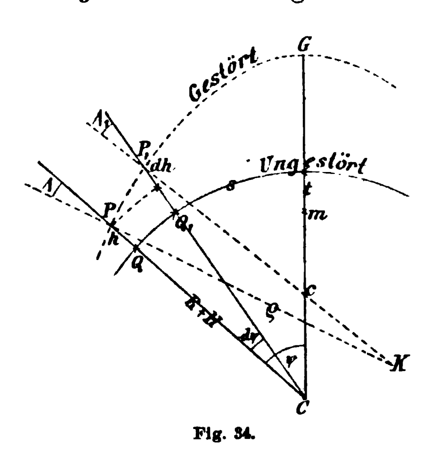


Fig. 34.

$$\Lambda = -\frac{dh}{(R + H + h)\, d\psi},$$

wofür man mit Vernachlässigung von $H + h$ völlig genügend setzen darf:

$$\Lambda = -\frac{dh}{R\, d\psi}. \tag{1}$$

Für den unendlich benachbarten Punkt P_1 wird die Lotablenkung gleich

$$\Lambda_1 = \Lambda + \frac{d\Lambda}{d\psi}\, d\psi. \tag{2}$$

Die Normalen der gestörten Niveaufläche in P und P_1 schneiden sich im Krümmungsmittelpunkt K unter einem Winkel, dessen Betrag aus der Betrachtung des Vierecks PP_1KC sich zu $-d\psi + \Lambda - \Lambda_1$ ergiebt; führt man hierin (2) ein und beachtet die Figur, so wird zur Bestimmung des Krümmungsradius ϱ bei P leicht erhalten:

$$-\varrho\left(1 + \frac{d\Lambda}{d\psi}\right) d\psi = PP_1.$$

Da nun Λ jedenfalls einen sehr geringen Betrag hat, so weicht PP_1 von $-(R + H + h)\, d\psi$ nicht erheblich ab; wir setzen daher in ausreichender Annäherung für den Krümmungsradius ϱ:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R + H + h}\left\{1 + \frac{d\Lambda}{d\psi}\right\}, \tag{3}$$

bei kleinen h also ebenso genau:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R + H}\left\{1 + \frac{d\Lambda}{d\psi}\right\}. \tag{3*}$$

Die Anwendung der Formeln (1) und (3) hat auszugehen von den Gleichungen (4*) und (5) des vorigen Paragraphen:

$$h = a\,\frac{a^2}{eR}\,\frac{\Theta}{\Theta_m}, \tag{4}$$

$$e = \sqrt{(R + H)^2 + c^2 - 2(R + H)\, c \cos\psi}.$$

Hiernach wird mit einigen zulässigen Vernachlässigungen:

$$\Lambda = \frac{a^3 c\,\Theta}{e^3 R\,\Theta_m} \sin\psi \tag{5}$$

und

$$\frac{d\Lambda}{d\psi} = \frac{a^3 c\,\Theta}{e^3 R\,\Theta_m}\left\{\cos\psi - \frac{3Rc}{e^2}\sin^2\psi\right\}. \tag{6}$$

Setzen wir nun wieder voraus, dafs die störende Masse in der Erdrinde liegt, so können nach vorstehenden Formeln nur in der Nähe dieser Masse erhebliche Störungen im Krümmungsradius entstehen, weil schon in einigem Abstande $a^3 : e^3$ ein sehr kleiner Bruch wird.

Für die Nähe der störenden Masse genügt es aber in der Parenthese von (6) zu setzen:

$$\cos\psi = 1\,,\quad Rc\sin^2\psi = s^2\,,$$

wenn s die horizontale Entfernung von G, lotrecht über der störenden Masse m, bezeichnet. Auſserdem wird entsprechend, wie die 2. Gleichung (4) zeigt:

$$e^2 = s^2 + t^2\,. \tag{7}$$

Damit wird aus (6):

$$\frac{dA}{d\psi} = \frac{a^3\Theta}{e^3\Theta_m}\left(1 - \frac{3s^2}{e^2}\right) = -\frac{2a^3\Theta}{e^3\Theta_m}\left(1 - \frac{3t^2}{2e^2}\right). \tag{8}$$

Zugleich folgt aus (3*):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R+H}\left\{1 - \frac{2a^3\Theta}{e^3\Theta_m}\left(1 - \frac{3t^2}{2e^2}\right)\right\}. \tag{9}$$

Die Lotablenkung wird entsprechend nach (5), in Sekunden ausgedrückt:

$$\underset{\text{in Sek.}}{A} = \varrho''\frac{a^3 s\Theta}{e^3 R\Theta_m}\,. \tag{10}$$

Sie ist in G lotrecht über der störenden Masse gleich null; mit wachsendem Abstande s wächst sie zunächst bis zu einem Maximum und nimmt weiterhin ab. Das Maximum tritt ein für $\frac{dA}{d\psi} = \text{null}$, d. h. nach (6) für

$$e^2\cos\psi = 3Rc\sin^2\psi\,,$$

oder mit Rücksicht auf die oben eingeführten, in der Nähe von G zulässigen Vernachlässigungen, für

$$e^2 = 3s^2,\ \text{wobei nach (7)}\ t = s\sqrt{2} \tag{11}$$

ist. Es hat den Wert

$$\underset{\text{in Sek.}}{A_{max}} = \frac{2\varrho''}{3\sqrt{3}}\,\frac{a^3\Theta}{t^2 R\Theta_m}\,. \tag{12}$$

Wenn durch Beobachtungen der Ort und die Gröſse des Maximums sowie G ermittelt sind, so giebt (11) die Tiefe an, in welcher die störende Masse liegt, (12) den Betrag $m = \frac{4}{3}\pi a^3\Theta$ derselben.

Der Krümmungsradius ϱ hat in G, wie die Differentiation von (9) nach s zeigt, bei positivem Θ ein Minimum, wächst von da zunächst mit s bis zu einem Maximum und nimmt dann wieder ab. In gröſserer Entfernung unterscheidet er sich zufolge (3) und (6) wenig von $R + H$. Es ist für:

$$s = 0 \qquad \varrho_{min} = \frac{R+H}{1 + \frac{a^3\Theta}{t^3\Theta_m}}\,, \tag{13}$$

$$s = \frac{t}{\sqrt{2}} \qquad \varrho = R + H\,,$$

$$s = t\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \varrho_{max} = \frac{R+H}{1 - \frac{8\sqrt{10}}{125}\frac{a^3\Theta}{t^3\Theta_m}}, \tag{14}$$

s grofs $\qquad \varrho$ sehr nahe gleich $R + H$.

Im Falle eines Massendefektes, d. h. eines negativen Wertes von Θ, ist ϱ im Punkte G ein Maximum, im Abstande $t\sqrt{\frac{3}{2}}$ ein Minimum.

Für eine Bleikugel von 5000^m Radius wird:

$$\varrho_{min} \geqq 0{,}4\ (R + H),$$
$$\Lambda_{max} \leqq 94'',$$
$$\varrho_{max} \leqq \frac{10}{7}\ (R + H);$$

für einen Hohlraum:

$$\varrho_{max} \leqq 2(R + H),$$
$$\Lambda_{max} \leqq -31'',$$
$$\varrho_{min} \geqq \frac{10}{11}\ (R + H).$$

Es mag hier zum Schlusse noch bemerkt werden, dafs die wichtigsten Resultate dieses und des vorhergehenden Paragraphen sich auch leicht an der Hand einer Betrachtung finden, welche von der Krümmung der ungestörten Niveaufläche absieht. Ist nämlich Q ein Punkt der letzteren, so ist hier das Potential der Masse m gleich $k^2\frac{m}{e}$, Fig. 35; man mufs daher um

$$h = k^2\frac{m}{e} : G \tag{15}$$

vertikal in die Höhe bis P gehen, damit in P der ursprüngliche Potentialwert wieder vorhanden ist.

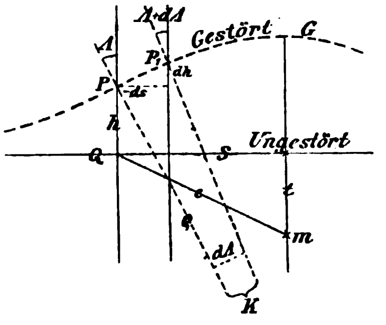


Fig. 35.

G bezeichnet hierin die ungestörte Schwerebeschleunigung, für welche angenähert $\frac{4}{3}\pi k^2\Theta_m R$ zu setzen ist; daher wird wie in § 1 (4):

$$h = \frac{3}{4}\frac{m}{\pi\Theta_m R}\cdot\frac{1}{e} = a\frac{a^2}{eR}\frac{\Theta}{\Theta_m}, \tag{16}$$

wobei $e^2 = s^2 + t^2$ ist. Hieraus folgt die Lotablenkung

$$\Lambda = -\frac{dh}{ds} = \frac{a^3 s\Theta}{e^3 R\Theta_m}, \tag{17}$$

ganz wie in § 2 (10). Endlich ist $-\varrho \cdot d\Lambda = PP_1$ oder hinreichend genau $= -ds$; daher wird

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\Lambda}{ds} = -\frac{2a^3\Theta}{e^3 R\,\Theta_m}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{t^2}{e^2}\right). \tag{18}$$

Von dieser Formel gelangt man bis auf eine unwesentliche Abweichung zu der richtigen Formel (9), indem man noch die Biegung der ungestörten Niveaufläche berücksichtigt und demgemäfs rechter Hand $1:(R+H)$ addiert*).

Mit Rücksicht auf (3) hat man allgemein:

$$\frac{1}{\varrho}\left\{\begin{aligned} &= \frac{1}{R+H+h} + \frac{d\Lambda}{ds} \\ &= \frac{1}{R+H+h} - \frac{d^2h}{ds^2}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

§ 3. **Fortsetzung: Die gestörte Schwerkraft.** Nach § 1 (3) S. 267 ist das Potential der Schwerkraft im Punkte P, wenn der Radiusvektor CP mit r bezeichnet wird, gleich

$$W = k^2\left\{\frac{M}{r} + \frac{m}{e}\right\}$$

mit (1)

$$e = \sqrt{r^2 + c^2 - 2rc\cos\psi};$$

vergl. Fig. 32 S. 267. Wegen der Geringfügigkeit der Lotablenkung können wir die radiale Komponente der Schwerkraft für die ganze Schwerkraft nehmen, also setzen

$$g = -\frac{\partial W}{\partial r}. \tag{2}$$

Hieraus folgt sofort

$$g = k^2\left\{\frac{M}{r^2} + \frac{m}{e^3}(r - c\cos\psi)\right\}. \tag{3}$$

Für eine bestimmte Niveaufläche genügt es mit Vernachlässigung von h zu setzen $r = R + H$**). Beschränken wir uns aufserdem auf die Nähe der störenden Masse, so wird

$$e^2 = s^2 + t^2 \text{ und } r - c\cos\psi = t,$$

also

$$g = k^2\left\{\frac{M}{(R+H)^2} + \frac{mt}{e^3}\right\}. \tag{4}$$

Bezeichnen wir den ungestörten Wert von g, nämlich $k^2M:(R+H)^2$ mit G und beachten die Relationen

---

*) Von diesem Verfahren, bei Bestimmung von ϱ erst zuletzt die Biegung der ungestörten Niveaufläche zu berücksichtigen, kann man auch in anderen Fällen Gebrauch machen, vorausgesetzt nur, dafs gestörte und ungestörte Niveaufläche nahezu parallel laufen.

**) Es wird somit hier kein Unterschied gemacht zwischen der *gestörten* Schwerkraft in der gestörten und der ungestörten Niveaufläche, was solange zulässig ist, als h nur einige Meter beträgt.

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \Theta_m \qquad m = \frac{4}{3}\pi a^3 \Theta ,$$

so wird

$$g = G\left(1 + \frac{a^3 t \Theta}{e^3 R \Theta_m}\right). \tag{4*}$$

Die gröfste Störung im Verlaufe einer Niveaufläche erleidet darnach die Schwerkraft im Scheitel G derselben, vertikal über der störenden Masse. Man hat nämlich daselbst, Θ positiv gedacht:

$$g_{max} = G\left\{1 + \frac{a^3 \Theta}{t^2 R \Theta_m}\right\}. \tag{5}$$

Für eine Bleikugel von 5000^m Radius ist daher die maximale Störung in g gleich

$$\delta g \leqq G : 850 ;$$

für einen Hohlraum gleicher Ausdehnung ist, absolut genommen:

$$\delta g \leqq G : 2550 .$$

Aus (3) folgt noch durch Differentiation nach r

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -k^2 \left\{\frac{2M}{r^3} + \frac{3m}{e^5}(r - c\cos\psi)^2 - \frac{m}{e^3}\right\}. \tag{6}$$

Diese Formel giebt zugleich sehr nahe die Änderung von g mit der Höhe h. Wir können demnach mit Beschränkung auf Punkte einer bestimmten Niveaufläche in der Nähe der störenden Masse setzen:

$$\frac{dg}{dh} = -k^2 \left\{\frac{2M}{(R+H)^3} + \frac{3mt^2}{e^5} - \frac{m}{e^3}\right\} \tag{7}$$

oder auch sehr nahe

$$\frac{dg}{dh} = -\frac{2G}{R+H}\left\{1 + \frac{a^3\Theta}{2e^3\Theta_m}\left(\frac{3t^2}{e^2} - 1\right)\right\}. \tag{8}$$

Differenziert man diesen Differentialquotienten nach e, so bemerkt man, dafs sein absoluter Wert ein Maximum ist im Punkte G, Θ positiv gedacht. Von da an nimmt derselbe ab, geht bei $e^2 = 3t^2$ durch den ungestörten Wert hindurch, nimmt weiter ab bis $e^2 = 5t^2$, wo ein Minimum eintritt, und nimmt von da an wieder zu bis zum ungestörten Wert. Für den Punkt G ist

$$\left(\frac{dg}{dh}\right)_{max} = -\frac{2G}{R+H}\left\{1 + \frac{a^3\Theta}{t^3\Theta_m}\right\}, \tag{9}$$

aus welcher Formel man ersieht, dafs der ungestörte Wert des Differentialquotienten von g nach der Höhe sich beträchtlich ändern kann. Eine Vergleichung mit S. 272 (13) zeigt, dafs der Betrag der Störung verhältnismäfsig derselbe ist, wie im Krümmungsradius für Punkt G.

In neuerer Zeit haben einige Physiker versucht, die Abnahme von g mit der Höhe aus feinen Wägungen abzuleiten. Vorstehendes zeigt,

dafs man auf diesem Wege dem ungünstigen Einflufs lokaler Anziehungen viel zu sehr ausgesetzt ist, um erwarten zu können, dafs die Resultate den normalen Wert $2G:(R+H)$ geben. Eher könnte man diese Messungen dazu benutzen, $1:\varrho$ zu bestimmen, oder, abgesehen von dem hier betrachteten, speziellen Falle, allgemeiner nach S. 264 § 46 des 3. Kapitels, um einen Mittelwert von $1:\varrho$ aller Vertikalschnitte der Niveaufläche an dem betreffenden Punkte der Beobachtung herzuleiten*).

§ 4. **Fortsetzung: Vergleichung der Einwirkung auf r, g, ϱ u. s. w.** Nicht uninteressant ist es, die Maximalwirkungen der Masse m auf die verschiedenen in betracht kommenden Gröfsen zusammenzustellen. Wir nehmen dabei die störende Masse $m=\frac{4}{3}\pi a^3\Theta$ und bilden immer den nachstehenden Quotienten:

$$\frac{\textit{Gestörter Wert} - \textit{ungestörter Wert}}{\textit{ungestörter Wert}}.$$

Wir erhalten dann aus (7) S. 268 für die Störung im Radiusvektor:

$$\frac{h_{max}}{R}=\frac{\Theta}{\Theta_m}\cdot\frac{a^3}{R^2 t}; \tag{1}$$

ferner aus (5) S. 275 für die Störung in der Schwerkraft:

$$\frac{g_{max}-G}{G}=\frac{\Theta}{\Theta_m}\cdot\frac{a^3}{Rt^2}, \tag{2}$$

welcher Quotient auch in der Lotablenkung auftritt; denn es ist nach (12) S. 272:

$$A_{max}=\frac{2\varrho''}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\Theta}{\Theta_m}\cdot\frac{a^3}{Rt^2}. \tag{2*}$$

Aus (13) S. 272 folgt weiter für die Störung im reziproken Krümmungsradius:

$$\frac{\frac{1}{\varrho_{min}}-\frac{1}{R+H}}{\frac{1}{R+H}}=\frac{\Theta}{\Theta_m}\cdot\frac{a^3}{t^3} \tag{3}$$

*) In den *Verhandlungen der 6. allgem. Konferenz der europäischen Gradmessung zu München* 1880 S. 36 berichtet *von Jolly* über seine bezüglichen Beobachtungen. Er fand in einem gewissen Falle anstatt 33,1 Milligramm den Wert 32,8 Milligramm als Einflufs der Höhenlage auf die Anziehung, d. h. also, er fand $dg:dh$ absolut genommen um ca. 1% zu klein. In den *Abh. der kön. bayer. Ak. d. Wiss.* II. Cl., Bd. 14, 2. Abt. 1881 sind die Zahlen genauer zu 33,059 und 31,686 angegeben, d. h. die Änderung von g mit h ist um ca. 4% zu klein. Vergl. weiterhin den Schlufsparagraphen dieses Kapitels.

und aus (9) S. 275 für die Störung im Differentialquotienten der Schwerkraft nach der Höhe:

$$\frac{\left(\frac{dg}{dh}\right)_{max} - \left(-\frac{2G}{R+H}\right)}{\left(-\frac{2G}{R+H}\right)} = \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot \frac{a^3}{t^3} \,. \tag{3*}$$

Die stärksten Wirkungen sind also diejenigen auf ϱ und $\frac{dg}{dh}$ nach (3) und (3*), die schwächste ist diejenige auf den Radiusvektor und dazwischen stehen diejenigen auf g und die Richtung des Lotes. Dieses sind zugleich die störenden Wirkungen, welche in der Regel bei Beobachtungen von Einfluſs sind, da man weder den Radiusvektor, noch den Krümmungsradius direkt messen kann und auch die Messung der Schwereabnahme mit der Höhe nur unter auſsergewöhnlichen Umständen erreichbar ist.

Zeigt sich bei den Beobachtungen, daſs die Anomalieen in g und in der Lotrichtung lokaler Natur sind, dann entsprechen denselben jedenfalls nur sehr kleine Änderungen im Radiusvektor, während ϱ stark variieren kann.

Die Wirkungen einer unterirdischen Massenunregelmäſsigkeit untersucht bereits *Young* in den *Philosophical Transactions* 1819 p. 89—92; spätere Untersuchungen finden sich in dem Hauptwerk der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* (1858) p. 585; von *Dahlander* in *Poggendorffs Ann.* (1862) Bd. 117 S. 148; in *Thomson und Tait, Handbuch der theor. Physik* Bd. I. 2 (1874), S. 341—343; von *Winterberg* in *Astronom. Nachr.* Bd. 91 (1878) S. 97—108, und in *Clarke, Geodesy* (1880) p. 88—93.

Durchaus unklar sind die Angaben *Winterbergs*, aus Nivellements die Gestalt der Niveauflächen zu bestimmen. Im 7. Kap. werden wir zeigen, daſs die Resultate der Präzisionsnivellements von der Gestalt der Niveauflächen so unabhängig sind, daſs ein Rückschluſs auf die letztere unmöglich ist. Selbst mit der Anordnung, welche *Bauernfeind* den Nivellements gegeben, um die Krümmung der Niveauflächen zu studieren (vergl. *Bruns, Figur der Erde*, S. 41), ist praktisch noch kein Erfolg erzielt worden. Auch scheint *Winterberg* an diese Anordnung nicht zu denken. Daſs man die Höhenstörungen der Niveauflächen direkt nicht aus Nivellements bestimmen kann, dürfte wohl diesem Autor bekannt gewesen sein.

Clarke, Geodesy p. 98—101, untersucht auch den Effekt, den eine *radiale Verschiebung einer Masse* giebt. Man kann dies aus dem hier gegebenen leicht abstrahieren; sollte die Masse als Halbkugel hervortreten, so vergl. weiterhin § 16.

In der *Ordnance Survey* p. 591 sind auch die Störungen durch einen unendlich langen, liegenden, *unterirdischen Kreiscylinder* behandelt.

§ 5. Fundamentalformeln für die mittleren Teile langer, horizontaler Prismen. In Fig. 36 stelle das Dreieck $O.1.2$ den Querschnitt eines geraden Prismas normal zu den horizontalen Kanten vor. Wir zerlegen das Prisma der Länge nach in Elemente vom

Querschnitt dq. Hat ein solches Element vom Punkt O den kürzesten Abstand r, welcher im Querprofil gemessen wird, so ist

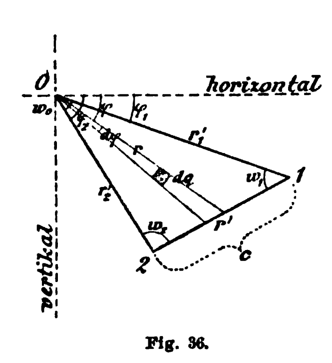


Fig. 36.

$$k^2\Theta \int_{-L_1}^{+L_2} \frac{dq\,dx}{\sqrt{r^2+x^2}} \tag{1}$$

das Potential der Anziehung des Elements auf Punkt O, wenn Θ die konstante Dichtigkeit des Prismas ist und x einen Abstand vom Querprofil in der Längsrichtung bezeichnet, der von $-L_1$ bis $+L_2$ variiert. Nach einer bekannten Grundformel der Integralrechnung wird das Potential (1) gleich

$$k^2\Theta\left\{\log\operatorname{nat}\left(\frac{L_2}{r}+\sqrt{\frac{L_2^2}{r^2}+1}\right)+\log\operatorname{nat}\left(\frac{L_1}{r}+\sqrt{\frac{L_1^2}{r^2}+1}\right)\right\}dq. \tag{2}$$

Nehmen wir L_1 und L_2 gegen r sehr groſs an, so geht (2) mit für unsere Zwecke genügender Genauigkeit über in

$$k^2\Theta\left\{\log\operatorname{nat}\frac{2L_2}{r}+\log\operatorname{nat}\frac{2L_1}{r}\right\}dq,$$

und hieraus folgt, indem wir

$$\sqrt{L_1L_2}=L \tag{3}$$

setzen, als Potential des Elementes vom Querschnitt dq:

$$2k^2\Theta\log\operatorname{nat}\frac{2L}{r}\cdot dq. \tag{4}$$

Der Fehler dieses Ausdruckes ist, wie die Reihenentwicklung von (2) zeigt, angenähert gleich

$$+2k^2\Theta\,dq\cdot\left(\frac{r}{2L}\right)^2, \tag{4*}$$

mithin für $2L=10r$ bereits weniger wie $^1/_2\,\%$ des Ausdruckes (4).

Differenziert man (4) nach r, so ergiebt sich die Anziehung des Elementes auf Punkt O in Richtung des durch eine Verschiebung von O wachsenden Radiusvektors r. Damit erhält man mit Rücksicht auf die Figur leicht als horizontale Komponente der Anziehung des Elementes normal zu dessen Längsrichtung:

$$2k^2\Theta\frac{dq}{r}\cos\varphi, \tag{5}$$

und als vertikale Komponente derselben:

$$2k^2\Theta\frac{dq}{r}\sin\varphi. \tag{6}$$

Der Fehler der Gesamtanziehung ist gleich

$$-2k^2\Theta\,\frac{dq}{r}\cdot 2\left(\frac{r}{2L}\right)^2, \tag{6*}$$

mithin für $2L = 10r$ gleich $2\,^0/_0$ der sich aus (5) und (6) zusammensetzenden Gesamtanziehung.

Wir führen nunmehr Polarkoordinaten ein, wie Fig. 36 zeigt, sodafs $dq = r\,dr\,d\varphi$ wird, und integrieren den Ausdruck (4) zunächst nach r von null bis an die Peripherie des Querschnitts, woselbst r in r' übergeht. Nun ist durch teilweise Integration leicht zu finden, dafs

$$\int_0^{r'} r \log\mathrm{nat}\,\frac{2L}{r}\,dr = \frac{1}{2}\,r'^2\left\{\log\mathrm{nat}\,\frac{2L}{r'} + \frac{1}{2}\right\},$$

wobei nur zu beachten ist, dafs $r \log\mathrm{nat}\, r$ für r gleich null in null übergeht. Hiermit findet sich aus (4) als Potential der Anziehung des ganzen Prismas auf Punkt O:

$$v = k^2\Theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left\{\log\mathrm{nat}\,\frac{2L}{r'} + \frac{1}{2}\right\} r'^2\,d\varphi\,. \tag{7}$$

Integriert man auch (4*) nach r, so findet man, dafs (7) auf etwa $^1/_6\,^0/_0$ genau ist für ein Prisma, dessen Länge zehnmal so grofs ist als r_1' und r_2' im Mittel.

Um nach φ zu integrieren, setzen wir mit Rücksicht auf Fig. 36 für r' den Ausdruck

$$r' = r_1'\,\frac{\sin w_1}{\sin(w_1 + \varphi - \varphi_1)},$$

in welchem Ausdruck nur φ variabel ist. Für die Ausmittelung von (7) kommt es aber auf das Integral

$$\int\frac{\log\mathrm{nat}\,\dfrac{2L\sin(w_1+\varphi-\varphi_1)}{r_1'\sin w_1} + \dfrac{1}{2}}{\sin^2(w_1+\varphi-\varphi_1)}\,d\varphi$$

an, das durch teilweise Integration übergeht in

$$-\left\{\log\mathrm{nat}\,\frac{2L\sin(w_1+\varphi-\varphi_1)}{r_1'\sin w_1} + \frac{1}{2}\right\}\cot(w_1+\varphi-\varphi_1)$$
$$+\int\cot^2(w_1+\varphi-\varphi_1)\,d\varphi\,;$$

da nun

$$\int\cot^2(w_1+\varphi-\varphi_1)\,d\varphi = -\cot(w_1+\varphi-\varphi_1) - \varphi + \text{Konst.},$$

so findet man endlich ohne Schwierigkeit aus (7):

$$v = k^2\Theta r_1'^2\sin^2 w_1\left\{\begin{array}{c}\cot w_1\left[\log\mathrm{nat}\,\dfrac{2L}{r_1'} + \dfrac{3}{2}\right]\\ + \cot w_2\left[\log\mathrm{nat}\,\dfrac{2L}{r_2'} + \dfrac{3}{2}\right] - w_0\end{array}\right\},$$

wobei $w_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ und $w_2 = \pi - w_0 - w_1$ sowie $r_2' = r_1' \sin w_1 : \sin w_2$ eingeführt sind.

Anstatt des vorstehenden Ausdruckes erhält man, wenn vor der grofsen Parenthese ein Mal $r_1' \sin w_1$ durch $r_2' \sin w_2$ ersetzt wird und alsdann noch einige naheliegende Umformungen mit Rücksicht auf Fig. 36 vorgenommen werden:

$$v = 2k^2 \Theta \Delta \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{2} + \frac{r_1' \cos w_1}{c} \log \operatorname{nat} \frac{2L}{r_1'} + \frac{r_2' \cos w_2}{c} \log \operatorname{nat} \frac{2L}{r_2'} \\ - \frac{w_0}{\sin w_0} \sin w_1 \sin w_2 \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Hierin bezeichnet Δ den Flächeninhalt des Dreiecks $0.1.2$, d. i. des Prismen-Querschnitts.

Eine andere bemerkenswerte Gestalt erlangt der Ausdruck für v, indem man im 1. Logarithmus für r_1' den identischen Wert $r_2' r_1' : r_2'$ substituiert und sodann die beiden Glieder, welche den Logarithmus von $2L : r_2'$ enthalten, zusammenzieht. Es folgt

$$v = 2k^2 \Theta \Delta \left\{ \frac{3}{2} + \log \operatorname{nat} \frac{2L}{r_2'} + \frac{r_1' \cos w_1}{c} \log \operatorname{nat} \frac{r_2'}{r_1'} - \frac{r_1' \sin w_1}{c} w_0 \right\}. \quad (9)$$

Ähnlich findet sich

$$v = 2k^2 \Theta \Delta \left\{ \frac{3}{2} + \log \operatorname{nat} \frac{2L}{r_1'} + \frac{r_2' \cos w_2}{c} \log \operatorname{nat} \frac{r_1'}{r_2'} - \frac{r_2' \sin w_2}{c} w_0 \right\}. \quad (10)$$

§ 6. **Fortsetzung.** Führen wir in (5) und (6) des vorigen Paragraphen für dq seinen Wert $r\,dr\,d\varphi$ ein, so folgt unmittelbar durch Integration nach r von null bis r' als horizontale Komponente der Prismen-Anziehung normal zur Längsrichtung des Prismas:

$$2k^2 \Theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r' \cos \varphi \, d\varphi \quad (1)$$

und als vertikale Komponente:

$$2k^2 \Theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r' \sin \varphi \, d\varphi . \quad (2)$$

Führen wir wieder $r' = r_1' \sin w_1 : \sin (w_1 + \varphi - \varphi_1)$ ein und nehmen als Variable $\alpha = w_1 + \varphi - \varphi_1$, so gehen (1) und (2) bezw. über in

$$2k^2 \Theta \, r_1' \sin w_1 \int_{w_1}^{w_0 + w_1} \frac{\cos (\alpha - w_1 + \varphi_1)}{\sin \alpha} \, d\alpha \quad (3)$$

und

$$2k^2 \Theta \, r_1' \sin w_1 \int_{w_1}^{w_0 + w_1} \frac{\sin (\alpha - w_1 + \varphi_1)}{\sin \alpha} \, d\alpha . \quad (4)$$

Löst man sin und cos im Zähler auf und integriert, was keine Schwierigkeiten bietet, beachtet auch, dafs $w_0 + w_1 = \pi - w_2$ und $\sin w_2 : \sin w_1 = r_1' : r_2'$ ist, so folgt aus (3) für die horizontale, zur Längsrichtung normale Komponente der Anziehung:

$$2k^2 \Theta\, r_1' \sin w_1 \left\{ w_0 \sin (w_1 - \varphi_1) + \cos (w_1 - \varphi_1) \log \text{nat} \frac{r_1'}{r_2'} \right\} \qquad (5)$$

und für die vertikale Komponente:

$$2k^2 \Theta\, r_1' \sin w_1 \left\{ w_0 \cos (w_1 - \varphi_1) - \sin (w_1 - \varphi_1) \log \text{nat} \frac{r_1'}{r_2'} \right\}. \qquad (6)$$

Diese Ausdrücke besitzen scheinbar betreffs der Stücke des Dreiecks mit den Indices 1 und 2 nicht diejenige Symmetrie, die man erwarten könnte. Beachtet man aber, dafs $r_1' \sin w_1 = r_2' \sin w_2$ und dafs $w_1 - \varphi_1$ der Neigungswinkel von c gegen die Horizontale ist, so verschwindet dieser Mangel.

Wenn L_1 und L_2, die Längen des Prismas beiderseits des durch den Punkt O geführten Querschnitts, nicht genau einander gleich sind, so existiert noch eine 3. Komponente der Anziehung auf O in Richtung der durch diesen Punkt hindurchführenden Prismenkante. Nehmen wir $L_2 > L_1$ und beide wie oben im Verhältnis zu den Querdimensionen des Prismas grofs an, so ist jene 3. Komponente offenbar sehr nahe gleich der Anziehung eines Prismas von der Länge $L_2 - L_1$, welches auf der Seite L_2 zwischen 2 Querschnitten in den Abständen L_1 und L_2 von O liegt. Diese Anziehung kann angenähert gleich [Masse: Quadrat der Entfernung] gesetzt werden. Wir erhalten hiermit als 3. Komponente der Anziehung in der Längsrichtung der Kante angenähert den Wert

$$2k^2 \Theta \cdot \frac{(L_2 - L_1)\,\Delta}{2L^2}, \qquad (7)$$

worin Δ die Querschnittsfläche und L die $\sqrt{L_1 L_2}$ bezeichnet.

Die Genauigkeit der Formeln (5) und (6) wird in dem Falle, dafs r_1' und r_2' nur etwa den 10. Teil der Gesamtlänge $2L$ des Prismas betragen, mit Rücksicht auf (6*) des vorigen Paragraphen gleich $^2/_3$ %.

§ 7. Allgemeine Formeln für die mittleren Teile eines langen Gebirgsrückens in Form eines liegenden, dreiseitigen Prismas. Für die mittlere Gegend eines Gebirgsrückens, der wesentlich länger als breit ist, können die in den vorhergehenden beiden Paragraphen entwickelten Formeln Anwendung finden. Von der Krümmung der Erde sehen wir nach den Erfahrungen im 1. Beispiel dieses Kapitels, vergl. S. 273, vorläufig ab.

In Fig. 37 bezeichne ABC den Querschnitt des Gebirgsrückens und AB die ungestörte Niveaufläche in der Meereshöhe H. Für einen

Punkt P' derselben hat man die Wirkung aus den Wirkungen der Prismen $AP'C$ und $BP'C$ zusammenzusetzen und kann dabei im Vergleich mit Fig. 36 S. 278 setzen für

$$r_1' \qquad r_2' \qquad c \qquad w_1 \qquad w_2 \qquad w_0 \qquad \varphi_1$$

bei $BP'C$ bezw. die Werte:

$$p h_0 \qquad (c-\sigma) h_0 \qquad a h_0 \qquad \pi - B - \psi' \qquad B \qquad \psi' \qquad -\psi';$$

ferner bei $AP'C$:

$$p h_0 \qquad \sigma h_0 \qquad b h_0 \qquad \psi' - A \qquad A \qquad \pi - \psi' \qquad -\pi + \psi'$$

solange P' zwischen A und B liegt, dagegen:

$$p h_0 \qquad -\sigma h_0 \qquad b h_0 \qquad A - \psi' \qquad \pi - A \qquad \psi' \qquad -\psi',$$

wenn P' in Fig. 37 linker Hand von A liegt und mithin σh_0 negativ ist. Für letzteren Fall sind selbstverständlich die Wirkungen

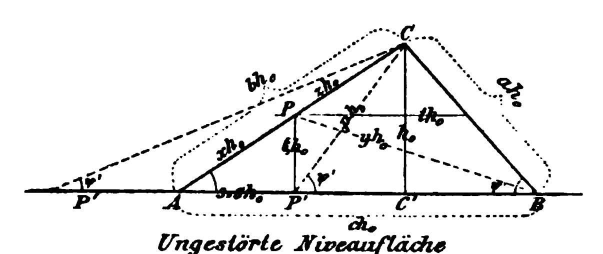


Fig. 37.

des Prismas $AP'C$ von denen des Prismas $BP'C$ zu subtrahieren. Zufolge der gewählten Substitutionen ist aber auch im ersten Fall die Horizontalanziehung von $AP'C$ zu subtrahieren.

Man erhält mittelst der Formel (10) § 5 S. 280 als Potential v' der Anziehung für P' innerhalb:

$$v' = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \left(\frac{3}{2} + \log\text{nat}\,\frac{2L}{p h_0}\right) c \begin{array}{l} + \dfrac{(c-\sigma)^2 \cos B}{a} \log\text{nat}\,\dfrac{p}{c-\sigma} + \dfrac{\sigma^2 \cos A}{b} \log\text{nat}\,\dfrac{p}{\sigma} \\ - \dfrac{\psi'(c-\sigma)\sin B \sin(B+\psi') + (\pi-\psi')\,\sigma \sin A \sin(\psi'-A)}{\sin\psi'} \end{array} \right\}$$

und für P' auſserhalb:

$$v' = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \left(\frac{3}{2} + \log\text{nat}\,\frac{2L}{p h_0}\right) c \begin{array}{l} + \dfrac{(c-\sigma)^2 \cos B}{a} \log\text{nat}\,\dfrac{p}{c-\sigma} + \dfrac{\sigma^2 \cos A}{b} \log\text{nat}\,\dfrac{p}{-\sigma} \\ - \dfrac{\psi'}{\sin\psi'}\left[(c-\sigma)\sin B \sin(B+\psi') + \sigma \sin A \sin(A-\psi')\right] \end{array} \right\}.$$

Einige leicht ersichtliche Umformungen geben hieraus für P' innerhalb:

$$v' = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \left(\frac{3}{2} + \log\text{nat}\,\frac{2L}{p h_0}\right) c \begin{array}{l} - (c-\sigma)^2 \left[\psi' \sin^2 B - \dfrac{1}{2}\sin 2B \log\text{nat}\,\dfrac{p}{c-\sigma}\right] \\ - \qquad \sigma^2 \left[(\pi-\psi')\sin^2 A - \dfrac{1}{2}\sin 2A \log\text{nat}\,\dfrac{p}{\sigma}\right] \end{array} \right\} \quad (1$$

und für P' aufserhalb:

$$v' = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \left(\frac{3}{2} + \log\text{nat}\,\frac{2L}{ph_0}\right)c \begin{array}{l} -(c-\sigma)^2 \left[\psi' \sin^2 B - \frac{1}{2}\sin 2B \log\text{nat}\,\frac{p}{c-\sigma}\right] \\ + \quad \sigma^2 \left[\psi' \sin^2 A + \frac{1}{2}\sin 2A \log\text{nat}\,\frac{p}{-\sigma}\right] \end{array} \right\} . \quad (1^*)$$

Ferner findet sich aus (5) des vorigen Paragraphen, wobei aber $r_1' \sin w_1$ mit $r_2' \sin w_2$ zu vertauschen ist, für die zur Längsrichtung normale Horizontalanziehung für P' innerhalb:

$$2k^2 \Theta h_0 \left\{ \begin{array}{l} (c-\sigma)\left[\psi' \sin^2 B - \frac{1}{2}\sin 2B \log\text{nat}\,\frac{p}{c-\sigma}\right] \\ -\sigma\left[(\pi-\psi')\sin^2 A - \frac{1}{2}\sin 2A \log\text{nat}\,\frac{p}{\sigma}\right] \end{array} \right\} \quad (2)$$

und für P' aufserhalb:

$$2k^2 \Theta h_0 \left\{ \begin{array}{l} (c-\sigma)\left[\psi' \sin^2 B - \frac{1}{2}\sin 2B \log\text{nat}\,\frac{p}{c-\sigma}\right] \\ +\sigma\left[\psi' \sin^2 A + \frac{1}{2}\sin 2A \log\text{nat}\,\frac{p}{-\sigma}\right] \end{array} \right\} . \quad (2^*)$$

Ebenso giebt (6) des vorigen Paragraphen für die Vertikalanziehung für P' innerhalb:

$$-2k^2 \Theta h_0 \left\{ \begin{array}{l} (c-\sigma)\left[\frac{1}{2}\psi' \sin 2B + \sin^2 B \log\text{nat}\,\frac{p}{c-\sigma}\right] \\ +\sigma\left[\frac{1}{2}(\pi-\psi')\sin 2A + \sin^2 A \log\text{nat}\,\frac{p}{\sigma}\right] \end{array} \right\} \quad (3)$$

und für P' aufserhalb:

$$-2k^2 \Theta h_0 \left\{ \begin{array}{l} (c-\sigma)\left[\frac{1}{2}\psi' \sin 2B + \sin^2 B \log\text{nat}\,\frac{p}{c-\sigma}\right] \\ +\sigma\left[-\frac{1}{2}\psi' \sin 2A + \sin^2 A \log\text{nat}\,\frac{p}{-\sigma}\right] \end{array} \right\} . \quad (3^*)$$

Für den Punkt P auf AC setzen sich die Wirkungen der Prismen APB und BPC zusammen. Im Vergleich zu Fig. 36 S. 278 kann man setzen bezw.

für	r_1'	r_2'	c	w_1	w_2	w_0	φ_1
bei BPC:	zh_0	yh_0	ah_0	$\pi - A - B$	$B - \psi$	$A + \psi$	$-A$
bei APB:	xh_0	yh_0	ch_0	A	ψ	$\pi - A - \psi$	$+A$;

zufolge dieser Substitutionen ist die Horizontalanziehung für APB von derjenigen für BPC zu subtrahieren.

Für das Potential der Anziehung in P erhält man nun den Wert nach (9) § 5 S. 280 gleich

$$v = k^2 \Theta\, h_0^2 y \sin(A+\psi) \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{3}{2} + \log\text{nat}\, \frac{2L}{y h_0}\right)(x+z) \\ -\frac{z^2}{a}\cos(A+B)\log\text{nat}\,\frac{y}{z} + \frac{x^2}{c}\cos A \log\text{nat}\,\frac{y}{x} \\ -\frac{A+\psi}{\sin(A+\psi)}\, z \sin(A+B)\sin(B-\psi) - \frac{\pi - A - \psi}{\sin(A+\psi)}\, x \sin A \sin\psi \end{array} \right\}.$$

Nach einigen leicht zu erkennenden Umformungen folgt hieraus:

$$v = k^2 \Theta\, h_0^2 \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{3}{2} + \log\text{nat}\,\frac{2L}{y h_0}\right) c \begin{array}{l} -\frac{1}{2} z^2 \sin 2(A+B) \log\text{nat}\,\frac{y}{z} \\ +\frac{1}{2} x^2 \sin 2A \log\text{nat}\,\frac{y}{x} \end{array} \\ -(A+\psi)\, t^2 \sin^2 B - (\pi - A - \psi)\, \xi^2 \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Man erhält ferner aus (5) § 6 S. 281 für die zur Längsrichtung normale Horizontalanziehung in P:

$$2k^2 \Theta\, h_0 y \left\{ \begin{array}{c} (A+\psi)\sin B \sin(B-\psi) + \cos B \sin(B-\psi)\log\text{nat}\,\frac{y}{z} \\ + \sin\psi \log\text{nat}\,\frac{y}{x} \end{array} \right\},$$

wofür man auch setzen kann:

$$2k^2 \Theta h_0 \left\{ (A+\psi)\, t \sin^2 B + \frac{1}{2} t \sin 2B \log\text{nat}\,\frac{y}{z} + \xi \log\text{nat}\,\frac{y}{x} \right\}. \quad (5)$$

Aus (6) § 6 S. 281 folgt endlich für die Vertikalanziehung in P:

$$2k^2 \Theta h_0 y \left\{ \begin{array}{c} (\pi - A - \psi)\sin\psi - (A+\psi)\cos B \sin(B-\psi) \\ + \sin B \sin(B-\psi)\log\text{nat}\,\frac{y}{z} \end{array} \right\},$$

wofür man auch setzen kann:

$$2k^2 \Theta h_0 \left\{ (\pi - A - \psi)\,\xi - \frac{1}{2}(A+\psi)\, t \sin 2B + t \sin^2 B \log\text{nat}\,\frac{y}{z} \right\}. \quad (6)$$

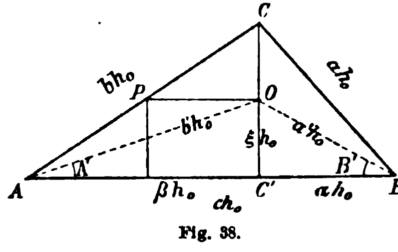


Fig. 38.

Um nunmehr zu den Angaben für einen Punkt O in CC', gleichhoch mit P gelegen, vergl. Fig. 38, zu gelangen, gehen wir von (4) aus und setzen darin, um zunächst das Potential des Prismas CBC' zu erhalten,

für:	c	x	y	z	t	A	ψ
bezw.:	α	ξ	a'	$1-\xi$	$\alpha(1-\xi)$	$\frac{\pi}{2}$	B',

während die übrigen Symbole bleiben. Damit folgt als Potential von CBC' auf O:

$$k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2} + \log \operatorname{nat} \frac{2L}{a' h_0}\right) \alpha + \frac{(1-\xi)^2}{2} \sin 2B \log \operatorname{nat} \frac{a'}{1-\xi} \\ - \left(\frac{\pi}{2} + B'\right) \alpha^2 (1-\xi)^2 \sin^2 B - \left(\frac{\pi}{2} - B'\right) \xi^2 \end{array} \right\}.$$

Im vorletzten Gliede schreibt man besser für $\alpha \sin B$ einfach $\cos B$.

Vertauscht man jetzt A mit B, a' mit b', α mit β und A' mit B', so ergiebt sich das Potential von ACC'. Dieses ist gleich

$$k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2} + \log \operatorname{nat} \frac{2L}{b' h_0}\right) \beta + \frac{(1-\xi)^2}{2} \sin 2A \log \operatorname{nat} \frac{b'}{1-\xi} \\ - \left(\frac{\pi}{2} + A'\right) (1-\xi)^2 \cos^2 A - \left(\frac{\pi}{2} - A'\right) \xi^2 \end{array} \right\}.$$

Die Addition beider Ausdrücke ergiebt als Potential v_O für O:

$$v_O = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2} + \log \operatorname{nat} \frac{2L}{h_0}\right) c - \alpha \log \operatorname{nat} a' - \beta \log \operatorname{nat} b' \\ + \frac{1}{2} (1-\xi)^2 \left[\sin 2B \log \operatorname{nat} \frac{a'}{1-\xi} + \sin 2A \log \operatorname{nat} \frac{b'}{1-\xi}\right] \\ - (1-\xi)^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} + B'\right) \cos^2 B + \left(\frac{\pi}{2} + A'\right) \cos^2 A\right] \\ - (\pi - A' - B') \xi^2 \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Mit Übergehung der Horizontalanziehung erhalten wir in gleicher Weise durch zweimalige Anwendung von (6) für die Vertikalanziehung in O:

$$2k^2 \Theta h_0 \left\{ \begin{array}{l} (\pi - A' - B') \xi - (1-\xi) \left[\left(\frac{\pi}{2} + A'\right) \cos^2 A + \left(\frac{\pi}{2} + B'\right) \cos^2 B\right] \\ + (1-\xi) \left[\frac{1}{2} \sin 2B \log \operatorname{nat} \frac{a'}{1-\xi} + \frac{1}{2} \sin 2A \log \operatorname{nat} \frac{b'}{1-\xi}\right] \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Wir führen nun wieder als normale Schwerkraft an der Erdoberfläche, sei es im Meeresspiegel oder in der Meereshöhe H, den Wert

$$G = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$$

ein. Dividieren wir mit demselben in das Potential, so erhalten wir die Erhebung δh der gestörten Niveaufläche über die ungestörte gleichen Potentialwertes an der betreffenden Stelle; dividieren wir in die Horizontalanziehung, so erhalten wir die Lotablenkung Λ; dividieren wir endlich in die Vertikalanziehung, so erhalten wir die Schwerestörung δg in Bruchteilen der normalen Schwerkraft*).

---

*) Die Werte von v für die Punkte A und B und die zugehörigen Erhebungen berechnete auch 1880 *Clarke, Geodesy* p. 93—94.



Bei diesen Divisionen geht der Faktor $k^2\Theta$ der oben aufgestellten Formeln über in $k^2\Theta : G$ oder in

$$K = \frac{3\Theta}{4\pi\Theta_m R}. \tag{9}$$

Man hat nun in diesen Formeln nur $k^2\Theta$ mit K zu vertauschen um bezw. Erhebung der gestörten Niveaufläche über die ungestörte, Lotablenkung oder Störung in der Schwerkraft zu erhalten. Für die Lotablenkung in Sekunden ist zu setzen

$$K'' = \varrho'' \frac{3\Theta}{4\pi\Theta_m R}. \tag{10}$$

Sie entspricht mit Rücksicht auf die Figuren einer Anziehung des aufgehängten Lotes nach rechts.

Es mufs noch bemerkt werden, dafs die nach den gegebenen Formeln berechnete Schwerestörung nur dann die ganze Störung ist, wenn man für einen bestimmten Punkt die Schwerkräfte vergleicht, welche *ohne* und *mit* Berücksichtigung der Prismenanziehung vorhanden sind. Wenn man jedoch vergleicht die ungestörte Schwerkraft in einem Punkte einer ungestörten Niveaufläche mit der gestörten Schwerkraft in dem darüberliegenden Punkte der gestörten Niveaufläche gleichen Potentialwertes, so kommt aufser der Prismenanziehung noch die Veränderung der normalen Schwerkraft in betracht, welche zu der Höhenverschiebung gehört. Diese Veränderung kann sehr beträchtlich ausfallen, da Prismen von der Masse der Hochgebirge bedeutende Höhenverschiebungen bewirken. Da indessen einerseits für unsere Zwecke die Betrachtung der Schwerestörung für bestimmte Punkte genügt, andererseits die Berechnung des Einflusses der Höhenlage einfach mit dem Quotienten $2\delta h : R$ erfolgen kann, so sehen wir hier von der Betrachtung der Schwerestörung entlang gestörter Niveauflächen ab.

§ 8. **Deformationen durch einen gleichschenkeligen Gebirgsrücken.** Wir nehmen jetzt als Querschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck und setzen demnach

$$a = b, \qquad A = B. \tag{1}$$

Um einen Überblick von der Gesamtwirkung zu bekommen, berechnen wir zunächst die Erhebung des gestörten Niveaus für die Punkte C', M', A und N der Grundfläche im mittleren Querprofil, Fig. 39.

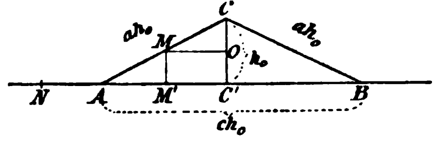


Fig. 39.

Nach Formel (1) S. 282 wird erhalten als Erhebung der gestörten Niveaufläche über die un-

gestörte für C', wobei $\sigma = \frac{c}{2}$, $p = 1$, $\psi' = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist, wenn man die Relationen

$$\begin{matrix} a \sin A = 1 & c \sin A = 2 \cos A & c \sin 2A = 4 \cos^2 A \\ 2a \cos A = c & c \tan A = 2 & c \sin^2 A = \sin 2A \end{matrix} \tag{2}$$

beachtet und

$$\frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{h_0} = Q \tag{3}$$

setzt:

$$\delta h_{C'} = K h_0^2 c \left\{ Q - \cos^2 A \log \text{nat} \frac{c}{2} - \frac{\pi}{4} \sin 2A \right\}; \tag{4}$$

ferner für M' inmitten AC', wobei $\sigma = \frac{c}{4}$, $p^2 = 1 + \frac{c^2}{16}$, $\tan \psi' = \frac{4}{c}$ zu setzen ist:

$$\delta h_{M'} = K h_0^2 c \left\{ Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{c^2+16}{16} \begin{matrix} -\left(9 \log \text{nat} 9 - 10 \log \text{nat} \frac{c^2+16}{c^2}\right) \frac{\cos^2 A}{16} \\ -\left(\pi + 8 \arctan \frac{4}{c}\right) \frac{\sin 2A}{16} \end{matrix} \right\}; \tag{5}$$

ferner für A, wobei $\sigma = 0$, $p = a$, $\psi' = A$ zu setzen ist:

$$\delta h_A = K h_0^2 c \left\{ Q - \log \text{nat} c - \frac{1}{2} \cos 2A \log \text{nat} \frac{4c^2}{c^2+4} - A \sin 2A \right\}. \tag{6}$$

Es folgt weiter für N nach Formel (1*) S. 283, für welchen Punkt $\sigma = -\frac{c}{4}$, $p^2 = 1 + \frac{9c^2}{16}$, $\tan \psi' = \frac{4}{3c}$ zu setzen ist:

$$\delta h_N = K h_0^2 c \left\{ Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{9c^2+16}{16} \begin{matrix} -\left(25 \log \text{nat} 25 - 26 \log \text{nat} \frac{9c^2+16}{c^2}\right) \frac{\cos^2 A}{16} \\ -\frac{3}{2} \sin 2A \arctan \frac{4}{3c} \end{matrix} \right\}. \tag{7}$$

Wir bemerken hierbei, dafs der angewandte Ausdruck (1*) zwar noch für N immer eine gute Annäherung bietet, falls nur $2L$ erheblich gröfser ist als $c h_0$, dafs derselbe aber bei wachsendem Abstande vom Gebirgsrücken rasch an Genauigkeit einbüfst, wie aus der Entwicklung der Grundformeln hervorgeht, vergl. insbesondere S. 279, Bem. zu (7).

Setzen wir $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m$, so wird sehr nahe

$$K = 3 : 160\,000\,000. \tag{8}$$

Wir nehmen ferner $h_0 = 2500^m$, $K h_0^2 = 10 : 85$ rund, sowie $2L = 750000^m$ und $c = 10$; damit ergeben sich die folgenden Werte der Höhenstörungen:

	Differenz		
$\delta h_{C'} = \frac{100}{85}(7{,}20 - 1{,}85) = 6{,}29^m$		Hor. Distanz je 6250^m.	(9)
	$0{,}45^m$		
$\delta h_{M'} = \frac{100}{85}(7{,}20 - 2{,}24) = 5{,}84^m$			
	$0{,}90^m$		
$\delta h_A = \frac{100}{85}(7{,}20 - 3{,}00) = 4{,}94^m$			
	$0{,}56^m$		
$\delta h_N = \frac{100}{85}(7{,}20 - 3{,}48) = 4{,}38^m$			

Setzen wir dagegen $c = 100$, so folgen die Höhenstörungen:

	Differenz		
$\delta h_{C'} = \frac{1000}{85}\left\{7{,}204 - 3{,}942\right\} = 38{,}38^m$		Hor. Distanz je 62500^m.	(10)
	$6{,}13^m$		
$\delta h_{M'} = \frac{1000}{85}\left\{7{,}204 - 4{,}463\right\} = 32{,}25^m$			
	$9{,}83^m$		
$\delta h_A = \frac{1000}{85}\left\{7{,}204 - 5{,}298\right\} = 22{,}42^m$			
	$5{,}63^m$		
$\delta h_N = \frac{1000}{85}\left\{7{,}204 - 5{,}777\right\} = 16{,}79^m$			

In dem letzteren Falle ist übrigens die Genauigkeit der Zahlen erheblich geringer als im vorhergehenden, weil die Länge des Gebirgsrückens nur das Dreifache seiner Breite beträgt. Insbesondere ist δh_N infolge dieses Umstandes mit Rücksicht auf die Formeln (4) und (4*) S. 278 beinahe 1^m ungenau. Immerhin reichen unsere Zahlen noch dazu aus, eine Vorstellung von der Gröſse der Deformation zu erhalten.

Aus den Zahlen (9) und (10) kann man auch eine annähernde Vorstellung von der Wirkung der *Alpen* gewinnen. Wenn man das rohe Profil derselben, Fig. 84 im 7. Kapitel, betrachtet, welches allerdings die höchsten Spitzen, deren Wirkung aber gering ist, abschneidet, so erkennt man, daſs die Wirkung der eigentlichen Alpenmasse durch (10) überschätzt wird. Mit Rücksicht auf das Ansteigen des Terrains in Deutschland aber dürfte die Maximalerhebung im zentralen Teile der Alpen immerhin auf 30^m zu schätzen sein, wobei nun freilich die Gegenwirkung etwa vorhandener unterirdischer Massendefekte unbeachtet gelassen ist.

Um eine Vorstellung von der Störung des Parallelismus der Niveauflächen zu erlangen, berechnen wir die Höhenstörungen δh der Niveauflächen noch für die Punkte C, M und O, Fig. 39.

Die Formel (4) des vorigen Paragraphen S. 284 giebt für C, wobei $x = a$, $y = a$, $z = 0$, $t = 0$, $\xi = 1$, $\psi = A$ zu setzen ist:

$$\delta h_C = K h_0^2 c \left\{ Q - \frac{1}{2} \log \operatorname{nat} \frac{c^2 + 4}{4} - \frac{\pi - 2A}{c} \right\}; \qquad (11)$$

ferner für M, woselbst $x = \frac{a}{2}$, $y^2 = \frac{1}{4} + \frac{9c^2}{16}$, $z = \frac{a}{2}$, $t = \frac{c}{2}$, $\xi = \frac{1}{2}$, $\tan \psi = \frac{2}{3c}$ zu setzen ist:

$$\delta h_M = K h_0^2 c \left\{ \begin{array}{l} Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{9c^2+4}{16} - \frac{1}{16}(1 - 4\sin^2 A) \log \text{nat} \frac{9c^2+4}{c^2+4} \\ - \frac{1}{4c}\left[\pi + \left(A + \text{arc tan} \frac{2}{3c}\right)(4\cos^2 A - 1)\right] \end{array} \right\} . (12)$$

Für die oben angenommenen numerischen Ausgangswerte folgt bei $c = 10$:

$$\left.\begin{array}{l} \delta h_C = \frac{100}{85}(7{,}20 - 1{,}90) = 6{,}24^m \\ \delta h_M = \frac{100}{85}(7{,}20 - 2{,}23) = 5{,}85^m, \end{array}\right\} \quad (13)$$

dagegen bei $c = 100$:

$$\left.\begin{array}{l} \delta h_C = \frac{1000}{85}(7{,}204 - 3{,}943) = 38{,}36^m \\ \delta h_M = \frac{1000}{85}(7{,}204 - 4{,}463) = 32{,}25^m. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Nun ist für die ursprünglich durch C und C' gehenden Niveauflächen der ungestörte Abstand gleich h_0, der gestörte aber $h_0 + \delta h_C - \delta h_{C'}$. Die Störung $\delta h_C - \delta h_{C'}$ ist

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } c = & 10 & -0{,}05^m \\ \text{„ } c = & 100 & -0{,}02^m. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Dagegen ist für die Niveauflächen durch M und M' die Störung $\delta h_M - \delta h_{M'}$ gleich

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } c = & 10 & +0{,}01^m \\ \text{„ } c = & 100 & +0{,}00^m. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Zur Berechnung von δh für O giebt die Formel (7) S. 285, wobei $A = B$, $\alpha = \beta = \frac{c}{2}$, $a'^2 = b'^2 = \frac{1}{4} + \frac{c^2}{4}$, $\xi = \frac{1}{2}$ und $A' = B'$ $= \text{arc tan} \frac{1}{c}$ zu setzen ist:

$$\delta h_O = K h_0^2 c \left\{ \begin{array}{l} Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{c^2+1}{4} + \frac{\sin^2 A}{8} \log \text{nat} (c^2+1) \\ - \frac{1}{8} \sin 2A \left(\frac{\pi}{2} + \text{arc tan} \frac{1}{c}\right) - \frac{1}{2c}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tan} \frac{1}{c}\right) \end{array} \right\} . (17)$$

Für flache Profile ist δh_O sehr nahe die *Maximaldeformation*; denn im Punkte O mufs das Potential der Anziehung des flachen, symmetrischen Gebirgsrückens nahezu ein Maximum sein, wie man sofort erkennt.

Mit $c = 10$ wird bei den angenommenen Verhältnissen

$$\delta h_O = \frac{100}{85}(7{,}20 - 1{,}75) = 6{,}42^m; \quad (18)$$

mit $c = 100$ dagegen:

$$\delta h_O = \frac{1000}{85}(7{,}204 - 3{,}928) = 38{,}54^m. \quad (19)$$

Hiernach ist für die ursprünglich durch C' und O führenden Niveauflächen die Abstandsstörung $\delta h_O - \delta h_{C'}$

$$\begin{aligned} &\text{für } c = 10 \text{ gleich } + 0{,}13^m \\ &\;,, \quad c = 100 \quad ,, \quad + 0{,}16^m; \end{aligned} \tag{20}$$

für diese beiden Niveauflächen findet daher von $M'M$ bis $C'O$ eine Störung im Parallelismus im Sinne einer Divergenz statt, welche beträgt

$$\begin{aligned} &\text{für } c = 10 \quad 0{,}12^m \\ &\;,, \quad c = 100 \quad 0{,}16^m. \end{aligned} \tag{21}$$

Eine eingehendere Untersuchung der Störungen im Abstand und Parallelismus der Niveauflächen wird einfacher als mittelst Potentialwerten mittelst der Schwerestörungen geführt.

§ 9. **Fortsetzung: Störungen der Schwerkraft.** Die Anwendung des Ausdruckes (3) S. 283 giebt unter Substitution von $A = B$, $c \sin 2A = 4 \cos^2 A$ und $c \sin^2 A = \sin 2A$ die Störung der normalen Schwerkraft in C', woselbst $\sigma = \frac{c}{2}$, $p = 1$, $\psi' = \frac{\pi}{2}$ zu setzen ist:

$$\delta g_{C'} = - G \cdot K h_0 \left\{ 2\pi \cos^2 A - 2 \sin 2A \log \operatorname{nat} \frac{c}{2} \right\}; \tag{1}$$

ferner für M', woselbst $\sigma = \frac{c}{4}$, $p^2 = 1 + \frac{c^2}{16}$, $\tan \psi' = \frac{4}{c}$ zu setzen ist:

$$\delta g_{M'} = - G \cdot K h_0 \left\{ \begin{array}{c} \left(\pi + 2 \operatorname{arc\,tan} \frac{4}{c}\right) \cos^2 A \\ - \left(\frac{1}{2} \log \operatorname{nat} 27 - \log \operatorname{nat} \frac{c^2 + 16}{c^2}\right) \sin 2A \end{array} \right\}; \tag{2}$$

ferner für A, woselbst $\sigma = 0$, $p = a$, $\psi' = A$ zu setzen ist:

$$\delta g_A = - G \cdot K h_0 \left\{ 4A \cos^2 A - \sin 2A \log \operatorname{nat} \frac{4c^2}{c^2 + 4} \right\}. \tag{3}$$

Es folgt weiter mittelst des Ausdrucks (3*) S. 283 für N, woselbst $\sigma = -\frac{c}{4}$, $p^2 = 1 + \frac{9c^2}{16}$, $\tan \psi' = \frac{4}{3c}$ zu setzen ist:

$$\delta g_N = - G \,.\, K h_0 \left\{ \begin{array}{c} 6 \cos^2 A \operatorname{arc\,tan} \frac{4}{3c} \\ - \left(\frac{5}{2} \log \operatorname{nat} 5 - \log \operatorname{nat} \frac{9c^2 + 16}{c^2}\right) \sin 2A \end{array} \right\}. \tag{4}$$

Die Anwendung von Ausdruck (6) S. 284 giebt sodann für C, woselbst $y = a$, $z = 0$, $t = 0$, $\xi = 1$, $\psi = A$ zu setzen ist:

$$\delta g_C = + G \,.\, K h_0 \left\{ 2\pi - 4A \right\}, \tag{5}$$

und für M, wo $y^2 = \frac{1}{4} + \frac{9c^2}{16}$, $z = \frac{a}{2}$, $t = \frac{c}{2}$, $\xi = \frac{1}{2}$, $\tan \psi = \frac{2}{3c}$ zu setzen ist:

$$\delta g_M = + G \,.\, K h_0 \left\{ \begin{array}{c} \pi - \left(A + \operatorname{arc\,tan} \frac{2}{3c}\right)\left(1 + 2\cos^2 A\right) \\ + \frac{1}{2} \sin 2A \operatorname{lognat} \frac{9c^2 + 4}{c^2 + 4} \end{array} \right\}. \qquad (6)$$

Für O erhält man schliefslich aus (8) S. 285 unter Substitution von $A' = B' = \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{c}$, $a'^2 = b'^2 = \frac{c^2 + 1}{4}$ und $\xi = \frac{1}{2}$:

$$\delta g_O = + G \,.\, K h_0 \left\{ \begin{array}{c} \pi \sin^2 A - 2\left(1 + \cos^2 A\right) \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{c} \\ + \frac{1}{2} \sin 2A \operatorname{lognat} \left(c^2 + 1\right) \end{array} \right\}. \qquad (7)$$

Wenn die numerischen Ausgangswerte des vorigen Paragraphen zu grunde gelegt werden, ergeben sich folgende Störungen der Schwerkraft in Millionteln von G d. h. also sehr nahe Mikrons der Länge des mathematischen Sekundenpendels:

$c = 10$ (8)

			in C + 259
		in M + 131	in O + 31
in N — 4	in A — 11	in M' — 149	in C' — 226

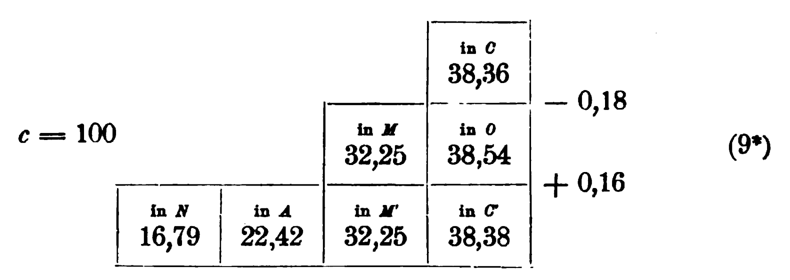
$c = 100$ (9)

			in C + 292
		in M + 147	in O + 7
in N 0	in A — 1	in M' — 148	in C' — 281

Wir stellen diesen Werten diejenigen der Erhebung der gestörten Niveauflächen über die ungestörten nach dem vorigen Paragraphen gegenüber und erhalten:

$c = 10$ (8*)

			in C 6,24	
				— 0,18
		in M 5,85	in O 6,42	
				+ 0,13
in N 4,38	in A 4,94	in M' 5,84	in C' 6,29	



$c = 100$ (9*)

			in C 38,36	
				− 0,18
		in M 32,25	in O 38,54	
				+ 0,16
in N 16,79	in A 22,42	in M' 32,25	in C' 38,38	

Zwischen den Schwerestörungen und den Abstandsstörungen der Niveauflächen besteht ein Zusammenhang, der eine angenäherte Kontrolle der Zahlwerte erlaubt. Bekanntlich ist für zwei unendlich nahe Niveauflächen das Produkt aus Abstand in Schwere konstant. Bezeichnen wir nun in sehr groſser Entfernung vom Gebirgsrücken, wo die Störungen verschwinden, den Abstand mit h, die Schwere mit G, dagegen die gestörten Werte mit $h + \delta h$ und $G + \delta g$, so muſs sein

$$G \, . \, h = (G + \delta g)\,(h + \delta h)$$

oder, mit zulässiger Vernachlässigung:

$$\delta h = - \frac{\delta g}{G} h \, . \tag{10}$$

Ist in dieser Formel h nicht unendlich klein, sondern endlich, so ist für δg ein mittlerer Wert für das Intervall h zu setzen, wie die Integration beiderseits in (10) sofort erkennen läſst.

Nehmen wir nun an, daſs in der Vertikalen $C'OC$ von unten nach oben δg algebraisch nahezu gleichförmig zunimmt, was die Tabellen (8) und (9) zu bestätigen scheinen und was für flache Profile eine gute Annäherung sein muſs, so wird z. B. die Abstandsstörung der durch C' und O gehenden ungestörten Niveauflächen bei $c = 10$ sehr nahe sein gleich

$$- \frac{-0{,}000226 + 0{,}000031}{2} \cdot \frac{2500}{2} \text{ d.i. } + 0{,}12^m \, .$$

Auf diese Weise lassen sich auch die anderen aus (8*) und (9*) folgenden Abstandsstörungen mittelst (8) und (9) kontrollieren. Man wird sie bestätigt finden.

Untersucht man die Störungen der Schwerkraft eingehender, so findet sich, daſs von der Basis $AC'B$ aus nach C hin, Fig. 39, diese Störung ihrem algebraischen Betrage nach im allgemeinen bei einigermaſsen flacher Form des Profils ABC nahezu gleichförmig zunimmt, daſs aber ganz in der Nähe von C diese Zunahme stetig in eine Abnahme übergeht. Davon kann man sich leicht überzeugen, indem man den Differentialquotienten der Schwerestörung entlang AC, sowie entlang $C'C$ bildet. Die gröſste Störung findet somit nicht in C, sondern unterhalb dieses Punktes statt. Diese Anomalie ist aber bei einigermaſsen flachen Profilen ganz und gar unerheblich und ohne

alle praktische Bedeutung, weshalb wir auch nicht weiter auf dieselbe eingehen.

§ 10. **Fortsetzung: Störungen im Parallelismus der Niveauflächen.** Mittelst der bisherigen Untersuchungen und einiger einfachen Überlegung kann man leicht eine allgemeine Vorstellung vom Gange der Niveauflächen innerhalb des mittleren Teiles des Gebirgsrückens gewinnen. Aus (8*) und (9*) erkennt man, dafs für übereinander liegende Punkte P und P' des Hanges AC und der Grundfläche AC' die Höhenstörung sehr nahe dieselbe ist. Es hat dies seinen Grund darin, dafs das Potential v der Anziehung des Gebirgsrückens für solche Punkte nahezu gleich grofs ist, wie es auch dem Augenschein nach für flache Profile der Fall sein mufs. Wenn nun in Fig. 40 irgend eine Niveaufläche, z. B. diejenige durch P_1 ins Auge gefafst wird, so ist klar, dafs dieselbe bei P_1 gegen die Grundfläche AB keine wesentliche Abstandsstörung erleidet, indem für P_1 und P_1' die Potentialdifferenz im gestörten Zustande nahezu denselben Betrag hat, wie im ungestörten — um so mehr, je flacher das Profil ist. Von der Eintrittsstelle P_1 an divergiert aber die durch P_1 führende gestörte Niveaufläche gegen die durch den Fufs A führende gestörte Niveaufläche (Grundfläche). Die stattfindenden Verhältnisse werden angenähert durch Fig. 40 vorgestellt, wobei den vier gestörten Niveauflächen durch A, P_1, P_2 und P_3 dieselbe successive Potentialdifferenz ΔW entspricht. Die kleinen Zahlen bezeichnen die Abstandsstörungen in einer gewissen Einheit; die Summe dieser Zahlen in jeder Vertikalen ist null, wie es nach dem Gesagten sein mufs. Um die Richtigkeit der Zahlen im einzelnen zu erkennen, diene Folgendes:

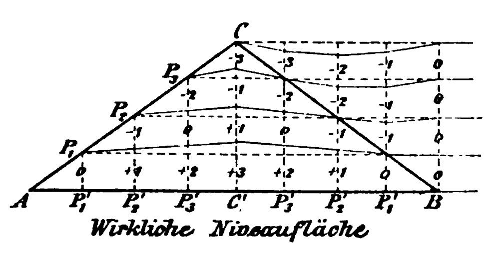


Fig. 40.

Geht man in irgend einer Vertikalen z. B. $P_3'P_3$ in die Höhe, so nimmt die Schwerestörung im algebraischen Sinne zu, die Gesamtschwerkraft, abgesehen von der Änderung der normalen Schwere mit der Höhe, nimmt somit zu, und die zu ΔW gehörenden Niveauabstände werden kleiner. Angenähert entspricht bei flachen Profilen die Schwerestörung in P_3' einer anziehenden Schicht von der Dicke $P_3'P_3$; ebenso in P_3, nur mit entgegengesetzter Wirkung, und ähnlich zwischen P_3' und P_3. Man findet, dafs annähernd die Schwerestörungen und Abstandsstörungen in arithmetischer Progression von unten nach oben sich ändern, indem insbesondere die Abstandsstörung zwischen zwei benachbarten Niveauflächen, Fig. 40, der Summe aus der Anzahl

der darüber liegenden, positiv wirkenden und der Anzahl der darunter liegenden, negativ wirkenden Schichten entspricht.

Die Figur zeigt, dafs die gestörten Niveauflächen von ihrem Eintritt aus nach innen divergieren; es gilt dies ganz allgemein für irgend ein Paar Niveauflächen, da vom Rande nach der Mitte des Profils hin die Summe der Dicken der störenden Schichten, welche auf Vermehrung und Verminderung der mittleren Schwerkraft zwischen den betreffenden Niveauflächen wirken, im algebraischen Sinne abnimmt, der Abstand somit zunimmt.

Die Figur deutet auch die Abstandsstörungen für die Niveauflächen aufserhalb in der Nähe des Gebirgsrückens an, die sich näherungsweise ebenfalls an jeder Stelle nach der Dicke der darunter liegenden Schicht bemessen.

Um die gröfsten Abstandsstörungen innerhalb des Profiles zu erhalten, mufs man in den einzelnen Vertikalen die Orte der gröfsten und kleinsten Potentialwerte v der Anziehung mit einander kombinieren. In jeder Vertikalen wird aber bei einigermafsen flachen Profilen ein Mal die Schwerestörung $dv : dh$ gleich null. An dieser Stelle, welche nahe mitten zwischen P und P' liegt, ist v ein Maximum. Da nun die Schwerestörung unterhalb negativ, oberhalb positiv ist, sind die ins Auge zu fassenden Orte einerseits P und P', andererseits jene Maximalstelle.

Die gröfsten Potentialdifferenzen treten in der Linie CC' auf, und die gröfsten Abstandsstörungen müssen somit zwischen den Niveauflächen durch C und C' einerseits und einer Niveaufläche in mittlerer Höhe andererseits stattfinden. Wie (8*) und (9*) zeigen, ist die Störung für den Abstand der mittleren Niveaufläche von dem oberen Punkte C die gröfsere. Einen Näherungswert für diesen Abstand gewinnt man mittelst der Formel (11) S. 288 und (17) S. 289, deren Subtraktion zunächst ergiebt:

$$K h_0^2 c \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \operatorname{lognat} \frac{c^2+4}{c^2+1} + \frac{1}{8} \sin^2 A \operatorname{lognat}(c^2+1) + \frac{\pi - 2A}{c} \\ - \frac{1}{8} \sin 2A \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctan} \frac{1}{c}\right) - \frac{1}{2c}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} \frac{1}{c}\right) \end{array} \right\}.$$

Der Voraussetzung flacher Profile entsprechend vereinfachen wir diesen Ausdruck und setzen in hinreichender Annäherung

$$\operatorname{lognat} \frac{c^2+4}{c^2+1} = \frac{3}{c^2} \qquad \sin A = A = \frac{2}{c} \qquad \operatorname{arctan} \frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

Damit geht der Ausdruck über in:

$$K h_0^2 \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{log\,nat} c^2 - 5}{2c} \right\}. \tag{1}$$

Dieser Näherungsausdruck giebt für flache, symmetrische Profile die maximale Störung des Abstandes der Niveauflächen innerhalb des Profiles. Er stimmt in obigen Beispielsfällen mit den Zahlenangaben in

(8*) und (9*) und ist, wie man leicht bemerkt, von c wenig abhängig, was dadurch erklärlich wird, dafs bei flachen Profilen die Anziehung auf einen Punkt in CC' wesentlich nur noch von der Höhenlage dieses Punktes und nur wenig von der Form des Profiles abhängt.

§ 11. Fortsetzung: Die Lotstörungen auf dem Hange AC. Wir betrachten vorerst die Lotablenkung des gleichschenkeligen Gebirgsrückens in einem Punkt des Hanges AC des mittleren Querprofils und bezeichnen sie mit Λ. Dann ist nach Formel (5) S. 284 für Λ in Sekunden:

$$\Lambda = +2K''h_0\left\{\frac{1}{2}t\sin 2A\,\mathrm{lognat}\frac{y}{z} + \xi\,\mathrm{lognat}\frac{y}{x} + (A+\psi)\,t\sin^2 A\right\}\cdot(1)$$

Um den Verlauf von Λ entlang AC kennen zu lernen, differenzieren wir nach σ, wobei wir für ξ, t, z, y und ψ, sowie deren Differentialquotienten die folgenden Relationen zu beachten haben, welche sich mittelst der auf die gleichschenkelige Dreiecksform anzuwendenden Fig. 37 S. 282 ergeben:

$$\xi = \sigma\tan A \qquad t = c\,(1-\xi) \qquad z = \frac{1}{2}t\sec A$$

$$y^2 = \xi^2 + (c-\sigma)^2 \qquad \psi = \mathrm{arc\,tan}\frac{\xi}{c-\sigma}\,;$$

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \tan A = \frac{2}{c} \qquad \frac{dt}{d\sigma} = -2 \qquad \frac{dz}{d\sigma} = -\sec A$$

$$\frac{dy}{y\,d\sigma} = \frac{\sigma\sec^2 A - c}{y^2} \qquad \frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{2}{y^2}.$$

Aufserdem ist zu berücksichtigen, dafs $x = a - z$ ist. Wenn man einige naheliegenden Transformationen ausführt und die Umformungen

$$\frac{\sigma\sec^2 A - c}{y^2} = \frac{-(c-\sigma)+\xi\tan A}{(c-\sigma)^2}\cos^2\psi\,,$$

sowie

$$\frac{1}{2}t\sin 2A + \xi = [(c-\sigma)+\xi\tan A]\sin A\cos A$$

beachtet, wird erhalten:

$$\frac{d\Lambda}{d\sigma} = 2K''h_0\left\{\begin{array}{c}\tan A\left(\mathrm{lognat}\frac{y}{x}-1\right) - \sin 2A\left(\mathrm{lognat}\frac{y}{z}-1\right)\\ -\frac{1}{2}\sin 2A\cos^2\psi - 2(A+\psi)\sin^2 A\\ +\frac{2t+\xi^2\tan A}{y^2}\sin^2 A\end{array}\right\}\cdot(2)$$

Für $x =$ null, d. i. in A, wird dieser Differentialquotient $+\infty$, für $z =$ null, d. i. in C, aber $-\infty$; er geht also zwischen A und C mindestens einmal durch null hindurch. Vernachlässigen wir aber in der geschlungenen Parenthese von (2) in der Voraussetzung flacher

Profile bereits Grösen der Ordnung A^3, so reduziert sie sich auf den Ausdruck

$$\tan A \log\text{nat} \frac{y}{x} - \sin 2A \log\text{nat} \frac{y}{z}\,. \tag{2*}$$

Derselbe läfst sich für den folgenden Zweck mit ausreichender Genauigkeit durch Substitution von $\tan A = 2:c$, $\sin 2A = 4:c$ vereinfachen, und hiermit erhält man als Bedingung des Verschwindens von $dA:d\sigma$ die Gleichung

$$\log\text{nat} \frac{y}{x} = 2 \log\text{nat} \frac{y}{z}$$

oder

$$\frac{y}{x} = \frac{y^2}{z^2}, \quad \text{also} \quad yx = z^2. \tag{3}$$

Nun ist bei flachen Profilen sehr nahe $y = \frac{c}{2} + z$, $x = \frac{c}{2} - z$. Aus (3) folgt damit angenähert

$$z = \frac{c}{4}\sqrt{2}\,,$$

somit

$$x = \frac{c}{4}(2 - \sqrt{2}) = 0{,}146\, c \tag{3*}$$

und

$$\xi h_0 = 0{,}292\, h_0\,.$$

Der hierzu gehörige Maximalwert von A ergiebt sich aus (1) mit Beibehaltung der bisherigen Genauigkeit angenähert gleich

$$A_{max} = K'' h_0 \cdot \frac{4}{c}\left\{(c - 2\sigma) \log\text{nat} \frac{y}{z} + \sigma \log\text{nat} \frac{y}{x}\right\}.$$

Nun ist zufolge (3) und (3*):

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}} = 1 + \sqrt{2}\,;$$

damit wird

$$A_{max} = 2K'' h_0 \,.\, 2 \log\text{nat}(1 + \sqrt{2}) = 0{,}0138\, h_0 \text{ Sekunden}, \tag{4}$$

wobei mit Rücksicht auf den Wert von K nach (8) S. 287

$$K'' = 0{,}0039$$

gesetzt ist und h_0 in Metern genommen werden mufs.

Bei $h_0 = 2500^m$ wird $A_{max} = 34{,}5''$ *).

---

*) Bereits 1780 wurde von *Hutton* in den *Philosophical Transactions* (S. 603 des 14. Bandes der Ausgabe von 1809) die Lotablenkung durch ein dreiseitiges, gleichschenkeliges, liegendes, ∞ langes Prisma untersucht und die Stelle des Maximums ermittelt. Obwohl die Methode ungenügend ist, gelangt *Hutton* doch wenigstens für flache Profile zu dem richtigen Resultat (3*). *Todhunter* deutet 1873 in Bd. 1 der *History of Attraction* p. 472 den Vorgang einer richtigen Lösung für ein ∞ langes, ungleichseitiges Prisma an.

Auch im Hauptwerke der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation,* 1858, p. 580 wird die Lotablenkung durch ein Prisma untersucht, wobei der Querschnitt als Trapez angenommen ist. Das Maximum ist nicht ermittelt.

Für den Punkt A ist Λ jedenfalls positiv, wie auch (1) zeigt; von hier aus nimmt Λ anfangs sehr rasch zu, dann allmählich langsamer bis zu dem, bei flachen Profilen von dem Werte c nahezu unabhängigen Maximum, von wo aus Λ rascher und rascher abnimmt bis zu dem Werte null in C. Die Zunahme bei A und die Abnahme bei C erfolgen unendlich rasch, immerhin aber nur logarithmisch unendlich und daher nicht besonders auffällig.

Um für Punkte nahe bei A, also für sehr kleine σ, Λ darzustellen, kann man von dem Ausdruck (1) das Glied $\xi \log \text{nat}\, x$ abtrennen; für den Rest gilt dann der Differentialquotient (2) nach Hinzufügung von $\tan A\,(\log \text{nat}\, x + 1)$ innerhalb der Parenthese. Für den Punkt A wird der so abgeänderte Differentialquotient:

$$2K''h_0\left\{\tan A \log\text{nat}\, c - \sin 2A\left(\log\text{nat}\frac{c}{a} - \frac{1}{2}\right) - (2A - \tan A)\sin^2 A\right\}.$$

Für sehr kleine σ kann man nun unter Beschränkung auf flache Profile Λ dadurch bilden, dafs zu dem Werte Λ im Punkte A der vorstehende, mit σ multiplizierte Differentialquotient nebst $-2K''h_0 \,.\, \xi \log \text{nat}\, x$ hinzugefügt wird. Mit einigen für flache Profile zulässigen Näherungen ergiebt sich so die für sehr kleine x gültige Formel:

$$\Lambda = 2K''h_0\left\{\cos^2 A \log \text{nat}\frac{4c^2}{c^2+4} + A \sin 2A\right\} + 2K''h_0\left\{\log\text{nat}\left(\frac{c}{x}\right)^2 - 0{,}77\right\}\frac{x}{c}. \tag{5}$$

In ganz ähnlicher Weise kann man Λ für die Nähe von C darstellen, wobei in der Parenthese von (1) zunächst $-\frac{1}{2}\,t \sin 2A \log\text{nat}\, z$ abzutrennen ist. Damit geht (2) für C über in

$$-2K''h_0\left\{\tan A + \frac{1}{2}\sin 2A(\log\text{nat}\, a^2 + \cos^2 A) + \sin^2 A\left(4A - \frac{\tan A}{a^2}\right)\right\},$$

und man findet unter Beschränkung auf flache Profile hieraus die für sehr kleine z gültige Formel:

$$\Lambda = 2K''h_0\left\{\log\text{nat}\left(\frac{a}{z}\right)^2 + 2\right\}\frac{2z}{c}. \tag{6}$$

Mit Hülfe der Formeln (1), (5) und (6) erhält man folgende Übersicht der *Lotablenkungen auf dem Hange* des mittleren Teiles des Gebirgsrückens, wobei unter Annahme von $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m$ wie früher $K'' = 0{,}0039$ gesetzt und h_0 mit 2500^m eingeführt ist.

$c = 10 \quad ch_0 = 25000^m$

σ	σh_0	A
0 am Fufs	0^m	26,7″
0,01	25	27,0
0,1	250	28,4
0,5	1250	31,8
.	.	.
1,5	3750	34,1
.	.	.
3,0	7500	29,1
4,0	10000	20,0
4,5	11250	12,7
.	.	.
4,9	12250	3,8
4,99	12475	0,6
5 auf dem Kamm	12500	0,0

$c = 100 \quad ch_0 = 250000^m$

σ	σh_0	A
0 am Fufs	0^m	27,0″
0,1	250	27,3
1	2500	28,7
5	12500	32,0
10	25000	33,9
15	37500	34,4
20	50000	33,8
30	75000	29,5
40	100000	20,3
45	112500	12,9
48	120000	6,6
49	122500	3,8
49,9	124750	0,6
50 auf dem Kamm	125000	0,0

Hiernach ist auch eine übersichtliche graphische Darstellung der A möglich, wie solche auf Tafel II mit anderen Darstellungen gegeben ist und im 7. Kapitel erläutert werden wird.

Die Tabellen zeigen, dafs A wesentlich mit $\sigma : c$ variiert, was auch aus dem Ausdruck (1) zu erkennen ist, wenn er flachen Profilen entsprechend modifiziert wird.

§ 12. **Fortsetzung: Die Lotstörungen auf der Grundfläche** AB. Die Lotablenkung des gleichschenkeligen Gebirgsrückens in einem Punkte der Grundlinie AB des mittleren Querprofils bezeichnen wir mit A'. Wir erhalten dafür in Sekunden nach S. 283 (2*) für aufserhalb gelegene Punkte, wenn wir beachten, dafs $c \sin^2 A = \sin 2A$ ist:

$$A' = +2K''h_0 \cdot \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \log \text{nat} \frac{p}{-\sigma} - (c - \sigma) \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \\ + 2\psi' \end{array} \right\}, \quad (1)$$

dagegen für innerhalb gelegene Punkte nach (2) S. 283:

$$A' = +2K''h_0 \cdot \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \log \text{nat} \frac{p}{\sigma} - (c - \sigma) \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \\ + 2\psi' - \frac{2\pi}{c}\sigma \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Im ersteren Falle hat σ negative, im zweiten positive Werte. Aufser-

dem sind für p und ψ' mit Rücksicht auf Fig. 37 S. 282 die Relationen zu beachten:

$$p^2 = 1 + \left(\frac{c}{2} - \sigma\right)^2;$$

$$\psi' = \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{c}{2} - \sigma\right) \text{ für } \sigma \leqq \frac{c}{2}\,.$$

Dieselben geben noch:

$$\frac{dp}{p\,d\sigma} = -\frac{\frac{c}{2} - \sigma}{p^2}, \quad \frac{d\psi'}{d\sigma} = \frac{1}{p^2}.$$

Hiermit findet sich ohne Schwierigkeit für den Differentialquotienten von A' nach σ, aufserhalb:

$$\frac{dA'}{d\sigma} = 2K''h_0 \cdot \frac{\sin 2A}{2} \log\text{nat} \frac{(c - 2\sigma)^2 + 4}{-4\sigma(c - \sigma)}, \tag{3}$$

innerhalb:

$$\frac{dA'}{d\sigma} = 2K''h_0 \cdot \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \log\text{nat} \frac{(c - 2\sigma)^2 + 4}{4\sigma(c - \sigma)} - \frac{2\pi}{c} \right\}. \tag{4}$$

Berücksichtigt man, dafs im ersten Falle σ negativ ist und dafs man identisch hat:

$$-4\sigma(c - \sigma) = [(c - 2\sigma)^2 + 4] - [c^2 + 4],$$

so erkennt man leicht, dafs $dA' : d\sigma$ aufserhalb stets positiv ist, bei Annäherung an den Gebirgsrücken beständig zunimmt und für $\sigma =$ null, also in A, $+\infty$ wird. In A beginnt $dA' : d\sigma$ innerhalb mit $+\infty$, und es findet von da an eine fortwährende Abnahme statt.

Diese Abnahme von A bis C' führt den Differentialquotienten notwendig durch null hindurch, da in C' mit $\sigma = \frac{c}{2}$ der Wert von A' null wird. In der That ist in C'

$$\frac{dA'}{d\sigma} = 2K''h_0 \cdot \sin 2A \left\{ \log\text{nat} \frac{2}{c} - \frac{\pi}{c} \right\},$$

und dieses ist für jeden Wert von c negativ.

Das Verschwinden von $dA' : d\sigma$ innerhalb erfolgt in demjenigen Punkte zwischen A und C', dessen σ der Bedingung genügt:

$$\log\text{nat} \frac{(c - 2\sigma)^2 + 4}{4\sigma(c - \sigma)} = \frac{2\pi}{c}. \tag{5}$$

Setzt man zur Abkürzung für num log nat $\frac{2\pi}{c}$ das Symbol q, so folgt hieraus durch Auflösung nach σ:

$$\sigma = \frac{c}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{q - \frac{4}{c^2}}{1 + q}} \right\}. \tag{6}$$

Für $c = 10$ und 100 ist dieser Wert gleich 1,006 bezw. 14,10.

Hierzu findet man aus Formel (2) die zugehörigen Werte von A', die *Maximalwerte*, gleich

$$31{,}0'' \text{ bezw. } 34{,}0''.$$

Mit Rücksicht auf vorstehende Entwicklungen kann man nun den Gang der Lotablenkung in der Grundlinie des Profils wie folgt angeben: Die in gröfserem Abstande verschwindende Lotablenkung wächst bei Annäherung an den Gebirgsrücken rascher und rascher, besonders rasch am Fufspunkt A; dann erfolgt die Zunahme allmählich immer langsamer bis zum Maximalwert, von wo ab eine beschleunigte Abnahme stattfindet, infolge welcher in C' die Lotablenkung sich auf null reduziert. Über C' hinaus erscheinen die Lotablenkungen in umgekehrter Reihenfolge, aber mit negativem Vorzeichen wieder.

Wir geben hier zur Übersicht in nebenstehenden Tabellen eine Reihe von Werten der *Lotablenkung A' in der Basis* des mittleren Teiles des Gebirgsrückens für die beiden Beispielsfälle und verweisen im übrigen auf die graphischen Darstellungen der Tafel II (7. Kap.). Für die nächste Umgebung von A, d. h. für kleine Werte von σ, sind die Werte aus Näherungsformeln für A' mit Hülfe der Differentialquotienten in ähnlicher Weise wie im vorigen Paragraphen abgeleitet. Diese Formeln lauten, aufserhalb:

$$A' = 2K'' h_0 \left\{ \cos^2 A \log \text{nat} \frac{4c^2}{c^2+4} + A \sin 2A \right\}$$
$$+ 2K'' h_0 \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \log \text{nat} \frac{c^2+4}{-4c\sigma} + 1 \right\} \sigma, \qquad (7)$$

innerhalb:

$$A' = 2K'' h_0 \left\{ \cos^2 A \log \text{nat} \frac{4c^2}{c^2+4} + A \sin 2A \right\}$$
$$+ 2K'' h_0 \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \log \text{nat} \frac{c^2+4}{4c\sigma} + 1 - \frac{2\pi}{c} \right\} \sigma. \qquad (8)$$

Die Tabellen zeigen, was auch die Formeln (1) und (2) dieses Paragraphen bestätigen, dafs A' aufserhalb bei flachen Profilen wesentlich von $\sigma : c$ abhängt, während sich innerhalb eine Abweichung von dieser Abhängigkeit zeigt.

Es mag noch bemerkt werden, dafs die für die Abstände $\sigma = -500$ und -100 angegebenen Werte der A' bei $c = 100$ im Falle des S. 287 eingeführten Wertes von $2L$ eine nur ganz rohe Annäherung bieten und eigentlich $2L$ weit gröfser voraussetzen. Die für diese Abstände angegebenen Werte der A' sind bei jenem Werte von $2L$ zu grofs.

$c = 10 \quad ch_0 = 25000^m$

σ	σh_0	Λ'
— 50	— 125000^m	1,8″
— 10	— 25000	6,6
— 5	— 12500	10,2
— 0,5	— 1250	22,3
— 0,1	— 250	25,2
— 0,01	— 25	26,5
0 am Fuſs	0	26,7
+ 0,01	+ 25	27,0
+ 0,1	+ 250	28,1
+ 0,5	+ 1250	30,5
+ 1,0	+ 2500	31,0
+ 1,5	+ 3750	30,6
·	·	·
+ 3	+ 7500	23,1
+ 4	+ 10000	13,4
+ 4,5	+ 11250	7,1
·	·	·
+ 4,9	+ 12250	1,4
+ 5 unter dem Kamm.	+ 12500	0

$c = 100 \quad ch_0 = 250000^m$

σ	σh_0	Λ'
— 500	— 1250000^m	1,8″
— 100	— 250000	6,6
— 50	— 125000	10,2
— 5	— 12500	21,9
— 1	— 2500	25,4
— 0,1	— 250	26,8
0 am Fuſs	0	27,0
+ 0,1	+ 250	27,3
+ 1	+ 2500	28,7
+ 5	+ 12500	31,8
+ 10	+ 25000	33,6
+ 15	+ 37500	34,0
+ 20	+ 50000	33,3
+ 30	+ 75000	28,7
+ 40	+ 100000	19,4
+ 45	+ 112500	11,9
+ 48	+ 120000	5,6
+ 49	+ 122500	3,0
+ 50 unter dem Kamm.	+ 125000	0

Zu einer *rohen Schätzung* hat man *für die Nähe des Fuſses des Gebirges* die Lotstörungsformel:

$$\Lambda' = 2K'' h_0 \log \text{nat}\, 4\,, \tag{9}$$

d. i. für $K'' = 0{,}0039$, wobei h_0 in Metern zu nehmen ist:

$$\Lambda' = 0{,}011\, h_0 \text{ Sekunden.} \tag{9*}$$

Mit Rücksicht auf die angegebenen Werte für die Lotstörung Λ darf man sich nicht wundern, wenn sich bei einem so mächtigen Gebirge wie dem Kaukasus die Breitenamplitude von ca. 1° für die beiden, nördlich und südlich des Kammes gelegenen Punkte *Wladikawkas* und *Duschett* um 54″ gestört fand*). Ebenso müssen groſse Amplitudenstörungen entstehen, wenn die Endpunkte des Bogens zwischen 2 hohen Gebirgen liegen, wie die Endpunkte der Gradmessung des *Beccaria* (1768) in Oberitalien: *Andrate* am südlichen Fuſse der schweizer Alpen und *Mondovi* am nördlichen der ligurischen Alpen. Nach Oberst *von Orff*s Zusammenstellung

*) Nach Mitteilung von *O. Struve*, vergl. weiterhin § 41.

(vergl. Bd. 1 S. 571) ist die geograph. Breite, astronom. bezw. geodätisch von *München* übertragen, gleich

			geod. — astr.
für *Andrate*	45° 31′ 12,36″ astr.,	45° 31′ 40,57″ geod.	+ 28,21″
„ *Mondovi*	44 23 45,38 „ ,	44 23 25,28 „	— 20,10.

Mithin ist die Störung der Amplitude gleich 48″. *Beccaria* fand 41″, ein Resultat, welches anfangs seinen Messungen zur Last gelegt wurde, bis eine Revision im 1. Viertel dieses Jahrhunderts die Ergebnisse der Messungen wenigstens im allgemeinen bestätigte*).

§ 13. **Fortsetzung: Die Krümmungsradien im Niveau der Grundfläche.** Denken wir uns den gleichschenkeligen Gebirgsrücken auf eine Kugelfläche vom Radius R, dem mittleren Erdradius, aufgesetzt, so ändern sich für das mittlere Querprofil die berechneten Lotablenkungen $\varDelta$ und $\varDelta'$ jedenfalls nur unwesentlich, dagegen erlangen wir den Vorteil, bezüglich der Krümmungsradien die Rechnungsergebnisse den irdischen Verhältnissen besser angepaſst zu haben. Nach S. 274 § 3 (19) können wir nämlich für den Krümmungsradius der gestörten Niveaufläche in der Ebene des mittleren Profils mit Rücksicht auf die allgemeine Erdkrümmung nunmehr angenähert setzen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} - \frac{d\varDelta'}{h_0\, d\sigma}. \tag{1}$$

Hierin ist für $\varDelta'$ die Lotablenkung in der Basis AB zu setzen, welche die ungestörte Lage der Niveaufläche bezeichnet. Die nicht unerhebliche Störung der Höhenlage der Niveaufläche bewirkt allerdings einen Fehler der Gleichung (1), wenn man dieselbe auf die gestörte, aus AB hervorgehende Niveaufläche bezieht; aber einerseits ist der Fehler nicht beträchtlich, andererseits kommt man der Wahrheit etwas näher, wenn man ϱ nicht auf diejenige gestörte Niveaufläche bezieht, welche ungestört die Lage AB hat, sondern auf eine AB näherliegende, gestörte Niveaufläche, etwa diejenige, welche durch A und B hindurch geht. Ja man kann sogar diese gestörte Niveaufläche als Basis des Gebirgsrückens ansehen, denn der Wert für $\varDelta'$ kann dadurch merkliche Änderungen nicht erleiden.

Nach (3) und (4) des vorigen Paragraphen erhalten wir nun auſserhalb (σ negativ):

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{R}\left\{1 - KR \sin 2\varDelta \log\text{nat} \frac{(c-2\sigma)^2+4}{-4\sigma(c-\sigma)}\right\}, \tag{2}$$

und innerhalb (σ positiv):

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R}\left\{1 - KR \sin 2\varDelta\left[\log\text{nat} \frac{(c-2\sigma)^2+4}{4\sigma(c-\sigma)} - \frac{2\pi}{c}\right]\right\}. \tag{3}$$

*) Die Angabe für *Beccarias* Fehler gleich 41″ ist der *Ordnance Survey, Principal Triangulation*, entlehnt und stammt wohl aus *Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen*, t. II., *Milan* 1827.

Hierbei ist K als Arcus zu nehmen, sodaſs nach S. 286 (9):

$$KR = \frac{3\Theta}{4\pi\Theta_m} \tag{4}$$

wird, speziell für $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m$ aber bis auf $^1/_2$ % genau

$$KR = 0{,}12 \tag{4*}$$

gesetzt werden kann.

Zufolge der Gleichungen (2) und (3) weicht ϱ_a erst in solcher Nähe von A bemerkenswert von R ab, für welche σ nicht gröſser ist als von der Ordnung c, und zwar ist $\varrho_a > R$. Erst in allernächster Nähe von A, d. h. für sehr kleine σ, steigt ϱ_a bis $+\infty$, springt nach $-\infty$ und nimmt ab bis auf null in A selbst; innerhalb geht ϱ_i ebenso rasch nach $\mp\infty$ und sinkt rasch auf Werte herab, die nur wenig gröſser als R sind; weiterhin bis C' nimmt ϱ_i langsam bis zu Werten ab, die etwas kleiner als R sind. In C' ist ϱ_i ein Minimum.

Von h_0, der Höhe des Gebirgsrückens, hängen ϱ_a und ϱ_i nicht ab, wohl aber von c, dem Verhältnis der Basisbreite zur Höhe, und zwar wachsen bei konstantem Verhältnis $\sigma : c$ die Abweichungen von ϱ_a gegen R nicht mit zunehmendem c sondern mit abnehmendem c, also mit wachsender Steilheit der Hänge.

Dasselbe gilt im wesentlichen auch für ϱ_i. Fassen wir insbesondere dasjenige $(\varrho_i)_{min}$ ins Auge, welches in C' stattfindet, so ist zunächst nach (3):

$$\frac{1}{(\varrho_i)_{min}} = \frac{1}{R}\left\{1 + 2KR\sin 2A\left[\frac{\pi}{c} - \log\text{nat}\,\frac{2}{c}\right]\right\}, \tag{5}$$

wobei zu beachten ist, daſs zwischen A und c die Relation $\tan A = 2 : c$ besteht. Der Differentialquotient von

$$\sin 2A\left[\frac{\pi}{c} - \log\text{nat}\,\frac{2}{c}\right], \text{ d. i. } \frac{4c}{c^2+4}\left[\frac{\pi}{c} - \log\text{nat}\,\frac{2}{c}\right],$$

nach c ist gleich

$$\frac{4}{(c^2+4)^2}\left\{(c^2-4)\left[\log\text{nat}\,\frac{2}{c}+1\right] - 2\pi c + 8\right\};$$

derselbe ist von c gleich null bis unendlich negativ. Daher hat (5) seinen gröſsten Wert bei $c =$ null. Man hat u. a. als Wert der geschlungenen Parenthese von (5) für die Annahme (4*):

1,039	bei $c =$	100	
1,177	„	10	
1,375	„	2	(6)
1,470	„	1	
1,750	„	0.	

Dieses Verhalten erscheint paradox, allein es stimmt damit überein, dafs die Maximalablenkung des Lotes auf dem Hange, wie oben S. 297 wenigstens für flache Profile gezeigt wurde, unabhängig von c ist. Je kleiner c aber ist, desto kleiner ist der Bogen, auf welchen sich die Lotablenkung verteilt, und desto gröfser müssen die Störungen im Krümmungsradius werden.

Wir geben nun eine Übersicht für die Werte ϱ bei $c = 10$ und 100 mit der Annahme (4*) für KR:

$c = 10 \quad c h_0 = 25000^m$

σ	σh_0	$\varrho : R$
— 50	— 125000^m	1,0004
— 10	— 25000	1,0056
— 5	— 12500	1,0139
— 0,5	— 1250	1,0896
— 0,1	— 250	1,179
— 0,01	— 25	1,345
0 am Fufs	— 0	null
+ 0,01	+ 25	1,294
+ 0,1	+ 250	1,136
+ 0,5	+ 1250	1,0418
+ 1	+ 2500	1,0004
+ 2	+ 5000	0,9519
+ 3	+ 7500	0,9131
+ 4	+ 10000	0,8745
+ 5 unter dem Kamm.	+ 12500	0,8494

$c = 100 \quad c h_0 = 250000^m$

σ	σh_0	$\varrho : R$
— 100	— 250000^m	1,0006
— 50	— 125000	1,0014
— 5	— 12500	1,0084
— 1	— 2500	1,0158
— 0,1	— 250	1,0272
— 0,01	— 25	1,0390
0 am Fufs	— 0	null
+ 0,01	+ 25	1,0387
+ 0,1	+ 250	1,0269
+ 1	+ 2500	1,0152
+ 5	+ 12500	1,0067
+ 15	+ 37500	0,9995
+ 30	+ 75000	0,9
+ 40	+ 100000	0,9866
+ 50 unter dem Kamm.	+ 125000	0,9626

Diese Übersicht zeigt u. a., dafs das Gebiet der abnorm grofsen und kleinen ϱ_a und ϱ_i in der nächsten Umgebung von A an ganz kleine σ gebunden ist. Um dieses noch besser einzusehen, setzen wir für kleine σ:

$$\varrho_a = n R\,, \tag{7}$$

womit aus (2) folgt zur Bestimmung von σ bei gegebenem n:

$$\frac{(c - 2\sigma)^2 + 4}{-4\sigma(c - \sigma)} = \text{num log nat} \frac{1 - \frac{1}{n}}{KR \sin 2A} = q\,.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt, wenn wie angedeutet, die rechte Seite derselben mit q bezeichnet wird:

$$\sigma = \frac{c}{2}\left\{1 - \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{c^2 q}}{1 - \frac{1}{q}}}\right\}. \tag{8}$$

Denken wir uns entsprechend einer successiven Annäherung an A den Wert von n von $+2$ durch $+\infty$ über $-\infty$ bis null gehend, so ist q stets eine große Zahl. Den kleinsten Wert hat q bei $n=2$ und $A=45^0$ oder $c=2$. Derselbe ist für $KR=0{,}12$ gleich rund 65. Ferner ist für $n=2$, wie man durch Probieren findet, der kleinste Wert von c^2q nahe bei $c=1{,}5$ gelegen. Dieses Minimum von c^2q, gleich rund 170, ist für das angegebene Intervall von n überhaupt das Minimum. Wegen des Umstandes, dafs q und c^2q grofse Zahlen sind, genügt es anstatt (8) zu setzen:

$$-\sigma = \frac{c}{4q}\left\{1+\frac{4}{c^2}+\frac{3}{4q}+\ldots\right\}. \tag{8*}$$

Für $c=10$ und $KR=0{,}12$ ist $q = \text{num log nat}\left[21{,}7\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$, dagegen für $c=100$ gleich $\text{num log nat}\left[208\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$. Hieraus erkennt man, dafs zu

$$\varrho_a = 2R$$

bei $c=10$, dem ungünstigeren Falle, der sehr kleine Wert $-\sigma = 1/_{20000}$ gehört, sodafs bei $h_0 = 2500^m$ der betreffende Punkt von A nur um $-\sigma h_0 = 1/_8{}^m$ absteht. Im gleichen Falle ist für

$$\varrho_a = 3R$$

$-\sigma = 1/_{800000}$, $-\sigma h_0 = 0{,}003^m$. Dies bestätigt das oben Gesagte über die geringe Ausdehnung des Gebietes abnormer Werte von ϱ_a bei flachen Profilen.

Ein ganz gleiches Verhalten zeigt ϱ_i, was hier nicht besonders untersucht zu werden braucht.

Aber auch bei steilen Profilen ist das betreffende Gebiet nur von geringer Ausdehnung. Durch Differenzieren von σ nach c findet man zunächst, dafs für jeden Wert von n der gröfste Wert von $-\sigma$ nahe bei $c=2$ liegt. Es ist dieser Maximalwert gleich

$$-\sigma = \text{num log}\left(-\frac{1-\frac{1}{n}}{0{,}12}\right).$$

Hiermit erhält man denselben

für $n=2$	gleich	$1/_{65}$,	womit $-\sigma h_0 =$	40^m	bei $h_0 = 2500^m$.
„ 3	„	$1/_{260}$	„ „	10^m	
„ ∞	„	$1/_{4000}$	„ „	$0{,}6^m$	

Nach dem Vorstehenden entspricht praktisch genommen der Verlauf der Krümmungsradien in der Grundfläche am Fufse des Gebirgsrückens wesentlich einer stetig verlaufenden Verflachung. Dagegen sind in den Niveauflächen, welche zwischen A und C in das Gebirge eintreten, Unstetigkeiten der Krümmung vorhanden, für welche die

allgemeine Formel (2) S. 38 gilt, die man aber auch mittelst der Formeln (2) und (3) S. 302 nachweisen kann, wenn man unterhalb einer derartigen Niveaufläche für die Gebirgsmasse eine horizontale Platte und ein negativ wirkendes, gleichschenkeliges Prisma substituiert.

§ 14. **Prismatische Thäler.** Für den mittleren Querschnitt eines Thales von der Form eines dreiseitigen Prismas, dessen Länge groſs ist im Verhältnis zur Breite und Tiefe, gelten die Formeln der §§ 7—13 unmittelbar, wenn Θ negativ genommen wird. Auch ist die zum Gebirgsrücken entgegengesetzte Lage zu beachten. Demgemäſs erhalten die Lotstörungen und Störungen im reziproken Krümmungsradius bei einem Thale entgegengesetzte Werte wie bei einem entsprechenden Gebirgsrücken. Aber die Schwerestörungen bleiben in entsprechenden Punkten der Querschnitte dieselben.

Setzen wir ein auf beiden Seiten gleichgeböschtes Thal voraus, Fig. 41, so gelten für die besonders interessanten Lotstörungen in der Linie AB die Formeln des § 12 S. 298.

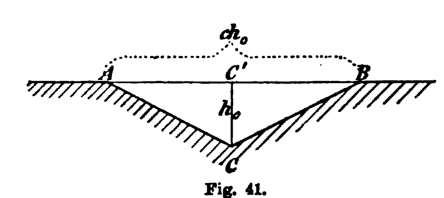


Fig. 41.

Man hat darin $\Theta = -\frac{1}{2}\Theta_m = -2{,}8$ anzusetzen für ein offenes Thal, dagegen $-1{,}8$ für ein mit Wasser gefülltes Thal, also einen Fluſs oder Meeresarm.

Unter Voraussetzung flacher Böschung, die hier meist zutrifft, ist die Lotstörung in der Linie AB nahe bei A und B nach S. 301 (9) nahezu gleich

$$2K''h_0 \log \text{nat}\, 4\,. \tag{1}$$

Hierin ist für ein offenes Thal entsprechend der Annahme $\Theta = -\frac{1}{2}\Theta_m$ zu setzen $K'' = -0{,}0039$. Dagegen ist für einen Fluſs K'' im Verhältnis $2{,}8 : 1{,}8$ zu verkleinern. Somit folgt als Näherungswert der *Lotstörung am Rande*

$$\begin{aligned} &\text{eines flachen Thales:} && -0'',011\, h_0 \\ &\text{eines flachen Stromes:} && -0'',007\, h_0 \end{aligned} \tag{1*}$$

für h_0 in Metern. Das negative Vorzeichen bedeutet eine Abstoſsung des aufgehängten Lotes von C' weg.

Das Maximum der Lotstörung liegt etwas nach der Mitte zu und ist ein wenig gröſser.

Der Krümmungsradius, welcher nach dem vorigen Paragraphen wegen des negativen Wertes von K zwischen A und B im allgemeinen, ausgenommen nahe bei A und B, gröſser als der ungestörte Wert R wird, erhält in der Mitte C' seinen Maximalwert, für den sich bei flachen Profilen ebenfalls eine Näherungsformel

aufstellen läfst. Mit einigen Vernachlässigungen giebt nämlich die Formel (5) S. 303 die nachstehende, für gröfsere Werte von c brauchbare Näherungsformel:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)_{C'} = \frac{1}{R}\left\{1 + 4KR\,\frac{\log\operatorname{nat}\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}}\right\}. \tag{2}$$

Hierin ist bei $\Theta = \frac{1}{2}\,\Theta_m = 2.8$ nach S. 303 (4*) $4KR = 0{,}48$; bei $\Theta = 1{,}8$ also gleich $0{,}31$, sodafs man für den reziproken Krümmungsradius in der Mitte C' von AB näherungsweise hat

$$\left.\begin{aligned}&\text{bei einem flachen Thale:} && \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\left(1 - 0{,}5\,\frac{\log\operatorname{nat}\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}}\right)\\ &\text{bei einem flachen Strome:} && \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\left(1 - 0{,}3\,\frac{\log\operatorname{nat}\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{2*}$$

Hierin ist $\frac{2}{c} = \tan A$ das Gefälle der Böschung, von welchem ϱ lediglich abhängt.

Da der Quotient $\log\operatorname{nat}\frac{c}{2} : \frac{c}{2}$ bei $\frac{c}{2} = 1$ und ∞ gleich null wird, so existiert dazwischen ein Maximum, welches bei $\frac{c}{2} = e$, der Basis der natürlichen Logarithmen, stattfindet und gleich ist $1 : e$. Man hätte hiernach für den maximalen Wert von ϱ inmitten AB angenähert bei einem flachen Thale $\varrho = 1{,}22\,R$, bei einem Strome $\varrho = 1{,}12\,R$, und zwar für die Böschung $1 : e$ d. i. $1 : 2{,}7$. Jedoch ist hierbei zu beachten, dafs eine solche Böschung nicht mehr als flache zu bezeichnen ist und dafs daher die Formeln (2*) hier bereits einen gröfseren Fehler besitzen. In der That ist nach (5) S. 303 für $\frac{c}{2} = e$ bei einem flachen Thale $\varrho = 1{,}32\,R$, bei einem Strome $\varrho = 1{,}18\,R$. Aufserdem ist bereits S. 303 nachgewiesen, dafs die Störung in $\frac{1}{\varrho}$ für den Punkt C' mit wachsender Steilheit der Böschung fortwährend wächst, sodafs also auch im gegenwärtigen Falle ϱ *bei wachsendem Gefälle der Böschung im Punkte C' fortwährend zunimmt.*

§ 15. **Fortsetzung: steile Böschung.** Indem wir unter Voraussetzung des Querprofils Fig. 42 die Formel für die Horizontalanziehung am Rande in A ableiten, haben wir den Ausdruck (5) § 6 S. 281 anzuwenden auf die dreiseitigen Prismen 1 und 2, Fig. 42.

Fig. 42.

Es ist zu setzen

$$\begin{array}{llll} \text{für } 1: & r_1' = a & \varphi_1 = 0 & \\ & r_2' = b & w_1 = \gamma & \omega_0 = \beta, \\ \text{für } 2: & r_1' = b & \varphi_1 = \beta & \\ & r_2' = c & w_1 = \beta, & \end{array}$$

womit die durch die Horizontalanziehung erzeugte Ablenkung des aufgehängten Lotes in Richtung nach dem Thale hin mit Rücksicht auf den Schlufs von § 7 S. 286 gleich wird

$$2K''\left\{a \sin\gamma\left(\cos\gamma \log\text{nat}\,\frac{a}{b} + \beta\sin\gamma\right) + b\sin\beta\log\text{nat}\,\frac{b}{c}\right\}. \quad (1)$$

Hierin ist nach S. 296 für ein offenes Thal $K'' = -0{,}0039$, wenn 2,8 die Dichtigkeit der umgebenden Massen ist; für einen vollen Kanal reduziert sich K'' auf $-0{,}0025$. Die Distanzen a und b sind dabei in Metern einzuführen.

Ist das Querprofil ein *Rechteck* von der Grundlinie a und der Höhe h_0, so wird am Rande in A die Lotablenkung gleich

$$2K''\,h_0\left\{\frac{\beta}{\tan\beta} + \log\text{nat}\,\frac{1}{\sin\beta}\right\}. \quad (2)$$

Aus den Formeln der §§ 5 und 6 dieses Kapitels kann man leicht auch Formeln für vierseitige Prismen herstellen, was wir indessen dem Leser überlassen, ebenso wie die Behandlung des Falles *einer sehr tiefen, langen Schlucht im Felsengebirge*. Auf diesen weisen *Thomson und Tait, Handbuch der theor. Physik*, Bd. 1, 2. Hälfte, S. 27—28, als besonders interessant hin. Die daselbst angegebene, nicht entwickelte Formel für die Lotstörung am Rande der Schlucht findet man leicht, wenn man die Schlucht als grofse Platte betrachtet und die Formel (2) S. 141 für die normale Anziehung einer solchen auf einen Punkt, der in geringem Abstande vor ihrem mittleren Teile liegt, anwendet. Da der in Rede stehende Punkt nicht am mittleren Teile, sondern am Rande liegt, ist nur die Hälfte des Formelwertes für die normale Anziehung anzuwenden. Für einen Punkt, der mehr nach der mittleren Tiefe zu liegt, gelten aber die ganzen Werte. Die Lotstörung ist gleich

$$-\varrho''\frac{3\Theta a}{4\Theta_m R}$$

im 1. Falle, das Doppelte hiervon im 2. Falle, für a als Breite der Schlucht. Hiernach wird ϱ für Niveauflächen, welche die Schlucht in mittleren Tiefen durchschneiden, in der Regel negativ, oben und unten aber nur bei sehr dichten Felsmassen. Denn dazu gehört, dafs die Summe der Absolutwerte der Lotstörungen für beide Seiten der Schlucht $>$ ist als der ungestörte Wert $\frac{a}{R}$ des Winkels zwischen den Lotrichtungen. Die mittelst der angezogenen Formel leicht zu führende Untersuchung von $\frac{1}{\varrho}$ zeigt, dafs $\frac{1}{\varrho}$ am Rande aufserhalb der Schlucht gleich $\frac{1}{R}$ ist und im Innern auf

$\frac{1}{R}\left(1 - \frac{3\Theta}{2\Theta_m}\right)$ springt, welchen Wert $\frac{1}{\varrho}$ daselbst konstant beibehält. In der mittleren Tiefe geht der Sprung von $\frac{1}{R}$ auf $\frac{1}{R}\left(1 - \frac{3\Theta}{\Theta_m}\right)$, welcher Wert ebenfalls im Innern gilt. Der Betrag der Sprünge stimmt mit den Angaben (2) S. 38 im 1. Kapitel.

§ 16. Halbkugelförmiger Berg und halbkugelförmige Pinge.

Wir betrachten zunächst einen halbkugelförmigen Berg mit dem Radius a und der Dichtigkeit Θ, Fig. 43. Dabei sind für einen Punkt P in der durch den Kugelmittelpunkt führenden Niveaufläche, insoweit wir diese als Ebene auffassen dürfen, das Potential v der Anziehung und die Horizontalanziehung genau halb so grofs als für eine Vollkugel mit demselben Zentrum C.

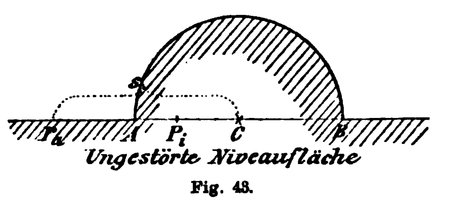


Fig. 43.

Für einen Punkt P_a der Niveaufläche von C aufserhalb im Abstande s von letzterem Punkte ist das Potential nach S. 62 (8) gleich

$$v = \frac{2}{3}\pi k^2 \frac{a^3\Theta}{s}; \tag{1}$$

setzen wir nun die normale Schwerkraft gleich $\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ und dividieren damit in (1), so folgt als Erhebung der gestörten Niveaufläche über die ungestörte bei P_a der Wert

$$h_a = \frac{\Theta}{2\Theta_m}\frac{a^3}{Rs}. \tag{2}$$

Für einen Punkt P_i der Niveaufläche von C innerhalb der Halbkugel ist das Potential nach S. 62 (8*) gleich

$$v = \pi k^2 \Theta \left(a^2 - \frac{1}{3}s^2\right). \tag{3}$$

Hieraus folgt durch Division mit der Schwerkraft die Erhebung der gestörten Niveaufläche bei P_i gleich

$$h_i = \frac{\Theta}{4\Theta_m}\frac{3a^2 - s^2}{R}. \tag{4}$$

Das Maximum für h_i findet für $s = 0$, also für die Mitte des Berges, statt.

Die Lotablenkung $\Delta = -dh : ds$ wird für einen Punkt P_a aufserhalb mit Rücksicht auf (2) gleich

$$\Delta_a = \frac{\Theta}{2\Theta_m}\frac{a^3}{Rs^2}, \tag{5}$$

dagegen für einen Punkt P_i innerhalb mit Rücksicht auf (4) gleich

$$\Delta_i = \frac{\Theta}{2\Theta_m}\frac{s}{R}. \tag{6}$$

Das Maximum von A liegt bei A mit $s = a$:

$$A_{max} = \frac{\Theta}{2\Theta_m} \frac{a}{R}.$$

Für den Krümmungsradius der gestörten Niveaufläche haben wir nach S. 274 (19) die Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} + \frac{dA}{ds},$$

wenn R den Radius der ungestörten Niveaufläche bezeichnet. Hiermit wird für einen Punkt P_a auſserhalb:

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{a^3}{s^3}\right), \tag{7}$$

und für einen Punkt P_i innerhalb:

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\Theta}{2\Theta_m}\right). \tag{8}$$

Innerhalb ist also der Radius ϱ konstant; auſserhalb wächst er bei Annäherung an den Berg bis auf seinen Maximalbetrag in A, der aus (7) für $s = a$ sich findet gleich

$$\frac{1}{(\varrho_a)_{max}} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_m}\right). \tag{9}$$

Für $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m$ geben vorstehende Formeln bezw.:

	auſserhalb	innerhalb
	$h = a^3 : 4Rs$	$(3a^2 - s^2) : 8R$
in Sek.	$A = \varrho'' a^3 : 4Rs^2$	$\varrho'' s : 4R$
	$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{a^3}{2s^3}\right)$	$\frac{5}{4R}$,

(10)

in A und B: $\begin{cases} A_{max} = \varrho'' a : 4R \\ \frac{1}{(\varrho_a)_{max}} = \frac{1}{2R}. \end{cases}$

Betrachten wir anstatt eines halbkugelförmigen Berges *eine halbkugelförmige Pinge*, so ist in den Ausdrücken für Potential und Horizontalanziehung lediglich Θ negativ zu nehmen. Speziell für $\Theta = -\frac{1}{2}\Theta_m$ ergeben sich dabei die Ausdrücke:

	auſserhalb	innerhalb
	$h = -a^3 : 4Rs$	$-(3a^2 - s^2) : 8R$
in Sek.	$A = -\varrho'' a^3 : 4Rs^2$	$-\varrho'' s : 4R$
	$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{a^3}{2s^3}\right)$	$\frac{3}{4R}$,

(11)

$$\text{in } A \text{ und } B: \begin{cases} A_{max} = -\varrho'' a : 4R \\ \dfrac{1}{(\varrho_a)_{min}} = \dfrac{3}{2R}. \end{cases}$$

Für $\Theta = \pm \frac{1}{2} \Theta_m$ beträgt der Sprung in $\frac{1}{\varrho}$ bei A und B von aufsen nach innen bezw. $\pm \frac{3}{4R}$ anstatt, wie im 1. Kap. S. 39 (5) angegeben ist, $\frac{3}{2R}$. Dies hat seinen Grund lediglich darin, dafs die Entwicklungen am letztgenannten Orte hier nicht mehr gelten, weil daselbst vorausgesetzt ist, dafs die Niveaufläche an regulären Stellen der Grenzflächen der Massen hindurch geht; A und B sind aber offenbar solche Stellen nicht. Dagegen werden bei einem Berg Niveauflächen in einiger Höhe über ACB bei ihrem Eintritt in den Berg einen Sprung in $\frac{1}{\varrho}$ gleich $\frac{3}{2R}$ erleiden, und entsprechend bei einem Thale.

Die Lotablenkung durch einen halbkugelförmigen Berg berechnete nach *Todhunter, History of Attraction I* p. 460, schon *Newton* 1728 in der Abh. *A Treatise of the system of the World.* Das *Handbuch der theor. Physik* von *Thomson und Tait,* Bd. 1, 2. Hälfte, S. 26—27, enthält die Formeln für Anziehung auf A horizontal und vertikal. Vergl. auch *Dahlander, Poggendorffs Ann.* 1862, Bd. 117, S. 148 u. ff.

§ 17. **Kleine Insel im Ocean.** Wir denken uns eine Insel in Form eines geraden Kreiskegels, welcher auf dem horizontalen Meeresboden aufsitzt und mit seiner Spitze P gerade bis zum Niveau der Meeresfläche reicht. Durch die Anwesenheit der Insel wird sich die letztere in der Nähe der Insel etwas heben, jedoch nicht viel. Wichtiger ist die Vergröfserung der Beschleunigung der Schwerkraft durch die Inselanziehung.

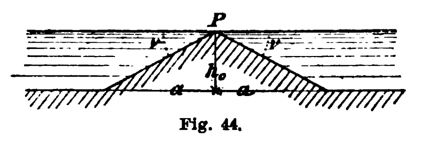


Fig. 44.

Nach S. 143 § 2 (3) und (4) ist mit Rücksicht auf die veränderte Bezeichnung das Potential der Anziehung der Inselmasse auf P gleich

$$\pi k^2 (\Theta - 1) h_0 \left\{ \sqrt{a^2 + h_0^2} - h_0 \right\} \tag{1}$$

und die Vertikalanziehung gleich

$$2\pi k^2 (\Theta - 1)\, h_0 \left\{ 1 - \sin v \right\}. \tag{2}$$

Hierin ist unter Θ die Dichtigkeit der Inselmasse zu verstehen.

Dem Ausdrucke (1) entspricht eine Hebung der Meeresfläche im Betrage von

$$\frac{3(\Theta - 1)}{4\Theta_m} \frac{h_0}{R} \left\{ \sqrt{a^2 + h_0^2} - h_0 \right\}, \tag{3}$$

wie aus (1) durch Division mit der normalen Schwerkraft G, für

welche wir wie sonst $\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ ansetzen, hervorgeht. Da bei gröſseren Tiefen wohl in der Regel $a = h_0 \cot \nu$ wesentlich gröſser als h_0 sein wird, so folgt für die Annahme $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m = 2{,}8$ in meist ausreichender Annäherung als Hebung der Meeresfläche in P:

$$\frac{a h_0}{4R} \quad \text{oder} \quad \frac{h_0^2 \cot \nu}{4R}. \tag{3*}$$

Hierbei bezeichnet $\cot \nu$ das reziproke Gefälle der Inselböschungen.

Beispielsweise ist für $h_0 = 3500^m$ und $\cot \nu = 30$ die Hebung der Meeresfläche bei P gleich 14^m. Dies ist so unerheblich, daſs die durch Hebung der entsprechenden Massenschicht entstehende sekundäre Wirkung gar nicht weiter erörtert zu werden braucht. In Fig. 44 können wir uns unter der Meeresfläche die gestörte Fläche denken.

Die Schwerestörung wird nach (2) gleich

$$+ G \cdot \frac{3(\Theta - 1)}{2\Theta_m} \frac{h_0}{R} (1 - \sin \nu). \tag{4}$$

Für die Annahme $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m = 2{,}8$ und unter Voraussetzung flacher Böschung ist dies angenähert gleich

$$+ G \cdot \frac{h_0}{2R}. \tag{4*}$$

Infolge der Hebung der Meeresfläche tritt fürs Niveau der gestörten, d. i. wirklichen Meeresfläche noch eine kleine Verminderung zu dieser Vermehrung, welche sich nach der Regel für die Änderung der normalen Schwere bei Erhebungen auſserhalb der Erdrinde berechnet.

Hiernach folgt aus (3) und (4) als Schwerestörung im Meeresniveau, wobei wir in (3) für a schreiben $h_0 \cot \nu$:

$$+ G \cdot \frac{3(\Theta - 1)}{2\Theta_m} \frac{h_0}{R} \left(1 - \frac{h_0 \csc \nu}{R}\right) (1 - \sin \nu), \tag{5}$$

oder näherungsweise bei flachen Böschungen, wenn wir zugleich $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m = 2{,}8$ setzen:

$$+ G \cdot \frac{h_0}{2R} \left(1 - \frac{h_0 \cot \nu}{R}\right). \tag{5*}$$

Die Verminderung der Schwerestörung infolge Hebung der Meeresfläche wird übrigens bei kleinen Inseln immer eine geringe sein; denn wie die Tiefenkarten des Weltmeeres zeigen, ist der Radius der Grundfläche $a = h_0 \cot \nu$ im Verhältnis zu R stets geringfügig, sodaſs für eine Schätzung des Inseleinflusses auf die Schwerkraft Ausdruck (4*) ausreicht.

Beispielsweise ist für $h_0 = 3500^m$ und $\cot \nu = 30^m$ die Schwerestörung nach (4*) gleich $0{,}000275 . G$, nach (5*) gleich $0{,}000270 . G$ und nach (5) strenger gerechnet gleich $0{,}000251 . G$.

§ 18. **Deformationen durch kreisförmige Kontinente.** Für die Verteilung der Erdoberfläche auf Land und Wasser hat man folgende Zahlen*):

Oberfläche	= 9 261 238	Qu.-Mln.**)	
Europa	= 180 000	„	zus. = 990 000 Qu.-Mln.
Asien	= 810 000	„	
Afrika	= 540 000	„	
Australien	= 160 000	„	
Amerika	= 750 000	„ ,	

welche letztere sich annähernd im Verhältnis 4 : 3 auf Nord- und Süd-Amerika verteilen.

Betrachtet man die Kontinente als ebene Kreisflächen vom Radius a und setzt die Erdoberfläche $= 4\pi R^2$, so erhält man hiermit für:

Europa-Asien	$a = 0{,}66\, R$
Afrika	. . 0,48
Australien	. . 0,26
Nord-Amerika	. . 0,43
Süd-Amerika	. . 0,37 ,

indem allgemein wird:

$$a = 2R\sqrt{\frac{\textit{Fläche}}{9261238}}\,.$$

Für eine schätzungsweise Berechnung der Deformationswirkung ist die Annahme der Kreisform eine gar nicht üble Annäherung, wie jeder Globus zeigt. Die stärkste relative Abweichung zeigt Afrika.

Als mittlere Meerestiefen ergeben sich für den

atlantischen Ocean	3681^m
stillen „	3887
indischen „	3344

und im Mittel für das ganze Weltmeer 3438^m. Ferner hat man für die mittlere Höhe der Kontinente:

Europa	300^m
Asien	500
Afrika	500
Australien	250
Amerika	410

und im Mittel für das ganze Festland 440^m.

---

*) *Richard Andree, allgemeiner Handatlas 1880.* Hier findet man auch eine Tiefenkarte für den atlantischen und für den stillen Ocean.

**) 1 geogr. Meile ist gleich 4 Min. des Äquators. Zur Berechnung der Oberfläche ist daher Bd. 1, S. 62, in Formel (9) für $a_0\pi$ zu setzen 2700 Meilen.

Für die Berechnung der Deformationswirkung der Kontinente würde hiernach eine Dicke von 440^m mit der mittleren Dichtigkeit 2,8 der festen Teile der Erdrinde, sowie eine Dicke von 3438^m mit der Dichtigkeit $2,8 - 1 = 1,8$ in betracht kommen. Auf die Dichtigkeit $\Theta = 1,8$ reduziert giebt dies eine Dicke $D = 4120^m$. Zur Abrundung werden wir im Folgenden annehmen

$$3\,\Theta D : \Theta_m = 4000^m,$$

wenn aber Θ oder D allein vorkommen, $\Theta = 1,8$, $D = 4000^m$ setzen.

Zur Vereinfachung der Rechnung denken wir uns die Massen der Kontinente auf die ungestörte Meeresfläche kondensiert und sehen ferner von der Krümmung der letzteren ab, insoweit es sich um die Wirkungen handelt, welche auf Punkte innerhalb der Kontinente oder in der Nähe der Küsten ausgeübt werden. Für entferntere Punkte ist dagegen auf die Krümmung der Erde Rücksicht zu nehmen. Die Fehler, welche aus den angegebenen Vereinfachungen entstehen, werden in einigen bemerkenswerten Fällen geschätzt und für das Potential in Anbetracht der erforderlichen Genauigkeit als unerheblich gefunden weden. Dagegen zeigt sich, daſs für die Lotstörungen die Genauigkeit der Entwicklungen am Rande der Scheiben nicht ausreicht und hier eine besondere Untersuchung erforderlich wird.

§ 19. Fortsetzung: Die Deformationen innerhalb. Den angezogenen Punkt P_i nehmen wir als Anfang von Polarkoordinaten, Fig. 45 und 46, und haben für das Flächenelement dq im Ab-

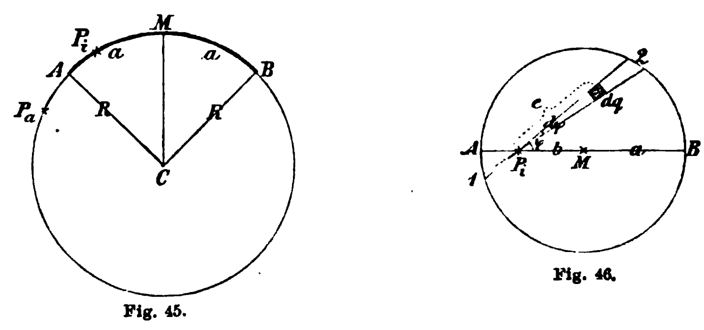


Fig. 45. Fig. 46.

stand e die Gröſse $dq = e\,d\varphi\,de$, das Potential der Anziehung $dv_i = k^2 \Theta D\,dq : e$ oder

$$dv_i = k^2 \Theta D\,d\varphi\,de. \tag{1}$$

Integriert man zunächst alle Wirkungen bei konstantem Werte φ zwischen den diametralen Stellen der Peripherie 1 und 2 und bezeichnet die Sehne 1.2 mit s_φ, so folgt

$$v_i = k^2 \Theta D \int_0^\pi s_\varphi\,d\varphi. \tag{2}$$

Es ist aber nach Fig. 46 $\frac{1}{4} s_\varphi^2 = a^2 - b^2 \sin^2\varphi$; daher wird

$$v_i = 4k^2 \Theta D a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2\varphi} \, d\varphi \,. \tag{3}$$

Bezeichnet man das vollständige elliptische Integral 2. Gattung mit E, setzt insbesondere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2\varphi} \, d\varphi = E\left(\frac{b}{a}\right), \tag{4}$$

so wird

$$v_i = 4k^2 \Theta D a \, E\left(\frac{b}{a}\right). \tag{3*}$$

Zu diesem Betrage von v_i gehört eine gewisse Erhebung h_i, welche erforderlich ist, um von der ungestörten Niveaufläche in die gestörte Niveaufläche gleichen Potentialwertes zu gelangen.

In erster Annäherung findet man h_i aus v_i durch Division mit der normalen Schwerkraft, für welche wir den Wert $G = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$ annehmen. Mit Rücksicht auf die sonstigen Vernachlässigungen reicht diese Annäherung trotz der bedeutenden Gröfse der Erhebungen h_i zu der beabsichtigten Schätzung aus. Es wird

$$h_i = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{aD}{\pi R} E\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5}$$

und für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$ sowie wegen $\pi R = 20000000^m$:

$$h_i = a \frac{E\left(\frac{b}{a}\right)}{5000}. \tag{5*}$$

Hieraus folgt die Lotstörung, positiv im Sinne einer Anziehung des aufgehängten Lotes gegen das Zentrum M hin, gleich

$$A_i = -\frac{dh_i}{db} = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2\varphi}} \, d\varphi \,.$$

Schreibt man identisch im Zähler des Integrales für $\sin^2\varphi$

$$\left\{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2\varphi\right)\right\} \frac{a^2}{b^2},$$

und setzt das vollständige elliptische Integral 1. Gattung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}} = K\left(\frac{b}{a}\right), \tag{6}$$

so wird die Lotstörung

$$\underset{\text{in Sek.}}{A_i} = \varrho'' \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \frac{a}{b} \left\{ K\left(\frac{b}{a}\right) - E\left(\frac{b}{a}\right) \right\}. \tag{7}$$

Für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$ giebt dies rund

$$\underset{\text{in Sek.}}{A_i} = 40 \frac{a}{b} \left\{ K\left(\frac{b}{a}\right) - E\left(\frac{b}{a}\right) \right\}. \tag{7*}$$

Um zu sehen, wie sich die Lotstörung von der Mitte nach dem Rande zu ändert, differenzieren wir A_i nach b und erhalten

$$\frac{dA_i}{db} = \frac{3\Theta D}{\Theta_m \pi R} \frac{a}{b} \frac{dK\left(\frac{b}{a}\right)}{db} = \frac{3\Theta D}{\Theta_m \pi R a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}^{\,3}} d\varphi. \tag{8}$$

Dieser Differentialquotient ist stets positiv, und es wächst daher die Lotstörung von der Mitte stetig bis an den Rand, wo sie einen Maximalwert erreicht.

Zugleich ergiebt sich für den Krümmungsradius der gestörten Niveaufläche, wenn der ungestörte mit R bezeichnet wird, indem nach S. 274 (19)

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R + h_i} + \frac{dA_i}{db}$$

ist, die Näherungsrelation:

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R + h_i} \left\{ 1 + \frac{3\Theta}{\pi \Theta_m} \frac{D}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}^{\,3}} d\varphi \right\}. \tag{9}$$

Augenscheinlich wächst $\frac{1}{\varrho_i}$ mit b, also von der Mitte nach dem Rande zu, und ϱ_i ist somit innerhalb der Scheibe am Rande am kleinsten, in der Mitte am gröſsten.

Um das in (9) auftretende Integral herzuleiten, kann man sich der Funktionen K und E bedienen. Es ist nämlich

$$\frac{d \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}}{d\varphi} = \frac{1 - 2\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}} + \frac{b^2}{a^2} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}^{\,3}}.$$

Setzt man im 1. Zähler rechter Hand identisch

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{b^2}\left\{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)\right\}$$

und im 2. Zähler hiermit

$$\frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi = -\sin^2\varphi\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{a^2}{b^2}\left\{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right) - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^2\right\},$$

so folgt der obige Differentialquotient gleich

$$\frac{a^2}{b^2}\left\{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi} - \frac{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}\right\} - \frac{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}^{\,3}}.$$

Hiermit erhält man durch Umkehrung und Einführung der Grenzen ohne Schwierigkeit:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}^{\,3}}\, d\varphi = \frac{\frac{a^2}{b^2}\left\{E\left(\frac{b}{a}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)K\left(\frac{b}{a}\right)\right\}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Es ist daher:

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R + h_i}\left\{1 + \frac{3\Theta}{\pi\Theta_m}\,\frac{D}{a}\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{E\left(\frac{b}{a}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)K\left(\frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right\}. \qquad (10)$$

Hierin setzen wir entsprechend der Annahme $\Theta = 1{,}8$ abgerundet:

$$\frac{3\Theta}{\pi\Theta_m} = 0{,}3. \qquad (10^*)$$

Ehe wir untersuchen, inwieweit vorstehende Formeln auf die durch einen Kontinent erzeugten Störungen anwendbar sind, entwickeln wir noch die entsprechenden Formeln für die Nähe des Randes aufserhalb.

§ 20. **Fortsetzung: Die Deformationen in der Nähe des Randes aufserhalb.** Mit Rücksicht auf Fig. 47 erhalten wir für das Potential der Anziehung des Flächenelements dq auf P_a den Ausdruck:

$$dv_a = k^2\Theta D\, d\varphi\, de \qquad (1)$$

in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen den Ausdruck (1) für dv_i. Die Integration nach e giebt

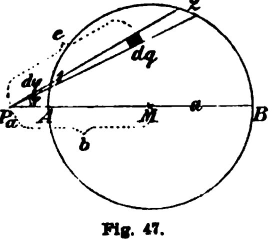


Fig. 47.

$$v_a = 2k^2 \Theta D \int_0^{\Phi} s_\varphi \, d\varphi , \tag{2}$$

wobei für Φ die Relation:

$$b \sin \Phi = a \tag{3}$$

und für s_φ die Beziehung:

$$\frac{1}{4} s_\varphi^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi \tag{4}$$

besteht. Hiermit wird

$$v_a = 4k^2 \Theta D a \int_0^{\Phi} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} \, d\varphi . \tag{5}$$

Führt man anstatt φ eine Variable ψ mit Hülfe der Gleichung

$$\sin \psi = \frac{b}{a} \sin \varphi$$

ein, so geht der Ausdruck für v_a über in

$$v_a = 4k^2 \Theta D \frac{a^2}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \psi \, d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi}} . \tag{6}$$

Derselbe läfst sich unter Beachtung der Identität

$$\cos^2 \psi = 1 - \frac{b^2}{a^2} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi \right) \right\}$$

wie folgt schreiben:

$$v_a = 4k^2 \Theta D b \left\{ E\left(\frac{a}{b}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) K\left(\frac{a}{b}\right) \right\} . \tag{6*}$$

Hierzu gehört die Erhebung der gestörten Niveaufläche gleichen Potentialwertes mit der ungestörten:

$$h_a = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{bD}{\pi R} \left\{ E\left(\frac{a}{b}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) K\left(\frac{a}{b}\right) \right\} , \tag{7}$$

d. i. für $3 \Theta D : \Theta_m = 4000^m$ gleich

$$h_a = b \frac{E\left(\frac{a}{b}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) K\left(\frac{a}{b}\right)}{5000} . \tag{7*}$$

Die Entwicklung der Formeln für die Lotstörung und den Krümmungsradius unterlassen wir, da sie wenig Interesse bieten und ohnehin in der nächsten Nähe des Randes unbrauchbar werden.

§ 21. **Fortsetzung: Die Brauchbarkeit der Formeln der letzten beiden Paragraphen mit Rücksicht auf die endliche Dicke der Kontinente.** Bei den vorhergehenden Entwicklungen wurden anstatt sphärischer Scheiben von der Dicke D ebene Flächen, mit kondensierter Masse belegt, gesetzt. In diesem Paragraphen soll untersucht werden, welchen Einfluſs die Kondensation hat. Wir sehen dabei von der Krümmung der Erde zunächst noch ab und haben also zuerst zu vergleichen das Potential der Anziehung eines Cylinders und dasjenige einer ebenen Fläche vom Querschnitt des Cylinders, belegt mit dessen kondensierter Masse.

Liegt der angezogene Punkt in der Mitte M der cylindrischen Deckfläche, so ist nach S. 142 § 2 (1)

$$v = \pi k^2 \Theta D a \left\{ \sqrt{1 + \frac{D^2}{a^2}} - \frac{D}{a} + \frac{a}{D} \log\text{nat} \left(\frac{D}{a} + \sqrt{1 + \frac{D^2}{a^2}} \right) \right\}.$$

Entwickelt man die Parenthese nach Potenzen von $D:a$ und vernachlässigt bereits die 2. Potenzen, so folgt

$$v = 2\pi k^2 \Theta D a \left(1 - \frac{D}{2a} + \ldots\right). \tag{1}$$

Dagegen ist für die Mitte einer Fläche vom Radius a nach (3*) S. 315

$$v = 2\pi k^2 \Theta D a, \tag{2}$$

indem für $b =$ null nach (4) S. 315 E offenbar in $\frac{\pi}{2}$ übergeht.

Man erkennt, daſs hiernach zunächst für die Mitte M eines Kontinents die Voraussetzung der Flächenform genügt, indem selbst für Australien mit $a = 0{,}26\,R$ der Quotient $D : 2a = 1 : 830$ als verschwindend zu betrachten ist.

Aber auch anderwärts genügt die Annahme der Flächenform. So ist offenbar am Rande der Fehler in v ungefähr nur halb so groſs wie in der Mitte; da nun v selbst nach dem Rande zu abnimmt, speziell für $b = a$ aus (3*) S. 315 sich zu $4k^2 \Theta D a$ ergiebt, so ist hier verhältnismäſsig der Fehler etwa derselbe wie in der Mitte. In runder Zahl sind somit v und h, wie sie für die Kontinente aus der Annahme der Flächenform hervorgehen, nicht über $^1/_{1000}$ des Wertes fehlerhaft.

Es ist ferner leicht einzusehen, daſs v und h wenig verändert werden, wenn die Küste anstatt steil abfallend, flach abgeböscht vorausgesetzt wird.

Aber die Lotstörungen an der Küste hängen von deren Form sehr wesentlich ab.

Betrachten wir zunächst einen cylindrischen Kontinent, so genügt zur Berechnung der Lotstörung Λ_i die Formel (7) des § 19 S. 316, so lange P_i um einige Vielfache der Dicke D, etwa um $3D$, vom Rande entfernt ist. Wir können nämlich P_i immer zum Mittelpunkt der Deckfläche eines Cylinders machen, der den Kontinent

gerade am Rande berührt; derselbe ist in Fig. 48 schraffiert. Die Horizontalanziehung dieses Cylinders ist null; ebenso auch, wenn die Masse auf die Deckfläche kondensiert wird. Einen Fehler giebt also nur die Kondensation auſserhalb liegender Massenteilchen. Z. B. wird für das in Fig. 48 angedeutete Teilchen dm bei Punkt 4 die Horizontalanziehung gleich

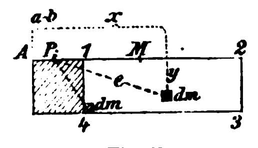


Fig. 48.

$$k^2 dm \cdot \frac{a-b}{e^3} \text{ d. i. } \frac{k^2 dm}{9D^2\sqrt{1+\frac{1}{9}}^3},$$

wenn $a - b = 3D$ angenommen wird. Die Kondensation setzt dafür

$$\frac{k^2 dm}{9D^2}$$

mit dem Fehler

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{k^2 dm}{9D^2}. \tag{3}$$

Derselbe beträgt also hier $^1/_6$ des Wertes oder $17\,^0/_0$.

Er ist aber für alle anderen Teilchen kleiner. Fassen wir alle Massenelemente ins Auge, welche von dem Rechteck 1.2.3.4, Fig. 48 und 49, und dem unendlich benachbarten 1′.2′.3′.4′, dessen Ebene durch P_i führt und mit derjenigen des erstgenannten den Winkel $d\varphi$ bildet, begrenzt werden, so ist deren Horizontalanziehung gleich dem über die Fläche 1.2.3.4 zu erstreckenden Doppelintegral

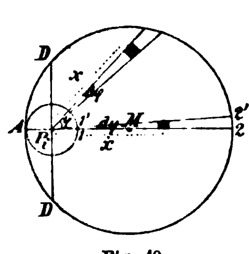


Fig. 49.

$$k^2 \Theta \, d\varphi \iint \frac{x^2 dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}^3},$$

indem mit Rücksicht auf Figur 48 $dm = \Theta x \, d\varphi \, dx \, dy$ wird. Die Integration nach y giebt hieraus

$$k^2 \Theta D \, d\varphi \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+D^2}},$$

wobei die Integration von $x = x_1$ bis x_2 zu erstrecken ist. Unter dem Integralzeichen kann man aber setzen

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+D^2}} = \frac{1}{x} - \frac{D^2}{2x^3} + \ldots$$

und hiermit geht der vorige Ausdruck über in:

$$k^2 \Theta D \, d\varphi \left\{ \log \text{nat} \frac{x_2}{x_1} - \frac{D^2}{4}\left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right) + \ldots \right\}.$$

Dagegen ergiebt sich als Horizontalanziehung nach erfolgter Kondensation der Masse:

$$k^2 \Theta D \, d\varphi \log \text{nat} \frac{x_2}{x_1};$$

der begangene Fehler ist somit im Verhältnis zur Anziehung angenähert gleich

$$\frac{1}{4}\frac{D^2}{x_1^2}\frac{1-\frac{x_1^2}{x_2^2}}{\log\operatorname{nat}\frac{x_2}{x_1}}. \tag{4}$$

Ganz denselben Ausdruck erhält man für den Fehler der in die Richtung von AP_iM fallenden Komponente der Anziehung der Masse zwischen zwei unendlich benachbarten Schnitten in irgend einem Richtungsunterschied φ gegen die durch AP_iM gelegte Ebene 1.2.3.4. Für Teile rechter Hand von der zu AP_iM normalen Linie DD, Fig. 49, ist aber der Fehler von entgegengesetztem Zeichen, wie für Teile linker Hand. Wir unterschätzen hiernach den Gesamtfehler keinesfalls, wenn wir nur die einflufsreichere rechte Seite betrachten.

x_1 ist nun zufolge unserer Annahme überall gleich $3D$; x_2 nimmt ab mit der Annäherung der Schnitte an die zu AM normale Lage. Für DMD ist x_2 am kleinsten, aber selbst für Australien noch rund $50D$; denn es ist hier $2a$ rund $830D$ und x_2 somit für Punkt D nahezu gleich $\sqrt{3D.830D}$. Daraus erkennt man ohne Schwierigkeit, dafs der Gesamtfehler in keinem Falle 1% überschreitet.

Wir dürfen daher für jeden der in § 18 S. 313 aufgeführten Kontinente die Lotstörung A_i nach der Formel (7) des § 19 S. 316 berechnen, solange P_i von der Küste des cylindrisch gedachten Kontinents um mindestens $3D$, d. i. 12 Kilometer, absteht. Bei gröfserer Annäherung an die Küste wächst der Fehler der Formel (7) rasch und wird schliefslich unendlich grofs.

§ 22. **Die Lotstörung an der Küste eines cylindrischen Kontinents.** Fig. 50 stelle die Deckfläche des Cylinders vor, für deren Randpunkt A die Lotstörung zu berechnen ist. Die Tiefe eines Massenelementes dm unter der Deckfläche sei mit y bezeichnet. Dann ist seine in Richtung AM fallende Komponente der Horizontalanziehung, wenn $dm = \Theta x\, d\varphi\, dx\, dy$ gesetzt wird, gleich:

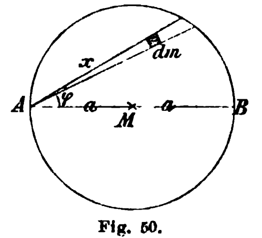


Fig. 50.

$$k^2\Theta\cos\varphi\, d\varphi\frac{x^2\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}}. \tag{1}$$

Integrieren wir zunächst nach y von null bis D, so folgt hieraus:

$$k^2\Theta D\cos\varphi\, d\varphi\frac{dx}{\sqrt{x^2+D^2}}.$$

Die weitere Integration nach x von null bis s_φ, welches letztere Symbol die Sehne von A aus in der durch φ markierten Richtung bezeichnet, giebt:

$$k^2\Theta D\cos\varphi\log\operatorname{nat}\left(\sqrt{1+\frac{s_\varphi^2}{D^2}}+\frac{s_\varphi}{D}\right)d\varphi.$$

Setzen wir hierin $s_\varphi = 2a\cos\varphi$ und integrieren endlich nach φ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so ergiebt sich die gesuchte Horizontalanziehung in Richtung AM gleich

$$2k^2\Theta D\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\log\mathrm{nat}\left(\sqrt{1+\left(\frac{2a\cos\varphi}{D}\right)^2}+\frac{2a\cos\varphi}{D}\right)d\varphi. \qquad (2)$$

Durch partielle Integration läfst sich dieses leicht auf vollständige elliptische Integrale 1. und 2. Gattung hinführen. Indessen ist es mit Rücksicht auf den grofsen Betrag von $2a:D$ vorzuziehen, die numerische Auswertung an eine wie folgt abzuleitende Näherungsformel zu knüpfen.

Wir betrachten zunächst das obige Integral zwischen den Grenzen φ gleich null und arc cos δ, und denken uns unter δ hierbei einen kleinen Bruch im Betrage $^1/_{100}$. Da nun selbst für den kleinsten der Kontinente, Australien, $2a = 830\,D$ ist, so beträgt innerhalb jener Grenzen der kleinste Wert von $2a\cos\varphi : D$ immer noch mehr als 8, sodafs man auf die Wurzel im Logarithmanden eine Reihenentwicklung anwenden kann. Dieselbe giebt:

$$\log\mathrm{nat}\left(\sqrt{1+\left(\frac{2a\cos\varphi}{D}\right)^2}+\frac{2a\cos\varphi}{D}\right)$$
$$=\log\mathrm{nat}\left\{\frac{4a\cos\varphi}{D}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{D}{2a\cos\varphi}\right)^2+\dots\right]\right\},$$

wofür man ausreichend genau

$$\log\mathrm{nat}\,\frac{4a\cos\varphi}{D}$$

nehmen kann, indem die dabei stattfindende Vernachlässigung den Logarithmus höchstens um etwa $^1/_{750}$ seines Wertes beeinflufst.

Hiernach darf man für das in (2) auftretende Integral zwischen den Grenzen φ gleich null und arc cos δ setzen:

$$\int_0^{\mathrm{arc}\cos\delta}\cos\varphi\,\log\mathrm{nat}\,\frac{4a\cos\varphi}{D}\,d\varphi\,, \qquad (3)$$

oder für $\sin\varphi = u$:

$$\int_0^{\sqrt{1-\delta^2}}\log\mathrm{nat}\,\frac{4a}{D}\sqrt{1-u^2}\,.\,du\,.$$

Zerlegt man den Logarithmus in

$$\log\mathrm{nat}\,\frac{4a}{D}+\frac{1}{2}\Big(\log\mathrm{nat}\,(1-u)+\log\mathrm{nat}\,(1+u)\Big)$$

und beachtet die Formel

$$\int_0^t \log \operatorname{nat} v\, dv = t(\log \operatorname{nat} t - 1),$$

welche sich unter Anwendung der Substitution $\log \operatorname{nat} v = z$ einwurfsfrei herleiten läfst, so folgt ohne Schwierigkeit als Wert des betrachteten Integrales (3):

$$\sqrt{1-\delta^2} \log \operatorname{nat} \frac{4a}{D} + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\delta^2}\right)\left[\log \operatorname{nat}\left(1+\sqrt{1-\delta^2}\right) - 1\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\delta^2}\right)\left[\log \operatorname{nat}\left(1-\sqrt{1-\delta^2}\right) - 1\right],$$

wofür man mit Rücksicht auf den Betrag $\delta = {}^1/_{100}$ völlig ausreichend genau setzen kann:

$$\log \operatorname{nat} \frac{4a}{D} + \log \operatorname{nat} 2 - 1,$$

oder

$$\log \operatorname{nat} \frac{8a}{D} - 1. \tag{4}$$

Hiermit geht (2), wenn man die obere Grenze $\frac{\pi}{2}$ durch $\operatorname{arc} \cos \delta$ ersetzt, über in

$$2k^2 \Theta D\left(\log \operatorname{nat} \frac{8a}{D} - 1\right). \tag{5}$$

Abgesehen von den bisher erörterten unerheblichen Fehlern ist dies zu verbessern um

$$2k^2 \Theta D \int_{\operatorname{arc}\cos\delta}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \log \operatorname{nat}\left(\sqrt{1+\left(\frac{2a\cos\varphi}{D}\right)^2} + \frac{2a\cos\varphi}{D}\right) d\varphi. \tag{6}$$

Der Wert des Logarithmus liegt innerhalb der Grenzen des Integrales zwischen

$$\log \operatorname{nat}\left(\sqrt{1+\left(\frac{2a\delta}{D}\right)^2} + \frac{2a\delta}{D}\right) \text{ und null}.$$

Der erste Grenzbetrag ist für Australien gleich 2,8 und daher in diesem Falle der Fehler (6) kleiner als

$$2k^2 \Theta D . 2{,}8\left(1-\sqrt{1-\delta^2}\right),$$

was gegen (5) verschwindet. Auch für die gröfseren Kontinente ist der Ausdruck (5) völlig ausreichend.

Die Lotstörung am Rande wird also mit Rücksicht auf den Wert $G = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ in Sekunden gleich

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R}\left(\log\text{nat}\frac{8a}{D} - 1\right).\text{*)} \tag{7}$$

Für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$ ist dies rund

$$20\left(\log\text{nat}\frac{8a}{D} - 1\right). \tag{7*}$$

§ 23. **Berücksichtigung der Böschung an der Küste.** Um die Einwirkung der Masse zu berücksichtigen, welche zu dem cylindrischen Kontinent vom Radius a und der Dicke D im Falle einer Abböschung der Küste unter dem Winkel v hinzutritt, kann man in genügender Annäherung so verfahren, daſs man den Radius des cylindrischen Kontinents, wie es die rechte Seite von Fig. 51 punktiert andeutet, vergröſsert auf

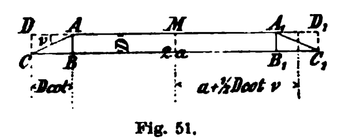


Fig. 51.

$$a' = a + \frac{1}{2} D \cot v\,. \tag{1}$$

Dieser Vorgang ist nicht ganz korrekt, aber bequem und für eine Schätzung ausreichend. Am gröſsten wird der Fehler für den Küstenpunkt A, insbesondere in der Lotstörung und entsprechend im Krümmungsradius **).

Die Lotstörung an der geböschten Küste in A berechnen wir genauer dadurch, daſs wir 2 Werte ermitteln, zwischen welchen sie ziemlich genau in der Mitte liegen muſs.

Den ersten Wert erhalten wir, indem wir die Horizontalanziehung des Cylinders ABA_1B_1 vom Radius a vermindern um den absoluten Wert der Horizontalanziehung eines unendlich langen Prismas vom Querschnitt ABC, welches jenen Cylinder in AB tangiert. Eigentlich sollte der Kreisring $(ABC - A_1B_1C_1)$ berücksichtigt werden; es wird daher der 1. Wert zu klein.

Den zweiten Wert erhalten wir, indem wir für A die Horizontalanziehung des Cylinders DCD_1C_1 vom Radius $a + D\cot v$ vermehren um den absoluten Wert der Horizontalanziehung eines unendlich langen Prismas vom Querschnitt ACD, welches jenen Cylinder in DC tangiert. Eigentlich sollte der Kreisring $(ADC - A_1D_1C_1)$ berücksichtigt werden; es wird daher der 2. Wert zu groſs.

Die Fehler in beiden Fällen halten sich sehr nahe das Gleichgewicht, weil die Anziehungen der von A entfernteren Teile beider

*) Diese Formel wurde zur Kontrolle auch mittelst elliptischer Integrale aus (2) hergeleitet.

**) Die Anlage von Böschungen an die Kontinente vermindert die mittlere Meerestiefe etwas; um wieder auf die bisher angenommene Meerestiefe zu kommen, wäre für ein Gefälle der Böschung gleich $^1/_{100}$ der Betrag von D um 4% zu vergröſsern, was wir aber im Hinblick auf andere Vernachlässigungen unterlassen.

Kreisringe ebenso wie diejenigen der entfernteren Teile beider unendlich langen Prismen nahezu gleich sind, wie aus der Gleichheit der Querschnitte und der räumlichen Lage folgt.

Nach S. 284 (5) und S. 286 (10) § 7 dieses Kapitels ist die Horizontalanziehung auf A in Richtung des Radius AM für das Prisma vom Querschnitt ABC gleich

$$-\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \log \operatorname{nat} \sin \nu \,, \tag{2}$$

für das Prisma vom Querschnitt ACD dagegen gleich

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \nu \cot \nu \,. \tag{3}$$

Der erstere Wert ist von dem Ausdruck (7) bezw. (7*) S. 324 abzuziehen, der letztere zu (7) S. 316 zu addieren, nachdem darin anstatt a der Wert $a + D \cot \nu$ eingeführt ist. Damit folgt als 1. Wert:

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \left(\log \operatorname{nat} \frac{8a \sin \nu}{D} - 1\right), \tag{4}$$

und als 2. Wert:

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \left\{2 \frac{K(\varkappa) - E(\varkappa)}{\varkappa} + \nu \cot \nu \right\} \tag{5}$$

für

$$\varkappa = \frac{a}{a + D \cot \nu} \,. \tag{6}$$

Aus den Ergebnissen (4) und (5) ist das arithmetische Mittel zu nehmen. Die beiden Werte (4) und (5) weichen übrigens von einander nicht sehr ab, am meisten für flache Böschungen und kleine a. Da nach § 21 S. 321 der 2. Wert (5) nur brauchbar ist, so lange $\cot \nu \geqq 3$ bleibt, so kann man in (5) $\nu \cot \nu = 1$ setzen.

Zu den Formeln (4) und (5) ist für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$ mit derselben Abrundung wie bei (7*) S. 318 und S. 324:

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} = 20 \,. \tag{7}$$

§ 24. **Der Einfluſs der Krümmung der Meeresfläche auf die Formeln der vorhergehenden Entwicklungen.** Wir betrachten die Kontinente jetzt wieder als Flächen, auf welchen die Massen kondensiert sind und nehmen wie früher als Masse für die Flächeneinheit ΘD. Diese kreisförmigen, die Kontinente vorstellenden Flächen denken wir uns auf einer Kugelfläche vom Radius R, dem Repräsentanten der ungestörten Erdoberfläche, aufliegend und bezeichnen den sphärischen Radius MA, Fig. 45 S. 314, mit a_s. Der Flächeninhalt eines sphärischen Kreises vom Radius a_s ist aber gleich

$$2\pi R^2\left(1 - \cos\frac{a_s}{R}\right) = 4\pi R^2 \sin^2\frac{a_s}{2R} \tag{1}$$

oder näherungsweise

$$\pi a_s^2\left(1 - \frac{a_s^2}{12R^2} + \ldots\right). \tag{1*}$$

Bisher wurden die Kontinente als ebene Flächen vom Radius a betrachtet; bezeichnen wir den letzteren jetzt mit a_e und nehmen für die ebene und sphärische Kreisfläche *gleichen Inhalt*, so muſs sein

$$a_e = 2R\sin\frac{a_s}{2R} \tag{2}$$

oder näherungsweise

$$a_e = a_s\left(1 - \frac{a^2}{24R^2} + \ldots\right). \tag{2*}$$

Erheblich ist also selbst für Europa-Asien der Unterschied der Radien a_e und a_s nicht; denn indem hier rund $a : R = 2/_3$ ist, wird er nur knapp $2^0/_0$. Wir werden daher auch weiterhin in den Endformeln keinen Unterschied zwischen a_e und a_s zu machen brauchen.

Das Potential der sphärischen Fläche auf ihren Mittelpunkt M ist nach S. 145 (2) gleich

$$2\pi k^2\Theta D . 2R\sin\frac{a_s}{2R}. \tag{3}$$

Führen wir den ebenen Radius mittelst (2) ein, so folgt

$$2\pi k^2\Theta D a_e. \tag{3*}$$

Vergleicht man dies mit (3*) S. 315, worin $E\left(\frac{b}{a}\right)$ wegen $b =$ null gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, so erkennt man, daſs der Potentialwert für die Mitte M durch die ebene Rechnung genau richtig erhalten wird.

Wir entwickeln nunmehr das Potential für einen Randpunkt A, legen aber die Entwicklung so an, daſs sie im ersten Teile auch für einen äuſseren Punkt P_a paſst.

Den Punkt P_a nehmen wir als Pol eines sphärischen Polarkoordinatensystems; z sei die sphärische Entfernung eines Flächenelementes dq, Fig. 52. Wir haben

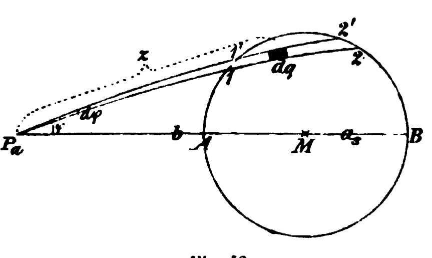


Fig. 52.

$$dq = R\sin\frac{z}{R}\,d\varphi . dz$$

und seine gerade Entfernung von P_a gleich $2R\sin\frac{z}{2R}$, mithin das Potential der auf dq lagernden Masse gleich

$$k^2\Theta D\cos\frac{z}{2R}\,d\varphi\,dz.$$

Integriert man zunächst nach z vom Punkte 1 bis Punkt 2, so folgt

$$2k^2 \Theta D R \left(\sin\frac{z_2}{2R} - \sin\frac{z_1}{2R}\right) d\varphi \tag{4}$$

als Potential des Flächenstreifens 1.1′.2.2′, Fig. 52.

Verlegen wir P_a nach A, so gilt der Ausdruck (4) noch; er geht dann über in

$$2k^2 \Theta D R \sin\frac{z_2}{2R}\, d\varphi. \tag{5}$$

Dabei ist

$$\tan\frac{z_2}{2R} = \tan\frac{a_s}{R}\cos\varphi \tag{6}$$

und hieraus mit Hilfe des bekannten Überganges von tan zu sin:

$$\sin\frac{z_2}{2R} = \frac{\sin\frac{a_s}{R}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{a_s}{R}\sin^2\varphi}}. \tag{7}$$

Als Ausdruck für das Potential in A folgt somit, da (5) von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ zu integrieren ist:

$$4k^2 \Theta D R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{a_s}{R}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{a_s}{R}\sin^2\varphi}}\, d(\sin\varphi). \tag{8}$$

Man hat aber als unbestimmtes Integral hierzu den Ausdruck $\operatorname{arc}\sin\left(\sin\frac{a_s}{R}\sin\varphi\right)$, abgesehen von einer Konstanten; somit ergiebt die Integration den gesuchten Potentialwert gleich

$$4k^2 \Theta D a_s. \tag{9}$$

Ganz dasselbe giebt (3*) S. 315, nur bedeutet dort a den ebenen Radius a_e. Indem wir mit diesem rechnen, wird der Potentialwert für den Randpunkt A im Verhältnis $a_e : a_s$ zu klein erhalten; vergl. (2*) oben. Der Fehler der ebenen Rechnung ist also für Europa-Asien knapp 2%.

Um auch den Fehler in der Lotstörung am Rande zu schätzen, bilden wir die Horizontalanziehung der in dq lagernden Masse auf den Punkt $P_a = A$ in Richtung nach M. Sie ist gleich

$$k^2 \Theta D \cos\varphi\, d\varphi \frac{\cos^2\frac{z}{2R}}{\sin\frac{z}{2R}}\, d\left(\frac{z}{2R}\right),$$

oder in Reihenentwicklung:

$$k^2 \Theta D \cos\varphi\, d\varphi \left\{\frac{dz}{z} - \frac{5}{24}\frac{z\,dz}{R^2} + \dots\right\}.$$

Fällt P_a nach A, so würde die Integration nach z unendlich geben, wenn wir von $z =$ null an integrieren wollten. Nehmen wir anstatt null einen sehr kleinen Wert z_0, so folgt

$$k^2 \Theta D \cos\varphi \, d\varphi \left\{ \log\text{nat} \frac{z_2}{z_0} - \frac{5}{48} \frac{z_2^2}{R^2} + \dots \right\} \tag{10}$$

mit Vernachlässigung von $z_0^2 : R^2$.

Eine ebene Scheibe, in welcher die Entfernungen von $P_a = A$ mit e bezeichnet werden, giebt

$$k^2 \Theta D \cos\varphi \, d\varphi \left\{ \log\text{nat} \frac{e_2}{e_0} \right\}. \tag{11}$$

Durch Subtraktion von (10) und (11) folgt:

$$k^2 \Theta D \cos\varphi \, d\varphi \left\{ \log\text{nat} \left(\frac{z_2}{e_2} \frac{e_0}{z_0} \right) - \frac{5}{48} \frac{z_2^2}{R^2} + \dots \right\}. \tag{12}$$

Hierin setzen wir $e_0 : z_0 = 1$, d. h. wir schlieſsen um $P_a = A$ in beiden Fällen kleine halbkreisförmige Elemente von der Anziehung aus, deren Anziehung auf A wegen $e_0 = z_0$ als gleichwertig betrachtet werden darf. Auſserdem haben wir als Wert von $z_2 : e_2$ im Falle $\varphi =$ null den Quotienten $a_s : a_e$, d. i. nach S. 326 (2*) angenähert

$$1 + \frac{a^2}{24 R^2}.$$

$\log\text{nat}(z_2 : e_2)$ wird demnach für $\varphi =$ null angenähert gleich $a^2 : 24 R^2$. Dieses kleine Glied vernachlässigen wir in (12) gegen $5 z_2^2 : 48 R^2$, welcher Quotient für $\varphi =$ null in $5 a^2 : 12 R^2$ übergeht.

Wir können ebenso für einen beliebigen Wert von φ den Betrag des log nat in (12) gegen das 2. Glied vernachlässigen und erhalten, $z_2 = 2a \cos\varphi$ setzend, in hinreichender Annäherung anstatt (12) den Ausdruck:

$$-\frac{5}{12} k^2 \Theta D \frac{a^2}{R^2} \cos^3\varphi \, d\varphi.$$

Beachten wir nun, daſs $\cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi$ ist, so giebt die Integration dieses Ausdrucks von $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ leicht:

$$-\frac{5}{9} k^2 \Theta D \frac{a^2}{R^2}.$$

Um die Wirkung dieses Fehlers in der ohne Rücksicht auf die Krümmung der Erde berechneten Horizontalanziehung auf den Randpunkt A in der Lotstörung zu erhalten, dividieren wir mit $G = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ und erhalten den Fehler der Lotstörung für A in Sekunden gleich

$$-\frac{5\varrho''}{18} \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \frac{a^2}{R^2}$$

d. i. nahezu

$$-\frac{5a^2}{R^2} \text{ Sekunden}. \tag{13}$$

Dieser Betrag würde als Verbesserung an der nach § 22 (7) S. 324 mit $a = a_e$ berechneten Lotstörung anzubringen sein, um den Lotstörungswert am Rande der sphärischen Scheibe vom Radius a, zu erhalten.

Für Europa-Asien ist derselbe gleich 2″, also nicht sehr erheblich. Auch kompensiert sich dieser Fehler zum Teil mit einem entgegengesetzten, der bei Anwendung der Näherungsmethode des § 23 entsteht.

Die Krümmung der Erde kann hiernach bei der Berechnung der Störungswirkungen selbst bei dem gröfsten der Kontinente aufser acht bleiben, so lange nur Punkte innerhalb, oder auch aufserhalb nahe der Küste, in betracht gezogen werden.

Bei der weiterhin folgenden numerischen Auswertung ist allerdings ein nicht mehr zu beseitigendes Versehen in der Weise begangen worden, dafs die ebenen Entfernungen a_e, für welche Erhebungen h berechnet wurden, bei der Zusammenstellung ohne Vergröfserung als sphärische betrachtet worden sind, was einer Deformation der gestörten Niveaufläche in der Nähe der Küste im Sinne einer Verschiebung nach dem Zentrum M entspricht. Es äufsert sich dieses Versehen indessen wesentlich nur bei den Kontrollrechnungen, auf welche wir weiterhin geführt werden.

§ 25. **Die störende Wirkung der Kontinente in gröfserem Abstande vom Zentrum M** kann nach der Annahme, dafs alle Masse in M konzentriert sei, hinreichend genau ermittelt werden, sobald der zu dem Abstande $P_a M$, Fig. 53, gehörende Zentriwinkel γ am Kugelmittelpunkte C mindestens nahezu 90^0 beträgt. Die Masse ist $a^2 \pi \Theta D$, die Entfernung $P_a M$ gleich $2R \sin \frac{\gamma}{2}$, folglich das Potential nach dieser Annahme gleich

$$v_a = \pi k^2 \Theta \frac{a^2 D}{2R \sin \frac{\gamma}{2}}, \tag{1}$$

M
a
a
γ
C
R
P_a
N

Fig. 53.

die zugehörige Erhebung der gestörten Niveaufläche über die ungestörte also gleich

$$h_a = \frac{3\Theta}{8\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2}}, \tag{2}$$

oder für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$

$$h_a = \frac{500 a^2}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2}}. \tag{2*}$$

Die Lotstörung, welche hierzu gehört, wird gleich

$$\underset{\text{in Sek.}}{A_a} = -\varrho'' \frac{dh_a}{R\,d\gamma} = \varrho'' \frac{3\Theta}{16\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^3 \sin\frac{\gamma}{2} \tan\frac{\gamma}{2}}, \tag{3}$$

mithin für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$

$$\underset{\text{in Sek.}}{A_a} = \frac{8a^2}{R^2 \sin\frac{\gamma}{2} \tan\frac{\gamma}{2}}. \tag{3*}$$

Diese Lotstörung ist für $\gamma \geq 90^0$ sehr gering, insbesondere für Europa-Asien bei $\gamma = 90^0$ nur 5″. Da bis $\gamma = 180^0$ dieser geringe Betrag ganz allmählich auf null sinkt, so ist auch die Störung in ϱ ganz unerheblich (selbst für Europa-Asien nur ca. 200^m) und braucht hier nicht weiter untersucht zu werden.

Um die Genauigkeit dieser Formeln, welche eben nur für

$$\gamma \geq 90^0 \tag{4}$$

Anwendung finden sollen, zu erkennen, berechnen wir v_a strenger für $\gamma = 90^0$. Aus der Entwicklung des § 24 S. 327 läſst sich der Ausdruck für v_a leicht herleiten. Wir setzen dabei identisch in (4) a. a. O.:

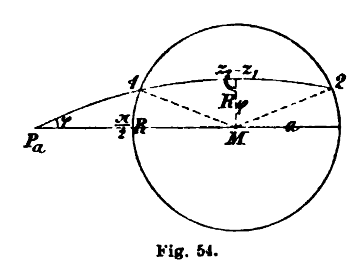


Fig. 54.

$$\sin\frac{z_2}{2R} - \sin\frac{z_1}{2R} = 2\sin\frac{z_2 - z_1}{4R}\cos\frac{z_2 + z_1}{4R}. \tag{5}$$

Wenn aber in Fig. 54 $P_a M$ gleich dem Quadranten eines gröſsten Kreises ist, so ist auch $(z_2 + z_1) : 2$ so groſs und daher

$$\cos\frac{z_2 + z_1}{4R} = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Auſserdem ist nach Fig. 54:

$$\cos\frac{z_2 - z_1}{2R} = \frac{\cos\frac{a}{R}}{\cos\varphi},$$

somit

$$\sin\frac{z_2 - z_1}{4R} = \sqrt{\frac{\cos\varphi - \cos\frac{a}{R}}{2\cos\varphi}}.$$

Hiermit erhält man aus der Gleichung (4) S. 327 durch Integration, da $R\varphi$ zwischen $-a$ und $+a$ liegt:

$$v_a = 4k^2\Theta D R \int_0^{a:R} \sqrt{\frac{\cos\varphi - \cos\frac{a}{R}}{\cos\varphi}}\, d\varphi. \tag{6}$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, setzen wir darin für $\cos\varphi$ den Ausdruck $1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ und entsprechend für $\cos\frac{a}{R}$. Wir führen zugleich eine neue Variable mittelst der Relation

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{a}{2R}\sin\psi$$

ein und erhalten

$$v_a = 8\sqrt{2}k^2\Theta DR\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\frac{a}{2R}\cos^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{a}{2R}\sin^2\psi}\sqrt{1-\sin^2\frac{a}{2R}\sin^2\psi}}. \qquad (7)$$

Die Integration läfst sich jetzt in genügender Genauigkeit durch Reihenentwicklung bewirken. Wir setzen

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{a}{2R}\sin^2\psi}\sqrt{1-\sin^2\frac{a}{2R}\sin^2\psi}} = 1 + \frac{3}{2}\sin^2\frac{a}{2R}\sin^2\psi + \ldots$$

und beachten die Relationen:

$$\cos^2\psi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\psi$$

$$\cos^2\psi\sin^2\psi = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\psi.$$

Damit wird

$$v_a = 2\sqrt{2}\pi k^2\Theta DR\sin^2\frac{a}{2R}\left(1 + \frac{3}{8}\sin^2\frac{a}{2R} + \ldots\right). \qquad (8)$$

Um dieses mit Formel (1) vergleichen zu können, müssen wir daselbst $\sin\frac{\gamma}{2} = \sin 45^0 = 1:\sqrt{2}$ setzen, aufserdem aber noch in (8) anstatt des sphärischen Radius a den ebenen einführen, welcher in (1) figuriert. Mit Rücksicht auf die Relation (2) S. 326 geht (8) über in

$$v_a = \pi k^2\Theta\frac{a^2D}{R\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3a^2}{32R^2} + \ldots\right), \qquad (8^*)$$

wenn a den ebenen Radius bezeichnet. Der Fehler der Formel (1) wird in Bruchteilen von v_a hiernach durch $3a^2:32R^2$ bezeichnet, d. i. für Europa-Asien 4%. Dieser Betrag kann als unerheblich angesehen werden.

Berechnet man v_a endlich noch für $\gamma = 180^0$, was keine Schwierigkeit bereitet, so findet man

$$v_a = 8\pi k^2\Theta DR\sin^2\frac{a}{4R},$$

worin a der sphärische Radius ist. Durch Einführung des ebenen Radius, sowie durch Reihenentwicklung folgt

$$v_a = \pi k^2 \Theta D \frac{a^2}{2R}\left(1 + \frac{a^2}{16R^2} + \ldots\right). \tag{9}$$

Die Formel (1) giebt also hier $a^2 : 16R^2$ Bruchteile von v_a zu wenig, d. i. für Europa-Asien $3^0/_0$.

§ 26. **Berücksichtigung der Schwerpunktsverschiebung.** Durch Hinzutritt eines Kontinents zu einer 4000^m hoch mit Wasser bedeckten Kugel vom Radius R entsteht eine Schwerpunktsverschiebung. Bisher wurden die Lagenänderungen einer Niveaufläche, die anfangs mit der Meeresfläche zusammenfällt, unter der Bedingung betrachtet, daſs der Potentialwert nach Hinzutritt des Kontinents derselbe bleibt und von der Verschiebung der Wassermassen, deren Oberfläche eine Gleichgewichtsfläche, d. i. Niveaufläche, bleiben muſs, abgesehen wird.

Indem wir uns die Erörterung dieses letzteren Punktes vorbehalten, beziehen wir jetzt die gestörte Niveaufläche nicht mehr auf ihre ungestörte Lage, sondern auf eine Kugel vom Radius R, deren Mittelpunkt mit der gestörten Schwerpunktslage S zusammenfällt, Fig. 55.

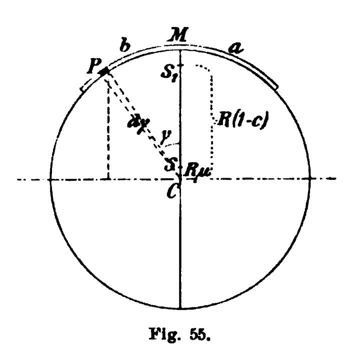


Fig. 55.

Zunächst ist die Schwerpunktsverschiebung zu ermitteln. Um dieses ausführen zu können, bestimmen wir die Lage des Schwerpunktes S_1 des Kontinentes, den wir hierbei als sphärische Kreisfläche vom Radius a auf der Kugel vom Radius R mit dem Mittelpunkt C ansehen. Dieser Schwerpunkt S_1 liegt jedenfalls auf dem zentralen Radius CM. Senkrecht zu diesem letzteren legen wir durch C eine Ebene, für welche wir die statischen Momente aufstellen. Ein zu M konzentrisches, ringförmiges Element der sphärischen Kreisfläche vom Radius $R\gamma$ und der Breite $R d\gamma$, welches in Fig. 55 bei P im Durchschnitt angedeutet ist, hat das Moment

$$2\pi R^2 \sin\gamma \, d\gamma \, . \, R \cos\gamma \, .$$

Die Integration von $\gamma =$ null bis $\frac{a}{R}$ giebt das statische Moment der ganzen Fläche gleich

$$\frac{\pi}{2} R^3 \left(1 - \cos\frac{2a}{R}\right) \text{ d. i. } \pi R^3 \sin^2\frac{a}{R} \, . \tag{1}$$

Diesem Werte muſs das Moment des in S_1 vereinten Flächeninhalts gleich sein. Bezeichnen wir die Entfernung $S_1 C$ mit $R(1-c)$, so ist das Moment mit Rücksicht auf S. 326 (1) gleich:

$$4\pi R^2 \sin^2\frac{a}{2R} \cdot R(1-c) \, . \tag{2}$$

Die Vergleichung der Ausdrücke (1) und (2) führt zu der Relation

$$1 - c = \cos^2 \frac{a}{2R} = 1 - \sin^2 \frac{a}{2R} \cdot \qquad (3)$$

Hierin ist a der sphärische Radius. Führen wir den ebenen ein, nach (2) S. 326, so folgt

$$1 - c = 1 - \frac{a^2}{4R^2}, \qquad (3^*)$$

wobei der Ausdruck rechter Hand nicht abgebrochen, sondern geschlossen ist.

Ist nun S der Schwerpunkt des gesamten Massenkomplexes, und wird SC mit $R\mu$ bezeichnet, so folgt aus der Gleichsetzung der statischen Momente bezüglich des Punktes S, wenn die Masse des Kontinentes jetzt mittelst des ebenen Radius a ermittelt wird:

$$\pi a^2 D\Theta \,.\, (1 - c - \mu) = \frac{4}{3} \pi R^3 \Theta_m \,.\, \mu\,,$$

woraus in hinreichender Annäherung mit Rücksicht auf (3*) hervorgeht:

$$R\mu = \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2} (1 - c - \mu) = \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right). \qquad (4)$$

Für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$ wird

$$R\mu = 1000 \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right). \qquad (4^*)$$

Ein Punkt P der Kugel vom Radius R konzentrisch zu C, Fig. 55, hat von S sehr nahe den radialen Abstand

$$R(1 - \mu \cos\gamma).$$

Die Verschiebung des Kugelmittelpunktes nach S erzeugt somit in den Erhebungen h_i und h_a der gestörten Niveaufläche Änderungen im Betrage von

$$-R\mu \cos\gamma\,, \qquad (5)$$

oder, wenn für $R\mu$ Ausdruck (4*) gesetzt und zugleich $b : R$ für γ geschrieben wird, Änderungen im Betrage von:

$$-1000 \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right) \cos \frac{b}{R} \cdot \qquad (5^*)$$

Die entsprechende Änderung der Lotstörung ist in Sekunden gleich:

$$\varrho'' R\mu \frac{d \cos\gamma}{R d\gamma}\,,$$

d. i.

$$-\varrho'' \mu \sin\gamma\,, \qquad (6)$$

oder mit Rücksicht auf (4*) rund

$$-30 \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right) \sin \frac{b}{R} \cdot \qquad (6^*)$$

§ 27. **Mittelwert der Erhebungen h_i für einen Kontinent.** Nach S. 315 (5) und (4) ist zunächst ohne Rücksicht auf die Schwerpunktsverschiebung die Erhebung der gestörten Niveaufläche innerhalb eines Kontinents

$$h_i = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{aD}{\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} \, d\varphi \,, \tag{1}$$

wenn b der Abstand des betreffenden Punktes vom Zentrum M ist. Indem wir nun den Kontinent als ebene, kreisförmige Fläche auffassen, wie das auch bei Entwicklung der Formel (1) geschah, haben wir die Anzahl der h_i für einen ebenen, ringförmigen Streifen vom Radius b und der Breite db proportional $b\,db$ zu setzen, und es wird daher der Mittelwert von h_i gleich

$$\int_0^a h_i b \, db \;:\; \int_0^a b \, db \,. \tag{2}$$

Es ist aber

$$\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} \,.\, b \, db \, d\varphi \,, \tag{3}$$

wenn man zuerst nach b integriert, was sehr leicht ausführbar ist, gleich

$$\frac{a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \, d\varphi \,.$$

Nun ist identisch

$$\frac{1 - \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} = \cos \varphi + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\varphi}{2} \,.$$

Mit Rücksicht hierauf läſst sich das Integral sofort bilden und man erhält für (3) den Wert:

$$\frac{2a^2}{3} \,.$$

Hiermit findet man als Durchschnittswert der h_i für den ganzen Kontinent ohne Rücksicht auf die Schwerpunktsverschiebung

$$\frac{4\Theta}{\Theta_m} \frac{aD}{\pi R} \,. \tag{4}$$

Infolge der Schwerpunktsverschiebung tritt zu diesem Ausdruck der Durchschnittswert von (5) S. 333, für den Kontinent genommen, hinzu. Betrachten wir hierbei die Erdoberfläche wie bei Entwicklung dieses letzteren Ausdruckes als gekrümmt, so erhalten wir als Mittelwert

$$-R\mu \int_0^{a:R} \cos\gamma \sin\gamma \, d\gamma \quad : \int_0^{a:R} \sin\gamma \, d\gamma \,,$$

indem, vergl. S. 332 Fig. 55, für einen ringförmigen Streifen vom Inhalt $2\pi R^2 \sin\gamma \, d\gamma$ der Ausdruck (5) konstant ist. Die Ausführung der Rechnung giebt, da der Integralquotient nach (3) S. 333 gleich $1 - c$ ist:

$$-R\mu(1-c)\,;$$

d. i. nach (4) und (3*) S. 333 gleich

$$-\frac{3\Theta}{4\Theta_m}\frac{a^2 D}{R^2}(1-c)^2 \quad \text{oder} \quad -\frac{3\Theta}{4\Theta_m}\frac{a^2 D}{R^2}\left(1-\frac{a^2}{4R^2}\right)^2. \tag{5}$$

(4) und (5) zusammen geben als Mittelwert der Erhebungen h_i für einen Kontinent mit Rücksicht auf die Schwerpunktsverschiebung:

$$\frac{4\Theta}{\Theta_m}\frac{aD}{\pi R}\left\{1-\frac{3\pi a}{16R}\left(1-\frac{a^2}{4R^2}\right)^2\right\}. \tag{6}$$

Für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$ wird dies:

$$\frac{4a}{15000}\left\{1-\frac{3\pi a}{16R}\left(1-\frac{a^2}{4R^2}\right)^2\right\}. \tag{6*}$$

Diese Formel gilt zunächst nur für einen cylindrischen Kontinent; wird zur Berücksichtigung der Böschung anstatt a der vergröſserte Radius a' nach S. 324 (1) eingeführt, so giebt (6) bezw. (6*) den Durchschnitt der Erhebungen über die Küste hinaus bis zu einer Stelle, welche vertikal über der Mitte der Abböschung liegt. Indessen kann man sich auch hier recht wohl mit diesen Formeln begnügen.

§ 28. Kleinste Erhebung der gestörten Niveaufläche. Berücksichtigt man die Schwerpunktsverschiebung, so liegt die kleinste Erhebung nicht mehr diametral gegenüber der Mitte des Kontinents in M, sondern ungefähr bei einem Winkel $\gamma = 90^0$, wie der Augenschein lehrt.

Nehmen wir an, daſs für die Stelle des Minimums die Formel (2) S. 329 noch ausreicht, so wird mit Rücksicht auf den Einfluſs der Schwerpunktsverschiebung nach (5) S. 333 in hinreichender Annäherung

$$h_a = \frac{3\Theta}{8\Theta_m}\frac{a^2 D}{R^2}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} - 2\cos\gamma\left(1-\frac{a^2}{4R^2}\right)\right\}. \tag{1}$$

Differenziert man die Parenthese nach γ und setzt den Differentialquotienten gleich null, so wird als Bedingung des Minimums erhalten:

$$\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin^2\frac{\gamma}{2}} = 2\sin\gamma\left(1-\frac{a^2}{4R^2}\right),$$

oder reduziert:

$$8\left(1-\frac{a^2}{4R^2}\right)\sin^3\frac{\gamma}{2}=1\,,\ \text{d. h. sehr nahe } \gamma=60^0\,, \tag{2}$$

mit

$$(h_a)_{min}=\frac{3\Theta}{8\Theta_m}\frac{a^2D}{R^2}\left(1+\frac{a^2}{4R^2}\right). \tag{3}$$

Wie wir später sehen werden, gilt die Formel (2) S. 329 in der That mit genügender Genauigkeit bis $\gamma=60^0$ auch noch für Europa-Asien, sodaſs der Ausdruck (3) das Minimum ziemlich korrekt giebt.

Indem wir in (3) $3\Theta D:\Theta_m=4000^m$ einsetzen, wird

$$(h_a)_{min}=500\,\frac{a^2}{R^2}\left(1+\frac{a^2}{4R^2}\right). \tag{3*}$$

§ 29. Zusammenstellung der Formeln für die Störungswirkungen eines Kontinents mit Rücksicht auf Schwerpunktsverschiebung.

Wir setzen hierbei sogleich $3\Theta D:\Theta_m=4000^m$; im einzelnen $\Theta=1{,}8$, $D=4000^m$. a ist der ebene oder sphärische Radius des Kontinents, ν sein Böschungswinkel, endlich [S. 324 (1)]

$$a'=a+2000\cot\nu\,. \tag{1}$$

Fig. 56.

Die Erhebung innerhalb von $b=$ null bis a', also bis zur Küste und noch etwas darüber hinaus bis zur Mitte der Böschung, folgt aus S. 315 (5*) und S. 333 (5*) gleich

$$h_i=a'\,\frac{E\left(\frac{b}{a'}\right)}{5000}-1000\,\frac{a'^2}{R^2}\left(1-\frac{a'^2}{4R^2}\right)\cos\gamma\,. \tag{2}$$

Auſserhalb in der Nähe der Küste, von $b=a'$ an ist die Erhebung nach S. 318 (7*):

$$h_a=b\,\frac{E\left(\frac{a'}{b}\right)-\left(1-\frac{a'^2}{b^2}\right)K\left(\frac{a'}{b}\right)}{5000}-1000\,\frac{a'^2}{R^2}\left(1-\frac{a'^2}{4R^2}\right)\cos\gamma\,, \tag{3}$$

wobei

$$\underset{\text{in Graden}}{\gamma}=\varrho^0\,\frac{b}{R}=0{,}009\,b^{km}. \tag{3*}$$

Von γ gleich 90^0 bis 180^0 ist nach S. 329 (2*)

$$h_a=500\,\frac{a'^2}{R^2\sin\frac{\gamma}{2}}-1000\,\frac{a'^2}{R^2}\left(1-\frac{a'^2}{4R^2}\right)\cos\gamma\,. \tag{4}$$

Das Intervall von der Nähe der Küste bis $\gamma=90^0$ füllen wir bei der folgenden numerischen Anwendung dadurch aus, daſs wir (3) bis

$\gamma = 90^0$ und (4) bis zur Küste anwenden und sodann mit Benutzung graphischer Darstellung aller h verbesserte Werte aufsuchen.

Die gröfste Erhebung innerhalb findet statt in der Mitte M des Kontinents und beträgt nach (2) mit $b = 0$:

$$(h_i)_{max} = \frac{a'\pi}{10000} - 1000\frac{a'^2}{R^2}\left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right); \tag{5}$$

die gröfste Erhebung aufserhalb liegt diametral gegenüber M und beträgt nach (4) mit $\gamma = 180^0$:

$$(h_a)_{max} = 500\frac{a'^2}{R^2} + 1000\frac{a'^2}{R^2}\left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right). \tag{5*}$$

Die kleinste Erhebung liegt nach dem vorhergehenden Paragraphen nahe bei $\gamma = 60^0$ und beträgt angenähert

$$500\frac{a'^2}{R^2}\left(1 + \frac{a'^2}{4R^2}\right). \tag{6}$$

Die mittlere Erhebung eines Kontinents ist nach S. 335 (6*) gleich

$$\frac{4a'}{15000}\left\{1 - \frac{3\pi a'}{16R}\left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right)^2\right\}. \tag{7}$$

Den Mittelwert aller h für die ganze Oberfläche leiten wir ausreichend genau aus einer Tafel der h ab, welche h für γ von 10 zu 10^0 giebt, indem wir bilden

$$\Sigma h \sin\gamma \quad : \quad \Sigma \sin\gamma. \tag{8}$$

Dies ist ein Näherungsausdruck, entsprechend dem strengen Ausdruck

$$\int_0^\pi h \sin\gamma\, d\gamma \quad : \quad \int_0^\pi \sin\gamma\, d\gamma.$$

Er genügt aber völlig, und es ist nicht erforderlich, strengere Formeln der mechanischen Quadratur anzuwenden*).

Der Mittelwert (8) läfst sich aber noch auf eine ganz andere Art berechnen. Schon im 2. Kap. S. 66 ist angegeben, dafs der Mittelwert des Potentiales v für alle Punkte einer die betreffenden Massen umschliefsenden, zum Schwerpunkt konzentrischen Kugelfläche gleich

*) Die beiden Summen in (8) entsprechen der einfachsten Formel der mechanischen Quadratur, welche für

$$\int y\,dx$$

setzt

$$\Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right).$$

Im vorliegenden Falle sind y_0 und y_n gleich null.

Über die *Simpson*sche Regel vergl. weiterhin § 32.

k^2. Masse : Radius ist. Jetzt handelt es sich allerdings um das Potential v von Massen, die auf der betreffenden Kugelfläche selbst liegen und deren Schwerpunkt nicht in den Kugelmittelpunkt fällt. Jedoch gilt der Satz auch hier, wie sowohl aus der Theorie der Kugelfunktionen folgt, als auch leicht direkt zu beweisen ist. Denn das Potential der Anziehung eines Massenelementes dm auf einen Punkt derselben Kugelfläche im Abstande e ist $k^2 dm : e$, oder für $e = 2R \sin\frac{\gamma}{2}$ gleich

$$\frac{k^2\,dm}{2R\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Die Anzahl dieser Werte für denselben Abstand e, d. h. denselben Wert γ auf einem Ringe von der Breite $R\,d\gamma$, ist proportional $2\pi \sin\gamma\, d\gamma$ und daher der Mittelwert aller v gleich

$$\frac{\pi k^2 dm}{R}\int_0^\pi \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} \;:\; 2\pi\int_0^\pi \sin\gamma\, d\gamma\,, \quad \text{d. i.} \quad \frac{k^2 dm}{R}.$$

Der Satz gilt also für das Massenelement dm und ebenso auch für die ganze Masse.

Da nun h der Quotient $v : G$ ist, abgesehen von dem Einfluſs der Schwerpunktsverschiebung, der sich im Mittel für die Oberfläche aufhebt, so muſs der Mittelwert von h gleich sein der gesamten störenden Masse mal $(k^2 : RG)$, d. i.

$$\frac{3\Theta a'^2 D}{4\Theta_m R^2},$$

also für $3\Theta D : \Theta_m = 4000$ gleich

$$1000\,\frac{a'^2}{R^2}. \tag{8*}$$

Die Vergleichung mit (8) gewährt eine Kontrolle. Auf eine andere Probe kommen wir am Schlusse des § 34 zu sprechen.

Zieht man den Mittelwert (8) von den Werten h ab, so erhält man Höhen h' einer Parallelfläche zu der bisher betrachteten Niveaufläche, die mit gleicher Annäherung wie diese eine Niveaufläche ist. Die Fläche der h' und die Kugelfläche konzentrisch zum Schwerpunkt S verhalten sich zu einander wie Niveaufläche und zugehöriges Niveausphäroid (Normalsphäroid); insbesondere entsprechen die h' den N des 3. Kapitels. Die Summe der h' für die ganze Oberfläche ist ebenso wie diejenige der N gleich null.

Wir werden weiterhin die erwähnte Kugelfläche bezüglich der Niveaufläche der h' das *normale Niveau* nennen.

Die Lotstörung im Sinne einer Anziehung des aufgehängten Lotes nach der Mitte des Kontinents M hin folgt nach S. 316 (7*) und S. 333 (6*) innerhalb des Kontinents bis zur Küste, also für $b =$ null bis a, aus der Formel:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Lambda_i} = 40\,\frac{a'}{b}\left\{K\left(\frac{b}{a'}\right) - E\left(\frac{b}{a'}\right)\right\} - 30\,\frac{a'^2 b}{R^3}\left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right). \tag{9}$$

Der Wert des 1. Gliedes von Λ_i ist an der Küste mit $b = a$ nach S. 325 (4) bis (6) unter Voraussetzung flacher Böschungen genauer gleich

$$10\left\{\log\text{nat}\,\frac{a\sin\nu}{500} + 2\,\frac{K(\varkappa) - E(\varkappa)}{\varkappa}\right\} \tag{10}$$

mit

$$\varkappa = \frac{a}{a + 4000\cot\nu}. \tag{10*}$$

Ist der Abfall an der Küste so steil, daſs $\cot\nu < 6$, so wird die Formel (9) für die Küste unbrauchbar, weil alsdann der Abstand der Küste vom Rande der Scheibe mit dem Radius a' kleiner als $3D$ ist (§ 21 S. 319). Formel (10) versagt aber erst für $\cot\nu < 3$. Bei vertikalem Abfall der Küste ist (7*) S. 324 zu benutzen.

Für $\gamma \geqq 90^0$ ist die Lotstörung nach S. 330 (3*) und S. 333 (6*)

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Lambda_a} = \frac{8a'^2}{R^2\sin\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\gamma}{2}} - 30\,\frac{a'^2}{R^2}\left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right)\sin\gamma\,. \tag{11}$$

Diese Lotstörung hat insofern wenig Interesse, als nur ihr 1. Teil den Krümmungsradius beeinfluſst, was bei dem 2., von der Schwerpunktsverschiebung erzeugten, nicht der Fall ist. Der 1. Teil ist aber der kleinere und sein Einfluſs auf ϱ nur höchstens ein paar hundert Meter (S. 330).

Für den Krümmungsradius hat man nach (10) S. 317 innerhalb des Kontinents die Relation

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R'}\left\{1 + \frac{1200}{a'}\,\frac{a'^2}{b^2}\,\frac{E\left(\frac{b}{a'}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{a'^2}\right)K\left(\frac{b}{a'}\right)}{1 - \frac{b^2}{a'^2}}\right\}. \tag{12}$$

Hierin ist für R', um ϱ_i auf diejenige Niveaufläche zu beziehen, deren Lage durch die Erhebungen h' gegen die zum gestörten Schwerpunkt konzentrische Kugelfläche R markiert ist, gleich zu setzen:

$R +$ dem 1. Teil von h_i aus (2) — dem Mittelwert (8).

Die Formel (12) giebt eine Annäherung für $1 : \varrho_i$ innerhalb derselben Grenzen wie (9).

§ 30. **Numerische Auswertung der elliptischen Integrale** ***K* und *E*.** Zur Berechnung der Werte der Integrale

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

und

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$\varkappa^2 \leqq 1$$

giebt es verschiedene Methoden, die hauptsächlich von *Legendre, Gauſs, Jacobi* und *Weierstraſs* herrühren. Die bequemsten Formeln bietet die Theorie der elliptischen Funktionen, aus welcher wir die nachstehenden Formeln auswählten, die sich für uns beim Gebrauche am vorteilhaftesten herausstellten.*)

Bezeichnet q eine gewisse, von *Jacobi* eingeführte, von $\varkappa$ abhängige Hilfsgröſse, so ist

$$K = \frac{\pi}{2} \cdot \left\{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots\right\}^2, \tag{1}$$

mit

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \dots, \quad \log \frac{\pi}{2} = 0{,}19612 \dots;$$

$$E - (1 - \varkappa^2) K = \frac{2\pi^2}{K} \cdot \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots} \tag{2}$$

mit

$$2\pi^2 = 19{,}7392 \dots, \quad \log (2\pi^2) = 1{,}29533 \dots.$$

Hieraus folgt E bei bereits berechnetem K. Zur gleichzeitigen Kontrolle für q, E und K dient die Gleichung

$$K - E = \frac{2\pi^2}{K} \cdot \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}. \tag{3}$$

Bei der Berechnung der h, A und ϱ werden auſser E die durch (2) und (3) direkt gelieferten Kombinationen von E und K gebraucht.

Zur Ermittelung von q aus $\varkappa$ dienen Tabellen. Wir benutzten diejenige, welche *Schlömilch* im 2. Bande seines Kompendiums der höheren Analysis nach *Jacobi*, *Crelles Journal* Bd. 26 1843 S. 93, im Auszug, aber mit der Erweiterung giebt, daſs auch $\varkappa$ selbst als Argument auftritt (bei *Jacobi* nur ϱ^0 arc sin $\varkappa$).

---

*) *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen.* Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. *K. Weierstraſs* bearbeitet und herausgegeben von *H. A. Schwarz*. Göttingen 1881/82.

Bei direkter Berechnung von q ermittelt man zunächst

$$l = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - \varkappa^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - \varkappa^2}}. \tag{4}$$

Setzt man $\varkappa = \sin\alpha$ und $\cos\beta = \sqrt{\cos\alpha}$, so ist $l = \tan^2 \frac{\beta}{2}$. Dann wird

$$q = \left(\frac{l}{2}\right) + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \dots \tag{5}$$

Ist $\varkappa$ nahezu eins, so berechnet man besser zunächst

$$l' = \frac{1 - \sqrt{\varkappa}}{1 + \sqrt{\varkappa}}, \tag{6}$$

oder für $\cos\beta' = \sqrt{\varkappa}$, $l' = \tan^2 \frac{\beta'}{2}$ und

$$q' = \left(\frac{l'}{2}\right) + 2\left(\frac{l'}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l'}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l'}{2}\right)^{13} + \dots \tag{7}$$

Alsdann folgt q aus der Gleichung:

$$(-\log q)(-\log q') = \pi^2 Mod^2 = \text{num} \log 0{,}26986836\,. \tag{8}$$

Alle Reihen konvergieren so stark, dafs meist nur das erste Glied oder die beiden ersten Glieder für unsere Zwecke erforderlich sind.

Die Formel (1) findet sich bei *Weierstrafs-Schwarz* S. 61 unter (7); (2) und (3) auf S. 44 unter (15) und (16); (4) und (5) auf S. 61 unter (3); (8) folgt aus S. 61 (2) Nr. 2 und 3. Dabei ist zu beachten, dafs q daselbst mit h bezeichnet ist. Die in den Gröfseu auftretenden drei Wurzeln e einer kubischen Gleichung, in der der Koefficient des Quadrats der Unbekannten null ist, sind definiert durch das System

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \qquad \varkappa^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Die 2. Relation sagt, dafs $e_1 > e_2 > e_3$ ist, da $\varkappa^2 \leqq 1$. Schreibt man sie in der Form

$$\varkappa^2 e_1 - e_2 + (1 - \varkappa^2)\, e_3 = 0,$$

so giebt sie mit der 1. Relation die Proportion

$$e_1 : e_2 : e_3 = 2 - \varkappa^2 : -(1 - 2\varkappa^2) : -(1 + \varkappa^2).$$

Mit Hilfe dieser Proportion gelangt man ohne Schwierigkeit zu unseren Formeln, wenn man noch beachtet, dafs nach S. 61 (1) das in den citierten Formeln auftretende ω_1 und ϖ gleich $K : \sqrt{e_1 - e_3}$, nach S. 34 (2)

$$\eta_1 = \tilde{\eta} = \sqrt{e_1 - e_3}\left\{E - \frac{e_1}{e_1 - e_3} K\right\}$$

und nach S. 61 $\mu = 2$, $\nu = 3$ ist.

Für einige Werte von $\varkappa$, die im Folgenden besonders häufig gebraucht werden, stellen wir K, E u. s. w. zusammen:

$\varkappa$	$\log q + 10$	q	K	E	$E-(1-\varkappa^2)K$	$\frac{K-E}{\varkappa}$	$\frac{E-(1-\varkappa^2)K}{\varkappa^2(1-\varkappa^2)}$
0,0	$-\infty$	0,0000	1,571	1,571	0,000	0,00	0,79
0,1	6,80	0,0006	1,575	1,567	0,008	0,08	0,80
0,2	7,40	0,0025	1,587	1,555	0,032	0,16	0,82
0,3	7,77	0,0059	1,608	1,534	0,071	0,25	0,86
0,4	8,037	0,0109	1,640	1,506	0,128	0,34	0,95
0,5	8,255	0,0180	1,686	1,468	0,203	0,44	1,08
0,6	8,445	0,0279	1,751	1,418	0,297	0,56	1,29
0,7	8,623	0,0420	1,846	1,355	0,414	0,70	1,66
0,8	8,803	0,0635	1,995	1,276	0,558	0,90	2,42
0,9	9,0101	0,1023	2,280	1,171	0,738	1,23	4,80
1,0	10,0000	1,0000	∞	1,000	1,000	∞	∞

In Bezug auf die ersten und letzten Werte der Kolumnen ist eine Bemerkung nötig. Für $\varkappa =$ null ist nach (4) und (5) auch q null; damit wird nach (1) $K = \frac{\pi}{2}$ und nach (3) $E = K$. Ist $\varkappa$ sehr klein, so ist nach (4) und (5) sehr nahe $q = \varkappa^2 : 16$, und zwar um so genauer, je kleiner $\varkappa$. Hiermit und im Hinblick auf (3) und (4) ist ersichtlich, daſs für $\varkappa =$ null $(K - E) : \varkappa$ gleich null und $[E - (1 - \varkappa^2)K] : \varkappa^2(1 - \varkappa^2) = \frac{\pi}{4}$ wird.

Ist $\varkappa = 1$, so wird nach (7) und (8) $q = 1$ und nach (1) K unendlich groſs. Den Wert von E kann man in diesem Falle aus (2) und (3) nicht entnehmen; er folgt aber leicht aus dem definierenden Integral zu 1.

Ist $\varkappa$ sehr nahe gleich 1, so ist sehr nahe

$$K = \log\text{nat} \frac{4}{\sqrt{1 - \varkappa^2}}, \qquad E = 1$$

und zwar für $\varkappa = 0{,}9999$ ersteres bis auf $^1/_{25000}$, letzteres bis auf $^1/_{2000}$ des betreffenden Integralwertes.*) Hieraus erkennt man, daſs $(1 - \varkappa^2)K$ für $\varkappa = 1$ gleich null wird, womit sich die angegebenen Werte der drittletzten und letzten Kolumne obiger Tafel für $\varkappa = 1$ sofort ergeben.

---

*) Genaueres siehe in *Schlömilchs Kompendium der höheren Analysis* Bd. 2, Braunschweig 1866, S. 316 und 317.

§ 31. **Störungen durch Europa-Asien.** Wir behandeln speziell den gröfsten und den kleinsten Kontinent; jenen zuerst. Nach S. 313 ist dafür

$$a = 0{,}66\,R = 4\,200\,000^m. \tag{1}$$

Setzen wir für den Böschungswinkel ν der Küste

$$\cot\nu = 100, \tag{2}$$

so ergiebt sich nach (1) S. 336:

$$a' = 4\,400\,000^m = 4400^{km}. \tag{3}$$

Nach (2) S. 336 sowie nach (9) und (12) S. 339 ist nun, wenn K und E auf $\varkappa = b : a'$ bezogen gedacht werden:

$$\underset{\text{in Metern}}{h_i} = 880\ E - 420\ \cos\gamma \tag{4}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta_i} = 40\ \frac{K - E}{\varkappa} - 9\varkappa \tag{5}$$

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R}\left\{1 + 0{,}000273\ \frac{E - (1 - \varkappa^2)K}{\varkappa^2(1 - \varkappa^2)}\right\}. \tag{6}$$

Wir setzen hierin der Reihe nach und mit Rücksicht auf (3*) S. 336:

$\varkappa = \frac{b}{a'}$	γ
0	0^0
0,1	3,96
0,2	7,92
0,3	11,88
0,4	15,84
0,5	19,80
0,6	23,76
0,7	27,72
0,8	31,68
0,9	35,64
$^{42}/_{44}$	37,80

Dazu giebt die Tabelle von S. 342 K und E, ausgenommen für $\varkappa = 42:44$, wofür K und E direkt zu berechnen sind. Dieser Wert von $\varkappa$ entspricht einem Küstenpunkte, indem für die Küste $b = a = 4200000^m$ ist. Die Formeln geben mit $\varkappa = 42 : 44$ der Reihe nach $q = 0{,}14700$, $K = 2{,}6340$, $E = 1{,}0956$ und $E - (1 - \varkappa^2)\,K = 0{,}8615$.

Man gelangt nun zu folgender Zusammenstellung:

Zentrums-abstand b	Er-hebung h_i	Er-hebung h_i'	Lot-störung Δ_i	$R' : \varrho_i$	$R' - \varrho_i$	$R - \varrho_i$	Küsten-abstand.
Zentrum	962^m	504^m	0″	1,00022	1400^m	500^m	4200^{km}
440^{km}	960	502	2	1,00022	1400	500	3760
880	952	494	5	1,00022	1400	500	3320
1320	939	481	7	1,00023	1500	600	2880
1760	921	463	10	1,00026	1700	800	2440
2200	896	438	13	1,00030	1900	1100	2000
2640	863	405	17	1,00035	2200	1400	1560
3080	821	363	22	1,00045	2900	2200	1120
3520	765	307	29	1,00066	4200	3500	680
3960	689	231	41	1,00131	8300	7700	240
4200	632	174	55	1,00291	18500	18000	An der Küste.

Die 3. Rubrik giebt h_i', gleich h_i weniger dem Mittelwert aller h für die ganze Oberfläche, welcher weiterhin zu 458^m berechnet wird.

Bezüglich der 7. Rubrik ist zu bemerken, daſs inmitten des Kontinents $R' = R + 1382^m - 458^m$, an der Küste $R' = R + 964^m - 458^m$ wird. $R - \varrho$ ist also um 900 bis 500^m kleiner als $R' - \varrho$, was die 7. Rubrik für die einzelnen Orte genau berücksichtigt.

Die Lotstörung an der Küste folgt aus der strengeren Formel (10) S. 339, wobei $\varkappa = 42 : 46$, $q = 0{,}11030$, $K = 2{,}3414$ und $K - E = 1{,}1862$ wird, gleich

$$70 - 8 = 62''.$$

Nach S. 328 (13) gehen wegen der Krümmung der Erdoberfläche, die in (10) S. 339 nicht berücksichtigt ist, 2″ ab, sodaſs als Lotablenkung an der Küste bleiben

$$60''.$$

Wenn man nun bedenkt, daſs in der Regel der Abfall der Küste anfangs ein sanfter ist (etwa 1 : 250 bis zu 50^{km} Abstand) und erst in einiger Entfernung vom Lande rascher erfolgt (etwa mit 1 : 100), so wird ersichtlich, daſs der in der Tabelle angesetzte Wert von 55″ an der Küste den Verhältnissen ganz gut entspricht.

Einige Sekunden mehr oder weniger sind aber überhaupt an der Küste ganz bedeutungslos, insofern hier die Lotstörung in hohem Grade von dem Böschungsmaſs abhängt. Für letzteres nahmen wir 1 : 100, weil es ein Wert ist, dem man nach Ausweis der Tiefen-

karten in *Andrees* Atlas — abgesehen von der Beschränkung auf Europa-Asien — vielfach begegnet, so namentlich u. a. an den Küsten des atlantischen Oceans von Amerika, Afrika, Spanien. Vielfach ist die Böschung aber steiler, namentlich an der pacifischen Küste von Nord- und Südamerika, woselbst sie auf rund 1 : 40 steigt, und östlich von Japan und den Kurilen, wo der Abfall nach der 8500^m tiefen Tuscarora-Senkung mit 1 : 36 erfolgt. Indessen wird hier die Wirkung gemildert durch die Meere, welche die Inseln vom Festlande trennen. An der amerikanischen Küste kommt aber die volle Wirkung zur Geltung bis auf die Abschwächung, welche auch hier durch das in der Nähe des Landes geringere Abfallen entsteht.

Wir berechnen jetzt noch für das Böschungsmafs 1 : 40 die an der Küste stattfindenden Werte im Hinblick darauf, dafs dieses Mafs den steilsten Abfall bezeichnet, der in gröfserem Umfange an Festlandsküsten auftritt. Wir denken uns dabei für eine Küstenstrecke die steilere Böschung durch die im allgemeinen stattfindende sanftere in der Weise unterbrochen, dafs a' unverändert bleibt, also der Abstand der Küste vom Zentrum um die absolut genommene Änderung von $\frac{1}{2} D \cot v$ wächst, vergl. Fig. 57. In den obigen Formeln für h_i, $\varDelta_i$ und $1 : \varrho_i$ ist nun zu setzen

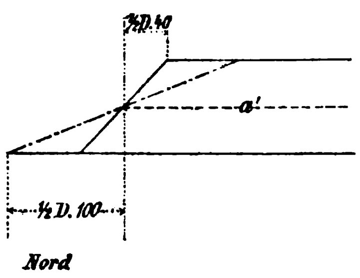


Fig. 57.

$$x = \frac{b}{a'} = \frac{a' - \frac{1}{2} D.40}{a'} = 1 - {}^1/_{55} ,$$

$$b = 4320^{km} \qquad \gamma = 38{,}88^0.$$

Es wird $q = 0{,}19712$, $K = 3{,}0668$, $E = 1{,}0466$ und $E - (1 - x^2) K = 0{,}9359$; ferner

$$h_i = 594^m \qquad \varDelta_i = 73'' \qquad R : \varrho_i = 1{,}00736 .$$

Nach der strengeren Formel (10) S. 339 würde sich $\varDelta_i$ um 5″ gröfser ergeben, wovon aber 2″ wegen der Erdkrümmung abgehen.

Der Wert von rund

$$1^1/_4 \text{ Minute}$$

kann für Europa-Asien als *Maximum der Lotstörung kontinentalen Charakters* angesehen werden. Durch Kombination mit lokalen Einflüssen kann allerdings die Lotstörung sich noch erheblich steigern. Immerhin aber dürften diese lokal gesteigerten Werte von demjenigen

Betrage weit entfernt bleiben, der sich an einer vertikal abfallenden Küste ergiebt.*)

Für die vertikale Küste ist bei Festhaltung des Wertes von a' die Lotstörung aus Formel (7*) S. 324 zu entnehmen, wobei a' für a zu setzen ist. Es wird dieselbe mit Abzug von 9″ wegen der Schwerpunktsverschiebung gleich 154″ oder rund

$$2^1/_2 \text{ Minute.}$$

Während wir bisher nur die gröſsten Lotstörungen im Auge hatten, so ist nun darauf hinzuweisen, daſs vielfach selbst die in der Tabelle angesetzten 55″ nicht eintreten werden, weil der Abfall der Küste überhaupt gering oder bis zu erheblichem Abstande vom Lande sehr schwach ist. Dies gilt unter andern für die atlantische Küste von Frankreich, England und Norwegen. Insbesondere ist auch zu beachten, daſs die mittlere Tiefe der Nordsee nur 89^m beträgt.

§ 32. **Fortsetzung.** Den erheblichen Lotstörungen in der Nähe der Küste entspricht im Verlaufe der Erhebungen h eine Art Schwelle. Um dieselbe zur Anschauung zu bringen, muſs man für die Nähe der Küste noch einige Werte h_a berechnen, wobei die Formel (3) S. 336 zur Anwendung gelangt. Die Schwelle wird am besten aus

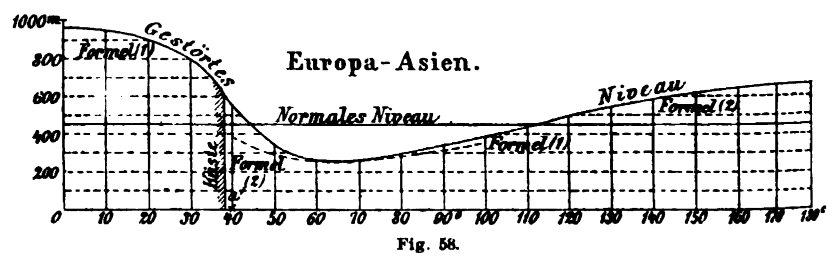


Fig. 58.

beistehender Zeichnung, Fig. 58, die überhaupt alle h von $\gamma = 0$ bis 180° darstellt, γ als Abscisse und h als Ordinate giebt, ersichtlich.

Zur Konstruktion dienten auſser den Werten h_i der Tabelle von S. 344 eine Reihe von Werten h_a, die für solche Argumente $a' : b = \varkappa$ nach Formel (3) S. 336 ermittelt wurden, daſs die S. 342 angegebenen Werte von $E - (1 - \varkappa^2) K$ benutzt werden konnten. Die Formel (3) lautet jetzt:

$$h_a = b \, \frac{E - (1 - \varkappa^2) K}{5000} - 420 \cos \gamma \, . \tag{1}$$

Sie wurde bis $b = 11000^{km}$ angewandt**). Den Fehler der Formel bei diesem groſsen Werte von b zeigt die Formel (4) S. 336, welche jetzt mit $a' = 4400^{km}$ lautet:

*) *Ph. Fischer*, *Gestalt der Erde* S. 92, findet für die Kontinentalküsten abgesehen von lokalen Störungen als maximale Lotablenkung etwa 1½ Min.

**) Die in Fig. 58 mit „Formel (1)“ bezeichnete Kurve ist innerhalb des Kontinents selbstverständlich mit den früher angegebenen Werten von h_i konstruiert.

$$h_a = 239 \csc \frac{\gamma}{2} - 420 \cos \gamma \,, \tag{2}$$

und die für $\gamma = 90^0$ nach § 25 S. 331 $4^0/_0$, d. i. 14^m, zu wenig giebt.

Diese Formel wurde aufser auf mehrere Werte von γ zwischen 90^0 und 180^0 auch auf einige kleinere Werte von γ bis an die Küste angewandt, um ihre mit Annäherung an dieselbe wachsende Fehlerhaftigkeit zu erkennen. Da die Formel (1) für $b = 11000^{km}$ etwa 45^m Fehler zeigt, wurde sie nur bis $b = 7200^{km}$ beibehalten, an welcher Stelle sie mit (2) gleiche Werte giebt; von hier an aber wurde für wachsende b Formel (2) angewandt. Die Zahlen sind folgende:

b	γ	h_a nach (1)	h_a nach (2)
4400^{km}	$39{,}6^0$	558^m	383^m
4890	44,0	420	.
5500	49,5	341	296
6290	56,6	289	.
7333	66,0	264	267
8800	79,2	279	296
11000	99	348	379
13330	120	.	486
14440	130	.	533
15560	140	.	576
16670	150	.	611
17780	160	.	637
18890	170	.	653
20000	180	.	659

Mit Hilfe der graphischen Darstellung folgt nachstehende Übersicht der h für γ von 10 zu 10^0:

γ	h	$\sin \gamma$	h	γ	$h \sin \gamma$
0^0	962^m	0,000	659^m	180^0	0^m
10	946	0,174	653	170	278
20	894	0,342	637	160	524
30	796	0,500	611	150	704
40	542	0,643	576	140	719
50	338	0,766	533	130	666
60	278	0,866	486	120	662
70	270	0,940	442	110	669
80	296	0,985	392	100	678
90	340	1,000			340

$$\Sigma \sin \gamma = 11{,}432 ; \quad \Sigma h \sin \gamma = 5240 .$$

Der Durchschnittswert der h ist hiermit nach S. 337 (8) gleich

$$458^m.$$

Die *Simpson*sche Regel giebt bezw. die Zahlen 11,461, 5265 und 459. Der Unterschied ist also ganz unerheblich.*)

Der Durchschnittswert der h folgt andererseits aus S. 338 (8*) gleich

$$479^m,$$

der vorige Wert ist somit um 20^m zu klein. Dies kann nicht befremden, da überhaupt alle Werte h, ausgenommen für $\gamma = 0^0$, zu klein sind, vergl. § 24 S. 327 und § 25 S. 331. Bei 40^0 ist der Fehler ca. 20^m, bei 90^0 14^m, bei 180^0 6^m. Dazu tritt nach § 24 S. 329 noch für $\gamma = 0^0$ bis 60^0 eine Verkleinerung der Abscissen um ca. $2^0/_0$, was insbesondere bei $\gamma = 30^0$ bis 50^0 Fehler von durchschnittlich 18^m erzeugt.

Die mittlere Erhebung innerhalb des Kontinents Europa-Asien wird nach Formel (7) S. 337 mit $a' = 4400000^m$ gleich 802^m; nach Abzug von 458 aber für die Niveaufläche der h':

$$344^m.$$

Die kleinste Erhebung ist nach S. 337 (6) gleich 267^m, die graphische Darstellung giebt dasselbe; hieraus folgt die tiefste Senkung der Niveaufläche der h' unter das normale Niveau gleich rund

$$190^m.$$

Zieht man überhaupt 458 von den h ab, so gelangt man zu der Übersicht der Erhebungen h' über das normale Niveau, welche weiterhin mit den Werten für die anderen Kontinente zusammengestellt ist.

§ 33. Störungen durch Australien.

Nach S. 313 ist hier

$$a = 0{,}26\,R = 1\,660\,000^m. \tag{1}$$

Setzen wir wieder für den Böschungswinkel v an der Küste

$$\cot v = 100\,, \tag{2}$$

so ergiebt sich nach (1) S. 336

$$a' = 1860000^m = 1860^{km}. \tag{3}$$

---

*) Die *Simpson*sche Regel setzt für

$$\int y\,dx$$

die Summe

$$\frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n);$$

die Anzahl der im Intervall Δx berechneten y mufs also eine ungerade sein. Wenn oben als Ergebnisse der *Simpson*schen Regel 11,461 und 5265 genannt sind, so ist dabei der Faktor Δx weggelassen.

Nach (2) S. 336 sowie nach (9) und (12) S. 339 ist nun, wenn K und E auf $\varkappa = \frac{b}{a'}$ bezogen werden:

$$\underset{\text{in Metern}}{h_i} = 372\, E - 83{,}5 \cos\gamma \tag{4}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\Delta_i} = 40\, \frac{K - E}{\varkappa} - 0{,}8\, \varkappa \tag{5}$$

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R'} \left\{ 1 + 0{,}000645\, \frac{E - (1 - \varkappa^2)\, K}{\varkappa^2 (1 - \varkappa^2) \cdot} \right\}. \tag{6}$$

Wir setzen hierin der Reihe nach und mit Rücksicht auf (3*) S. 336:

$\varkappa = \frac{b}{a'}$	γ
0	0
0,1	1° 40′
0,2	3 21
0,3	5 1
0,4	6 42

$\varkappa = \frac{b}{a'}$	γ
0,5	8° 22′
0,6	10 3
0,7	11 43
0,8	13 24
$^{166}/_{186}$	14 56

K und E folgen aus der Tabelle S. 342 teils direkt, teils durch Interpolation. Es ergiebt sich damit nachstehende Übersicht:

Zentrumsabstand b	Erhebung h_i	Erhebung h_i'	Lotstörung Δ_i	$R' : \varrho_i$	$R' - \varrho_i$	$R - \varrho_i$	Abstand von der Küste.
Zentrum	501^m	417^m	0″	1,00051	3200^m	2700^m	1660^{km}
186^{km}	499	415	3	1,00052	3300	2800	1474
372	495	411	6	1,00053	3400	2900	1288
558	488	404	10	1,00056	3600	3100	1102
744	477	393	13	1,00061	3900	3400	916
930	464	380	17	1,00070	4500	4000	730
1116	445	361	22	1,00083	5300	4800	544
1302	422	338	27	1,00107	6800	6300	358
1488	393	309	35	1,00156	9900	9500	172
1660	358	274	47	1,00289	18400	18000	An der Küste.

Die 3. Rubrik giebt $h_i' = h_i$ weniger dem Mittel aller h für die ganze Oberfläche, welches weiterhin zu 84^m berechnet wird.

Die Lotstörung an der Küste folgt aus der strengeren Formel (10) S. 339 mit $\varkappa = 166 : 206$, für welchen Wert $(K - E) : \varkappa$ aus der Tabelle S. 342 interpoliert werden kann, gleich

$$53{,}4 - 0{,}7 = 52''.$$

Da die australische Küste meist sehr flach ist, entspricht der Tabellenwert von 47″ den thatsächlichen Verhältnissen genügend. Doch kommt im Südosten auch eine sehr steile Böschung vor.

Setzen wir mit Rücksicht hierauf $\cot \nu = 40$ und behalten den Wert von a' wie oben bei, so wird in diesem Falle für die Küste

$$b = 1780^{km} \qquad \gamma = 16{,}02^0$$

$$\varkappa = \frac{b}{a'} = \frac{178}{186},$$

$$q = 0{,}15007, \quad K = 2{,}659, \quad E = 1{,}091 \text{ und } E - (1 - \varkappa^2) K = 0{,}868,$$

$$h_i = 326^m, \qquad A_i = 65'', \qquad R : \varrho_i = 1{,}0072.$$

Die strengere Rechnung nach Formel (10) S. 339 giebt hier 71″.

Für vertikalen Abfall folgt mit Beibehaltung von a' nach S. 324 (7*) als Lotstörung an der Küste 144″, also rund

$2^1/_2$ Minute.

Um eine Übersicht der h zu gewinnen, wurde nachstehende Tabelle aufgestellt, S. 351, zu deren Berechnung teils obige Zusammenstellung teils die Formeln (3) und (4) S. 336 dienten, welche hier lauten:

$$h_a = b\,\frac{E - (1 - \varkappa^2) K}{5000} - 83{,}5 \cos \gamma \tag{7}$$

mit

$$\varkappa = \frac{a'}{b}$$

und

$$h_a = 42{,}7 \csc \frac{\gamma}{2} - 83{,}5 \cos \gamma\,. \tag{8}$$

Definitiv angenommen wurden die Werte von h_a nach Formel (7) bis $\gamma = 40^0$, von da ab diejenigen nach Formel (8).

Der Durchschnittswert der h folgt nach S. 337 (8) gleich 83,5 oder abgerundet

84^m;

die *Simpson*sche Regel giebt dasselbe, Formel (8*) S. 338 85^m. Ziehen wir ersteren Wert von den h ab, so erhalten wir die Höhen h' in Bezug auf das normale Niveau. Diese Höhen h' zeigt die weiterhin folgende Übersicht.

Der kleinste Wert h_a folgt nach S. 337 (6) gleich 44^m, übereinstimmend mit nebenstehender Tabelle; nach Berücksichtigung der 84^m ergiebt sich hieraus die gröſste Senkung der Niveaufläche der h' unter das normale Niveau gleich

40^m.

Die mittlere Erhebung innerhalb des Kontinents Australien wird nach Formel (7) S. 337 gleich 425^m, nach Abzug von 84^m für die Niveaufläche der h' gleich

341^m.

b	γ	h nach (4) bezw. (7)	h nach (8)
0	0°	501 m	.
1110 km	10	445	.
2220	20	195	.
3330	30	97	93 m
4440	40	60	60
5560	50	45	47
6670	60	40	44
7780	70	.	46
8890	80	.	52
10000	90	56	60
11110	100	.	70
12220	110	.	81
13330	120	.	91
14440	130	.	101
15560	140	.	110
16670	150	.	116
17780	160	.	122
18890	170	.	125
20000	180	.	126

§ 34. Störungen durch Afrika, Nord- und Süd-Amerika; Übersicht der Höhenstörungen. Für diese drei Kontinente wurden nur die Höhenstörungen nach folgenden, aus § 29 S. 336 hervorgehenden Formeln berechnet, wobei gesetzt wurde mit Rücksicht auf die Werte der Radien a nach S. 313 und mit $\cot \nu = 100$ für

Afrika:	$a' = 3260000^m$,
Nord-Amerika:	$= 2940000$,
Süd-Amerika:	$= 2560000$.

Die Formeln geben sofort die Erhebung h' gegen das normale Niveau, indem der nach S. 337 (8) berechnete Mittelwert der h denselben subtraktiv beigefügt wurde. Sie lauten für

Afrika: $h_i' = 652\,E - 245 \cos\gamma - 256$

$h_a' = b\,\frac{E-(1-\varkappa^2)K}{5000}$ „ „ bis $\gamma = 50^0$

$h_a' = 131 \csc\frac{\gamma}{2}$ „ „ von $\gamma = 60^0$ an,

Nord-Amerika: $h_i' = 588\,E - 202 \cos\gamma - 208$

$h_a' = b\,\frac{E-(1-\varkappa^2)K}{5000}$ „ „ bis $\gamma = 50^0$

$h_a' = 106{,}5 \csc\frac{\gamma}{2}$ „ „ von $\gamma = 60^0$ an,

Süd-Amerika: $h_i' = \quad 512\,E \quad - 155 \cos\gamma - 159$

$h_a' = b\,\frac{E-(1-\varkappa^2)K}{5000}$ „ „ bis $\gamma = 40^0$

$h_a' = \quad 81 \csc\frac{\gamma}{2}$ „ „ von $\gamma = 50^0$ an.

In h_i' bezieht sich E immer auf $\varkappa = b : a'$, in h_a' auf $\varkappa = a' : b$. Der Mittelwert der h, welcher bezw. zu 256, 208 und 159 berechnet ist, folgt aus S. 338 (8*) bezw. zu 262, 213 und 162.

Die tiefste Senkung der Niveaufläche der h' unter das normale Niveau wird nach S. 337 (6) gleich

116^m für Afrika
96 „ Nord-Amerika
75 „ Süd-Amerika.

Alles übrige zeigt die nebenstehende Tabelle.

Zu derselben ist nur noch bezüglich der letzten, mit Kontrolle bezeichneten Zeile zu bemerken, dafs die darin enthaltenen Zahlen aus der Berechnung von

$$\frac{3}{4}\int_0^\pi h' \sin 2\gamma\, d\gamma$$

nach der *Simpson*schen Regel hervorgegangen sind. Diese Zahlen geben den Abstand des Volumenschwerpunktes des von der gestörten Niveaufläche eingeschlossenen Raumes vom gestörten Massenschwerpunkt. Denn das statische Moment dieses Raumes in Bezug auf eine durch letzteren Punkt normal zu dem, nach dem Mittelpunkt des betreffenden Kontinents gezogenen Radius gelegte Ebene ist gleich

$$2\pi R^3 \int h' \sin\gamma \cos\gamma\, d\gamma,$$

das statische Moment des im Volumenschwerpunkt vereinigten Volumens aber sehr nahe

$$\frac{4}{3}\pi R^3 x,$$

wenn x den Schwerpunktsabstand bezeichnet. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke führt zu obigem Resultat.

Nach S. 258 mufs dieser Abstand null sein oder dürfte nur ein paar Meter betragen, da im vorliegenden Falle die dort erörterte Bedingung für das Zusammenfallen beider Schwerpunkte noch besser wie bei der Erde erfüllt ist. Die berechneten Werte der letzten Horizontalreihe der Tabelle rühren daher wesentlich von den Fehlern in den Ausdrücken für h' her, auf die schon früher — für Europa-Asien S. 348 — aufmerksam gemacht wurde.

Höhenstörungen h′ der Niveauflächen gegen das normale Niveau durch die Kontinentalmassen.

γ	Europa-Asien.	Afrika.	Nord-Amerika.	Süd-Amerika.	Australien.
0°	+ 504m	+ 523m	+ 514m	+ 490m	+ 417m
10	+ 488	+ 496	+ 483	+ 453	+ 361
20	+ 436	+ 405	+ 375	+ 315	+ 111
30	+ 338	+ 150	+ 87	+ 46	+ 13
40	+ 84	− 35	− 37	− 34	− 24
50	− 120	− 99	− 83	− 67	− 37
60	− 180	− 116	− 96	− 74	− 40
70	− 188	− 111	− 91	− 70	− 38
80	− 162	− 95	− 77	− 60	− 32
90	− 118	− 70	− 57	− 44	− 24
100	− 66	− 42	− 34	− 26	− 14
110	− 16	− 14	− 7	− 7	− 3
120	+ 28	+ 18	+ 16	+ 12	+ 7
130	+ 75	+ 46	+ 39	+ 30	+ 17
140	+ 118	+ 71	+ 60	+ 45	+ 26
150	+ 153	+ 92	+ 77	+ 58	+ 32
160	+ 179	+ 107	+ 90	+ 69	+ 38
170	+ 195	+ 117	+ 98	+ 75	+ 41
180	+ 201	+ 120	+ 101	+ 77	+ 42
Zentrum des Kontinents: Geogr. Breite	+ 48°	+ 7,5°	+ 51°	− 13°	− 25°
Östl. Länge von Ferro	95	37,5	280,5	318	152
Radius a	38°	27,5°	24,5°	21,5°	15°
Mittlere Erhebung innerhalb des Kontinents	344m	384m	384m	375m	341m
Kontrolle	− 14m	− 10m	− 8m	− 4m	− 1m

Nach *Hann*, *Gaea* 1876 Bd. 12 S. 79, hat *Saigey* 1842 in der Schrift *Petite Physique du Globe* für kreisförmige Kontinentalscheiben berechnet die Höhenstörungen der Niveauflächen im Zentrum und an der Küste, sowie für innerhalb im Durchschnitt; jedoch sind die Dicken der Scheiben nur den Erhebungen übers Meer proportional angesetzt.

Bruns berechnet 1878 in seiner *Figur der Erde* S. 22 bis 24 die Höhenstörungen, welche ein Kugelzweieck von der ungefähren Gröſse Amerikas, das von Pol zu Pol geht, auf dem Äquator erzeugt. Er geht von einer homogenen Kugel ohne Wasserschicht aus, läſst die östliche Halbkugel

ungeändert und bringt auf der westlichen positive und negative Beläge, entsprechend dem übers Meer hervorragenden Festland und dem Wasser, an. Diese Annahme ist nicht wesentlich von der unsrigen verschieden; es war für uns nur bequemer, das Meer nicht durch einen Belag zu ersetzen. Dagegen vermögen wir nicht einzusehen, dafs für den Äquator die östliche Halbkugel wenig Einflufs habe, da sich thatsächlich hier ein der Wirklichkeit entsprechender, positiver und negativer Belag gar nicht balancieren. Die Lotstörungen ermittelt *Bruns* nur beiläufig aus den Höhenstörungen, also an den Küsten etwas zu klein.

§ 35. **Zusammenwirkung der Störungen der 5 Kontinente.** Die Störungen h', welche jeder Kontinent einzeln giebt, setzen sich zur gesamten Störungswirkung der fünf Kontinente einfach durch algebraische Addition zusammen. Als Normalniveau tritt dabei eine zum Gesamtschwerpunkt konzentrische Kugelfläche vom Radius R auf.

Denken wir uns nämlich fünf Kontinente auf der ursprünglich vorhandenen Kugel angenommen, so setzt sich für irgend einen Punkt der Oberfläche der Zuwachs des Potentials offenbar aus den Potentialen v zusammen, die nach der früheren Rechnung jeder Kontinent einzeln giebt. Was aber für die v gilt, gilt auch für die ersten Teile h_1 der Störungen h, welche ja gleich $v : G$ sind.

Aufserdem entsteht nun eine Schwerpunktsverschiebung X und infolge derselben vermindert sich h um $X \cos \Gamma$, wenn Γ der Winkel ist, welchen die Richtung der Schwerpunktsverschiebung mit der Richtung vom Zentrum nach dem betreffenden Oberflächenpunkte P einschliefst. Jedem Kontinent einzeln möge eine Schwerpunktsverschiebung x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, mit einem Winkel γ_i bezüglich der Richtung nach P entsprechen. Dann ist aber in hinreichender Annäherung

$$X \cos \Gamma = x_1 \cos \gamma_1 + x_2 \cos \gamma_2 + \dots + x_5 \cos \gamma_5 ,$$

wie man sofort erkennt, wenn man sich die Kontinente successive zur Kugel hinzugesetzt denkt und den hierbei von den Schwerpunktsverschiebungen $x_1, x_2, \dots x_5$ gebildeten Linienzug betrachtet. Die Gleichung zeigt, dafs die Einflüsse der Schwerpunktsverschiebungen, also die zweiten Teile der h, bezüglich der einzelnen Kontinente sich bei der Gesamtwirkung ebenfalls algebraisch addieren.

Schliefslich ist es offenbar auch gestattet, von allen h-Werten eine Konstante h_m abzuziehen, indem dies der Konstruktion einer Parallelfläche entspricht, die (falls nur die Konstante nicht gar zu grofs ist) ebenso genau eine gestörte Niveaufläche vorstellt, wie die durch die h gegebene. Ob diese Konstante auf einmal oder in fünf Teilen angebracht wird, ist für den Effekt gleichgültig; das successive Vorgehen führt aber ganz von selbst zu einem solchen Wert der Konstanten, dafs bei der Gesamtwirkung der Kontinente die Summe der h' für die ganze Oberfläche gleich null wird.

Behufs Ausführung der Addition der h' wurden die in Bezug auf den Meridian von Ferro östliche und westliche Halbkugel in stereographischer Projektion, mit Gradnetz von 10 zu 10^0, benutzt. Die in der Tabelle S. 353 aufgeführten Mittelpunkte der Kontinente wurden eingezeichnet und um jeden herum Kreise von 10 zu 10^0 Zuwachs in γ aufgesucht. Dieses ist sehr leicht, da die Projektionen solcher Kreise wieder Kreise sind, deren Mittelpunkte alle auf einer Geraden liegen. Die Hilfskreise erhielten für jeden Kontinent eine andere Farbe, in welcher nun auch die Höhenzahlen h' angeschrieben wurden. (Die endgültige Zeichnung, Tafel I, enthält diese Kreise nicht mehr.)

Um nun Kurven gleicher Summen der h' zu erhalten, wurden Profile der entsprechenden Niveaufläche, insbesondere entlang der Parallelkreise, abgeleitet. Im letzteren Falle z. B. wurde der Parallelkreis auf Millimeterquadratpapier ausgestreckt und in seinen Schnittpunkten mit den Hilfskreisen eines ersten Kontinents die zugehörigen h' aufgetragen, deren Endpunkte aber durch eine Kurve verbunden. Auf diese letztere wurden die h' eines zweiten Kontinents aufgetragen u. s. f. Die letzten Kurven wurden durch Parallelen zur Abscissenaxe in 100^m Äquidistanz geschnitten, die Schnittpunkte aber auf die Parallelkreise zurückgetragen. Das Resultat zeigt Tafel I.

Die Kurven gleichen h'-Wertes geben auch ein, wenngleich rohes Mittel, um die Lotstörung und die Abweichung des reziproken Krümmungsradius ϱ von $\frac{1}{R}$ zu taxieren. Man kann sich dabei u. a. des graphischen Verfahrens bedienen, indem man für irgend ein Profil die h' als Ordinaten normal zu einer geradlinigen Abscissenaxe aufträgt, die Profilkurve zeichnet und über denselben Abscissen zunächst eine zweite Kurve konstruiert, deren Ordinaten den trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel der ersten Kurve gegen die Abscissenaxe proportional sind. Diese Ordinaten repräsentieren in irgend einem Mafsstab die Lotstörungen. Indem man ferner auf dieselbe Art aus der zweiten Kurve eine dritte Kurve herleitet, erhält man Ordinaten proportional $\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right)$, d. h. proportional den Störungen in $1 : \varrho$.

Übrigens lehrt schon der Augenschein, dafs die Zusammenwirkung der Kontinente die für die Einzelkontinente gefundenen Zahlen für Lotablenkung und Krümmungsstörung im ganzen nicht bedeutend ändert, aber eher mildert als verschärft.

Wir müssen im Anschlufs an Tafel I noch darauf hinweisen, dafs die bisherigen Annahmen über die Dicke der Kontinentalplatten nicht ausreichen, um einen Zustand auf der physischen Erdoberfläche herbeizuführen, welcher dem wirklichen ähnelt. Mit den bisherigen Annahmen nämlich würden die Kontinente einfach überschwemmt.

Um dieses einzusehen, beachten wir zunächst, daſs die Niveaufläche der h' von der ursprünglichen Meeresfläche (der Kugelfläche vom Radius R konzentrisch zu C, Fig. 56 S. 336) an irgend einer Stelle um $h' + X \cos \Gamma$ absteht, wobei h' für dieselbe aus Tafel I zu entnehmen ist, während für die Bestimmung von $X \cos \Gamma$ auf den nächstfolgenden Paragraphen, insbesondere die Angaben (8) verwiesen werden muſs. Die Niveaufläche der h' liegt hiernach in Europa-Asien und Afrika um 600 bis 700^m über der ursprünglichen Meeresfläche, in Amerika 200 bis 300^m, in Australien etwa 50^m über derselben. Die Niveaufläche der h' hat nun zwar gleiches Volumen mit der ursprünglichen Meeresfläche; da aber die Niveaufläche der h' an den Kontinenten emporsteigt, so schneiden diese aus dem Volumen derselben mehr aus, als aus dem der ursprünglichen Niveaufläche. Um den Mehrbetrag muſs sich die gestörte Meeresfläche über die Niveaufläche der h' erheben. Mit Rücksicht auf das Flächenverhältnis für Meer und Land findet sich als Hebung des Meeresspiegels über die Niveaufläche der h' rund 200^m.

Im Durchschnitt für die sämtlichen Kontinente liegt innerhalb derselben die gestörte Meeresfläche um $500 + 200 = 700^m$ über der ursprünglichen Meeresfläche. Da wir aber als mittlere Höhe der Kontinente bezüglich letzterer Fläche 440^m angesetzt haben, so würden die Kontinente überschwemmt werden. Dies verhindern wir, wenn wir letztere Zahl durch 1440^m ersetzen; damit kommen 1000^m Dicke vom spezifischen Gewicht 2,8 oder 1560^m von der Dichtigkeit 1,8 zu den bisher für die Kontinentalplatten angenommenen 4000^m von der Dichtigkeit 1,8. Da nun, abgesehen von den Böschungen der Kontinente, die Wirkungen der Dicke proportional sind, müssen alle bisher erhaltenen Zahlen im Verhältnis 4000 : 5560, d. h. um 0,4 ihres Betrages, vergröſsert werden. Insbesondere gehen die 700^m Höhenstörung der Meeresfläche innerhalb der Kontinente in rund 1000^m über, sodaſs nunmehr die Kontinente sich über die gestörte Meeresfläche gerade 440^m erheben.

Man kann noch die Frage aufwerfen, ob die Verschiebung der Wassermassen nicht auch die Resultate wesentlich ändert. Dazu ist sie indessen zu gering; denn die Meeresfläche liegt im gestörten Zustande im allgemeinen kaum $\pm 100^m$ von der ursprünglichen Lage entfernt, wie die Berechnung von $h' + X \cos \Gamma$ zeigt. Die gröſste Senkung von rund 200^m tritt östlich von Neuseeland ein, die gröſste Hebung im nördlichen Eismeer, woselbst sie an der asiatischen Küste auf rund 800^m anwächst. Im allgemeinen sammelt sich das Wasser an den Küsten und die Wirkung ist eine kleine Verstärkung der hier berechneten Störungsbeträge, die aber in erster Annäherung vernachlässigt werden kann.

Die Zahlen der Tafel I sind nach dem Vorhergehenden um 0,4 ihres Betrages nach den neuen Annahmen über die Kontinental-

massen zu vergröfsern. Die gröfste Amplitude der h' geht damit von rund 900 in rund 1300^m über. Ohne indessen weiter auf die Einzelheiten der von Tafel I dargestellten Höhenstörungen h' einzugehen, wenden wir uns vielmehr sogleich zu der Frage, ob es überhaupt zulässig ist, die Störungen der Meeresfläche aus den Kontinentalmassen zu folgern. Um dieses zu entscheiden, müssen wir die entsprechenden Störungen der Schwerkraft berechnen und mit den Erfahrungen vergleichen. (Die Multiplikation mit 0,4 können wir hierbei vorerst weglassen und uns zunächst auf Tafel I beziehen.)

§ 36. **Die Schwerestörungen.** Bei der Berechnung der Schwerestörungen können wir uns sogleich alle Kontinente auf der Kugel vom Radius R mit dem Mittelpunkt C, Fig. 56 S. 336, angebracht denken. Als Begrenzung aller Massen nehmen wir die durch die h' gegebene gestörte Niveaufläche, dergestalt, dafs etwa aufserhalb liegende Massen auf dieselbe kondensiert gedacht werden und der Wert g der Schwerebeschleunigung für Punkte der Niveaufläche so berechnet wird, als läge alle Masse innerhalb.

Die ursprüngliche Schwerebeschleunigung auf der Kugelfläche vom Radius R konzentrisch zu C sei mit G bezeichnet, dann ist sie, insoweit die Kugelmasse in betracht kommt, im Abstande h'' aufserhalb in hinreichender Annäherung gleich

$$G\left(1-\frac{2h''}{R}\right). \tag{1}$$

Dies gilt auch, wenn h'' negativ ist, weil wir die aufserhalb der gestörten Niveaufläche liegenden Massen auf diese kondensiert denken.

Zu (1) tritt nun die Anziehung der störenden Massen, welche im wesentlichen als auf einer Kugelfläche vom Radius R liegend anzusehen sind. Nach S. 147 § 4 (8) können wir daher den Anteil der Schwerebeschleunigung aus diesen Massen hinreichend genau gleichsetzen

$$\frac{v}{2R}+2\pi k^2\vartheta, \tag{2}$$

wenn v ihr Potential und ϑ die Masse für die Flächeneinheit unterhalb des betreffenden Punktes bezeichnet. v ist aber gleich $h_1 G$, unter h_1 den ersten Teil von h, d. h. h ohne Schwerpunktsverschiebung, verstanden, sodafs mit Bezug auf die Werte h' nach dem vorigen Paragraphen

$$h_1=h'+h_m+X\cos\Gamma \tag{3}$$

wird, worin h' der Gesamtwirkung der Kontinente nach Tafel I entspricht, also gleich ist der Summe der h' für die einzelnen Kontinente, worin ferner h_m die Summe der Mittelwerte der h für die einzelnen Kontinente bezeichnet und X die Gesamtschwerpunktsverschiebung vorstellt, welche mit dem Radiusvektor nach dem betreffenden Punkte den Winkel Γ einschliefst.

Die gestörte Schwerebeschleunigung in einem Punkte der gestörten Niveaufläche der h' ist hiermit, insofern für dieselbe $h'' = h_1 - h_m$ wird, gleich

$$g = G\left(1 - \frac{2(h_1 - h_m)}{R} + \frac{h_1}{2R} + \frac{3\vartheta}{2\Theta_m R}\right). \tag{4}$$

In diesen Ausdruck führen wir den Mittelwert der Beschleunigungen für die ganze Niveaufläche ein. Der Mittelwert von h_1 ist gleich h_m. Ferner ist der Mittelwert von $3\vartheta : \Theta_m$, wenn nur ein Kontinent vorhanden ist, für die ganze Niveaufläche gleich

$$\frac{3a'^2\pi\Theta D}{4\pi R^2\Theta_m},$$

d. i. für $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$ gleich

$$1000\,\frac{a'^2}{R^2},$$

also nach S. 338 (8*) gleich dem Werte h_m für diesen Kontinent. Dasselbe findet sich bei Anwesenheit mehrerer Kontinente, wenn h_m alsdann auf ihre Gesamtwirkung bezogen wird. Hiermit ergiebt sich der Mittelwert von (4) gleich

$$G' = G\left(1 + \frac{h_m}{R}\right). \tag{5}$$

Verbindet man dies mit (4), so wird

$$g = G'\left\{1 + \frac{1}{R}\left[-\frac{3}{2}h_1 + h_m + \frac{3\vartheta}{2\Theta_m}\right]\right\}. \tag{6}$$

Hierzu ist h_1 direkt durch Summierung der von den einzelnen Kontinenten erzeugten h_1 zu bilden, oder aus Formel (3) abzuleiten. Bei Anwendung dieser Formel ist für h' der durch die Tafel I gegebene Wert einzuführen und für h_m der Wert

$$h_m = 458 + 256 + 208 + 159 + 84 = 1165^m. \tag{7}$$

Der Betrag X und die Richtung der Schwerpunktsverschiebung, markiert durch die geographische Breite B und die Länge L, ist noch zu ermitteln. Ist x die Schwerpunktsverschiebung infolge des einzelnen Kontinents und zwar in einer durch die geographische Breite b und Länge l markierten Richtung, setzen wir ferner

$$x\cos b\cos l = \xi$$
$$x\cos b\sin l = \eta$$
$$x\sin b = \zeta,$$

wobei ξ, η, ζ offenbar Projektionen von x auf drei zu einander rechtwinkelige Richtungen sind, so wird

$$X\cos B\cos L = \Sigma\xi$$
$$X\cos B\sin L = \Sigma\eta$$
$$X\sin B = \Sigma\zeta.$$

Nach S. 343, 349 und 351 bis 353 hat man folgende Werte von x, b und l:

	Eur.-Asien	Afrika	Nord-Amer.	Süd-Amer.	Austr.
x	420^m	245^m	202^m	155^m	84^m
b	$+48^0$	$+7{,}5^0$	$+51^0$	-13^0	-25^0
l	95^0	$37{,}5^0$	$280{,}5^0$	318^0	152^0.

Hiermit fand sich (unter Anwendung eines Rechenschiebers):

$$\begin{aligned} X\cos B\cos L &= 235 \qquad & X &= 546^m \\ X\cos B\sin L &= 237 & B &= 52^0 \\ X\sin B &= 435 & L &= 45^0 \text{ östl. Ferro.} \end{aligned} \tag{8}$$

Γ wird man am bequemsten einem Globus entnehmen, in welchem der zu B und L gehörende Punkt eingetragen ist.

Was ϑ anbetrifft, welches im letzten Gliede von (6) auftritt, so hat man über Kontinenten

$$\frac{3\,\vartheta}{2\,\Theta_m} = \frac{3\,\Theta D}{2\,\Theta_m} = 2000^m, \tag{9}$$

dagegen über dem Meere gleich null, abgesehen von der Küstenzone über der Abböschung der Kontinente, wo dieser Quotient von 2000 bis null variiert.

Es sei hier noch bemerkt, dafs $g - G'$ als Schwerestörung im Sinne des dritten Kapitels aufgefafst werden kann. Bereits S. 338 und 354 wurde darauf hingewiesen, dafs die zum Gesamtschwerpunkt S konzentrische Kugelfläche vom Radius R für die Niveaufläche h' als Normalniveau erscheint, sich also zu ihr verhält, wie im zweiten Kapitel eine Niveaufläche zu ihrem Normalsphäroid. Insbesondere kann man im Anschlufs an § 44 S. 259 die Niveaufläche h' als die Fläche $W = W_0$ und die Kugelfläche um S als die Fläche $U = W_0$ auffassen; denn der letzteren entspricht das erste Glied der Entwicklung von W nach Kugelfunktionen, nämlich das Glied $k^2.\mathit{Masse}:R$. Zu dieser Fläche gehört die normale Schwere G', genau nach Mafsgabe von (5), wie man sich leicht überzeugt, indem man die Anziehung der Gesamtmasse in der Entfernung R ermittelt.

§ 37. Fortsetzung: Numerische Werte.

Wenden wir die Formeln des vorigen Paragraphen zunächst auf einen einzelnen Kontinent, insbesondere Europa-Asien an, so erhalten wir nach § 31 S. 343 u. ff.

$$h_m = 458^m \qquad x = 420^m$$

und hiermit aus den S. 353 gegebenen Werten von h' die h_1 nachstehender Tabelle:

γ	h_1	$\Delta g \,.\, R : G'$	$\Delta g : G'$
			Millionteł
0°	1382^m	+ 385^m	+ 61
10	1359	+ 419	+ 66
20	1287	+ 527	+ 83
30	1159	+ 719	+ 113
40	864	— 38	— 6
50	607	— 453	— 71
60	487	— 273	— 43
70	413	— 162	— 25
80	369	— 96	— 15
90	340	— 52	— 8
100	319	— 21	— 3
110	299	+ 9	+ 1
120	277	+ 42	+ 7
130	264	+ 62	+ 10
140	254	+ 77	+ 12
150	248	+ 86	+ 14
160	244	+ 92	+ 14
170	240	+ 98	+ 15
180	239	+ 99	+ 16

Die Werte der vorletzten Kolumne haben die Bedeutung

$$\frac{g - G'}{G'} R.$$

und sind mit Rücksicht auf (6) des vorigen Paragraphen nach der Formel

$$\frac{\Delta g}{G'} R = -\frac{3}{2} h_1 + h_m + \frac{3\vartheta}{2\Theta_m} \tag{1}$$

berechnet. Die letzte Kolumne giebt $\Delta g : G'$ in Millionteln oder sehr nahe Mikrons in der Länge des Sekundenpendels.

Um die Werte $\Delta g \,.\, R : G'$ zu erhalten, wurde bei $\gamma = 0^0$, 10^0, 20^0 und 30^0 für $3\vartheta : 2\Theta_m$ der Wert nach (9) des vorigen Paragraphen gesetzt. Dagegen ergab sich für $\gamma = 40^0$ dieser Quotient zu 800 mit Rücksicht darauf, dafs von 4200^{km} Zentrumsabstand bis zu 4600^{km} dieser Quotient von 2000 stetig auf null sinkt und dafs zu $\gamma = 40^0$ ein Zentrumsabstand von 4440^{km} gehört.

Die Werte wurden einer Kontrolle durch Einführung in die Formel (2) S. 255 unterworfen. Versteht man darin unter ψ und $\Delta g : G$ bezw. γ und $(g - G') : G'$, so mufs der Wert von N das h' im Zentrum des Kontinents werden. Um die Integration zu bewerkstelligen, konnte wegen der zwischen 30 und 40° stattfindenden raschen Änderung von Δg nicht ohne weiteres nach *Simpsons* Regel

vorgegangen werden, es wurden vielmehr die drei Teile von $\frac{\Delta g}{G'} R$, aus welchen sich dasselbe nach Maßgabe von (1) zusammensetzt, einzeln behandelt. Zunächst wurden also die Produkte $h_1 . F$ von 10 zu 10^0 gebildet und nach *Simpsons* Regel integriert Der hieraus folgende Anteil von N ist

$$-\frac{3757}{5,730}.$$

Der Einfluß des konstanten h_m verschwindet bei der Integration. Das Glied $3\vartheta : 2\Theta_m$ beträgt, wenn man anstatt der abgeböschten Küste eine steilabfallende setzt, (die eigentliche Voraussetzung der Rechnung) von 0 bis 4400^{km} Zentrumsabstand konstant 2000^m. Mit Rücksicht darauf, daß 1^0 in γ gleich 111^{km} ist, wurde F von 1100 zu 1100^{km} berechnet und sodann die Integration der F nach *Simpsons* Regel bewirkt. Hiermit folgt als weiterer Anteil in N

$$+\frac{6380}{5,730}.$$

Mit dem vorigen vereinigt erhält man im Zentrum für N, d. i. h', anstatt 504^m nur

$$458^m.$$

Die Differenz beruht wesentlich darauf, daß gerade von 50^0 bis 80^0 in den h' und also auch in den h_1 starke negative Fehler stecken, auf die schon früher hingewiesen worden ist. Bei der entsprechenden Rechnung für den Punkt, welcher dem Zentrum des Kontinents Europa-Asien diametral gegenüber liegt, haben diese Fehler weniger Einfluß; in der That fand sich hier anstatt 201^m der nicht sehr abweichende Wert 215^m.

Ebenso zeigte sich bei Afrika und Australien, wofür die Rechnung auch ausgeführt wurde, eine bessere Übereinstimmung, da hier die Fehler kleiner sind. Für diese Kontinente fand sich zunächst:

γ	Afrika			Australien		
	h_1	$\Delta g . R : G'$	$\Delta g : G'$ Milliontel	h_1	$\Delta g . R : G'$	$\Delta g : G'$ Milliontel
0^0	1024^m	$+ 720^m$	+ 113	584^m	$+ 1208^m$	+ 190
10	993	+ 796	+ 124	528	+ 1296	+ 203
20	891	+ 919	+ 144	273	— 326	— 51
30	618	— 21	— 3	170	— 171	— 27
40	408	— 356	— 56	124	— 102	— 16
50	314	— 215	— 34	101	— 68	— 11
60	262	— 137	— 22	85	— 44	— 7

γ	Afrika			Australien		
	h_1	$\Delta g \,.\, R : G'$	$\Delta g : G'$	h_1	$\Delta g \,.\, R : G'$	$\Delta g : G'$
			Milliontel			Milliontel
70°	229^m	— 88^m	— 14	74^m	— 27^m	— 4
80	204	— 50	— 8	66	— 15	— 2
90	186	— 23	— 4	60	— 6	— 1
100	171	— 1	0	56	0	0
110	160	+ 16	+ 2	52	+ 6	+ 1
120	151	+ 29	+ 5	49	+ 10	+ 2
130	145	+ 38	+ 6	47	+ 13	+ 2
140	140	+ 46	+ 7	45	+ 16	+ 3
150	136	+ 52	+ 8	44	+ 18	+ 3
160	133	+ 56	+ 9	44	+ 18	+ 3
170	132	+ 58	+ 9	43	+ 19	+ 3
180	131	+ 59	+ 9	43	+ 19	+ 3

h' im Zentrum folgt hieraus anstatt gleich 523^m und bezw. 417^m zu 517^m und 410^m.

Die Tabellen zeigen, daſs Δg auf den Kontinenten starke positive Werte, auf dem Meer in der Nähe der Küste starke negative Werte hat. Auf der Erdoberfläche hat man aber nach dem dritten Kapitel gerade das Gegenteil beobachtet, vergl. S. 226. Zwischen den aus Beobachtungen abgeleiteten Δg und denen obiger Untersuchung besteht allerdings in der Regel noch der Unterschied, daſs bei ersteren g nur in gewöhnlicher Weise reduziert wird, also auf den Kontinenten von der Anziehung der Massen über dem Meere befreit, auf dem Meere dagegen von der Anziehung der Inselmassen nicht befreit ist, während in obiger Untersuchung g offenbar fürs Festland gerade so verstanden ist, wie es sich mittelst der von uns eingeführten Reduktion durch Kondensation gewisser Massen ergiebt, und die auf den oceanischen Inseln beobachtete Schwerkraft um die Anziehung der Inselpfeiler vermindert werden muſs, damit sie der Schwerkraft auf dem Meere selbst entspricht.

Prüfen wir nun, ehe wir dies weiter untersuchen, das Verhalten der Schwerestörung bei der Zusammenwirkung der Kontinente.

Wir setzen hier $h_1 = h' + 1165 + 546 \cos \Gamma$ und entnehmen h' den Planigloben der Tafel I sowie Γ einem Globus, auf welchem der Punkt mit der geographischen Breite 52° und Länge 45° östl. Ferro eingetragen ist. Als Beispiel diene der Meridian in + 90° östlicher Länge von Ferro. Für denselben ergaben sich folgende Zahlen, wobei gesetzt ist:

$$\frac{\Delta g}{G'} R = -\frac{3}{2} h_1 + 1165 + \left\{ \begin{matrix} 2000^m \text{ auf Kontinenten} \\ 0^m \text{ auf dem Meere} \end{matrix} \right\}.$$

Geogr. Breite	h'	Γ	h_1	$\Delta g.R:G'$	$\Delta g:G'$	Bemerkungen
					Milliontel	
+ 90°	— 110m	38°	1485m	— 1063m	— 167	Eismeer
+ 80	+ 100	32	1727	+ 574	+ 90	Asien
+ 70	+ 210	28	1856	+ 381	+ 60	"
+ 60	+ 260	26	1915	+ 292	+ 46	"
+ 50	+ 310	28	1956	+ 231	+ 36	"
+ 40	+ 330	33	1952	+ 237	+ 37	"
+ 30	+ 310	40	1893	+ 325	+ 51	"
+ 20	+ 230	47	1767	+ 514	+ 81	"
+ 10	+ 80	55	1557	— 1170	— 184	Nahe d. Küste*)
0	— 150	64	1253	— 715	— 112	Indischer
— 10	— 220	72	1113	— 505	— 79	Ocean
— 20	— 240	81	1010	— 350	— 55	"
— 30	— 240	91	915	— 208	— 33	"
— 40	— 220	100	851	— 112	— 18	"
— 50	— 150	109	838	— 92	— 14	"
— 60	— 90	118	820	— 65	— 10	Südliches
— 70	— 60	126	785	— 13	— 2	Eismeer
— 80	— 10	134	777	0	0	"
— 90	+ 20	142	755	+ 28	+ 4	"
— 80	+ 30	148	732	+ 72	+ 11	"
— 70	+ 40	152	725	+ 77	+ 12	"
— 60	+ 50	154	726	+ 76	+ 12	"
— 50	+ 60	153	740	+ 55	+ 9	Stiller
— 40	+ 50	147	758	+ 28	+ 4	Ocean
— 30	+ 30	140	778	— 2	0	"
— 20	+ 20	133	813	— 55	— 9	"
— 10	+ 10	126	855	— 118	— 18	"
0	— 50	117	868	— 137	— 21	"
+ 10	— 120	108	877	— 151	— 24	"
+ 20	— 20	99	1060	— 425	— 67	"
+ 30	+ 180	90	1345	+ 1147	+ 180	Nord-Amerika
+ 40	+ 270	81	1520	+ 875	+ 137	"
+ 50	+ 260	71	1602	+ 762	+ 120	"
+ 60	+ 220	62	1641	+ 703	+ 110	"
+ 70	+ 100	53	1592	+ 777	+ 122	"
+ 80	— 100	46	1443	— 1000	— 157	Nördl. Eismeer

*) Wegen der Nähe der Küste ist hier Δg unsicher; der richtige Wert ist kleiner.

Die Zahlen für Δg zeigen wiederum, dafs auf den Kontinenten die Schwerestörung positiv und auf dem Meere nahe den Kontinenten negativ ist, entfernt von denselben zwar positiv, aber geringwertig. Die Erhebung h' und die Schwerestörung haben im allgemeinen dasselbe Zeichen.

§ 38. **Diskussion der Resultate. Die störenden Massen der Erde.** In den letzten beiden Paragraphen haben wir gefunden, dafs die Schwerestörungen auf den Kontinenten positiv sind, während sie auf dem Meere negativ sind oder doch nur kleine positive Werte haben. Jedenfalls führt unsere Untersuchung für die Sekundenpendellängen F auf dem Festland und M auf dem Meer zu dem Resultate

$$F > M\,.$$

An diesem Resultat ändert sich auch nichts, wenn nach Mafsgabe des letzten Teiles von § 35 S. 356 alle Werte h' der Tafel I um 0,4 ihres Betrages vergröfsert werden; es führt dies lediglich zu einer Vergröfserung der Schwerestörungen um ebenfalls 0,4 ihres Betrages.

Auch der Umstand, dafs die Schwerestörungen für die Niveaufläche der h' berechnet sind, anstatt für die wirkliche Meeresfläche, ändert nichts, da diese letztere mit dem ihr zukommenden Normalsphäroid bei dem bisher festgehaltenen Genauigkeitsgrade dieselben Höhendifferenzen h' besitzt, wie die Niveaufläche der h' und ihr Normalsphäroid.

Das Resultat $F > M$ steht aber in Widerspruch mit der Erfahrung. Nach dem dritten Kapitel § 31 S. 227 ist $F = I - 230$ Mikrons, wenn I die Länge des Sekundenpendels auf den Inseln ausschliefslich der Kondensationsreduktion für die Inselpfeiler bedeutet. Es ist also $F < I$. Um dieses mit der Ungleichung $F > M$ in Übereinstimmung zu bringen, müfste man annehmen, dafs die Länge des Sekundenpendels auf dem Meere um etwa vierhundert Mikrons kleiner sei als auf den Inseln. Dieses ist aber nicht annehmbar, denn sowohl nach dem, mittleren Verhältnissen angepassten Beispiel am Schlusse des § 17 S. 312, wie nach den (S. 227 erwähnten) Berechnungen von *Faye* führt die Anziehung der Inselpfeiler nur zu einem Betrage von etwa 250 Mikrons für die Differenz $I - M$. Zur Erklärung einer gröfseren Differenz $I - M$ müfste man daher voraussetzen, dafs unterhalb der Inselpfeiler die Erdkruste ungewöhnlich dicht sei.

Solange nun M nicht durch Beobachtungen der Schwerkraft auf dem offenen Meere mit F direkt vergleichbar ist, erscheint es das natürlichste, von der zu grunde liegenden Voraussetzung, dafs die Kontinentalmassen Störungsmassen vorstellen, ganz abzusehen, anstatt dessen aber anzunehmen, dafs *die Wirkung der Kontinental-*

massen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen, dergestalt, dafs von einer gewissen Tiefe unterhalb des Meeresniveaus an bis zur physischen Erdoberfläche vertikale Prismen von gleichem Querschnitt annähernd gleiche Massen enthalten, wo man die Prismen auch annehmen möge.

Entsprechend dieser Voraussetzung mufs die Erdkruste unterhalb des Meeresbodens etwas dichter sein, als unterhalb der Kontinentalmassen. Nehmen wir an, dafs der Dichtigkeitsunterschied bis zur Tiefe von 5 Mln. reicht, so genügt zur Kompensation der Kontinentalmassen ein Betrag desselben gleich 0,2. Die Kontinente erscheinen hiermit als Schollen der Erdkruste, welche etwas geringere Dichtigkeit haben, als letztere im allgemeinen. Ohne auf die physikalische Erklärung eines solchen Zustandes einzugehen, erinnern wir an die bereits im dritten Kapitel § 31 S. 228 besprochene Thatsache, dafs in der Regel Gebirge durch unterirdische Massendefekte mehr oder weniger kompensiert sind, eine Thatsache, welche zu gunsten der oben eingeführten Voraussetzung über die Kompensation der Kontinentalmassen spricht.

Diese Voraussetzung ist auch die einfachste zur Erklärung der durchschnittlichen Gleichheit der Längen F und K des Sekundenpendels für das Innere des Festlands und die Küsten, vergl. S. 227.

Mit ihr steht auch nicht in Widerspruch, dafs nach dem eben angegebenen Orte $F < I$ ist. Denn wenn auch die Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinente geringer ist als unter dem Meere, so wird man wegen der geringen Ausdehnung der in betracht kommenden kleinen Inseln doch nicht voraussetzen müssen, dafs sich die Dichtigkeit unterhalb der Inseln wie diejenige unterhalb der Kontinente verhält. Stimmt sie aber wesentlich mit derjenigen unter dem Meere überein, so erklärt sich der Überschufs von I über F durch die Anziehung der Inselmasse, wie oben bereits angedeutet wurde.

In welchem Grade die störende Wirkung der Kontinentalmassen durch die darunter befindlichen Massendefekte kompensiert wird, läfst sich zur Zeit genau nicht sagen. Jedenfalls aber darf man mit ziemlicher Sicherheit nach dem Vorhergehenden annehmen, dafs *das Geoid vom Normalsphäroid weit weniger abweicht, als Tafel I angiebt.* Wenn eine Überkompensation stattfände, so würden sich die Vorzeichen der Höhenabweichungen sogar umkehren. Mit Rücksicht auf das oben Gesagte ist jedoch vor der hand kein Grund vorhanden, eine wesentliche Abweichung von der genauen Kompensation zu vermuten.

Die Kompensation ist selbstverständlich nur als eine im grofsen und ganzen stattfindende zu verstehen. Namentlich werden an den Küsten beträchtliche Störungen der Lotrichtungen und des Krümmungsradius eintreten. Während aber nach den der Tafel I zu grunde lie-

genden Voraussetzungen die Gradmessungen die Gröſse der Erde immer zu klein geben würden, wird in einigem Abstand von der Küste nunmehr die Störung des Krümmungsradius gering anzunehmen sein, wodurch *der Wert der Gradmessungen zur Bestimmung der Gestalt und Gröſse der Erde im allgemeinen erheblich wächst.*

Die einzige Beobachtungsreihe für die Schwerkraft auf dem Ocean selbst, welche bis jetzt bekannt wurde, ist diejenige, welche *Will. Siemens* 1875 am Bathometer auf dem Schiffe *Faraday* anstellen lieſs (vergl. auch S. 256). Der Mitteilung in den *Phil. Transact.* von 1876 Bd. 166 II entnehmen wir auszugsweise von S. 684 und 685 folgende Zahlen*):

Tag		Geograph. Position				Bathom.-Ablesung	Tiefe in Faden
		Nördliche Breite		Westliche Länge v. Gr.			
Okt.	15	Victoria Docks				0	2
„	25	51°	25′	26°	25′	2130	1900
„	26	51	7	31	14	2680	2000
„	27	—		—		2870	2100
Okt.	29	47	50	47	0	201	197
„	29	47	34	48	23	100	100
„	31	45	5	54	28	218	204
„	31	45	10	54	14	55	54
Nov.	1	45	10	54	18	50	58
„	3	45	6	54	26	111	100
„	4	45	11	54	20	70	64
„	7	46	45	47	17	388	353
„	7	46	35	46	57	799	698
„	7	46	26	46	20	608	503
„	8	46	23	41	11	2789	2516
„	10	48	12	33	12	2388	2320
„	11	48	49	28	55	1907	1861
„	11	48	56	28	3	1615	1700
„	24	Victoria Docks				5	2

An den Bathometerablesungen des zweiten Teiles der Tabelle sind Korrektionen für Temperatur und Luftdruck angebracht; im ersten Teil scheinen sie zu fehlen, doch sind sie nicht erheblich und betragen keinesfalls 20^{p}. Die Tiefen des ersten Teiles waren zur Zeit der Beobachtungen bereits aus früheren Lotungen bekannt, diejenigen des zweiten Teiles aber noch nicht; sie wurden erst gleichzeitig mit den betreffenden Bathometerablesungen ermittelt und zwar dergestalt, daſs letztere immer bei Bekanntwerden des Lotungsergebnisses bereits ausgeführt waren.

*) Eine deutsche Ausgabe ist unter Mitwirkung des Verfassers 1878 bei *Jul Springer* in *Berlin* erschienen in der Schrift: *„Die Eisen- und Stahl-Industrie in England. Der Bathometer.“* Vorträge von Dr. *C. Will. Siemens.* — Auf dem Schiffe befanden sich zwei Bathometer, ein groſses und ein kleines. „Beide Instrumente wurden sorgfältig beobachtet.“ Die Tabelle giebt die Resultate „dieser Beobachtungen“. Hierbei ist aber auffallend, da beide Instrumente sicherlich etwas verschiedene Skalen gehabt haben, daſs sonach Mittelwerte aus nicht unmittelbar vergleichbaren Ablesungen gebildet sein müſsten!

Wegen der Veränderung der Schwerkraft mit der Breite ist keine Korrektion angebracht: Die Bathometerablesungen folgen bereits ohne eine solche den Tiefen in Faden unabhängig von der Breite so regelmäfsig, dafs das Bedürfnis nach einer solchen Korrektion gar nicht entsteht. Auch einige Messungen auf dem englischen Festlande zeigten nur einen sehr geringen Einflufs der Breite.

Wenn man nun aber bedenkt, dafs in den geographischen Breiten, auf welche sich die Beobachtungen erstrecken, eine Breitendifferenz von 3° die Schwerkraft ebenso sehr beeinflufst, wie ein 2000 Faden = 3658^m starker, unterhalb des Beobachtungsortes allseitig plattenförmig ausgedehnter Massendefekt von der Dichtigkeit 1,8, so mufs man es geradezu rätselhaft finden, dafs die vorstehende Beobachtungsreihe keinen Einflufs der Breite verrät — um so mehr, als starke Änderungen der Breite nicht nur ein Mal, sondern mehrere Male stattfinden. Die Beobachtungsreihe ist hiernach jedenfalls an irgendwelche abnorme und seltsame Umstände geknüpft, und es wäre gewagt, aus ihr irgend einen Schlufs auf das Verhalten der Schwerkraft auf dem Meere im Vergleiche zum Festlande zu ziehen.

Zu der Anschauung, dafs die sichtbaren Massenanhäufungen der Erdkruste durch unsichtbare kompensiert seien, gelangte schon *Pratt* auf grund seiner Diskussion der Lotablenkungen und Schwerebeobachtungen in Ostindien und dem Himalaya (vergl. auch *Clarke*, *Geodesy* p. 98). Er denkt sich, dafs die erkaltende Erdrinde sich in vertikaler Richtung ungleich zusammenzog und an den Stellen Hervorragungen entstanden, wo die geringere Zusammenziehung stattfand.

Seine Untersuchungen finden sich aufser an dem S. 114 angegebenen Orte in den *Philosophical Transactions* 1855, 59 und 71. Besonders ist die letzte Abhandlung zu vergleichen: *On the Constitution of the Solid Crust of the Earth*, p. 335—357. Erst hier gelangt *Pratt* an der Hand der Schwerebeobachtungen zu sicheren Ergebnissen (p. 335 bespricht er auch ältere Anschauungen). Wenn *Pratt* allerdings annimmt (1859 vol. 149 p. 747), dafs in *jeder* Vertikalen der Erdrinde sozusagen die Masse konstant ist, abgesehen von lokalen Störungen, so dürfte dies vielleicht etwas zu weit gegangen sein. Für Ostindien und den Himalaya gelangt er aber mit dieser Annahme zu recht befriedigenden Ergebnissen (p. 355—356). Die Tiefe, bis zu welcher die Ausgleichung der Massen erfolgt, wird etwa 200 miles, d. i. ca. 300^{km} oder 40 Mln.

Nach *G. H. Darwin*, *American Journ.* 1882 Bd. 24, hat *Stokes* ebenfalls die Ansicht, dafs unterhalb jedes Kontinents ein Massendefekt sei.

Auch *Faye* ist zu dieser Ansicht gelangt, vergl. seine Abhandlungen in den *Comptes rendus* 1880 Bd. 90 S. 1185 und S. 1444. Er macht darauf aufmerksam, dafs in 4000^m Tiefe unter den Kontinenten eine sehr hohe Temperatur bestehe, am Meeresboden in dieser Tiefe aber nur eine niedrige Temperatur vorhanden sei. Dies allein bedingt schon einen Dichtigkeitsunterschied. Aufserdem nimmt er an, dafs unterhalb des Meeres die Abkühlung des Erdkörpers viel rascher erfolgte, als an den Kontinenten.

Wir haben hier auch der Untersuchungen von *Ph. Fischer* in seinem Werke: *Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt* 1868, zu gedenken.

Ph. Fischer betrachtet zunächst die Störungen der Lotrichtung und der Schwerkraft in einem bestimmten Punkte; er findet jene sehr grofs, diese klein, im Gegensatz zu den Erfahrungen bei der Ausgleichung der Gradmessungen und Pendelbeobachtungen. Bei den Gradmessungen findet er den Widerspruch erklärt durch die Eigenschaft der Rechnungsmethode,

bei welcher sich die absoluten Lotstörungen verstecken können (vergl. hierzu Bd. 1 S. 609 § 11). Bei den Pendelbeobachtungen findet er die Erklärung des Widerspruchs darin, daſs durch die Anziehung der Kontinente die Meeresfläche sich über das ungestörte Niveau hebt und daſs dieser Erhebung eine Abnahme der Schwerkraft im Meeresniveau entspricht, daſs man es also nicht mehr mit Störungen der Schwerkraft für einen bestimmten Punkt zu thun hat, sondern zugleich noch mit Störungen wegen Verschiebung des Niveaus. Diese Erhebung der Meeresfläche nahebei und unterhalb der Kontinente bezw. die Senkung der Meeresfläche entlang des Oceans entsprechen nach seiner Meinung der beobachteten Thatsache, daſs die Schwerkraft auf den Kontinenten gegen die bekannte Interpolationsformel zu kleine, auf den oceanischen Inseln zu groſse Werte giebt.

Hier ist nun *Ph. Fischer* offenbar in seinen Untersuchungen nicht weit genug gegangen. Ganz abgesehen davon, daſs die Vergleichung der Beobachtungen mit der Interpolationsformel nur Sinn hat, wenn man als normales Niveausphäroid ein solches nimmt, welches konzentrisch zum gestörten Erdschwerpunkt ist, hat er nicht eingehend genug die gestörte Schwerkraft im gestörten Meeresniveau untersucht, sonst müſste er bemerkt haben, daſs ein Widerspruch mit der Erfahrung besteht.

Durch die wenig kritische Auffassung der Resultate *Ph. Fischers* durch andere Gelehrte ist die Ansicht von der allgemeinen Depression des Meeres weit verbreitet worden (*A. Fischer*, *Astronom. Nachr.* 1876 Bd. 88 Nr. 2094, 2095 und 2104 teilt sie indessen nicht; doch sind seine Ansichten nicht hinreichend motiviert und, wie uns scheint, z. T. unzutreffend).

Man hält sich von dieser allgemeinen Depression um so mehr überzeugt, als die im dritten Kapitel § 45 S. 262 erwähnten Näherungsformeln die Existenz derselben mit Rücksicht auf die Anomalieen der Schwerkraft anscheinend bestätigten. Die Wertlosigkeit dieser Formeln zeigt aber beispielsweise die Tabelle von S. 363 sehr drastisch: hier entsprechen h' und G' den Symbolen N und γ in (1) S. 262; aber es stimmen nicht einmal die Vorzeichen von h' und $-\frac{2R}{3G'}\Delta g$ überein.

§ 39. Berechnung des Einflusses der lokalen Massenordnung auf die Lotrichtung. Wir sehen von der Krümmung der Niveauflächen ab und betrachten demgemäſs die Niveaufläche des Punktes P', für welchen die Anziehung berechnet werden soll, als Ebene. In derselben denken wir uns konzentrisch zu P' ein System von Kreisen angenommen, welche durch ein System von radialen Strahlen in krummlinige Vierecke zerlegt werden, innerhalb welcher die Erhebung h des Terrains über die Niveaufläche von P' als konstant betrachtet werden kann. Vergl. § 18 im 3. Kap. S. 169 u. ff.

Setzen wir nun konstante Dichtigkeit Θ_0 in der ganzen in betracht zu ziehenden Umgebung von P' voraus, so würde von Lokalanziehung keine Rede sein, wenn das Terrain innerhalb derselben eben wäre. Es kommt daher als störend nur die Anziehung derjenigen Massen zur Geltung, die über einer beliebigen Niveaufläche liegen oder unterhalb derselben fehlen. Von dieser Anziehung wird vielfach nur die nordsüdliche, oftmals aber auch die ostwestliche Komponente zu berechnen sein.

Um für ein Viereck zwischen den Kreisen vom Radius a_i und a_k, sowie den Strahlen l und m, die unter φ_l und φ_m gegen die Nordrichtung geneigt sind, Fig. 59, diese Anziehungskomponenten zu erhalten, berechnen wir zunächst die horizontale Anziehung des über dem Flächenelement dq der Horizontalebene (Niveaufläche) von P' liegenden prismatischen, bis zum Terrain in der Höhe h reichenden Massenelementes. Werden vertikale Erhebungen über der Horizontalebene im allgemeinen mit z bezeichnet, so ist diese horizontale Anziehung gleich

Nord, l, m, a_k, a_i, dq, $d\varphi$, φ, P', a_i, a_k, Ost

Fig. 59.

$$k^2 \Theta_0 \, dq \int \frac{a\, dz}{\sqrt{a^2+z^2}^{\,3}}.$$

Dieses Integral, welches von z gleich null bis $z = h$ zu erstrecken ist, wird gleich

$$k^2 \Theta_0 \frac{h\, dq}{a\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \text{d. i.} \quad k^2 \Theta_0 h\, d\varphi \frac{da}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

wenn $dq = a\, d\varphi\, da$ gesetzt wird. Denselben Ausdruck findet man für die Anziehung einer unterhalb der Horizontalebene fehlenden Masse und zwar mit richtigem Zeichen, wenn h wie üblich für eine unterhalb des angenommenen Horizontes gelegene Terrainstelle negativ genommen wird.

Es folgt nun als Horizontalanziehung aller im Winkelraum $d\varphi$ des betrachteten Vierecks, also zwischen a_i und a_k liegenden Masse:

$$k^2 \Theta_0 h\, d\varphi \int_{a_i}^{a_k} \frac{da}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \text{d. i.} \quad k^2 \Theta_0 h\, d\varphi \log\text{nat} \frac{a_k + \sqrt{a_k^2+h^2}}{a_i + \sqrt{a_i^2+h^2}}.$$

Multipliziert man dies mit $\cos\varphi$ und integriert von $\varphi = \varphi_l$ bis φ_m, so ergiebt sich die nach Norden gerichtete Horizontalanziehung des betreffenden Vierecks; dasselbe mit $\sin\varphi$ giebt die nach Osten gerichtete Komponente. Bei der Integration ist der Faktor von $d\varphi$ im letzten Ausdruck konstant. Indem wir das Resultat derselben noch mit der Schwerebeschleunigung $G = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ dividieren und mit $\varrho'' = 206265$ multiplizieren, erhalten wir die Anteile an der nördlichen bezw. östlichen Ablenkung des aufgehängten Lotes, welche das betreffende Viereck giebt, in Sekunden.

Ihre Summe für alle Vierecke der Umgebung bezeichnen wir mit ξ und η. Es ist dann wie in Bd. 1 S. 516:

ξ die südliche Abweichung des wirklichen Zeniths vom ungestörten,
η die westliche „ „ „ „ „ „ ,

und zwar hat man

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \frac{3\Theta_0 \varrho''}{4\Theta_m \pi R} \sum (\sin\varphi_m - \sin\varphi_l) F \tag{1}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\eta} = \frac{3\Theta_0 \varrho''}{4\Theta_m \pi R} \sum (\cos\varphi_l - \cos\varphi_m) F, \tag{2}$$

wobei

$$F = h \operatorname{lognat} \frac{a_k + \sqrt{a_k^2 + h^2}}{a_i + \sqrt{a_i^2 + h^2}}. \tag{3}$$

Mit $\Theta_0 = \frac{1}{2}\Theta_m$ ist für R in Metern

$$\frac{3\Theta_0 \varrho''}{4\Theta_m \pi R} = 0{,}00386.$$

Bei der über alle Vierecke zu erstreckenden Summierung ist F für jedes Viereck zu ermitteln, während die Sinus- bezw. Cosinus-Differenz mindestens für eine Anzahl Vierecke konstant sein wird, ja meistens sogar durch geeignete Wahl der φ mit Vorteil ganz konstant gemacht werden kann, wenn es sich nur um eine der Ablenkungskomponenten handelt.

Der Faktor F läſst sich für die Mehrzahl der Fälle vereinfachen. Ist nämlich h klein gegen a_i, so kann man setzen

$$a + \sqrt{a^2 + h^2} = 2a\left(1 + \frac{h^2}{4a^2} + \ldots\right)$$

für $a = a_i$ und a_k. Damit wird in weiterer, einfacher Entwicklung

$$F = h\left\{\operatorname{lognat}\frac{a_k}{a_i} - \frac{h^2}{4}\left[\frac{1}{a_i^2} - \frac{1}{a_k^2}\right] + \ldots\right\}$$

und hieraus

$$F = h \,.\, 2\frac{a_k - a_i}{a_k + a_i}\left\{1 - \frac{h^2}{2}\frac{(a_k + a_i)^2}{4a_i^2\, a_k^2} + \frac{1}{12}\left(2\frac{a_k - a_i}{a_k + a_i}\right)^2 + \ldots\right\}.$$

Für den praktischen Gebrauch setzt man mit Rücksicht hierauf meist ausreichend

$$F = h \operatorname{lognat}\frac{a_k}{a_i} \quad \text{oder} \quad h\frac{a_k - a_i}{\frac{1}{2}(a_k + a_i)}, \tag{4}$$

ausnahmsweise aber

$$F = \frac{a_k - a_i}{\frac{1}{2}(a_k + a_i)}\left\{h - \frac{1}{2}\frac{h^3}{\left(\frac{a_k + a_i}{2}\right)^2}\right\}. \tag{5}$$

Eventuell ist sogar (3) heranzuziehen.

Die erste Formel (4) empfiehlt sich für Radien, deren Beträge in geometrischer Progression wachsen. Es eignet sich diese Art der Zunahme aber nicht in der nächsten Umgebung, sondern erst in gröſseren Abständen. Für die nähere Umgebung empfiehlt sich eine Zunahme in arithmetischer Progression und damit die zweite Formel (4).

In der näheren Umgebung wird man auch am ersten noch Veranlassung haben, die genauere Formel (5) oder sogar (3) herbeizuziehen. Den Radius a_1 wird man immer so klein wählen können, daſs der Einfluſs der eingeschlossenen Masse verschwindet. Wie schon eingangs erwähnt, kommt es dabei nicht auf den ganzen Betrag von h an, sondern auf die Schwankungen. Ist deren Amplitude Δh, so kann die Gesamtwirkung der betreffenden Masse auf ξ z. B. nur ein Bruchteil der Anziehung der nördlichen oder südlichen Hälfte eines Cylinders vom Radius a_1 und der Höhe Δh sein, d. i. für $\Theta_0 = \frac{1}{2}\,\Theta_m$

$$0{,}0077''\,\Delta h \,\log\mathrm{nat}\,\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + \Delta h^2}}{\Delta h}\,,$$

also für $\Delta h = 1^m$ und $a_1 = 25^m$ nur ein Bruchteil von $0{,}03''$.

Wenn es sich darum handelt, *ungleiche Dichtigkeiten* bis zu einer Tiefe H' unterhalb P' zu berücksichtigen, so wird man in obiger Rechnung für jedes Viereck eine mittlere Dichtigkeit Θ anstatt Θ_0 einzuführen haben. Die Annahme einer mittleren Dichtigkeit für alle zu einem Viereck bis zur Tiefe H' gehörende Masse reicht wohl immer aus, da im allgemeinen der Betrag der Anziehung von der Tiefe nicht wesentlich abhängt.

Durch die bisherige Rechnung aber wird zunächst nur die Anziehung der positiven und negativen Masse zwischen der Niveaufläche von P' und dem Terrain berücksichtigt. Jetzt ist noch die Anziehung des zwischen dieser Niveaufläche und der um H' tieferen zu ermitteln. Dazu dienen wieder die Formeln (1) und (2). In denselben ist aber für Θ_0 zu setzen die besondere Dichtigkeit Θ oder

$$\Delta\Theta = \Theta - \Theta_0\,, \tag{6}$$

wobei man Θ_0 den nächstgelegenen Massen entsprechend annehmen kann, damit diese aus der Rechnung verschwinden. Ferner ist für h durchaus der konstante absolute Wert von H' zu setzen.

Zu den Ausdrücken (1) und (2), in denen aber, wie bemerkt, Θ anstatt Θ_0 zu schreiben ist, welches Symbol nunmehr unter das Summenzeichen gehört, treten dann noch folgende Teile für ξ und η:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = \frac{3\varrho''\,H'}{4\,\Theta_m\,\pi R}\sum(\sin\varphi_m - \sin\varphi_l)\,\Delta\Theta\,.\,F' \tag{7}$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\eta} = \frac{3\varrho''\,H'}{4\,\Theta_m\,\pi R}\sum(\cos\varphi_l - \cos\varphi_m)\,\Delta\Theta\,.\,F' \tag{8}$$

mit

$$F' = \left\{1 - \frac{1}{2}\frac{H'^2}{\left(\frac{a_k + a_i}{2}\right)^2}\right\} \times \log\text{nat}\frac{a_k}{a_i} \text{ oder } \frac{a_k - a_i}{\frac{1}{2}(a_k + a_i)} \cdot \quad (9)$$

Die Anwendbarkeit dieser Formeln ist an die Bedingung gebunden, dafs man $\Delta\Theta$ bis zu einem Umkreis a_i als konstant ansehen darf, für welchen der Quotient $H' : \left(\frac{a_k + a_i}{2}\right)$ bereits ein kleiner Bruch ist.

§ 40. **Fortsetzung: Die Ausführung der Rechnung.** Zahlreiche Berechnungen von Lokalanziehungen finden sich in dem Hauptwerke der englischen Vermessung*). Hierbei wurde $\Theta_0 = \frac{1}{2}\Theta_m$ gesetzt und a in der Regel der Reihe nach gleich 100, 200, 300, 400, 500 Fufs engl. genommen (1. Gruppe), sodann wachsend von 500 zu 500 Fufs bis 5000 Fufs (2. Gruppe), endlich weiter in geometrischer Progression mit dem Verhältnis 7:6 bis a_{17} oder a_{25} (3. Gruppe). Unter Umständen fand für aufserhalb der 3. Gruppe liegende Massen bis zu 12 geogr. Meilen und mehr Abstand eine Schätzung statt. Die normale Berechnung ging aber nach den angegebenen Daten nur bis etwa 15km oder 2 geogr. Meilen.

Da man nur ξ zu berechnen hatte, nahm man nach dem Vorgange von *Hutton* die Werte φ dergestalt, dafs die Sinusdifferenz für Formel (1) stets 0,1 betrug. Man setzte also im 1. Quadranten φ der Reihe nach gleich

0°	0′	30°	0′
5	44	36	52
11	32	44	26
17	27	53	8
23	35	64	9
30	0	90	0.

Es erleichtert diese Wahl die Rechnung einigermafsen, indem man damit den Faktor $(\sin\varphi_m - \sin\varphi_l)$ konstant gleich 0,1 erhält. Aber es scheint uns doch, als sei wenigstens das Intervall von 64° 9′

*) *Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland. Principal Triangulation.* London 1858. Seite 583, 606 und 624 bis 664. Es dürfte jedem, der sich mit dergleichen Arbeiten beschäftigen will, das Studium des trefflichen Werkes auch an den betreffenden Stellen anzuraten sein.

Man findet hier S. 576 auch die Anziehung eines *rechtwinkeligen Parallelepipeds* behandelt (für Tafelländer brauchbar).

Auch *C. A. F. Peters* giebt eine Formel für die Anziehung des rechtwinkeligen Parallelepipeds, *Astronom. Nachr.*, 1855 Bd. 40, Nr. 939, S. 46, sowie für eine *Pyramide*, *Bulletin de la Classe physico-mathém. de l'Académie de St. Pétersbourg,* t. III, p. 219.

Vergl. auch *Dahlander, Poggendorffs Annalen*, Bd. 117, 1862.

bis 90°0′ zu grofs. Innerhalb dieses Intervalls geht cos φ von 0,44 auf null herab, sodafs die Rechnung mit einem Mittelwerte von h bei einigermafsen unebenem Terrain für den betreffenden Anteil in ξ keine genügende Annäherung geben kann.

Bei der Einteilung in Vierecke ist nämlich offenbar darauf zu achten, dafs die der Annahme eines konstanten h entsprechende Planierung des Terrains die Anziehung bezw. deren Komponente nicht merklich ändert, dafs mithin Verschiebungen der Ausgleichsmassen von einem Rand zum andern keinen erheblichen Einflufs haben. Da aber die Anteile in ξ dem cos φ proportional sind, so darf dessen Änderung in jedem Vierecke nur eine mäfsig grofse sein. Wir würden daher im Falle praktischer Rechnung das letzte Intervall über 64°9′ hinaus noch weiter unterteilen.

Um sich praktisch eine Vorstellung von der Unsicherheit zu verschaffen, welche im Endresultat durch die Schwankungen von h innerhalb je einer Abteilung entsteht, kann man einzelne besonders beachtenswerte Vierecke halbieren und ihren Einflufs nochmals berechnen u. s. f. Dabei ist zu erinnern, dafs die betreffenden Fehler für gröfsere Gruppen benachbarter Vierecke sich anhäufen können.

In dem Werke über die bayerische Landesvermessung finden sich Ermittelungen der Lokalanziehungen für 2 Stationen*). Hier wurden ξ und η berechnet und φ demnach in arithmetischer Progression fortschreitend angenommen. Ebenso die a, wenn auch für mehrere Gruppen mit verschiedenem Intervall. Die äufsersten Kreise erstreckten sich bis zu etwa 45 Meilen, alle Massen umfassend, die beide Stationen merklich verschieden beeinflufsten. Auch hier fand man die Annahme $\Theta_0 = \frac{1}{2}\,\Theta_m$ ausreichend. Die gröfsere Ausdehnung des benutzten Gebietes in Bayern gegenüber England erklärt sich durch die Absicht, die naheliegenden Alpen zu berücksichtigen.

Um h für ein Viereck zu finden, bedient man sich in der Regel mit Vorteil der äquidistanten Horizontalkurven. Denken wir uns ein Viereck von mehreren solchen durchschnitten, Fig. 60, so ergiebt sich h, indem man die im Viereck enthaltene Masse durch die Grundfläche dividiert. Man wird am besten so vorgehen, dafs man, wie Fig. 60 zeigt, das betreffende Viereck

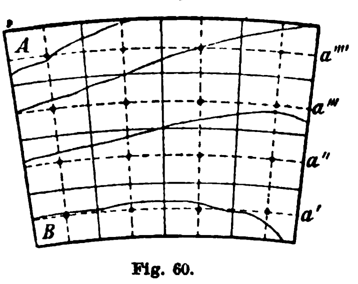


Fig. 60.

*) *Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage.* München 1873. S. 758 bis 768. Auch dieses Werk ist für Details der Berechnung nachzusehen.

durch äquidistante Linien in kleinere Vierecke zerteilt, für die Mitte eines jeden die Höhe interpoliert (wobei eben die Horizontalkurven sehr nützlich sind) und dann zunächst für die Werte, die zu gleichem Radius gehören, Mittel bildet. Im Falle der Figur ist sodann zu setzen, wenn $h' \dots h''''$ die Mittelwerte und $a' \dots a''''$ die zugehörigen Radien sind:

$$h = \frac{a'h' + a''h'' + a'''h''' + a''''h''''}{a' + a'' + a''' + a''''}. \tag{1}$$

Dieses Verfahren scheint uns wenigstens bei kleinen, nur durch wenige Kurven zerlegten Vierecken richtiger und zweckmäfsiger als dasjenige, mit Hilfe der Inhalte der Horizontalschnitte (welche sich allerdings mit dem Planimeter leicht ermitteln lassen) die Kubizierung zu bewerkstelligen. Denn bei letzterem zeigt sich als Übelstand, dafs Teile z. B. bei A und B übrigbleiben, auf welche die Formeln der mechanischen Quadratur nicht recht passen. Dieser Übelstand kann jedoch von unerheblichem Einflufs sein, wenn die Teile von der Art A und B infolge eines relativ zu den Dimensionen des Vierecks sehr dichten Systems von Horizontalkurven verhältnismäfsig klein sind. Dann kann man setzen (vergl. S. 337 Anm. u.)

$$h = h_0 + \frac{\varDelta h}{y_0}\left(\frac{1}{2}\,y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}\,y_n\right). \tag{2}$$

Hierin bezeichnen y_0, $y_1 \dots$ die Flächeninhalte der Horizontalschnitte in aufsteigender Reihe, h_0 die Höhe des tiefsten Schnittes y_0 und $\varDelta h$ das Höhenintervall. Als tiefster Schnitt y_0 ist das Viereck selbst zu nehmen, als y_1 der Inhalt der Schnittfläche zwischen der 1. Kurve und dem Viereckscontour.*) Übrigbleibende, in der Formel nicht berücksichtigte Kuppen kommen bei der vorausgesetzten relativen Dichtigkeit der Kurven nicht in betracht.

Welches Verfahren man auch zur Ermittlung der Durchschnittshöhen h wählen mag, so ist stets der Umstand günstig, dafs eine grofse Sorgfalt überhaupt nicht erforderlich, insoweit *zufällige* Fehler in den h in betracht kommen. Fassen wir z. B. die 3. Gruppe von Vierecken der *Ordnance Survey*, vielleicht an Zahl 400, ins Auge, so erhalten wir zunächst deren Beitrag zu ξ in Sekunden gleich

$$0{,}00039 \log\text{nat} \frac{a_k}{a_i} \cdot \Sigma h\,,$$

wobei $\log\text{nat} \frac{a_k}{a_i} = \log\text{nat} \frac{7}{6} = 0{,}15$ ist. Beträgt der mittlere zufällige Fehler in h aber μ_h, so wird der entsprechende mittlere zufällige Fehler in ξ gleich

*) Die *Bayerische Landesvermessung* S. 764 wendet eine etwas andere Formel an; die unsrige ist vielleicht vorzuziehen.



$$0{,}00039 . 0{,}15 . 20\,\mu_h, \quad \text{d. i.} \quad 0{,}0012\,\mu_h,$$

mithin für $\mu_h = 100^m$ erst 0,12″. Selbstredend wird für die 1. und 2. Gruppe die Genauigkeit etwas gröſser sein müssen, wofür wir aber die Schätzung übergehen.

Es mag noch erwähnt werden, daſs die *Ordnance Survey* für die 1. Gruppe F nach Formel (5) berechnete; für die 2. Gruppe wurde ein Näherungsverfahren mit Benutzung dieser Formel angewandt, während für die 3. Gruppe die 1. Formel (4) zur Benutzung gelangte. In *Bayern* rechnete man nur mit der 2. Formel (4).

Hierbei muſs nun noch darauf hingewiesen werden, daſs in den Formeln (4) und (5) zwar h den Höhenunterschied mit dem angezogenen Punkte P' bedeutet, daſs aber in (4) und dem 1. Gliede der Parenthese (5) für h auch die Höhe über einem beliebigen Horizont z. B. also die Meereshöhe H gesetzt werden darf, da sich die dadurch begangenen Fehler in der Summe der 4 Quadranten aufheben. Im 2. Gliede von (5) ist aber h in der ursprünglichen Bedeutung zu nehmen. Bei der 2. Gruppe von Vierecken setzte nun die *Ordnance Survey* für alle 20 Vierecke der nördlichen oder südlichen Hälfte eines Ringes

$$\Sigma h^3 = 20\left(\frac{\Sigma H}{20} - H'\right)^3.$$

Genaue Berechnungen der Lokalanziehung führte zuerst *Hutton* aus gelegentlich der 1772—76 von *Maskelyne* unternommenen Bestimmung der Dichtigkeit Θ_m der Erde aus der Lotablenkungsdifferenz für zwei bezw. nördlich und südlich des Berges *Shehallien* in *Pertshire* gelegenen Breitenstationen. Er berichtet darüber in den *Philosphical Transactions* 1778 (Ausgabe von 1809 Bd. 14 S. 408 u. ff.). Man vergl. auch 2 Abhandlungen in den *Phil. Transact.* 1775 von *Maskelyne*, betr. Auswahl der Berge und Beobachtungen am *Shehallien*. Für die Radien, an Zahl 20, und für $\sin\varphi$ nahm er arithmetische Progression, $\Delta \sin\varphi = {}^1/_{12}$, $\Delta a = 666^2/_3$ Fuſs. Zur Interpolation der h fand er es bequem, zunächst Punkte gleicher Höhe durch Linien zu verbinden, er führte also faktisch *Horizontalkurven* ein.

Für F nahm er wahrscheinlich den Ausdruck (5), d. h. er setzte eigentlich

$$F = (a_k - a_i)\sin\operatorname{arc}\tan\frac{h}{\frac{1}{2}(a_k + a_i)},$$

berechnete aber den Sinus aus der Tangente nach einem einfachen (uns nicht näher bekannten) Verfahren, das sicher auf Anwendung von (5) hinauslief.

§ 41. Erfolge der Berechnung von lokalen Lotablenkungen.

Bei der englischen Vermessung ergab sich folgende Zusammenstellung. In derselben enthält die Kolumne A den Wert von ξ aus der Ablenkung der Massen innerhalb eines Umkreises von ca. 2 geogr. Meilen (bei den ersten 4 Stationen der Insel *Wight* nur 5^{km}), B den Wert bei Berücksichtigung auch der entfernteren Massen, C die Verbesserung der geogr. Breite, welche das für das Vermessungsgebiet günstigste Referenzellipsoid erfordert

ξ *aus der Ordnance Survey, Principal Triangulation p. 699 und 700.*

Name der Station	*A*	*B*	*C*	*C — A*	*C — B*
Dunnose	— 1,02″	— 0,54″	— 1,62″	— 0,60″	— 1,08″
Boniface	+ 1,94	+ 2,42	+ 0,80	— 1,14	— 1,62
Week Down	+ 1,50	+ 1,98	+ 0,58	— 0,92	— 1,40
Port Valley.......	+ 2,81	+ 3,29	+ 1,61	— 1,20	— 1,68
Clifton	— 0,90		— 2,56	— 1,66	
Burleigh Moor....	— 3,03	— 4,55	— 3,54	— 0,51	+ 1,01
Hungry Hill......	+ 3,85	+ 5,40	+ 2,92	— 0,93	— 2,48
Feaghman	— 1,95		— 0,88	+ 1,07	
Forth............	— 0,17	+ 1,13	+ 0,26	+ 0,43	— 0,87
Tawnaghmore	— 1,43	— 2,30	— 0,95	+ 0,48	+ 1,35
Lough Foyle	— 2,15	— 4,02	— 4,48	— 2,33	— 0,46
Kellie Law	+ 2,08		+ 1,82	— 0,26	
Monach..........	+ 0,47		+ 1,36	+ 0,89	
Ben Hutig	— 1,63	— 2,01	— 2,86	— 1,23	— 0,85
Calton Hill, Edinb.	— 2,43	— 3,57	— 5,30	— 2,87	— 1,73
Cowhythe	— 2 :	— 5 :	— 9,55	— 7 :	— 4 :

Hiernach trägt offenbar im allgemeinen die Anziehung der umgebenden Massen in dominierender Weise zur Erzeugung der Abweichungen gegen das Referenzellipsoid bei. Immerhin bleiben erhebliche Reste. Die Erweiterung des in die Rechnung einbezogenen Terrains nutzt nicht immer, sondern schadet zum Teil. So wird bemerkt, daſs für die 4 Insel-*Wight*-Stationen die Differenzen wachsen, wenn man die Südküste von England und einen entsprechenden Kanalteil mitberücksichtigt. Bei *Cowhythe* ist zwar wegen mangelnder Daten die Berechnung von *A* und *B* sehr unsicher; es soll aber *B* jedenfalls — 6″ nicht erreichen, sodaſs *C* — *B* mindestens — 4″ betragen würde.

Günstiger war der Erfolg der Rechnungen der bayerischen Landesaufnahme. Hier ergab sich für die Differenz der geographischen Breiten beider Stationen, *Benediktbeuren* — *München*, mit *Bessels* Erdellipsoid:

9,00″ astronom. — geodätisch,

8,64 aus der Massenanziehung;

ferner ergab sich für das von *München* nach *Benediktbeuren* übertragene Azimut

— 5,83″ astronom. — geodätisch,
— 5,22 aus der Massenanziehung.

[Bei diesen Übertragungen kommen die Formeln (9) S. 536, Bd. 1, in frage.]

Sehr günstige Resultate erzielte für die Alpen auch Oberst *Pechmann* *) bei zwei Meridianbögen und drei ziemlich entfernten astronomischen Stationen in Breite und Azimut. Er suchte durch seine Rechnungen nachzuweisen, dafs es Hypothesen über die Dichtigkeit der Massen unterhalb des Meeresniveaus nicht bedürfe, um die Abweichung zwischen geodätischen und astronomischen Beobachtungsergebnissen zu erklären.

Auch *Denzler* erzielte günstige Resultate; nur in der Amplitude *Mailand-Zürich* bleiben 5 bis 6″ unerklärt, und es vermutet daher *Ph. Fischer,* dem wir dies entlehnen, hier den Einflufs unterirdischer Massenstörungen**).

Dafs solche existieren, ist ja bereits bei *Moskau* unzweifelhaft konstatiert***), nach *Pratt* für den *Himalaya* erwiesen und von *O. Struve*

---

*) *E. Pechmann, Die Abweichungen der Lotlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen und ihre Berechnung als Erfordernis einer Gradmessung.* Wien bei Gerold. 2 Teile. 1863—65. (Der 1. Teil ist auch in dem 22. Bde. der *Denkschriften der mathem. naturwiss. Classe der Wiener Akademie der Wissenschaften* enthalten.)

**) *Denzler, Jahrbuch des schweizer Alpenklubs,* 3. Jahrg. 1866 (nach *Ph. Fischer, Gestalt der Erde*, S. 46).

***) *G. Schweizer, Untersuchung über die in der Nähe von Moskau stattfindende Lokalattraktion.* Moskau 1863. Wir folgen Referaten von *C. A. F. Peters* und *O. Struve* in den *Astronom. Nachr.* vom Jahre 1864 Bd. 61 Nr. 1449 S. 142 bezw. in den *Monthly Notices of the Royal Astron. Society* Bd. 23 S. 185.

Für 90 Punkte innerhalb einer Zone, die sich bis 4 Meilen nördlich, 8 südlich, 5 östlich und 9 westlich erstreckt, wurde die Polhöhe beobachtet. Die 10 Minuten südlich von Moskau von *WSW* nach *ESE* laufende Linie hat keine nordsüdliche Ablenkung, aber auf den Parallelen beiderseits wächst sie bis ca. 8″ in etwa $1^1/_2$ Meilen Abstand und nimmt dann wieder ab. Da gröfsere oberirdische Massenstörungen fehlen, so mufste *Schweizer* die Lotstörungen auf eine unterirdische Ursache zurückführen. Es liefsen sich durch verschiedene Annahmen befriedigende Darstellungen der Ablenkungen erzielen. Hervorgehoben wird die Hypothese, dafs eine Erdschicht von ca. 500^m Mächtigkeit und von der halben Dichtigkeit der Erdrinde (das wäre somit 1,4) in einer Breite von $3^1/_2$ bis 4 Meilen sich in unbegrenzter Länge von Ost nach West quer zu dem Meridian von Moskau hinzieht, und dafs sie im Norden und Süden von 5 Meilen breiten Schichten von $1^1/_2$facher Dichtigkeit der Erdrinde (also 4,2) begleitet wird.

Etwas anders referiert *Franz Klein* (in der Schrift *Zweck und Aufgabe der europ. Gradmessung.* Wien 1882). Darnach fand sich als Ursache eine Höhlung von elliptischer Form, $1^1/_2$ Kubikmeilen fassend, langgestreckt in Richtung *EW.* Nach den *Verhandlungen der 6. allgem. Konf. der europ. Gradmessung zu München* 1880, S. 35 des Generalberichts, wird gegenwärtig die Umgegend von Moskau auch mit einem Reversionspendel untersucht.

am *Kaukasus* ebenfalls bestätigt gefunden worden. Hier ist in einer vulkanischen Gegend eine Berücksichtigung der oberirdischen Massen zum Teil in solchem Mafse schädlich, dafs sich dadurch die astronomisch-geodätische Differenz von ca. 24 auf ca. 40″ steigert*).

Auch im Harze**) und in Nordamerika***) wurde man auf unterirdische Massenstörungen hingewiesen und *Petit* fand, dafs die Pyrenäen bei *Toulouse* scheinbar das Lot nicht ablenken†). Vergl. übrigens im 3. Kap. S. 228 und im 4. Kap. S. 364 § 38.

Hiernach wird man, ohne den Berechnungen der Anziehung durch sichtbare Massenunregelmäfsigkeiten ein hohes Interesse absprechen zu wollen, sich doch andererseits sagen müssen, dafs es bedenklich ist, für Gradmessungszwecke, wie *Schubert*, *Pechmann* u. a. wollen, die astronomischen Beobachtungsergebnisse an der Hand solcher Berechnungen *verbessern* zu wollen. Es wird immer fraglich sein, ob eine Verbesserung eintritt. Man darf mindestens nicht weiter als bis zu einer solchen Grenze die Massen in betracht ziehen, bei welcher die Wahrscheinlichkeit erheblich wird, dafs ober- und unterirdische Massenstörungseinflüsse von gleicher Ordnung sind. Auch würde es unerläfslich sein, durch Pendelbeobachtungen die Massenverteilung zu prüfen. Besser ist es jedenfalls, anstatt die Elimination lokaler Einflüsse durch Berechnung erzielen zu wollen, nach der Örtlichkeit verdächtige Stationen aus der Rechnung wegzulassen oder die Zahl der astronomischen Stationen in solchen Bezirken, wo man Störungen vermutet, zu vermehren und zwar in der Weise, dafs der Wahrscheinlichkeit nach dadurch eine Kompensation der Einflüsse in den Gradmessungsergebnissen erzielt wird. (Bd. 1 § 11 S. 611.)

Die Krümmung der Niveauflächen kann bei Berechnungen der Massenanziehung nur dann in frage kommen, wenn es sich lediglich um Studien über die Wirkung kontinentaler Massenstörungen handelt, wie in den §§ 18 u. ff. dieses Kapitels, insbesondere in § 24 S. 327. Dieser Fall bietet nach unseren Ergebnissen über die Massenverteilung in der Erdrinde S. 364 so wenig Interesse, dafs wir darauf nicht weiter eingehen, umsomehr als selbst bei Entfernungen von 1 Million Meter der Einflufs der Krümmung noch nicht erheblich ist; vergl. Formel (13) S. 328.

Erwähnt mag werden, dafs *Lamont* magnetische Anomalieen und Anomalieen der Lotrichtung auf Unregelmäfsigkeiten des magnetischen,

---

*) *Bericht über die Verhandlungen der 3. allgem. Konferenz der europäischen Gradmessung zu Wien* S. 13 und *Generalbericht* für 1871 S. 50.

**) *Publikation des kön. preufs. geodät. Instituts.* Astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1875; publ. 1876 durch Prof. *Albrecht*; S. 157. — 1881 war die Anzahl der in Polhöhe beobachteten Punkte auf 39 gestiegen.

***) Nach *Bruns*, *Figur der Erde* S. 29.

†) *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. I p. 86. (Vom Verf. dieses nicht selbst gelesen.)



metallischen Erdkernes zurückführt, gestützt darauf, dafs beide Anomalieen meist gleichzeitig auftreten. (*Meteorologische Wochenberichte der Münchener Sternwarte* Nr. 29—34 von 1866 [nur metallographiert] und *Sitzungsberichte der bayer. Akademie der Wissenschaften* 1865.)

§ 42. Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde aus Lotablenkungen. Denkt man sich, dafs nördlich und südlich eines Berges oder überhaupt einer bekannten Masse im gleichen Meridian und in nahezu gleicher Höhe astronomisch die geogr. Breite bestimmt wird und dafs man aufserdem geodätisch den Meridianbogen zwischen beiden Stationen ermittelt, so läfst sich berechnen, wieviel die astronomisch bestimmte Amplitude von der geodätisch in Bezug auf gewisse Dimensionen eines Referenzellipsoids bestimmten abweicht. Unter der Voraussetzung nun, dafs lediglich die in Rede stehende Masse störend aufs Lot wirkt und ohne dieselbe die Differenz der Lotrichtungen dem gewählten Referenzellipsoid entspricht, wird man die mittlere Dichtigkeit der Erde aus der Differenz der astronomisch und geodätisch berechneten Breitenamplituden finden können. Denn ist die Dichtigkeit der betreffenden Masse genau bekannt, so hat man nur nach den angegebenen Regeln die Anziehung derselben auf jede der beiden Stationen zu berechnen und mittelst des theoretischen Ausdruckes für die normale Schwerkraft in der in § 39 angegebenen Weise die nördliche Lotablenkung ξ zu bilden. Die mittlere Dichtigkeit Θ_m erscheint alsdann in der Gleichung, welche die beobachtete Differenz beider ξ darstellt, als Unbekannte.

Zu dem in § 39 benutzten Rechnungsgange ist zu bemerken, dafs daselbst für die normale Schwerkraft nur der Näherungsausdruck $\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$ gesetzt ist. Dies reicht eigentlich mit Rücksicht auf sonstige Fehlerquellen auch gegenwärtig aus. Will man aber strenger rechnen, so hat man die Formel (17) mit (18) S. 97 anzuwenden und darin die Erdmasse $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \Theta_m$ zu setzen. (Über die Berücksichtigung der Anziehung der Erdschichten über dem Meeresniveau bis zum Niveau der Stationen vergl. im 3. Kap. § 37 S. 244).

Das vorstehend geschilderte Verfahren leidet hauptsächlich an dem Übelstande, dafs sich mit den Anziehungen der bekannten Massen leicht diejenigen unbekannter Massen mischen. Heutzutage, wo es mehrere gut ausgebildete physikalische Methoden giebt, um Θ_m zu ermitteln (vergl. das 6. Kap.), wird man daher derartigen Bestimmungen nur einen untergeordneten Wert beilegen.

Den ersten Versuch einer solchen Bestimmung von Θ_m unternahmen gelegentlich der Gradmessung in *Peru Bouguer* und *de la Condamine* am *Chimborasso*, jedoch wegen mangelhafter Hilfsmittel ohne Erfolg (vergl. das Werk beider Gelehrten *La Figure de la Terre* etc. 1749; einige Details hieraus — sowie über das weiter Folgende — teilen auch das Haupt-

werk der englischen Vermessung, ***Principal Triangulation*** S. 597–609, und *Todhunter, History of Attraction*, Bd. 1 S. 244 und 248 mit).

Aus den bereits S. 375 erwähnten, am *Shehallien* angestellten Beobachtungen *Maskelynes* berechnete *Hutton* 1778 und 1821 $\Theta_m = 5$. Dabei setzte er die Dichtigkeit der Bergmasse gleich 2,7, oder genauer, dem Werte $\Theta_m = 5$ entsprechend, gleich 2,778. Zufolge nachträglicher Ermittelungen, die von *Playfair* auf Anregung *Huttons* gemacht wurden, vergl. *Phil. Transact.* 1811 und 1821 S. 276—292, schwankte sie eigentlich von 2,64 bis 3,2; *Playfair* nahm nach seinen Ermittelungen $\Theta_m = 4,7$. Wegen der Schwierigkeit der genauen Dichtigkeitsaufnahmen der Bergmassen schlug *Hutton* 1821 vor, eine groſse ägyptische Pyramide als ablenkende Masse zu benutzen, wobei er bemerkt, daſs das Maximum der Ablenkung in $^1/_4$ der Höhe stattfindet.

Es mag gleich hier erwähnt werden, daſs später *C. A. F. Peters* in seiner Abhandlung über die kleinen Ablenkungen des Lotes, *Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Ac. de St. Pét.* Bd. III S. 217, den gleichen Vorschlag macht, wobei er die einseitige Ablenkung am Fuſse bei 73ᵗ Höhe und 116ᵗ Seite zu 0,6″ angiebt. Er gedenkt hierbei des Vorschlags von *W. Struve*, Θ_m durch Beobachtungen an gegenüberliegenden Stellen der Ufer des Kanals von *Bristol* zu bestimmen. In diesem Kanal steigt nämlich die Flut auf 30′ engl. Immerhin beträgt bei 8 geogr. Mln. Länge und 4 Mln. Breite die Anziehung des Lotes durch die Flutmasse nur 0,2″, sodaſs eine genaue Bestimmung selbst mit dem Passageninstrument im 1. Vertikal Schwierigkeiten bereitet.

Eine sehr eingehende Untersuchung unternahm 1855 *James* am Berge *Arthurs Seat* bei *Edinburg*. Die nächste Veranlassung bot allerdings das Auftreten einer lokalen Abweichung bei einem nahegelegenen Punkte und der Wunsch, die lokalen Lotanziehungen zu studieren. Auſser der nördlichen und südlichen Station hatte man noch eine auf der Spitze des Berges, dessen Θ nach vielen Bestimmungen zu 2,75 angenommen wurde. Es gaben die 3 Stationen, wenn c eine Konstante bedeutet und $\Theta : \Theta_m = q$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$\begin{aligned} -2,70\,q + 2,81'' + c &= 0 \\ +2,40\,q \quad\cdot\quad + c &= 0 \\ +5,24\,q - 1,26'' + c &= 0, \end{aligned}$$

welche sich bis auf $+0,04''$, $-0,18''$ und $+0,08''$ durch $q = 0,517$ mit $\Theta_m = 5,32$ darstellen lassen. (Auſser in der *Ordnance Survey, Princ. Triang.*, auch in den *Phil. Transact.* Bd. 146 mitgeteilt).

Pechmann fand gelegentlich seiner Lotablenkungsstudien in den Alpen, vergl. S. 377, mit $\Theta = 2,75$ auch 2 Werte für Θ_m, von denen allerdings nur der erste, nämlich 6,13, genügende Sicherheit bietet, um mit anderen derartigen guten Bestimmungen konkurrieren zu können.

Das arithmetische Mittel der drei Bestimmungen 4,7 (oder 5), 5,32 und 6,13 ist rund 5,4.

§ 43. Ph. v. Jollys Bestimmung von Θ_m aus Wägungen*).

Für eine Quecksilberkugel im Gewicht von 5009450^{mg} fand sich

*) *Ph. v. Jolly, die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation.* 2. Abhandl. München 1881. Aus den *Abh. der kön. bayer. Ak. der Wissenschaften*, II. Cl., 14. Bd. 2. Abt. [die 1. Abh. Bd. 13 enthält nur vorläufige Versuche].

durch Wägungen in einem Turme mit einer feinen, zweiarmigen Wage, welche aufser mit den üblichen Wagschalen noch mit einem zweiten Paare $21{,}005^m$ tiefer versehen war, eine Gewichtszunahme von $31{,}686^{mg}$, wenn sie in die tiefere Schale gebracht wurde. Befand sich aber unterhalb der betr. unteren Wagschale eine Bleikugel von 1^m Durchmesser, so stieg die Gewichtszunahme auf $32{,}275^{mg}$, betrug also $0{,}589^{mg}$ mehr.

Der Radius der Bleikugel war $0{,}4975^m$, ihr spez. Gewicht 11,186, ihr Abstand vom Mittelpunkt des unten befindlichen Quecksilbergewichts $0{,}5686^m$.

Nennt man die Schwerebeschleunigung ohne Wirkung der Bleikugel oben g_1, unten g_2, so ist sie mit Wirkung der Bleikugel

$$\text{oben gleich } g_1 + k^2 m \cdot \frac{1}{e_1^2},$$

$$\text{unten } \quad ,, \quad g_2 + k^2 m \cdot \frac{1}{e_2^2},$$

wenn m die Masse der Bleikugel ist, und e_1 und e_2 ihre Abstände vom oben bezw. unten liegenden Gewicht sind. Man hat nun offenbar

$$\frac{g_2 - g_1}{g_1} = \frac{31{,}686}{5\,009\,450}, \tag{1}$$

ferner mit einer unerheblichen Vernachlässigung im Nenner linker Hand

$$\frac{g_2 - g_1 + k^2 m\left(\frac{1}{e_2^2} - \frac{1}{e_1^2}\right)}{g_1} = \frac{31{,}686 + 0{,}589}{5009450},$$

also

$$\frac{k^2 m\left(\frac{1}{e_2^2} - \frac{1}{e_1^2}\right)}{g_1} = \frac{0{,}589}{5009450}. \tag{2}$$

Dabei ist

$$e_2 = 0{,}5686^m, \qquad e_1 = 21{,}5736^m,$$
$$m = \frac{4}{3}\pi(0{,}4975)^3 . 11{,}186. \tag{2*}$$

Was g_1 anbetrifft, so ist nach S. 97 (17), (18) und (23) dessen normaler Teil gleich

$$\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R\left(1 - \frac{2H}{R}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\mathfrak{a} - \frac{3}{2}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\sin^2 B\right) \tag{3}$$

anzunehmen, wenn H die Meereshöhe und B die geogr. Breite der Station ist. Die geogr. Breite kann genau genug $= 48^0\,8'$ gesetzt werden. H wird für München zu 515^m angegeben; wie hieraus H für die Beobachtungsorte sich berechnet, wird aber nicht gesagt. Die hierdurch entstehende Unsicherheit ist jedoch geringfügig, namentlich mit Rücksicht auf die Anomalieen infolge der unregelmäfsigen Massen-

lagerung in der Erdrinde. Es könnte allerdings noch die Anziehung der Terrainschicht bis zum Meeresniveau durch Beifügung des Faktors $\frac{5}{8}$ zu $\frac{2H}{R}$ in (3) berücksichtigt werden, aber der Nutzen davon ist zweifelhaft, vergl. S. 244 § 37.

Mit Rücksicht auf (2*) und (3) findet sich aus (2):

$$\Theta_m = \frac{11,186}{0,589}(0,4975)^3\left(\frac{1}{0,5686^2} - \frac{1}{21,57^2}\right)\frac{5009450}{6370300}\,1,0013\,,$$

also

$$\Theta_m = 5,691.$$

Jolly, welcher einen anderen, weniger strengen Ausdruck für g_1 benutzt, und das zweite Glied der Parenthese vernachlässiget, findet 5,692. Der wahrscheinliche Fehler des Resultates folgt aus der Übereinstimmung der Einzelwerte zu $\pm$ 0,068; er kann aber recht wohl etwas gröſser sein*).

Jolly bemerkt, daſs der beobachteten Gewichtsabnahme von $31,686^{mg}$ eine theoretische im Betrage von $33,059^{mg}$ gegenüberstehe, und er findet die Erklärung darin, daſs nahegelegene hohe Gebäude den Turm, wo beobachtet wurde, überragen. Übrigens erhalten wir einen etwas anderen theoretischen Wert. Nach Formel (17) S. 97 ergiebt sich für die normale Schwerkraft:

$$\frac{g_2 - g_1}{g_1} = \frac{2 \cdot 21,005\left(1 + \frac{2}{3}\mathfrak{a} + \mathfrak{c} - 2\,\mathfrak{a}\sin^2 B\right)}{R\left\{1 - \frac{2H_1}{R}\right\}}\,,$$

worin $B = 48^0 8'$ und H_1 gleich ca. 530^m zu setzen ist. Die Erdschicht unterhalb des Beobachtungsturmes bis zum Meeresniveau berücksichtigen wir nach § 37 S. 244 nicht.

Berechnen wir nun nach Maſsgabe der angegebenen Formel $(g_2 - g_1) : g_1$ und multiplizieren mit 5009450, so folgt

$$33,108^{mg}\,,$$

ein Wert, der durch die Unsicherheit des Nenners der Formel (d. h. der Annahme über g_1) kaum über $^1/_{5000}$ irrig sein dürfte. Die Differenz mit dem beobachteten Werte muſs daher wesentlich durch die verschiedene Anziehung benachbarter Massen auf beide Orte des Quecksilbergewichtes erklärt werden. Vergl. hierzu noch § 3 S. 275 und 276.

*) Wenn *Jolly* angiebt, daſs die Differenz seines Wertes für Θ_m von dem Werte aus Drehwagenversuchen (6. Kap.) eventuell z. T. aus lokalen Anomalieen in g erklärlich sei, so scheint uns, daſs er darin irrt, denn Anomalieen in g_1 im Betrage von 1 bis $2^0/_0$ sind erfahrungsmäſsig nicht annehmbar.

Fünftes Kapitel.

Zeitliche Änderungen der Niveauflächen.

§ 1. Die Störungen in der Schwerkraft durch Sonne und Mond. Bei Betrachtung der Schwerkraft ist bisher von der Anziehung der Himmelskörper abgesehen worden; vergl. im 1. Kap. § 5 S. 7. Es sind auch nur die Anziehungen von Sonne und Mond merklich, und selbst diese sind sehr klein. Die Wirkung ist eine mit der Zeit veränderliche, da diese Gestirne zu irgend einem Erdorte eine mit der Zeit veränderliche Stellung haben. Nach dem 1. Kap. § 3 S. 5 erhält man den Einflufs der Anziehung eines Himmelskörpers auf die Schwerkraft dadurch, dafs man von den Komponenten der Anziehung in Bezug auf einen betrachteten Punkt P' die entsprechenden, aus (6) S. 3 zu entnehmenden Komponenten für den Schwerpunkt der Erde abzieht. Die Masse des Himmelskörpers denken wir uns dabei genügend genau in ihrem Schwerpunkt konzentriert und die Niveauflächen der Erde ebenso genau genug als Kugelflächen, konzentrisch zum Erdschwerpunkt M. Die Bewegung des letzteren entspricht alsdann der Anziehung des Himmelskörpers auf eine in demselben gelagerte Masseneinheit.

In Fig. 61 stellt $\mathfrak{M}$ Sonne oder Mond vor, ζ' ist die wirkliche Zenithdistanz von $\mathfrak{M}$ in P' und ζ die geozentrische Zenithdistanz. Die Anziehung der Masse $\mathfrak{M}$ auf P' kann in eine in P' horizontale und vertikale Komponente zerlegt werden, ebenso die Anziehung von $\mathfrak{M}$ auf Punkt M in entsprechender Weise. Zu der Schwerebeschleunigung in P' tritt demnach eine horizontale Komponente in Richtung nach $\mathfrak{M}$ gleich

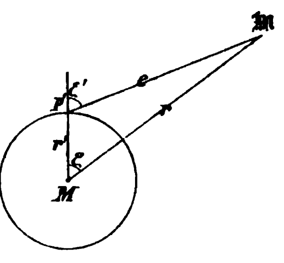


Fig. 61.

$$k^2 \mathfrak{M} \left\{ \frac{\sin \zeta'}{e^2} - \frac{\sin \zeta}{r^2} \right\} \tag{1}$$

und eine vertikale Komponente in Richtung nach aufsen gleich

$$k^2 \mathfrak{M} \left\{ \frac{\cos \zeta'}{e^2} - \frac{\cos \zeta}{r^2} \right\}. \tag{2}$$

Wir formen zunächst den Ausdruck (1) um, indem wir dafür schreiben

$$k^2 \mathfrak{M} \left\{ \frac{e \sin \zeta'}{e^3} - \frac{r \sin \zeta}{r^3} \right\} \tag{3}$$

und beachten, dafs $e \sin \zeta' = r \sin \zeta$ ist, sowie gesetzt werden kann: $e = r - r' \cos \zeta$, woraus in hinreichender Annäherung folgt:

$$\frac{1}{e^3} = \frac{1}{r^3} \left\{ 1 + 3 \frac{r'}{r} \cos \zeta \right\}.$$

Damit giebt (3):

$$\frac{3}{2}\, k^2 \mathfrak{M}\, \frac{r'}{r^3} \sin 2\zeta\,. \tag{4}$$

Wir setzen nun für r' den mittleren Erdradius R und führen die Horizontalparallaxe p des Gestirns, d. h. den Winkel ein, unter welchem Radius MP' von $\mathfrak{M}$ aus erscheint, wenn $\mathfrak{M}$ im Horizont von P' liegt. Es ist aber

$$\sin p = \frac{r'}{r}\,. \tag{5}$$

Hiermit erhalten wir aus (4) mit Rücksicht auf den Näherungswert G der Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche behufs Elimination von k^2, nämlich

$$G = \frac{k^2 M}{R^2}\,, \tag{6}$$

die nach $\mathfrak{M}$ zu gerichtete horizontale Komponente der Schwerestörung gleich

$$\frac{3}{2}\, G\, \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p \sin 2\zeta\,. \tag{7}$$

Dividiert man diesen Ausdruck mit G und multipliziert mit ϱ'', so erhält man endlich die Lotstörung und zwar im Sinne einer Anziehung des aufgehängten Lotes gegen $\mathfrak{M}$ hin.

Die meridionale und ostwestliche Komponente der Lotstörung ergeben sich dann durch Multiplikation mit $\cos A$ und $\sin A$, wenn A das Azimut des Gestirns ist. Zählen wir A wie üblich südwestlich und bezeichnen mit ξ die südliche Abweichung des gestörten Zeniths, mit η die westliche, so wird

$$\underset{\text{in Sek.}}{\xi} = -P \sin 2\zeta \cos A \qquad \underset{\text{in Sek.}}{\eta} = -P \sin 2\zeta \sin A$$

mit

$$\underset{\text{in Sek.}}{P} = \frac{3}{2}\, \varrho''\, \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p\,. \tag{8}$$

$$\text{Für den } \textit{Mond} \text{ ist } \frac{\mathfrak{M}}{M} = \frac{1}{81^1/_4}\,,\quad p = 57'\; 2{,}8''\,,\quad P = 0{,}0174''\,;$$

$$\text{für die } \textit{Sonne} \text{ ist } \frac{\mathfrak{M}}{M} = 329\,000\,,\quad p = 8{,}83''\,,\quad P = 0{,}0080''. \tag{8*}$$

Diese Werte sind so klein, daſs sie bei den geographischen Koordinaten der zugänglichen Teile der Erdoberfläche nicht in betracht kommen.

Auch die Störung der Schwerebeschleunigung selbst ist unerheblich. Die horizontale Komponente (1) hat jedenfalls gar keinen in betracht kommenden Einfluſs; was die vertikale (2) anbetrifft, so beachten wir, daſs

$$e \cos \zeta' = r \cos \zeta - r'$$

und wie früher:

$$\frac{1}{e^3} = \frac{1}{r^3}\left\{1 + \frac{3r'}{r}\cos\zeta\right\}.$$

Damit geht (2) über in

$$k^2 \mathfrak{M} \frac{r'}{r^3}\left\{-1 + 3\cos^2\zeta - \frac{3r'}{r}\cos\zeta\right\}.$$

Führen wir noch $\sin p$ mittelst (5), sowie G mittelst (6) ein und vernachlässigen das 3. Glied der Parenthese, so folgt die Störung der Schwerebeschleunigung gleich

$$G \cdot \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p\,(3\cos^2\zeta - 1). \tag{9}$$

Für den *Mond* ist $\frac{\mathfrak{M}}{M}\sin^3 p = {}^1/_{17\,800\,000}$;

für die *Sonne* ist $\frac{\mathfrak{M}}{M}\sin^3 p = {}^1/_{38\,800\,000}$.

Die Störung der Schwerkraft ist hiernach verschwindend klein.

Die Störungen der Richtung und Gröfse der Schwerkraft bedingen aber eine Änderung der *Gestalt der Niveauflächen*. Um dieselbe zu ermitteln, bilden wir das Potential $\mathfrak{V}$ des Einflusses der Mond- und Sonnenanziehung für Punkte einer ungestörten Niveaufläche.

Dasselbe ist mit Rücksicht auf den Ausdruck (7) für die horizontale Komponente dieser Anziehungen für den Mond sowie für die Sonne von der Form

$$\mathfrak{V} = +\frac{3}{2} GR \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p \cos^2\zeta. \tag{10}$$

Denn verschieben wir den angezogenen Punkt P horizontal gegen das Gestirn hin um $-R\partial\zeta$ und bilden dementsprechend

$$-\frac{\partial\mathfrak{V}}{R\partial\zeta},$$

so ergiebt sich wieder die horizontale Komponente übereinstimmend mit (7). Verschieben wir dagegen rechtwinkelig zur Vertikalebene des Gestirnes, in welcher Richtung die Anziehung null ist, so wird, wie es sein mufs, $\partial V =$ null.

Damit nun eine neue Fläche konstanten Potentials entsteht, und zwar desselben Potentialwertes wie ohne die Störung, mufs das ungestörte Niveau am Punkte P um

$$+\frac{3}{2} R \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p \cos^2\zeta, \text{ d. i. } R \operatorname{arc} P \cos^2\zeta, \tag{11}$$

gehoben werden. Diese Hebung ist ein Maximum in der Richtung vom anziehenden Körper nach dem Erdschwerpunkt, null in der zu dieser Richtung normalen Ebene durch letzteren. Unter dem Einflufs des Mondes oder der Sonne ändert sich somit die Gestalt der Niveauflächen im Sinne des Überganges einer Kugel in ein längliches Rotationsellipsoid mit der relativen Axenverlängerung

$$\operatorname{arc} P,$$

$$\text{d. i. für den } \textit{Mond } {}^1/_{12\,000\,000}, \text{ wobei } R \text{ arc } P = 0{,}54^m \text{ ist,} \qquad (12)$$
$$\text{für die } \textit{Sonne } {}^1/_{26\,000\,000}, \quad ,, \quad ,, \quad = 0{,}25^m \;,, .$$

Die grofse Axe des Ellipsoids liegt in der Richtung nach dem störenden Körper.

Die Kräfte, welche die Gestalt der Niveauflächen ändern, bewirken auch eine Bewegung des Meerwassers, welche als Flut und Ebbe bekannt ist. Die Veränderung der Gestalt der Meeresfläche entspricht jedoch nicht der Veränderung der Niveauflächen, welche wir eben ermittelt haben. Es würde das nur der Fall sein, wenn die Erde sich nicht um ihre Axe drehte und Mond und Sonne die gleiche Stellung zur Erde dauernd beibehielten. Wegen der Axendrehung der Erde und der Bewegung von Mond und Sonne kann aber das Wasser den Gleichgewichtszustand nicht annehmen, welcher den gestörten Niveauflächen entspricht.

Die Flutbewegung des Meerwassers bedingt im allgemeinen eine kleine Änderung der oben ermittelten Werte, die davon herrührt, dafs eben die Meeresfläche eine geänderte Gestalt und das Potential der Anziehung der Erde auf Punkte ihrer Oberfläche einen geänderten Wert hat. Diese *sekundären* Störungen sind jedoch im allgemeinen noch weit geringer, als die primären. Nur an gewissen Meeresküsten, wo besonders hohe Fluten eintreten, können sie durch deren Einflufs nennenswerte lokale Beträge erreichen, die nach den Störungsformeln für horizontale, unendlich lange Prismen im 4. Kap. sich leicht schätzen lassen.

Die Störung des Lotes wurde bereits um 1845 richtig dargestellt von *C. A. F. Peters* in der Abh.: *Von den kleinen Ablenkungen der Lotlinie und des Niveaus* (*Bull. de la Cl. physico-mathém. de l'Ac. de St. Pétersb.* t. III p. 219)*). *Peters* fand dieselben Koefficienten zu (8) wie wir, obgleich er etwas andere Werte für $\mathfrak{M}$ und p ansetzte.

Auf die sekundären Lotstörungen haben nach *Thomson und Tait, Handbuch* Bd. 1, 2. T. S. 379, schon *Robison* 1804 und *Forbes* 1849 hingewiesen; ersterer mit Bezug auf die 20^m hohen Fluten der *Fundy-Bay*.

§ 2. **Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt.** Bisher wurde angenommen, dafs die Erde sich mit konstanter Geschwindigkeit um eine in ihr feste Schweraxe dreht, die im Raume unverändert ihre Richtung beibehält. Wir untersuchen jetzt, was die Theorie an der Hand der Erfahrung zu dieser Annahme sagt und beginnen mit der Aufstellung der allgemeinen Gleichungen für die Drehbewegung der Erde um ihren Schwerpunkt. Nach dem 1. Kapitel § 3 S. 5 nimmt *d'Alemberts* Prinzip für diese Bewegung (mit Weglassung der Striche behufs Vereinfachung) die nachstehende Form an:

*) Die uns nicht genau bekannte Jahreszahl 1845 ist mit Rücksicht darauf angegeben, dafs t. I 1843 erschien.

$$\sum \left\{ \begin{array}{l} \left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) dm \, . \, \delta x \\ + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) dm \, . \, \delta y \\ + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) dm \, . \, \delta z \end{array} \right\} = 0 . \tag{1}$$

Hierin erstreckt sich die Summierung über alle Massenteile dm der Erde; X, Y und Z sind die Komponenten der beschleunigenden Kräfte (der Kräfte für die Masseneinheit) im Punkte (xyz), wo dm lagert, mit oder ohne Abzug der entsprechenden Komponenten für den Schwerpunkt. Die rechtwinkeligen Koordinatenaxen, welche durch letzteren gelegt sind, haben eine beliebige, aber konstante Richtung, und wir nennen daher dieses System das *feste* Axensystem, wobei die nicht weiter in betracht kommende Parallelverschiebung der ganzen Erde ignoriert ist.

Um nun zu Gleichungen zu gelangen, welche die Drehbewegung charakterisieren, nehmen wir der Reihe nach um die z-, x- und y-Axe virtuelle Drehbewegungen vor. Ist die virtuelle Drehung um die z-Axe gleich $\delta\alpha$, so wird

$$\delta x = -y\delta\alpha \qquad \delta y = x\delta\alpha \qquad \delta z = 0 ,$$

womit (1) ergiebt

$$\sum \left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) dm = \sum (xY - yX)\, dm .$$

Entsprechend erhält man aus den anderen virtuellen Drehungen:

$$\sum \left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) dm = \sum (yZ - zY)\, dm ,$$

und

$$\sum \left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) dm = \sum (zX - xZ)\, dm . \tag{2}$$

Rechter Hand stehen die Drehungsmomente der Kräfte. Bei Berechnung derselben kann man die inneren Kräfte weglassen. Betrachten wir z. B. das Aggregat $xY - yX$ für eine einzelne Kraft, deren Komponente parallel zur xy-Ebene gleich R sei, so wird $xY - yX = Rr \sin(\gamma - \alpha)$, wenn R gegen die x-Axe um γ und der Radiusvektor r des Angriffspunktes gegen dieselbe um α geneigt ist. $r \sin(\gamma - \alpha)$ giebt aber auch den normalen Abstand von R und der z-Axe oder den kürzesten Abstand der Kraft von der z-Axe an. Ist nun die Kraft eine innere, zu welcher immer eine gleich grofse, entgegengesetzt gerichtete existiert, so hat offenbar für beide Kräfte $r \sin(\gamma - \alpha)$ denselben Wert, das Drehungsmoment $Rr \sin(\gamma - \alpha)$ aber denselben Wert mit entgegengesetztem Zeichen, sodafs in der Summe die Wirkung beider Kräfte verschwindet. Wir schreiben nun anstatt (2):

$$\sum \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right) dm = N$$
$$\sum \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}\right) dm = L \tag{3}$$
$$\sum \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2}\right) dm = M\,;$$

hierin bezeichnen LMN die Summen der Drehungsmomente der äufseren, *bewegenden* Kräfte in Bezug auf die x-, y- und z-Axe.

Die Gleichungen (3) schreiben wir endlich noch anders mit Benutzung der Flächengeschwindigkeiten. Es ist nämlich

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right)}{dt} = 2 \frac{df_{xy}}{dt}\,,$$

wenn

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2 f_{xy} \tag{4}$$

gesetzt wird. Wie man leicht durch Anschauung findet, ist $x\,dy - y\,dx$ die doppelte Fläche, welche die in die xy-Ebene fallende Projektion des Radiusvektors des Punktes (xyz) in der Zeit dt überstreicht; f_{xy} hat daher die Bedeutung der Flächengeschwindigkeit in der xy-Ebene.

Hiermit erhalten wir aus (3), wenn f_{xy}, f_{yz} und f_{zx} diese Flächengeschwindigkeiten in den Ebenen xy, yz und zx, d. h. um die z-, x- und y-Axe bezeichnen:

$$2 \sum \frac{df_{xy}}{dt} dm = N$$
$$2 \sum \frac{df_{yz}}{dt} dm = L \tag{5}$$
$$2 \sum \frac{df_{zx}}{dt} dm = M\,.$$

§ 3. **Beziehung auf ein bewegtes Koordinatenaxensystem.** Um die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt zu studieren, führt man nun anstatt der festen Axen ein zunächst beliebig *bewegtes* System von drei zu einander rechtwinkeligen Schweraxen ein. Die Winkel, welche letztere mit den Axen der xyz einschliefsen, seien bezw. (vergl. die schematische Fig. 62):

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\,, \quad \mu_1\, \mu_2\, \mu_3\,, \quad \nu_1\, \nu_2\, \nu_3$$

und die Flächengeschwindigkeiten um diese Axen bezw.

$$f'_{yz}\,, \qquad f'_{zx}\,, \qquad f'_{xy}\,.$$

Die Fig. zeigt die positiven Pole der Axen auf einer Kugelfläche um den Erdschwerpunkt.

Fig. 62.

Dann hat man nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie über die Projektion von Flächen:

$$\begin{aligned} f_{yz} &= f'_{yz} \cos\lambda_1 + f'_{zx} \cos\mu_1 + f'_{xy} \cos\nu_1 \\ f_{zx} &= f'_{yz} \cos\lambda_2 + f'_{zx} \cos\mu_2 + f'_{xy} \cos\nu_2 \\ f_{xy} &= f'_{yz} \cos\lambda_3 + f'_{zx} \cos\mu_3 + f'_{xy} \cos\nu_3 \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Insbesondere folgt aus letzterer Gleichung

$$\frac{df_{xy}}{dt} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{df'_{yz}}{dt} \cos\lambda_3 + \frac{df'_{zx}}{dt} \cos\mu_3 + \frac{df'_{xy}}{dt} \cos\nu_3 \\ - f'_{yz} \sin\lambda_3 \frac{d\lambda_3}{dt} - f'_{zx} \sin\mu_3 \frac{d\mu_3}{dt} - f'_{xy} \sin\nu_3 \frac{d\nu_3}{dt} \end{array} \right\}.$$

Denken wir uns aber zur Zeit t die festen Axen mit den entsprechenden bewegten zusammenfallend, so ist

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0 & \lambda_2 = \frac{\pi}{2} & \lambda_3 = \frac{\pi}{2} \\ \mu_1 = \frac{\pi}{2} & \mu_2 = 0 & \mu_3 = \frac{\pi}{2} \\ \nu_1 = \frac{\pi}{2} & \nu_2 = \frac{\pi}{2} & \nu_3 = 0\,; \end{array}$$

es wird daher

$$\frac{df_{xy}}{dt} = \frac{df'_{xy}}{dt} - f'_{yz} \frac{d\lambda_3}{dt} - f'_{zx} \frac{d\mu_3}{dt}$$

und ganz ähnlich für f_{yz} und f_{zx}.

Bezeichnen wir nun die Winkelgeschwindigkeiten des bewegten Systems um die festen Axen der x, y und z zur Zeit t bezw. mit

$$p, \; q \text{ und } r,$$

so ist augenscheinlich, vergl. Fig. 62 und 63:

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = +q\,; \qquad \frac{d\mu_3}{dt} = -p\,.$$

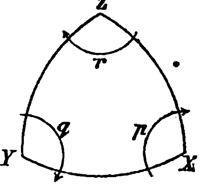


Fig. 63.

Man erhält hiermit

$$\frac{df_{xy}}{dt} = \frac{df'_{xy}}{dt} - q f'_{yz} + p f'_{zx}$$

und somit aus (5) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned} 2\sum \frac{df'_{xy}}{dt}\, dm - 2q \sum f'_{yz}\, dm + 2p \sum f'_{zx}\, dm &= N \\ 2\sum \frac{df'_{yz}}{dt}\, dm - 2r \sum f'_{zx}\, dm + 2q \sum f'_{xy}\, dm &= L \\ 2\sum \frac{df'_{zx}}{dt}\, dm - 2p \sum f'_{xy}\, dm + 2r \sum f'_{yz}\, dm &= M\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Bei Anwendung dieser Gleichungen ist zu beachten, daſs immer

die augenblickliche Lage des bewegten Systems als festes System dient. Die f' sind, wie aus der Aufstellung der (1) hervorgeht, so zu verstehen, als wäre das bewegte Axensystem für den Augenblick fest. Im übrigen bestehen keine Bedingungen, insbesondere ist die Lage des beweglichen Systems noch ganz willkürlich.

§ 4. **Drehbewegung der als fester Körper betrachteten Erde um ihren Schwerpunkt.** Wir nehmen jetzt an, daſs die Erde ein fester Körper ist oder doch wie ein solcher rotiert, und wir denken uns ferner das bewegte Axensystem fest mit dem Erdkörper verbunden. Dann sind zur Zeit t die Gröſsen p, q und r nicht nur die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen sich das bewegte System gegen das feste Axensystem dreht, sondern auch die Winkelgeschwindigkeiten, mit denen sich der Körper selbst um die festen Axen dreht.

Dreht sich aber der Körper im Zeitintervall dt um die x-Axe mit der Winkelgeschwindigkeit p, so ändern sich die Koordinaten y und z, wie man leicht durch Betrachtung der yz-Ebene erkennt, um bezw. $-pz\,dt$ und $+py\,dt$, während x konstant bleibt. Ermittelt man in dieser Weise die partiellen Koordinatenänderungen, welche den Drehungen um die 3 Axen entsprechen, so wird erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \quad . \quad + qz - ry \\ \frac{dy}{dt} &= -pz \quad . \quad + rx \\ \frac{dz}{dt} &= +py - qx \quad . \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Bilden wir hiermit nach Maſsgabe von (4) S. 388 § 2 den Ausdruck für $2f_{xy}$, so folgt

$$2f_{xy} = 2f'_{xy} = r(x^2 + y^2) - pzx - qyz$$

und

$$2\sum f'_{xy}\,dm = r\sum(x^2+y^2)\,dm - p\sum zx\,dm - q\sum yz\,dm. \tag{2}$$

Da wir es jetzt mit einem festen Körper zu thun haben, würde es angemessener sein, die Summenzeichen durch Integrale zu ersetzen. Jedoch behalten wir sie der Kürze halber bei, da ohnehin demnächst neue Symbole auftreten.

Verlegen wir nun die mit dem Körper fest verbundenen Axen in seine 3 Hauptaxen, so sind die Ausdrücke

$$\sum yz\,dm, \quad \sum zx\,dm, \quad \sum xy\,dm \tag{3}$$

gleich null. Ferner werden die Ausdrücke



$$\sum (y^2 + z^2)\, dm = A$$
$$\sum (z^2 + x^2)\, dm = B \tag{4}$$
$$\sum (x^2 + y^2)\, dm = C$$

die drei Hauptträgheitsmomente. Aus (2) erhält man also

und entsprechend wird
$$\left.\begin{aligned} 2\sum f'_{xy}\, dm &= rC, \\ 2\sum f'_{yz}\, dm &= pA, \\ 2\sum f'_{zx}\, dm &= qB. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hiermit gehen die (2) des vorigen Paragraphen über in:

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = N$$
$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = L \tag{6}$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp = M.$$

§ 5. **Drehbewegung mit Vernachlässigung der äufseren Kräfte und für $A = B$.** Die äufseren Kräfte, von denen die Drehungsmomente N, L und M herrühren, wollen wir zunächst vernachlässigen. Wir werden weiterhin erkennen, dafs dieser Vorgang bereits einen guten Einblick giebt. Wir setzen ferner mit Rücksicht auf das Ergebnis der Pendelbeobachtungen S. 74 zunächst $A = B$ und erhalten so aus dem Gleichungssystem (6) des vorigen Paragraphen das einfachere:

$$C\frac{dr}{dt} = 0$$
$$A\frac{dp}{dt} + (C - A)\, qr = 0 \tag{1}$$
$$A\frac{dq}{dt} - (C - A)\, pr = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dafs r von der Zeit unabhängig ist. Nennen wir die Winkelgeschwindigkeiten p, q und r zur Zeit t = null bezw. p_0, q_0 und r_0, so ist also

$$r = r_0. \tag{2}$$

Setzen wir jetzt

$$\frac{C - A}{A} r_0 = \lambda, \tag{3}$$

so gehen die 2. und 3. Gleichung (1) über in

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \lambda q &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \lambda p &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

deren Integral nach bekannten Regeln der Lehre von den Differentialgleichungen die Form hat

$$\begin{aligned} p &= a \cos(\lambda t + \mu) \\ q &= a \sin(\lambda t + \mu), \end{aligned} \tag{5}$$

für a und μ als Konstanten, die vom Anfangszustande abhängen mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} p_0 &= a \cos \mu \\ q_0 &= a \sin \mu. \end{aligned} \tag{5*}$$

(Auf diese Ausdrücke (5) kommt man u. a. dadurch, dafs man die erste der (4) differenziert, mittelst der zweiten (4) $dq : dt$ eliminiert und die entstehende Differentialgleichung 2. Ordnung für p integriert). Die (5*) geben zwei Wertsysteme (a, μ), indem das Vorzeichen von a nicht bestimmt ist. Beide Systeme führen aber mittelst der (5) zu denselben Werten p und q.

Um die erhaltenen Integralausdrücke zu deuten, erinnern wir daran, dafs den Drehbewegungen p, q und r um die drei Axen immer eine einzige Bewegung um die Momentanaxe substituiert werden kann, und zwar hat man nach einem bekannten Satze über die Zerlegung einer Drehbewegung nach den drei Axen, wenn ω die Drehgeschwindigkeit um die Momentanaxe, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ihre Stellungswinkel sind, Fig. 64:

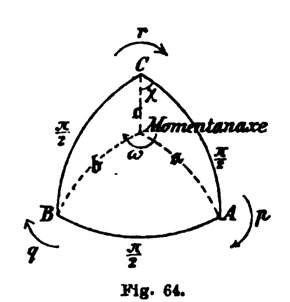


Fig. 64.

$$p = \omega \cos \mathfrak{a}, \qquad q = \omega \cos \mathfrak{b}, \qquad r = \omega \cos \mathfrak{c}.$$

Hierbei ist mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Gleichheit der kleineren Trägheitsmomente A und B zu bemerken, dafs infolge dessen das Trägheitsmoment für alle zur C-Axe normalen Schweraxen denselben Wert hat und daher für die beiden zur C-Axe normalen Axen des mit der Erde fest verbundenen Koordinatenaxensystems nun irgend zwei zur C-Axe normale Schweraxen zu nehmen sind.

Die sphärischen Relationen der Fig. 64 zeigen aber, dafs

$$\cos \mathfrak{a} = \sin \mathfrak{c} \cos \chi, \qquad \cos \mathfrak{b} = \sin \mathfrak{c} \sin \chi$$

ist, womit

$$\begin{aligned} r &= \omega \cos \mathfrak{c} \\ p &= \omega \sin \mathfrak{c} \cos \chi \\ q &= \omega \sin \mathfrak{c} \sin \chi \end{aligned} \tag{6}$$

wird. Hieraus folgt einerseits

$$\omega^2 = r^2 + p^2 + q^2 ;$$

andererseits ist, nach (2), (5) und (5*)

$$r^2 + p^2 + q^2 = r_0^2 + p_0^2 + q_0^2 .$$

Mithin ist die *Rotationsgeschwindigkeit der Erde um die Momentandrehaxe konstant,* nämlich gleich

$$\omega = \sqrt{r_0^2 + p_0^2 + q_0^2}, \tag{7}$$

was mit den Erfahrungen im wesentlichen übereinstimmt.

Die 1. Gleichung (6) zeigt jetzt, dafs auch $\mathfrak{r}$ konstant ist, d. h. *die Momentandrehaxe beschreibt um die Axe des gröfsten Trägheitsmoments einen Kreiskegel vom halben Öffnungswinkel* $\mathfrak{r}$, wobei zufolge der Vergleichung von (5) und (6), für μ das Symbol χ_0 gesetzt, die Lage des sphärischen Radius $\mathfrak{r}$ auf der Kugel vom Radius 1 gegeben ist durch

$$\chi = \lambda t + \chi_0 , \tag{8}$$

die Geschwindigkeit der Rotation des Radius $\mathfrak{r}$ aber durch

$$\frac{d\chi}{dt} = \lambda , \tag{9}$$

die Umlaufszeit der Momentanaxe um die C-Axe also endlich durch

$$T = \text{val. abs. } \frac{2\pi}{\lambda} . \tag{10}$$

Wenn die Momentandrehaxe, welche die Lage der Himmelspole bestimmt, sich im Erdkörper verschiebt, so müssen geogr. Breite, geogr. Längendifferenzen und Azimute veränderlich sein und zwar im vorliegenden Falle periodisch veränderlich. Man hat namentlich die Beträge der Polhöhe einzelner Orte studiert und dabei überhaupt nur Unterschiede von Zehntelsekunden bemerkt, die zum Teil periodische Veränderungen zu sein scheinen und vielleicht von der Rotation der Momentandrehaxe im Erdkörper herrühren können. Die Dauer T der Periode aber läfst sich zunächst nur aus anderen Erscheinungen mit Sicherheit erkennen, die ebenfalls wie λ von $(C - A) : A$ abhängen. Dieses ist insbesondere die sehr merkbare Bewegung der Momentanaxe im Raume unter der Einwirkung von Sonne und Mond, wie wir weiterhin noch etwas näher ausführen werden. Die Lunisolarpraezession, ein wesentlicher Teil der erwähnten Bewegung, giebt

$$\frac{C - A}{C} = 0{,}003272 ,$$

woraus folgt

$$\frac{C - A}{A} = 0{,}003283 . \tag{11}$$



Da nun erfahrungsmäfsig ε sehr klein sein mufs, so kann man nach (6) mit grofser Genauigkeit $r_0 = \omega$ setzen und erhält aus (3):

$$\lambda = \frac{C - A}{A}\,\omega = 0{,}003283\,\omega\,. \tag{12}$$

Mittelst (10) wird somit, wenn man noch beachtet, dafs der Absolutwert von $2\pi : \omega$ die Rotationsdauer der Erde um ihre Axe, d. h. ein Sterntag ist:

$$T = \text{val. abs. } \frac{2\pi}{\omega} : 0{,}003283 = 304{,}6 \text{ Sterntage}\,. \tag{13}$$

Da aber ein tropisches Jahr (Zeit des scheinbaren Sonnenumlaufs gegen den Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkt) 366,242 Sterntage und 365,242 mittlere Sonnentage hat, so folgt auch

$$T = 303{,}8 \text{ mittlere Tage}\,. \tag{14}$$

Andererseits beschreibt die Momentanaxe in einem Jahre um die Hauptaxe C einen Winkel gleich $360^0 \,.\, 366{,}242 : 304{,}6$ d. i.

$$432{,}8^0\,. \tag{15}$$

§ 6. **Die Polhöhe von Pulkowa nach C. A. F. Peters.** Eine genaue Untersuchung über die Bewegung der Momentandrehaxe der Erde führte zuerst *Peters* 1842—43 mittelst einer Reihe von 279 Bestimmungen des Polarsterns in Zenithdistanz, deren jede eine Gleichung für die Polhöhe (geogr. Breite) des Beobachtungsortes Pulkowa gab*). In folgender Tabelle (s. nächste Seite) sind die Mittelwerte der Beobachtungen für 18 Zeitintervalle behufs Erlangung einer Übersicht zusammengestellt. Fig. 65 giebt dieselbe graphisch. In jedem Intervall war die Lage des Fernrohres konstant.

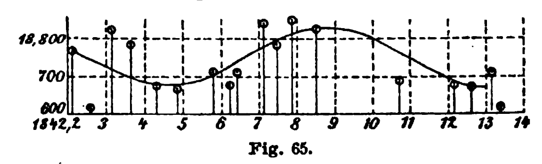


Fig. 65.

In den Ausdrücken für die beobachtete Polhöhe bezieht sich Δw auf eine Verbesserung des Ausdehnungskoefficienten der Luft, für welchen *Peters* den Ausdruck

$$0{,}0046254 + \frac{\Delta w}{326{,}4} \text{ für } 1^0 R$$

einführt. Δw wird gleichzeitig mit der Polhöhe, der Biegung des Fernrohrs und zwei Konstanten, welche die Bewegung der Momentanaxe

*) „Resultate aus den Beobachtungen des Polarsterns am *Ertel*schen Vertikalkreise der Pulkowaer Sternwarte.“ *Bulletin de la Classe physico-mathém. de l'Ac. imp. des sc. de St. Pétersbourg* 1844 t. II p. 305.

Nach *Nyrén* hat auch *Bessel* einen Versuch gemacht, durch Beobachtung eines Meridianzeichens die Lage der Rotationsaxe zu untersuchen.

charakterisieren, aus einer Ausgleichung ermittelt. Als normalen Wert B der Polhöhe wird man das Komplement des Winkels zwischen dem Zenith des Beobachtungsortes und dem durch die Hauptaxe C markierten, festen nördlichen Himmelspol ansehen, während sich die Beobachtung B' auf das Komplement des Winkels zwischen dem Zenith und dem durch die Momentanaxe markierten wirklichen Pol bezieht, Fig. 66. Da die Erde von Norden gesehen entgegen dem Uhrzeiger rotiert, führen wir anstatt χ die mit der Zeit wachsende Variable χ' ein, indem wir für χ, Fig. 64, setzen $-\chi'$.

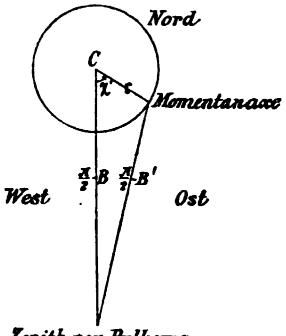


Fig. 66.

Man hat nach der Figur mit Rücksicht auf den geringen Wert von $\mathfrak{r}$, t in Jahren gerechnet:

$$B' = B + \mathfrak{r} \cos\chi' = B + \mathfrak{r} \cos(\chi_0' + 432{,}8^0\, t)\,.$$

Lage	Zeit	Zeit in Jahresbruch	Beobachtete Polhöhe	Anzahl der Beobacht.	59° 46′
1	1842 März 11/22	1842,21	59°46′ 18,766″ — 0,46 Δw	12	18,771″
2	April 2/11	27	613 — 0,40	12	617
1	April 11/Mai 1	31	824 — 0,05	17	824
2	Mai 2/26	37	789 + 0,76	23	781
1	Mai 27/Juni 13	43	686 + 1,20	25	674
2	Juni 14/Juli 9	49	678 + 1,07	24	667
1	Juli 13/Aug. 9	58	723 + 1,22	26	711
2	Aug. 10/18	62	687 + 1,25	14	675
1	Aug. 19/Sept. 2	64	723 + 1,16	9	711
2	Sept. 5/20	71	848 + 0,72	13	841
1	Sept. 21/Okt. 8	75	789 + 0,39	12	785
2	Okt. 10/19	79	871 — 0,02	13	871
1	Okt. 21/Dez. 7	1842,85	829 — 0,26	11	832
2	Dez. 17/Febr. 23	1843,07	689 — 0,67	17	696
1	1843 März 4/26	21	675 — 0,85	19	684
2	März 28/Apr. 11	26	671 — 0,65	10	678
1	April 13/28	31	710 + 0,02	20	710
2	April 28/30	33	615 + 0,52	3	610

Indem t von 1842,0 ab gezählt wird, findet sich

$$\begin{aligned} B &= 59^{0}\,46'\,18{,}755'' \pm 0{,}011'' \\ \mathfrak{r} &= +\,0{,}079'' \pm 0{,}017'' \\ \chi_0' &= 341{,}6^{0} \pm 14{,}0^{0} \\ \Delta w &= -\,0{,}017 \pm 0{,}018 \\ \beta &= -\,0{,}010'' \pm 0{,}009''. \end{aligned}$$

β ist die Verbesserung des angenommenen Näherungswertes der Biegung des Fernrohrs in oberer Kulmination; die Unsicherheiten sind wahrscheinliche Fehler. *Peters* führt bei der Ausgleichung Gewichte mit Rücksicht auf den Luftzustand ein; als w. F. seiner Gewichtseinheit folgt aus den 279 Fehlergleichungen $\pm\,0{,}229''$, und da durchschnittlich das Gewicht einer solchen 2,7 ist, so ist der w. F. einer Fehlergleichung (Beobachtung) gleich $\pm\,0{,}14''$.

In unserer Tabelle sind nur die Anzahlen der Beobachtungen aufgeschrieben, da die Mittelwerte einfache Mittel ohne Rücksicht auf Gewichte sind. Diese Anzahlen sind aus der später zu erwähnenden Schrift von *Nyrén* entnommen (ihre Summe giebt aus nicht aufgeklärtem Grunde 280 anstatt 279).

Mit $\Delta w = -\,0{,}017$ folgt der Ausdehnungskoefficient der Luft für 1 Centigrad gleich 0,003659 (für $1^{0} R$ gleich 0,004573), ein Wert welcher dem Ausdehnungskoefficienten 0,003670 trockener Luft nach neueren Untersuchungen sehr nahe kommt. Die letzte Rubrik unserer Tabelle ist mit $\Delta w = -\,0{,}01$ berechnet, welcher Wert zu 0,003676 gehört und durch Abrundung aus dem zu 0,003670 gehörenden Wert entstanden ist. Bekanntlich unterscheiden sich das Brechungsvermögen trockener und feuchter Luft bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur nur sehr wenig, dagegen ist noch nicht ausgemacht, dafs die Änderung des Refraktionskoefficienten mit der Temperatur genau nach dem Ausdehnungskoefficienten der Luft erfolgt, wie die gebräuchliche Theorie lehrt. Es war also einerseits von *Peters* eine nützliche Vorsicht, Δw als Unbekannte einzuführen, andererseits durften wir Δw, von 0,003670 ausgehend, etwas abrunden.

Die graphische Darstellung, Fig. 65, zeigt die Werte der letzten Kolumne und die Ausgleichungslinie nach *Peters*. Der Anblick zeigt, dafs trotz des geringen w. Fehlers in $\mathfrak{r}$ und χ_0' die Bestimmung dieser Gröfsen unsicher ist und dafs, wie *Peters* erwähnt, recht wohl ein Einflufs von jährlicher Periode (wie z. B. eine Refraktionsanomalie) in $\mathfrak{r}$ und χ_0 zur Darstellung gelangen kann.

§ 7. **Die Polhöhe von Pulkowa nach Nyrén.** *Peters* sah selbst ein, dafs seine Beobachtungsreihe trotz der grofsen Schärfe der Messungen zu kurz sei, um andere periodische Einflüsse von der zehnmonatlichen Periode zu trennen. Er setzte deshalb die Beob-

achtungen fort und erhielt schliefslich 1842—44 im ganzen 371 Beobachtungen. 1863—70 beobachtete *Gyldén* im ganzen 236 mal, 1871—73 *Nyrén* 155 mal mit demselben Instrument. Alle diese Messungen hat *Nyrén* einer äufserst sorgfältigen Bearbeitung unterworfen.*)

Er rechnet mit der jährlichen Veränderung 428,9° in χ und findet mit Angabe wahrscheinlicher Fehler aus den Messungen von *Peters*:

$$\mathfrak{r} = 0{,}101'' \pm 0{,}014'' \qquad \chi_0' = 52{,}7^\circ \pm 6{,}2^\circ \text{ für } 1843{,}0\,;$$

aus den Messungen von *Gyldén*:

$$\mathfrak{r} = 0{,}125'' \pm 0{,}017'' \qquad \chi_0' = 290{,}6^\circ \pm 8{,}7^\circ \text{ für } 1868{,}0\,;$$

aus seinen eigenen Messungen:

$$\mathfrak{r} = 0{,}058'' \pm 0{,}015'' \qquad \chi_0' = 85{,}1^\circ \pm 19{,}3^\circ \text{ für } 1868{,}0\,.$$

Die Übereinstimmung der χ_0' ist aber eine möglichst schlechte. Denn fügt man zu χ_0' für 1843,0 den Betrag 25 mal 428,9° hinzu, so folgt nach den Messungen von *Peters*:

$$\chi_0' = 335{,}2^\circ \text{ für } 1868{,}0\,.$$

Nyrén bemerkt nun, dafs eine Vergröfserung des angewandten Wertes der jährlichen Veränderung von χ' eine bessere Übereinstimmung für χ_0 hervorbringt. Mit 430,3 wird bezw. erhalten:

$$\chi_0' = 10{,}2^\circ\,, \quad 293{,}6^\circ\,, \quad 79{,}1^\circ\,.$$

Gelegentlich seiner Bestimmung der Nutationskonstante aus Beobachtungen von *W. Struve* am Passageninstrument im ersten Vertikal hat *Nyrén* aber erhalten:

$$\mathfrak{r} = 0{,}040'' \pm 0{,}010'' \quad \left\{\begin{matrix} \chi_0' = 24{,}0^\circ \text{ mit } 428{,}9^\circ \\ \chi_0' = 63{,}4^\circ \text{ mit } 430{,}3^\circ \end{matrix}\right\} \text{ für } 1868{,}0\,.$$

Nehmen wir an, dafs die Änderungen in χ_0' für einen anderweiten Zuwachs in der jährlichen Veränderung von χ' gleich 1,4° dieselben sind, wie bei dem ersten Zuwachs, was allerdings nicht ganz richtig ist, so werden die vier Werte von χ_0' reduziert auf 1868,0:

für	*Peters*	*Gyldén*	*Nyrén*	*Struve*
428,9°	335,2°	290,6°	85,1°	24,0°
430,3	10,2	293,6	79,1	63,4
431,7	45,2	296,6	73,1	102,8
433,1	80,2	299,6	67,1	142,2

*) „Die Polhöhe von Pulkowa von *Dr. M. Nyrén*.“ (*Mémoirs de l'Ac. imp. des sc. de St. Pétersbourg*, 7. sér. t. 19 1873 No. 10.)

Hiernach scheint der Übereinstimmung ein Wert der jährlichen Veränderung in χ' von 431 bis 432 am günstigsten zu sein, wenn man von dem Wert χ_0' absieht, der aus *Gyldéns* Messungen folgt.*) Diese sind zur Ableitung von $\mathfrak{c}$ und χ_0' wenig günstig, da sie wesentlich auf die Monate März bis Mai, September und Oktober fallen. Das Auftreten unerkannter systematischer Fehler ist auch bei dieser Reihe ganz besonders auffallend, da weit öfter als bei den anderen beiden Reihen benachbarte Fehlergleichungen übrigbleibende Fehler mit gleichen Vorzeichen haben.**) Es ist hiernach nicht unmöglich, dafs bei *Gyldéns* Reihe in $\mathfrak{c}$ und χ_0' vorherrschend Einflüsse anderer Art zum Ausdruck gelangen, trotz des geringen wahrscheinlichen Fehlers der Resultate, der wie bei allen drei Reihen, besonders aber bei dieser, eben wegen des systematischen Charakters der übrig bleibenden Fehler ganz und gar keinen Genauigkeitsmafsstab abgiebt.

Nyrén erwähnt, dafs eine Kombination aller drei Reihen zu einer gemeinsamen Bestimmung von $\mathfrak{c}$ und χ_0' unausführbar ist wegen zu

*) Zu demselben Resultat führen die Beobachtungen dreier Sterne für die Bestimmung der Nutationskonstante, die *Nyrén* S. 38 anführt. χ_0' wurde für 1850 etwa gleich 253° und hiernach für 1868 mit 431,5° j. V. gleich 100°.

**) Eine flüchtige Übersicht führte uns zu Folgendem. Es kommen Fehler mit gleichen Zeichen hinter einander vor bei

Peters	*Gyldén*	*Nyrén*
4 × + 5	2 × + 5	1 × + 5
2 × − 5	3 × − 5	2 × − 5
3 × − 6	1 × + 6	2 × + 7
2 × + 8	3 × − 8	1 × − 8
2 × − 8	1 × − 9	1 × − 12
1 × − 10	2 × − 11	bei 155
bei 371	1 × − 12	Beobachtungen
Beobachtungen	1 × − 15	
	1 × + 27	
	bei 236	
	Beobachtungen	
Sa. 90 Fehler oder 24%; Durchschnitt 6,4	Sa. 140 Fehler oder 59%; Durchschnitt 9,3	Sa. 49 Fehler oder 32%; Durchschnitt 7,0

In dieser Tabelle bedeutet z. B. in der ersten Rubrik 4 × + 5: es kommen vor viermal fünf positive Fehler hintereinander; ferner der Schlufs der ersten Rubrik: 24% aller Fehler treten als Gruppen von fünf und mehr mit gleichen Zeichen auf; die durchschnittliche Anzahl der Fehler von gleichem Zeichen ist 6,4 (abgesehen von den Gruppen mit weniger als fünf Fehlern von gleichem Zeichen).

ungenauer Kenntnis der jährlichen Veränderung von χ'. In der That würde auch der Versuch, eine Verbesserung des angenommenen Wertes der jährlichen Veränderung von χ' mit unter die Unbekannten aufzunehmen, nur wenig Erfolg versprechen, da bereits 1^0 Änderung dieser Gröfse in 30 Jahren schon 30^0 giebt, und dieser Wert kaum noch als kleine Gröfse, deren Quadrat verschwindet, angesehen werden kann, wie es die Ausgleichungsrechnung erfordert.

Immerhin kann man auch die jährliche Veränderung von χ' aus den zu einer Reihe kombinierten drei Reihen bestimmen, indem man nämlich etwa für die jährliche Veränderung von $\chi' = 430, 431, 432$ u. s. f. je eine Ausgleichung ausführt, die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler für jeden Fall ermittelt und durch Interpolation denjenigen Wert von χ' bestimmt, welcher den besten Anschlufs giebt.

Eine gründliche Untersuchung würde indessen vorher zu überlegen haben, ob nicht $\mathfrak{r}$ und χ_0' überhaupt so veränderlich sind, dafs eine solche Rechnung ganz wertlos sein mufs.*) Wenn allem Vermuten nach meteorologische Vorgänge die wesentlichste Ursache von Veränderungen in $\mathfrak{r}$ und χ_0' sind, so dürfte sich zeigen, dafs $\mathfrak{r}$ und χ_0' hauptsächlich periodischen Veränderungen unterliegen, herrührend von den periodischen Veränderungen der meteorologischen Verhältnisse, während die säkularen Veränderungen der letzteren einflufslos bleiben. Es ist dann die Frage, ob gegenüber den Schwankungen in χ_0' noch von einem Mittelwert für diese Gröfse die Rede sein kann.

Einstweilen scheint es uns ganz angemessen, der Veränderlichkeit von $\mathfrak{r}$ und χ_0' nicht allzuviel Bedeutung beizulegen und nach *Peters* und *Nyrén* anzusetzen**):

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{15}''$$

$$\chi_0' = 70^0 \text{ für 1868,0 und den Meridian von Pulkowa.}$$

Die entsprechende jährliche Veränderung $431{,}5^0$ pafst sehr gut zu dem Wert $(C - A) : C$ auf S. 393 unter (11) und giebt denselben nur zehn Einheiten der sechsten Decimalstelle kleiner.

---

*) *William Thomson* hält die Resultate *Nyréns* in der That für solche, welche die Veränderlichkeit von $\mathfrak{r}$ und χ_0' beweisen; als Ursache genügen ihm lediglich meteorologische Prozesse (*American J. of Sc. a. A.* Bd. 12 1876, S. 351). Wir kommen weiterhin (§ 16) auf Entwicklungen, welche gestatten, Schätzungen dieser Art anzustellen.

**) Nach *Oppolzer, Bahnbestimmung* 2. Aufl. S. 151, hat *Downing* aus der Diskussion zehnjähriger Greenwicher Beobachtungen (1868—77) ähnliche Resultate wie *Peters* und *Nyrén* erhalten.

§ 8. **Der Einfluſs einer Ungleichheit von A und B.** Wir integrieren jetzt die Gleichungen (6) S. 391 unter Vernachlässigung äuſserer Kräfte streng*):

$$
\begin{aligned}
C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq &= 0 \\
A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr &= 0 \\
B\frac{dq}{dt} - (C - A)\,pr &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$C > B > A$$

annehmen dürfen.

Differentialgleichungen dieser Form kann man mittelst der elliptischen Funktionen herleiten. Ist nämlich ψ als Funktion von u definiert durch die Gleichung

$$u = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}}\,, \tag{2}$$

so hat man, wenn

$$\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi} = \varDelta\psi \tag{3}$$

gesetzt wird, aus (2):

$$\frac{du}{d\psi} = \frac{1}{\varDelta\psi} \tag{4}$$

und daher:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varDelta\psi}{du} &= -\frac{\varkappa^2 \sin\psi\cos\psi}{\varDelta\psi}\frac{d\psi}{du} = -\varkappa^2\sin\psi\cos\psi \\
\frac{d\cos\psi}{du} &= -\sin\psi\frac{d\psi}{du} = -\sin\psi\,\varDelta\psi \\
\frac{d\sin\psi}{du} &= \cos\psi\frac{d\psi}{du} = \cos\psi\,\varDelta\psi\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Vergleicht man mit (1), so leuchtet die Möglichkeit ein, daſs denselben genügt wird durch

---

) Im wesentlichen bis Gleichung (14) nach *Kirchhoff*, *Vorlesungen über mathemat. Physik, Mechanik*, 2. Aufl. 1877 S. 64. Es mag hierbei Folgendes bemerkt werden:

Schon *Euler* behandelte die Drehung eines festen Körpers, und zwar führte er p, q und r ein und stellte die Gleichungen (6) S. 391 auf. Für den Fall $A = B$ weist er die zehnmonatliche Umdrehungsdauer der Momentanaxe nach.

Laplace behandelt die Drehung in der *Méc. cél.* t. I, l. 1, p. 70—90.

Poisson behandelt das Problem u. a. in der zweiten Ausgabe der *Traité de méc.* t. II p. 194.

Jacobi führte die elliptischen Funktionen in die Behandlung des Problems ein. Neuere Arbeiten sind namentlich von *J. Somoff* in den *Bull. phys.-math. de St. Pétersbourg* 1856 Bd. 14 S. 153 und *E. Matthieu* in *Liouvilles Journal* 1876, die uns aber nicht zur Hand waren.

$$p = a \cos\psi \qquad q = b \sin\psi \qquad r = c\,\Delta\psi\,, \tag{6}$$

worin a, b und c noch unbestimmte Konstanten bezeichnen. Aufserdem wird man du gleich einem Vielfachen von dt, d. h. $du = \lambda dt$ und also

$$u = \lambda t + \mu \tag{7}$$

setzen, μ eine Konstante. Hiermit geben die (5) das System:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c\lambda}\frac{dr}{dt} + \varkappa^2 \frac{pq}{ab} &= 0\\
\frac{1}{a\lambda}\frac{dp}{dt} + \frac{qr}{bc} &= 0\\
\frac{1}{b\lambda}\frac{dq}{dt} - \frac{pr}{ac} &= 0\,,
\end{aligned}$$

welches mit (1) zur Übereinstimmung gelangt, wenn man $a b c \lambda \varkappa^2$ mit Rücksicht auf die nachstehenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
\frac{\varkappa^2 \lambda c}{ab} &= \frac{B-A}{C}\\
\frac{\lambda a}{bc} &= \frac{C-B}{A}\\
\frac{\lambda b}{ac} &= \frac{C-A}{B}\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Zwei von den genannten fünf Konstanten bleiben unbestimmt; dazu tritt noch μ, sodafs die Lösung drei unbestimmte Konstanten enthält, wodurch sie zur allgemeinen Lösung wird. Auch diese drei bestimmen sich, wenn der Anfangszustand bekannt ist. Sind zur Zeit t = null die Werte von p, q und r bekannt und gleich p_0, q_0 und r_0, so wird aus den (6) mit Rücksicht auf (2) und (7):

$$p_0 = a \cos \operatorname{am} \mu \qquad q_0 = b \sin \operatorname{am} \mu \qquad r_0 = c\,\Delta \operatorname{am} \mu\,, \tag{9}$$

wenn allgemein ψ die Amplitude von u genannt wird.

Verbindet man die (8) paarweise durch Multiplikation, so folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\varkappa^2\lambda^2}{a^2} &= \frac{(B-A)(C-A)}{BC}\\
\frac{\varkappa^2\lambda^2}{b^2} &= \frac{(B-A)(C-B)}{AC}\\
\frac{\lambda^2}{c^2} &= \frac{(C-A)(C-B)}{AB}\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Aus den (9) aber folgt durch Elimination von $\operatorname{am}\mu$:

$$\frac{p_0^2}{a^2} + \frac{q_0^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{r_0^2}{c^2} + \frac{\varkappa^2 q_0^2}{b^2} = 1\,. \tag{11}$$

Bestimmt man aus den beiden ersten (10) $a^2 : b^2$ und aus den beiden letzten (10) $b^2 : c^2$ und eliminiert damit b^2 aus der ersten und zweiten Gleichung (11), so folgt zur Bestimmung von a^2 und c^2:

$$a^2 = p_0^2 + \frac{C-B}{C-A}\frac{B}{A}q_0^2$$
$$c^2 = r_0^2 + \frac{B-A}{C-A}\frac{B}{C}q_0^2 \tag{12}$$

und zur Bestimmung von b^2, λ^2 und $\varkappa^2$ aus den (10):

$$b^2 = a^2\frac{C-A}{C-B}\frac{A}{B}$$
$$\lambda^2 = c^2\frac{(C-A)(C-B)}{AB} \tag{13}$$
$$\varkappa^2 = \frac{a^2}{c^2}\frac{B-A}{C-B}\frac{A}{C}.$$

Mittelst dieser Gleichungen (12) und (13) und einer der (9) ist das System der Konstanten $abc\,\lambda\,\mu\,\varkappa^2$ aus den Trägheitsmomenten und dem Anfangszustande abgeleitet. Es ist indes noch zu bemerken, dafs die (12) und (13) die Vorzeichen von a, b, c und λ unbestimmt lassen; jedoch bestimmen die (8) und (9) die Vorzeichen zum Teil. Da Δ am μ positiv ist, so hat nach der dritten Gleichung (9) c dasselbe Vorzeichen wie r_0; jede der Gleichungen (8) verlangt ferner, dafs das Produkt λabc positiv sei. Für zwei der drei Gröfsen λab ist somit das Vorzeichen beliebig. Die verschiedenen Annahmen führen jedoch mittelst der (6) und (7) zu denselben Werten von p, q und r, wie man erkennt, wenn man noch die Bestimmung von am μ aus den ersten beiden Gleichungen (9) in betracht zieht. Es ist nicht nötig, dieses hier weiter auszuführen.

Wie bemerkt, bestimmen sich p, q und r mittelst der (6) und (7), wobei noch (2) und (3) zu beachten sind. Mit Einführung der Bezeichnung $\psi = \operatorname{am} u$ in die (6) ergiebt sich zur Ermittlung von p, q und r das Gleichungssystem:

$$p = a\cos\operatorname{am} u$$
$$q = b\sin\operatorname{am} u \tag{14}$$
$$r = c\,\Delta\operatorname{am} u$$

$$u = \lambda t + \mu, \tag{14*}$$

worin die drei Faktoren von a, b und c als elliptische Funktionen bezeichnet werden.

Zur Bestimmung der Lage der Momentanaxe und der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit ist wie in § 5 S. 392 zu setzen:

$$p = \omega\sin\mathfrak{t}\cos\chi$$
$$q = \omega\sin\mathfrak{t}\sin\chi \tag{15}$$
$$r = \omega\cos\mathfrak{t}.$$

Hieraus und aus den (14) folgt $\omega^2 = a^2\cos^2\operatorname{am} u + b^2\sin^2\operatorname{am} u + c^2\Delta^2\operatorname{am} u$ oder

$$\omega^2 = a^2 + c^2 - (a^2 - b^2 + c^2\varkappa^2)\sin^2\operatorname{am} u; \tag{16}$$

da u aber von der Zeit abhängt, so ist ω jetzt veränderlich — nicht mehr konstant wie für $A = B$.

Betrachten wir nun ferner die (14), so ist klar, dafs ein Wachstum von $\operatorname{am} u$ um 2π wieder dieselben Werte p, q und r, und also nach (16) und (15) dieselbe Lage der Momentanaxe ergiebt. Wächst dagegen $\operatorname{am} u$ nur um π, so wechseln p und q ihr Vorzeichen und die Lage der Momentanaxe wird bezüglich der Axe C die entgegengesetzte. Hieraus erhellt, dafs die Momentanaxe um letztere eine geschlossene Kegelfläche beschreibt. Die Umlaufszeit ergiebt sich aus der Betrachtung von μ nach der Definition durch Ausdruck (2).

Geht nämlich $\operatorname{am} u = \psi$ von ψ_1 in $\psi_2 = \psi_1 + 2\pi$ über, so wird

$$u_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varDelta\psi} + \int_{2\pi}^{2\pi+\psi_1} \frac{d\psi}{\varDelta\psi}.$$

Im zweiten Teil rechter Hand setzen wir $\psi = 2\pi + \psi'$; dadurch geht er in

$$\int_0^{\psi_1} \frac{d\psi'}{\varDelta\psi'}$$

über; das ist aber u_1. Für den ersten Teil beachten wir, dafs derselbe viermal so grofs ist als

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\varDelta\psi}, \tag{17}$$

da das Integral von $d\psi : \varDelta\psi$ augenscheinlich für alle vier Quadranten denselben Wert erhält. Damit wird

$$u_2 = u_1 + 4K.$$

Setzen wir nun die Änderung der Zeit t von t_1 bis t_2 absolut genommen gleich T, so folgt mit Rücksicht auf (7) die Umlaufszeit

$$T = \text{val. abs.} \frac{4K}{\lambda}. \tag{18}$$

Man erkennt, dafs sie für alle Umläufe denselben Wert behält.

Aus den beiden ersten (15) sowie aus (14) folgt ferner mit Rücksicht auf (16):

$$\sin^2 \mathfrak{r} = \frac{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 \operatorname{am} u}{a^2 + c^2 - (a^2 - b^2 + c^2\varkappa^2)\sin^2 \operatorname{am} u}. \tag{19}$$

Hieraus ergiebt sich durch Differentiation

$$d\sin^2 \mathfrak{r} = \frac{c^2 (b^2 - a^2 + a^2\varkappa^2)\, d\sin^2 \operatorname{am} u}{[a^2 + c^2 - (a^2 - b^2 + c^2\varkappa^2)\sin^2 \operatorname{am} u]^2}.$$

Da $b^2 > a^2$ ist, wie die erste Gleichung (13) zeigt, so ändern sich hiernach $\sin^2\mathfrak{r}$ und $\sin^2 \operatorname{am} u$ in demselben Sinne: Ihre Maxima und Minima fallen zusammen.

Das Maximum von $\sin^2\mathfrak{r}$ fällt auf $\operatorname{am} u = \frac{\pi}{2}$ bezw. $\frac{3\pi}{2}$ u. s. f., und zwar ist

$$\sin^2\mathfrak{r}_{max} = \frac{b^2}{b^2 + c^2 - c^2\varkappa^2} = \frac{a^2 \frac{C-A}{C-B} \frac{A}{B}}{c^2 + a^2 \frac{A(C+B-A)}{BC}}. \tag{20}$$

Das Minimum fällt auf $\operatorname{am} u =$ null bezw. π u. s. f., und zwar ist

$$\sin^2\mathfrak{r}_{min} = \frac{a^2}{c^2 + a^2}. \tag{21}$$

Hieraus folgt noch

$$\sin^2\mathfrak{r}_{max} - \sin^2\mathfrak{r}_{min} = \frac{a^2 \frac{B-A}{C-B}\left(c^2 \frac{A+B-C}{B} + a^2 \frac{A}{C}\right)}{\left(c^2 + a^2\right)\left(c^2 + a^2 \frac{A(C+B-A)}{BC}\right)}. \tag{22}$$

Die Maxima und Minima von $\sin^2\mathfrak{r}$ teilen die Umlaufszeit T in vier gleiche Teile, denn wenn $\operatorname{am} u = \psi$ von null aus um $\frac{\pi}{2}$ wächst, so wächst u um K und t absolut genommen um $K : \lambda$, d. i. $\frac{T}{4}$, u. s. f.

§ 9. **Fortsetzung: $B - A$ sehr klein.** Für die Erde ist $\frac{B-A}{C-A}$ jedenfalls ein kleiner Bruch, etwa von derselben Ordnung wie $^1/_{100}$. In diesem Falle ist nach (22) des vorigen Paragraphen angenähert:

$$\sin^2\mathfrak{r}_{max} - \sin^2\mathfrak{r}_{min} = \frac{a^2}{c^2 + a^2} \frac{B-A}{C-A} = \sin^2\mathfrak{r} \frac{B-A}{C-A}$$

und hieraus:

$$\sin\mathfrak{r}_{max} - \sin\mathfrak{r}_{min} = \frac{1}{2} \sin\mathfrak{r} \frac{B-A}{C-A}, \tag{1}$$

wenn $\sin\mathfrak{r}$ rechter Hand irgend einen mittleren Wert von $\sin\mathfrak{r}$ bezeichnet. Die Schwankungen in $\mathfrak{r}$ sind somit auch sehr klein und bei der Erde ganz unmerkbar.

Auch ω ist für die Erde als konstant anzusehen. Denn es wird nach (16), sowie mit Rücksicht auf (12) und (13) des vorigen Paragraphen:

$$\omega^2 = p_0^2 + q_0^2 + r_0^2 + \frac{B-A}{C-A} \cdot \frac{(C-B)(C-A)}{AC} \left(q_0^2 - q^2\right)$$

und somit angenähert, wenn $q = \omega \sin\mathfrak{r} \sin\chi$ und $q_0 = \omega \sin\mathfrak{r} \sin\chi_0$ gesetzt wird:

$$\omega = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2} \left\{1 + \frac{1}{2} \frac{B-A}{C-A} \left(\frac{C-A}{A}\right)^2 \sin^2\mathfrak{r} \left(\sin^2\chi - \sin^2\chi_0\right)\right\}.$$

Für $\mathfrak{c} = 1''$ schwankt die Abweichung des Wertes der grofsen Parenthese gegen die Einheit nur um rund

$$\frac{B-A}{C-A} : 8\,000\,000\,000\,000\,000\,.$$

§ 10. **Der Satz von der unveränderlichen Ebene.** Wenn wir von äufseren Kräften absehen, so gilt für die Bewegung der Teile der Erde um ihren Schwerpunkt — auch wenn die Erde kein fester Körper ist — der Satz von der unveränderlichen Ebene. Diesen Satz wollen wir hier ableiten.

Bezogen auf das System der festen Koordinatenaxen der x, y und z ist nach (5) S. 388:

$$\begin{aligned} 2\sum \frac{df_{xy}}{dt}\,dm &= 0 \\ 2\sum \frac{df_{yz}}{dt}\,dm &= 0 \\ 2\sum \frac{df_{zx}}{dt}\,dm &= 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

woraus durch Integration folgt, wenn P, Q und R drei Konstanten bezeichnen:

$$\begin{aligned} 2\sum f_{xy}\,dm &= R \\ 2\sum f_{yz}\,dm &= P \\ 2\sum f_{zx}\,dm &= Q\,. \end{aligned} \tag{2}$$

R, P und Q kann man als Projektionen einer Gröfse K ansehen, dergestalt, dafs

$$\begin{aligned} R &= K\cos\mathfrak{c}' \\ P &= K\cos\mathfrak{a}' \\ Q &= K\cos\mathfrak{b}' \end{aligned} \tag{3}$$

und also

$$P^2 + Q^2 + R^2 = K^2$$

ist. Die Winkel $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ legen als Stellungswinkel eine Ebene durch den Schwerpunkt von konstanter Lage fest, die wir sogleich die unveränderliche nennen wollen und die sich, wie wir sehen werden, auch ohne Bezug auf ein festes Koordinatenaxensystem charakterisieren läfst.

Wir erinnern nun daran, dafs f_{xy}, f_{yz} und f_{zx} die Flächengeschwindigkeiten der Projektionen des Radiusvektors eines Teilchens dm bezw. in der Ebene xy, yz und zx sind. Bezeichnet man mit f die wirkliche Flächengeschwindigkeit des (vom Erdschwerpunkt ausgehenden) Radiusvektors und sind die Stellungswinkel des Flächenelementes $f\,dt$ bezw. zur x-, y- und z-Axe u, v und w, so hat man

$$f_{xy} = f\cos w \qquad f_{yz} = f\cos u \qquad f_{zx} = f\cos v\,.$$

Projiziert man nun f auf eine andere Ebene mit den Stellungswinkeln a, b und c, so ist die Projektion gleich $f \cos n$, wenn n der Neigungswinkel von $f dt$ gegen die Ebene (abc) ist. Nun ist aber

$$\cos n = \cos a \cos u + \cos b \cos v + \cos c \cos w \,,$$

folglich wird

$$f \cos n = f_{yz} \cos a + f_{zx} \cos b + f_{xy} \cos c$$

und

$$2 \sum f \cos n \, dm = P \cos a + Q \cos b + R \cos c \,,$$

oder mit Rücksicht auf die (3):

$$2 \sum f \cos n \, dm = K (\cos a \cos \mathfrak{a}' + \cos b \cos \mathfrak{b}' + \cos c \cos \mathfrak{c}') \,.$$

Der Ausdruck rechter Hand ist ein Maximum für den Fall, dafs die Ebene (abc) in die unveränderliche Ebene fällt oder mit ihr. parallel ist. Alsdann wird

$$2 \sum f \cos n \, dm = K \,. \tag{4}$$

Die unveränderliche Ebene ist also dadurch charakterisiert, dafs für sie die Summe der Projektionen der auf gleich grofse Massenteilchen bezogenen Flächengeschwindigkeiten f der Radienvektoren ein konstantes Maximum ist — oder anders ausgedrückt:

Es hat die Ebene der konstanten gröfsten Projektionssumme der Flächengeschwindigkeiten eine konstante Lage im Raume.

K ist eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige, dem Massensystem eigentümliche Konstante.

§ 11. **Die Bewegung der Momentanaxe im Raume, abgesehen von äufseren Kräften.** Nehmen wir zur Zeit t als Axen der x, y und z die Hauptaxen A, B und C, so ist wie S. 391 (5):

$$\begin{aligned} 2 \sum f_{xy} \, dm &= R = rC \\ 2 \sum f_{yz} \, dm &= P = pA \\ 2 \sum f_{zx} \, dm &= Q = qB \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die (3) des vorigen Paragraphen sofort für die Neigungswinkel $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ der Normale der unveränderlichen Ebene zu den drei Hauptaxen A, B und C:

$$\begin{gathered} \cos \mathfrak{a}' = \frac{pA}{K} \qquad \cos \mathfrak{b}' = \frac{qB}{K} \qquad \cos \mathfrak{c}' = \frac{rC}{K} \\ K^2 = p^2A^2 + q^2B^2 + r^2C^2 \,. \end{gathered} \tag{2}$$

Dafs K konstant ist, wissen wir aus dem vorigen Paragraphen; man erkennt es aber auch leicht aus dem System (1) S. 400, indem man dessen Gleichungen bezw. mit r, p und q multipliziert, addiert und integriert.

Nach S. 392 (6) haben wir für die gleichzeitigen Stellungswinkel der Momentanaxe

$$\cos \mathfrak{a} = \frac{p}{\omega} \qquad \cos \mathfrak{b} = \frac{q}{\omega} \qquad \cos \mathfrak{c} = \frac{r}{\omega} \tag{3}$$

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 .$$

Mithin ist der Neigungswinkel $\mathfrak{n}$ der Momentanaxe gegen die Normale der unveränderlichen Ebene zufolge der Gleichung

$$\cos \mathfrak{n} = \cos \mathfrak{a} \cos \mathfrak{a}' + \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{b}' + \cos \mathfrak{c} \cos \mathfrak{c}'$$

gegeben durch die Relation

$$\cos \mathfrak{n} = \frac{p^2 A + q^2 B + r^2 C}{K \omega} . \tag{4}$$

Da p und q gegen r sehr klein sind, so bemerkt man leicht, dafs $\cos \mathfrak{n}$ sehr nahe gleich 1 ist. Wir berechnen daher

$$\sin^2 \mathfrak{n} = \frac{K^2 \omega^2 - (p^2 A + q^2 B + r^2 C)^2}{K^2 \omega^2}$$

und finden

$$\sin^2 \mathfrak{n} = \frac{r^2 p^2 (C - A)^2 + r^2 q^2 (C - B)^2 + p^2 q^2 (B - A)^2}{(p^2 + q^2 + r^2)(p^2 A^2 + q^2 B^2 + r^2 C^2)} .$$

Mit Rücksicht auf den geringen Betrag von p und q gegen r, sowie von $B - A$ gegen $C - A$ können wir in grofser Annäherung dafür setzen

$$\sin^2 \mathfrak{n} = \frac{p^2 + q^2}{r^2} \left(\frac{C - A}{C} \right)^2 ,$$

oder unter Beachtung von (6) S. 392, wonach $p^2 + q^2 = \omega^2 \sin^2 \mathfrak{c}$ ist:

$$\sin \mathfrak{n} = \sin \mathfrak{c} \, \frac{C - A}{C} .$$

Nach S. 393 und 399 ist also zufolge der Beobachtungen angenähert

$$\mathfrak{n} = 0{,}003272 \times {}^1/_{15}{}'' = 0{,}0002'' .$$

Um uns eine genaue Vorstellung von der gegenseitigen Lage der Hauptaxe C, der Momentanaxe M und der Normale N der unveränderlichen Ebene zu machen, denken wir uns um den Erdschwerpunkt eine Kugelfläche vom Radius 1 gelegt. Die Koordinaten x und y des positiven Poles M der Momentanaxe sind alsdann bezw.:

$$\xi = \cos \mathfrak{a} = \frac{p}{\omega} \qquad \eta = \cos \mathfrak{b} = \frac{q}{\omega} ;$$

diejenigen des positiven Poles N der Normale der unveränderlichen Ebene sind:

$$\xi' = \cos\mathfrak{a}' = \frac{pA}{K} \qquad \eta' = \cos\mathfrak{b}' = \frac{qB}{K}\,.$$

Hieraus folgt $$\xi = \xi'\,\frac{K}{A\omega} \qquad \eta = \eta'\,\frac{K}{B\omega}\,.$$

ξ' und η' sind also wesentlich konstante Bruchteile von ξ und η. Nehmen wir insbesondere $A = B$, so wird genau $\xi : \xi' = \eta : \eta'$, d. h. C, N und M liegen stets auf einem gröfsten Kreis.

Die Situation der drei Pole ist nun, wenn wir sie im Norden annehmen, die der Figur 67, nur ist M daselbst irrtümlich linker Hand von N anstatt rechter Hand von N eingetragen. N liegt absolut fest, M und C rotieren in gleichen Zeiten einmal entgegengesetzt der Richtung des Uhrzeigers um N herum. Dabei ist

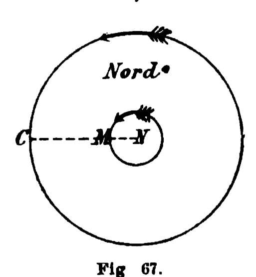


Fig 67.

$$CN = {}^1/_{15}{}'' \quad \text{und} \quad NM = {}^1/_{5000}{}''\,.$$

Übrigens ist der letztere Betrag ganz und gar unmerklich. Abgesehen von äufseren Kräften hat daher die Rotationsaxe des festen Erdkörpers eine als unveränderlich zu betrachtende Richtung im Raume; nur im Erdkörper verschiebt sie sich um kleine, jedoch auch nicht sehr merkliche Beträge.

§ 12. **Grundgleichungen für die Drehbewegung des nicht festen Erdkörpers.***) Zur Entwicklung dieser Gleichungen können wir von den Gleichungen (2) S. 389 ausgehen. In diesen Gleichungen ist Bezug genommen auf ein bewegliches Koordinatenaxensystem, das gegen seine augenblickliche Lage mit den Winkelgeschwindigkeiten p, q und r bezw. um die x-, y- und z-Axe gedreht wird. Denken wir uns nun zunächst wie in § 4 S. 390 die Erde als festen Körper und das bewegte Axensystem fest damit verbunden, so gelten die (1) S. 390. Zu den rechten Seiten dieser Gleichungen treten aber noch Glieder, wenn wir jetzt annehmen, dafs die Teile der Erde sich gegen das bewegte System verschieben. Es wird nämlich zur Zeit t:

---

*) Die Entwicklungen der Paragraphen 12—16 sind erfolgt mit Benutzung der Abhandlungen:

Gyldén, *Recherches sur la Rotation de la Terre*; présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal. 1871. [Ref. in der Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft 1874 IX S. 199.]

G. H. Darwin, *On the Influence of Geological Changes on the Earth's Axis of Rotation* [*Phil. Transact.* 1877 Bd. 167 I; Auszug im *American Journal of Science and Arts* 1877 Bd. 13 S. 444; Ref. in der Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft 1878 XIII 309.] Dieser Abhandlung folgt ein Anhang von *Will. Thomson*, dessen Methode in § 14 benutzt ist.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} \quad . \quad + qz - ry \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dy_1}{dt} - pz \quad . \quad + rx \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{dz_1}{dt} + py - qx \quad . \quad ,
\end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir also annehmen, dafs zur Zeit t die Erde sich mit dem bewegten System gegen dessen augenblickliche Lage mit den Winkelgeschwindigkeiten p, q und r verschiebt und die Teile der Erde aufser dieser Drehbewegung im Zeitintervall dt noch gegen das bewegte Koordinatenaxensystem die Verschiebungen dx_1, dy_1 und dz_1 erleiden. Wie man sieht, bleiben p, q und r jetzt noch ganz willkürlich, denn sie bezeichnen vorläufig nur einen nicht näher definierten Teil der Bewegung der Erdteile gegen das feste Koordinatenaxensystem, der zur Zeit t stattfindenden Lage des willkürlich nach Mafsgabe von p, q, r bewegten Axensystems.

Mittelst der (1) folgt jetzt aus (4) S. 388:

$$2 f'_{xy} = 2 f_{xy} = r(x^2 + y^2) - pzx - qyz + \left(x \frac{dy_1}{dt} - y \frac{dx_1}{dt}\right).$$

Es wird daher

$$2 \sum f'_{xy}\, dm = r \sum (x^2 + y^2)\, dm - p \sum zx\, dm - q \sum yz\, dm$$
$$+ \sum \left(x \frac{dy_1}{dt} - y \frac{dx_1}{dt}\right) dm,$$

oder

$$2 \sum f'_{xy}\, dm = r C_1 - p B' - q A' + H_3, \tag{2}$$

wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\sum (x^2 + y^2)\, dm &= C_1 \\
\sum zx\, dm &= B' \\
\sum yz\, dm &= A' \\
\sum \left(x \frac{dy_1}{dt} - y \frac{dx_1}{dt}\right) dm &= H_3 .
\end{aligned} \tag{3}$$

Ebenso erhalten wir

$$2 \sum f'_{yz}\, dm = p A_1 - q C' - r B' + H_1, \tag{4}$$

wenn ferner gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\sum (y^2 + z^2)\, dm &= A_1 \\
\sum xy\, dm &= C' \\
\sum \left(y \frac{dz_1}{dt} - z \frac{dy_1}{dt}\right) dm &= H_1 ;
\end{aligned} \tag{5}$$

endlich $$2\sum f'_{zx}\,dm = qB_1 - rA' - pC' + H_2\,, \tag{6}$$

wenn noch gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\sum (z^2 + x^2)\,dm &= B_1 \\ \sum \left(z\frac{dx_1}{dt} - x\frac{dz_1}{dt}\right) dm &= H_2\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Hiermit nehmen die Gleichungen (2) S. 389 folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(rC_1 - pB' - qA' + H_3)}{dt} &+ pq\,(B_1 - A_1) + (q^2 - p^2)\,C' \\ &- prA' + qrB' - qH_1 + pH_2\end{aligned}\right\} = N$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(pA_1 - qC' - rB' + H_1)}{dt} &+ qr\,(C_1 - B_1) + (r^2 - q^2)\,A' \\ &- qpB' + rpC' - rH_2 + qH_3\end{aligned}\right\} = L \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(qB_1 - rA' - pC' + H_2)}{dt} &+ rp\,(A_1 - C_1) + (p^2 - r^2)\,B' \\ &- rqC' + pqA' - pH_3 + rH_1\end{aligned}\right\} = M\,.$$

Bei der Anwendung dieser Gleichungen ist man verschieden vorgegangen. Man hat das bewegte Koordinatenaxensystem so angenommen *(Gyldén)*, dafs es eine mittlere Bewegung aller Körperteile hat, indem man die H null setzte; man hat es auch so angenommen *(G. H. Darwin)*, dafs es mit den veränderlichen Hauptaxen zusammenfällt. Beide Methoden geben eine Vereinfachung der (8) und führen zum Ziele, solange nur die Bewegung der Erdteile nicht von der Rotation selbst abhängig vorausgesetzt wird. Auf letzteren Fall gehen wir hier nicht ein.*)

§ 13. **Fortsetzung: Modifikation der Gleichungen.** Wir nehmen die veränderlichen Hauptaxen ABC als bewegtes Koordinatenaxensystem; aufserdem aber zur Zeit t dieselben Axen als festes System xyz, sodafs in den Gleichungen (2) S. 389, von denen wir wieder ausgehen, p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten bezeichnen,

*) Nach *Gyldén, Astronom. Nachrichten* 1878 Bd. 93 Nr. 2226 S. 278, sind die Gleichungen (8) von *Liouville* in seinem Journal, sér. II t. III, aufgestellt; indessen war uns diese Zeitschrift nicht zur Hand. *Gyldén* knüpft an diese Gleichungen eine interessante Untersuchung über die Bewegung der Momentanaxe in dem Erdkörper, wobei derselbe als aus einem festen Teile, dem Kern, und einem beweglichen, der Masse des Weltmeeres, zusammengesetzt gedacht und Rücksicht darauf genommen wird, dafs die Oberfläche des Weltmeeres durch die Rotation beeinflufst ist. Für diese Untersuchung ist es deshalb nötig, das Koordinatenaxensystem mit dem Erdkern fest zu verbinden, denn jedes der beiden oben erwähnten Systeme ist in diesem Falle in Bezug auf seine Lage zum Erdkern unbekannt und erst aus der Bewegung herzuleiten. Die Untersuchung hat aber nur ein Interesse für die Entwicklungsgeschichte des Erdkörpers; gegenwärtig ist die Stabilität der Momentanaxe im Erdkörper wegen des erfahrungsmäfsig starken Überwiegens des Trägheitsmomentes C über A und B eine so grofse, dafs die Verschiebung des Meeres nicht in betracht kommt.

mit welchen zur Zeit t das System der Hauptaxen sich um sich selbst verdreht. Die Bewegung der Erde aber beziehen wir nunmehr nicht wie im vorigen Paragraphen auf dasselbe bewegte Axensystem, sondern auf ein anderes. Wir nehmen nämlich an, dafs in dem Zeitintervall t bis $t + dt$ die Erde sich im allgemeinen mit den Winkelgeschwindigkeiten $p - \alpha$, $q - \beta$, $r - \gamma$ gegen die festen Axen verdrehe und ein einzelner Punkt (xyz) gegen drei rechtwinkelige Axen, die zur Zeit t mit den festen Axen zusammenfallen, aber im Intervall dt die allgemeine Drehung mitmachen, aufserdem um dx_2, dy_2 und dz_2 sich verschiebe. Dann wird nach Analogie von (1) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dx_2}{dt} \quad \cdot \quad + (q-\beta)\,z - (r-\gamma)\,y \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dy_2}{dt} - (p-\alpha)\,z \quad \cdot \quad + (r-\gamma)\,x \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{dz_2}{dt} + (p-\alpha)\,y - (q-\beta)\,x \quad \cdot
\end{aligned} \tag{1}$$

und hieraus ähnlich wie im Beginn des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned}
2\sum f_{xy}\,dm = (r-\gamma)&\sum (x^2+y^2)\,dm \\
&- (p-\alpha)\sum zx\,dm - (q-\beta)\sum yz\,dm \\
&+ \sum\left(x\frac{dy_2}{dt} - y\frac{dx_2}{dt}\right)dm.
\end{aligned}$$

Da wir nun zur Zeit t als festes Koordinatenaxensystem der x, y und z die Hauptaxen nehmen, verschwinden die Summen

$$\sum zx\,dm \qquad \sum yz\,dm \qquad \sum xy\,dm\,; \tag{2}$$

aufserdem können wir ohne Zweifel die drei Gröfsen $(p - \alpha)$, $(q - \beta)$, $(r - \gamma)$ so gewählt denken, dafs sie die mittlere Drehbewegung des veränderlichen Erdkörpers vorstellen und somit auch die Summen

$$\begin{aligned}
&\sum\left(x\frac{dy_2}{dt} - y\frac{dx_2}{dt}\right)dm \\
&\sum\left(y\frac{dz_2}{dt} - z\frac{dy_2}{dt}\right)dm \\
&\sum\left(z\frac{dx_2}{dt} - x\frac{dz_2}{dt}\right)dm
\end{aligned} \tag{3}$$

verschwinden.*) Bezeichnen wir alsdann die veränderlichen Hauptträgheitsmomente

---

*) Dafs diese Bestimmung möglich ist, geht aus den weiterhin folgenden (5) hervor. Denkt man sich die Bewegung der Erdteile gegen die festen Axen bekannt, so sind darin nur die drei Gröfsen ω_1, ω_2, ω_3 unbekannt und diese lassen sich jedenfalls bestimmen.

$$\begin{aligned} &\sum (x^2 + y^2)\, dm \text{ mit } \mathfrak{C} \\ &\sum (y^2 + z^2)\, dm \text{ mit } \mathfrak{A} \\ &\sum (z^2 + x^2)\, dm \text{ mit } \mathfrak{B}, \end{aligned} \tag{4}$$

so wird mit Rücksicht aufs Vorige und nach Analogie

$$\begin{aligned} 2 \sum f'_{xy}\, dm &= (r - \gamma)\, \mathfrak{C} = \omega_3 \mathfrak{C} \\ 2 \sum f'_{yz}\, dm &= (p - \alpha)\, \mathfrak{A} = \omega_1 \mathfrak{A} \\ 2 \sum f'_{zx}\, dm &= (q - \beta)\, \mathfrak{B} = \omega_2 \mathfrak{B}, \end{aligned} \tag{5}$$

wenn zur Abkürzung $r - \gamma$, $p - \alpha$, $q - \beta$ mit ω_3, ω_1, ω_2 bezeichnet werden.

Die Gleichungen (2) S. 389 geben nunmehr folgendes System:

$$\begin{aligned} \frac{d(\omega_3 \mathfrak{C})}{dt} - (\omega_2 + \beta)\, \omega_1 \mathfrak{A} + (\omega_1 + \alpha)\, \omega_2 \mathfrak{B} &= N \\ \frac{d(\omega_1 \mathfrak{A})}{dt} - (\omega_3 + \gamma)\, \omega_2 \mathfrak{B} + (\omega_2 + \beta)\, \omega_3 \mathfrak{C} &= L \\ \frac{d(\omega_2 \mathfrak{B})}{dt} - (\omega_1 + \alpha)\, \omega_3 \mathfrak{C} + (\omega_3 + \gamma)\, \omega_1 \mathfrak{A} &= M. \end{aligned} \tag{6}$$

Hierin sind also $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die veränderlichen Hauptträgheitsmomente, ω_1, ω_2, ω_3 die mittleren Drehgeschwindigkeiten der Erde um die für den Augenblick festgehaltenen Hauptaxen ABC und $(\omega_1 + \alpha)$, $(\omega_2 + \beta)$, $(\omega_3 + \gamma)$ die Drehgeschwindigkeiten der veränderlichen Hauptaxen selbst gegen ihre augenblickliche Lage.

Die Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und die Gröfsen α, β, γ, welche das Voraneilen der Hauptaxen gegen den Erdkörper markieren, müssen als Funktionen der Zeit gegeben sein, wenn die ω aus den (6) ermittelt werden sollen.

Als Momentanaxe wird man bei einem veränderlichen Erdkörper eine Axe bezeichnen, deren Stellungswinkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sich nach den Formeln

$$\begin{gathered} \omega_1 = \omega \cos \mathfrak{a} \qquad \omega_2 = \omega \cos \mathfrak{b} \qquad \omega_3 = \omega \cos \mathfrak{c} \\ \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \end{gathered} \tag{7}$$

aus den Werten ω_1, ω_2, ω_3 berechnen, die mithin als Komponenten der augenblicklichen mittleren Drehgeschwindigkeit ω der Erde um die Momentanaxe aufgefafst werden.

Hierbei ist zu bemerken, dafs ω nicht notwendig mit der astronomisch beobachtbaren Rotationsdauer der Erde zusammenfällt, indem die einzelnen Teile der Erde sich eben nach der Voraussetzung etwas verschieden bewegen. Die Frage nach dem Grad der Verschieden-

heit hat übrigens nur bei Massenverschiebungen von der Art der Flut und Ebbe (auf der Oberfläche oder im Innern) eine praktische Bedeutung.

§ 14. **Bewegung des veränderlichen Erdkörpers, abgesehen von äufseren Kräften.** In diesem Falle geben die (6) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\omega_3 \mathfrak{C})}{dt} - (\omega_2 + \beta)\,\omega_1 \mathfrak{A} + (\omega_1 + \alpha)\,\omega_2 \mathfrak{B} &= 0 \\
\frac{d(\omega_1 \mathfrak{A})}{dt} - (\omega_3 + \gamma)\,\omega_2 \mathfrak{B} + (\omega_2 + \beta)\,\omega_3 \mathfrak{C} &= 0 \qquad (1) \\
\frac{d(\omega_2 \mathfrak{B})}{dt} - (\omega_1 + \alpha)\,\omega_3 \mathfrak{C} + (\omega_3 + \gamma)\,\omega_1 \mathfrak{A} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Als Unbekannte nehmen wir $\omega_1 \mathfrak{A}$, $\omega_2 \mathfrak{B}$, $\omega_3 \mathfrak{C}$, weil dieses einfacher ist und weil aufserdem diese Gröfsen auch eine besondere Bedeutung haben. Da wir von äufseren Kräften absehen, gilt nämlich jetzt der Satz von der unveränderlichen Ebene, § 10 S. 405. Zufolge der (5) des vorigen Paragraphen haben aber zur Zeit t die Gröfsen P, Q, R des § 10 die Werte $\omega_1 \mathfrak{A}$, $\omega_2 \mathfrak{B}$, $\omega_3 \mathfrak{C}$, und es sind daher die Stellungswinkel der Normale der unveränderlichen Ebene gegen die Hauptaxen gegeben durch die Relationen:

$$\omega_1 \mathfrak{A} = K \cos \mathfrak{a}' \qquad \omega_2 \mathfrak{B} = K \cos \mathfrak{b}' \qquad \omega_3 \mathfrak{C} = K \cos \mathfrak{c}'$$

für

$$K^2 = \omega_1^2 \mathfrak{A}^2 + \omega_2^2 \mathfrak{B}^2 + \omega_3^2 \mathfrak{C}^2\,. \qquad (2)$$

K ist nach § 10 eine Konstante; man erkennt dies auch aus den (1), wenn man sie bezw. mit $\omega_3 \mathfrak{C}$, $\omega_1 \mathfrak{A}$, $\omega_2 \mathfrak{B}$ multipliziert, addiert und integriert.

Legen wir um den Erdschwerpunkt eine Kugel vom Radius 1, so sind die Koordinaten des positiven Poles der Normale der unveränderlichen Ebene auf der Kugelfläche in Bezug auf die drei Hauptaxen A, B, C bezw.

$$\begin{aligned}
\xi' &= \cos \mathfrak{a}' = \frac{\omega_1 \mathfrak{A}}{K} \\
\eta' &= \cos \mathfrak{b}' = \frac{\omega_2 \mathfrak{B}}{K} \qquad (3) \\
\zeta' &= \cos \mathfrak{c}' = \frac{\omega_3 \mathfrak{C}}{K}\,.
\end{aligned}$$

Dagegen sind die Koordinaten des positiven Poles der Momentanaxe mit Rücksicht auf (7) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned}
\xi &= \cos \mathfrak{a} = \frac{\omega_1}{\omega} = \xi' \frac{K}{\mathfrak{A}\omega} \\
\eta &= \cos \mathfrak{b} = \frac{\omega_2}{\omega} = \eta' \frac{K}{\mathfrak{B}\omega} \qquad (4) \\
\zeta &= \cos \mathfrak{c} = \frac{\omega_3}{\omega} = \zeta' \frac{K}{\mathfrak{C}\omega}\,.
\end{aligned}$$

Die Relationen (4) gestatten $\xi\ \eta\ \zeta$ zu berechnen, wenn erst $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ ermittelt sind, was im Anschlufs an die (1) zu geschehen hat. Wenn wir annehmen, dafs wie gegenwärtig die Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ näherungsweise einander gleich bleiben, dann ist angenähert

$$K = \mathfrak{A}\,\omega = \mathfrak{B}\,\omega = \mathfrak{C}\,\omega\,,$$

d. h. ξ und ξ', η und η', ζ und ζ' unterscheiden sich nur um kleine Bruchteile ihres Wertes. Abgesehen von äufseren Kräften bleibt daher die *Momentanaxe* der Normale der unveränderlichen Ebene sehr nahe und hat somit im Raume angenähert eine konstante Richtung. *Die Abweichungen der Momentanaxe von der konstanten Richtung sind jedenfalls viel kleiner als die Verschiebungen des Erdkörpers gegen die Momentanaxe.*

Wir führen nun, wie beabsichtigt, in die (1) die Ausdrücke (3) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\zeta'}{dt} + \xi'\eta'\left(\frac{K}{\mathfrak{A}} - \frac{K}{\mathfrak{B}}\right) - \beta\xi' + \alpha\eta' = 0\\
&\frac{d\xi'}{dt} + \eta'\zeta'\left(\frac{K}{\mathfrak{B}} - \frac{K}{\mathfrak{C}}\right) - \gamma\eta' + \beta\zeta' = 0\\
&\frac{d\eta'}{dt} + \zeta'\xi'\left(\frac{K}{\mathfrak{C}} - \frac{K}{\mathfrak{A}}\right) - \alpha\zeta' + \gamma\xi' = 0\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Die bedeutenderen Massenverschiebungen, welche gegenwärtig erfahrungsmäfsig stattfinden, erfolgen durch meteorologische Prozesse, durch Erdbeben und vulkanische Ausbrüche, durch langsame (säkulare) Hebungen und Senkungen der Erdkruste und endlich durch die Ebbe und Flut. Die Massen, welche hierbei in betracht kommen, sind jedenfalls wesentlich kleiner als diejenigen, durch deren Anhäufung in der Gegend des Äquators $\mathfrak{C}$ über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dominiert. Es wird daher das gegenwärtige Verhältnis von $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht wesentlich gestört werden, ebenso wird die C-Axe und demgemäfs voraussichtlich auch die Momentanaxe nur geringe Verschiebungen im Erdkörper erleiden. Dies letztere (nach der Anmerkung zu § 12 S. 410 eine notwendige Voraussetzung der Brauchbarkeit der Entwicklungen) kommt auf die Voraussetzung der Kleinheit von ξ' und η' hinaus, infolge welcher ζ' von der Einheit nur sehr wenig abweicht. Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen vereinfachen wir unter Annahme von $\gamma =$ null das System in folgendes:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi'}{dt} + \eta'\left(\frac{K}{A} - \frac{K}{C}\right) + \beta = 0\\
&\frac{d\eta'}{dt} - \xi'\left(\frac{K}{A} - \frac{K}{C}\right) - \alpha = 0\\
&\frac{d\zeta'}{dt} - \beta\xi' + \alpha\eta' = 0\,,
\end{aligned} \tag{6}$$

in welchem C und A Mittelwerte für $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ nebst $\mathfrak{B}$ bezeichnen.

Die Annahme $\gamma =$ null reicht für unsere Zwecke aus, abgesehen von flutartigen Bewegungen der Massen. Denn das Wesentliche der anderen Fälle wird auch erkannt, wenn wir dabei die Axen A und B so zu den bewegten Massen gelegt denken, dafs sie keine Verschiebung erleiden, welche aus einer Drehung um die C-Axe hervorgeht.

Bei flutartigen Massenbewegungen ist im System (6) zu setzen

$$\frac{K}{A} - \frac{K}{C} - \gamma \qquad \text{anstatt} \qquad \frac{K}{A} - \frac{K}{C} \,.$$

§ 15. Fortsetzung: Integration und spezielle Fälle.

Die erste und zweite der Gleichungen (6) des vorigen Paragraphen haben dieselbe Form wie die (4) S. 392, falls wir $\alpha = \beta =$ null setzen; in diesem Falle würden wir demnach erhalten:

$$\xi' = a \cos(\lambda t + \mu) \qquad \eta' = a \sin(\lambda t + \mu)\,,$$

wenn der Faktor von η' in der ersten Gleichung (6) mit λ bezeichnet wird und a und μ Konstanten bezeichnen. Lösen wir die trigonometrischen Funktionen in den Ausdrücken für ξ' und η' auf, so folgt:

$$\begin{aligned} \xi' &= f \cos\lambda t - g \sin\lambda t \\ \eta' &= f \sin\lambda t + g \cos\lambda t\,, \end{aligned} \tag{1}$$

worin f und g ebenfalls Konstanten sind, die aber von a und μ abhängen.

Wir versuchen nun eine Lösung unserer beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} + \lambda\eta' + \beta &= 0 \\ \frac{d\eta'}{dt} - \lambda\xi' - \alpha &= 0\,, \end{aligned} \tag{2}$$

worin

$$\lambda = \frac{C - A}{A} \, \frac{K}{C} \tag{2*}$$

ist, dadurch zu erzielen, dafs wir f und g als Funktionen der Zeit t betrachten, die noch zu bestimmen sind.

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -\lambda f \sin\lambda t - \lambda g \cos\lambda t + \frac{df}{dt} \cos\lambda t - \frac{dg}{dt} \sin\lambda t \\ \frac{d\eta'}{dt} &= \lambda f \cos\lambda t - \lambda g \sin\lambda t + \frac{df}{dt} \sin\lambda t + \frac{dg}{dt} \cos\lambda t\,. \end{aligned}$$

Setzt man diese Differentialquotienten und die (1) in die (2) ein, so wird erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} \cos\lambda t - \frac{dg}{dt} \sin\lambda t &= -\beta \\ \frac{df}{dt} \sin\lambda t + \frac{dg}{dt} \cos\lambda t &= +\alpha\,, \end{aligned}$$

woraus durch Auflösung nach den Differentialquotienten hervorgeht:

$$\frac{df}{dt} = -\beta \cos \lambda t + \alpha \sin \lambda t$$
$$\frac{dg}{dt} = +\beta \sin \lambda t + \alpha \cos \lambda t\,,$$

welche Gleichungen ergeben

$$\left.\begin{aligned} f &= \int (-\beta \cos \lambda t + \alpha \sin \lambda t)\, dt \\ g &= \int (+\beta \sin \lambda t + \alpha \cos \lambda t)\, dt\,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Diese Gleichungen enthalten mit den (1) die Lösung der Aufgabe, ξ' und η' zu finden. Man kann zum besseren Verständnis der (3) bemerken, dafs λ ungefähr $^1/_{300}$ der Drehungsgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe ist und wesentlich dieselbe Bedeutung hat wie die Drehungsgeschwindigkeit λ der Momentanaxe um die Hauptaxe C im festen Erdkörper, vergl. § 5 S. 394.

Schliefslich giebt die 3. Gleichung (6) des vorigen Paragraphen ζ'; doch ist es einfacher, von der Relation $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$ auszugehen, womit sich für den vorliegenden Fall ausreichend genau findet:

$$\zeta' = 1 - \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2}\,. \quad (4)$$

Wenn wir eine *stofsweise Massenverschiebung* (Erdbeben) annehmen, so ist das Zeitintervall, innerhalb dessen α und β von null verschieden sind, so klein, dafs in den Ausdrücken für f und g $\cos \lambda t = 1$, $\sin \lambda t = 0$ gesetzt werden kann. Damit folgt:

$$f = f_0 - \int \beta\, dt \qquad g = g_0 + \int \alpha\, dt\,,$$

wobei f_0 und g_0 die konstanten Werte von f und g vor dem Stofse sind und die Integration sich über das Zeitintervall des Stofses erstreckt. Es ist somit:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \left(f_0 - \int \beta\, dt\right) \cos \lambda t - \left(g_0 + \int \alpha\, dt\right) \sin \lambda t \\ \eta' &= \left(f_0 - \int \beta\, dt\right) \sin \lambda t + \left(g_0 + \int \alpha\, dt\right) \cos \lambda t\,. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Rechnen wir t vom Moment des Stofses ab, so ist gleich nachher

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= f_0 - \int \beta\, dt \\ \eta' &= g_0 + \int \alpha\, dt\,, \end{aligned}\right\} \quad (5^*)$$

also die Änderung in ξ' und η' bezw. gleich

$$-\int \beta\, dt \text{ und } +\int \alpha\, dt. \tag{6}$$

Vor und nach dem Stofse beschreiben auf der um den Erdschwerpunkt gelegten Kugel vom Radius 1 die Normale der unveränderlichen Ebene und die Momentanaxe Kreise um die Hauptaxe C. Der Radius, der für beide nahezu denselben Betrag hat, ist vorher gleich $\sqrt{f_0^2 + g_0^2}$, nachher gleich $\sqrt{f^2 + g^2}$, die Rotationsdauer 304 Tage.

Es ist noch zu beachten, dafs während des Stofses der positive Pol der Hauptaxe C sich auf der Einheitskugel in Richtung der A-Axe um $\int \beta\, dt$, in Richtung der B-Axe um $-\int \alpha\, dt$ verschiebt, da die Hauptaxen sich gegen die mittlere Drehbewegung der Erde mit den Winkelgeschwindigkeiten α, β, γ verschieben. Dieses sind gerade die entgegengesetzten Werte wie die, um welche sich die Koordinaten ξ' und η' nach (6) infolge des Stofses ändern, und man erkennt, dafs die Normale der u. E. gegen die Anfangslage der C-Axe *nach* dem Stofse dieselbe Lage hat wie *vor* dem Stofse.

Die stofsweise Massenverschiebung äufsert sich hiernach wesentlich nur darin, dafs im Augenblick ihres Eintritts die Axe des gröfsten Trägheitsmoments $\mathfrak{C}$ ihre Richtung ändert, wodurch der halbe Öffnungswinkel des Kegels, welchen die Axe der u. E. und die Momentanaxe in 304 Tagen um die C-Axe beschreiben, von $\sqrt{f_0^2 + g_0^2}$ in $\sqrt{f^2 + g^2}$ übergeht.

In den geographischen Koordinaten entstehen hierdurch Änderungen in der Amplitude der 304-tägigen Periode, sowie in den Mittelwerten (vergl. S. 395).

Wenn wir eine *säkulare Massenverschiebung* annehmen, so werden wir ein Bild der Veränderungen erhalten, indem wir α und β konstant setzen. Die (3) geben zur Zeit t, wenn t vom Beginne der Verschiebung an gerechnet wird:

$$f = f_0 - \frac{\beta}{\lambda} \sin \lambda t \qquad + \frac{\alpha}{\lambda}(1 - \cos \lambda t)$$

$$g = g_0 + \frac{\beta}{\lambda}(1 - \cos \lambda t) + \frac{\alpha}{\lambda} \sin \lambda t,$$

und hiermit wird zufolge (1):

$$\begin{aligned} \xi' &= -\frac{\alpha}{\lambda} + \left(f_0 + \frac{\alpha}{\lambda}\right) \cos \lambda t - \left(g_0 + \frac{\beta}{\lambda}\right) \sin \lambda t \\ \eta' &= -\frac{\beta}{\lambda} + \left(f_0 + \frac{\alpha}{\lambda}\right) \sin \lambda t + \left(g_0 + \frac{\beta}{\lambda}\right) \cos \lambda t. \end{aligned} \tag{7}$$

Beachtet man nun, dafs λ die Bedeutung einer Winkelgeschwindigkeit hat, welche in 304 Tagen eine volle Umdrehung ergiebt, so er-

kennt man leicht, dafs in vorstehenden Ausdrücken die durch λ dividierten Glieder unerheblich sind. Denn selbst wenn, in Sekunden genommen, α oder β in hundert Jahren $10''$ betrügen, was erfahrungsmäfsig gegenwärtig nicht zu erwarten ist, so würden in 304 Tagen α oder β nur $0{,}083''$ geben, sodafs mithin $\alpha : \lambda$ oder $\beta : \lambda$ den Betrag 0,00000007 oder 0,013 in Sek. erhalten würden, welcher so gut wie gänzlich verschwindet. Wir dürfen mithin setzen:

$$\begin{aligned} \xi' &= f_0 \cos \lambda t - g_0 \sin \lambda t \\ \eta' &= f_0 \sin \lambda t + g_0 \cos \lambda t\,. \end{aligned} \qquad (7^*)$$

Demnach behält die Normale der u. E. und somit auch die Momentanaxe zum veränderlichen Hauptaxensystem bei säkularen Änderungen des letzteren immer dieselbe relative Lage wie zu Anfang. Die Momentanaxe folgt also den Verschiebungen der Hauptaxe C in der Erde, wobei sie in 304 Tagen um dieselbe einen Umlauf von demselben Öffnungswinkel wie zu Anfang beschreibt.

Den säkularen Verschiebungen der Momentanaxe in der Erde entsprechen säkulare Änderungen der geographischen Koordinaten und Azimute von im allgemeinen gleicher Ordnung.

Der Unterschied der Wirkung stofsweiser und säkularer Massenbewegungen ist nach dem Vorigen der, dafs erstere den Öffnungswinkel des Kegels ändern, welchen die Momentanaxe in 304 Tagen in der Erde um die Hauptaxe C beschreibt, letztere aber nicht. In beiden Fällen aber entsprechen die nichtperiodischen Teile der geographischen Koordinaten und Azimute der Lage der Hauptaxe C im Erdkörper.

Die entwickelten Fälle mögen hier genügen; allerdings kommen bei meteorologischen Prozessen noch periodische Verschiebungen der Hauptaxe C vor, insbesondere mit Perioden von 1 Jahr und 11 Jahren, deren Betrachtung recht interessant ist (namentlich weil Multiplikationen der Wirkungen eintreten können); aber das wesentliche Resultat läfst sich auch an der Hand der bereits entwickelten Formeln nachweisen. Es ist das Folgende: alle Verschiebungen der Hauptaxe C, welche nicht säkularen Charakter haben, wirken auf eine Veränderung des Abstandes von Momentanaxe und Hauptaxe, also auf eine Veränderung des Radius, mit welchem erstere um letztere in 304 Tagen rotiert. Für Wirkungen, welche nur kurze Zeit, bis zu etwa einer Woche im Maximum, andauern, zeigt dies das Formelpaar (5); für etwas längere Wirkungen das System (7). In letzterer Beziehung kann man sich recht wohl denken, dafs bei meteorologischen Prozessen $\alpha : \lambda$ und $\beta : \lambda$ in den (7) nicht immer verschwindend sind, wie bei säkularen Wirkungen, mögen diese von meteorologischen Prozessen restieren oder anderer Natur sein. (Durch Auflösung in successive stofsweise Verschiebungen kann man übrigens mittelst der (6) graphisch jede Wirkung verfolgen.)

Betrachten wir zum Schlusse ζ', so finden wir mit Rücksicht auf (4) S. 416, dafs es von eins sehr wenig abweicht, solange der Neigungswinkel der Hauptaxe C gegen die Normale der unveränderlichen Ebene nur einige Sekunden beträgt.

Nun ist nach S. 413 (3) $\zeta' = \frac{\omega_3 \mathfrak{C}}{K}$, folglich wird unter Voraussetzung konstanten Wertes von ζ':

$$\omega_3 \mathfrak{C} = \text{Konst.} \tag{8}$$

Genauer ist unter Einführung des Wertes von ζ' aus (4) S. 416

$$\omega_3 \mathfrak{C} = K\left(1 - \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2}\right). \tag{8*}$$

Die Gleichung (8*) gestattet einen Schlufs auf die Änderungen in der Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation um die Momentanaxe. Es war

$$\omega^2 = \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \omega_3{}^2,$$

also ist in hinreichender Annäherung

$$\omega = \omega_3 + \frac{\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2}{2\,\omega_3}, \tag{9}$$

wobei ω_1 und ω_2 durch die Relationen $\frac{\omega_1 \mathfrak{A}}{K} = \xi'$ und $\frac{\omega_2 \mathfrak{B}}{K} = \eta'$ bestimmt sind. Für K kann man hierin $\omega_3 \mathfrak{C}$ setzen. Machen wir aufserdem keinen Unterschied zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so giebt (9) die Näherungsgleichung:

$$\omega = \omega_3\left(1 + \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2} \frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2}\right). \tag{10}$$

Aus (8*) und (10) folgt endlich

$$\omega \mathfrak{C} = K\left\{1 + \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\,(\xi'^2 + \eta'^2)\right\}.$$

Für $\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$ gleich arc 10″ wird die Parenthese mit Rücksicht auf (11) S. 393 gleich $1 + {}^1/_{120\,000\,000\,000}$. Die Annahme $\omega \mathfrak{C} = K$ enthält daher einen Fehler, der auf ω reduziert in einem Jahre oder in rund 32000000 Sek. erst 0,0003 Zeitsek. beträgt.

Setzen wir hiernach

$$\omega \mathfrak{C} = \text{Konst.}, \tag{11}$$

so hängt nun die Änderung in ω nur von derjenigen in $\mathfrak{C}$ ab und zwar ist für eine Variation in $\mathfrak{C}$ die entsprechende in ω:

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = -\frac{\delta \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}. \tag{12}$$

§ 16. Schätzung der Veränderung der Hauptträgheitsmomente.

Wir denken uns, dafs das System der Hauptaxen nach Mafsgabe der Winkelgeschwindigkeiten α, β und γ sich im Erdkörper gegen

sich selbst um ein Geringes verschiebt, wobei wir zur Vereinfachung das betreffende Zeitintervall als Zeiteinheit nehmen. Hat ein Punkt gegen die 1. Lage des Systems die Koordinaten x, y und z, gegen die 2. Lage die Koordinaten $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, so ist:

$$\begin{aligned} \delta x &= \quad . \quad - \beta z + \gamma y \\ \delta y &= + \alpha z \quad . \quad - \gamma x \\ \delta z &= - \alpha y + \beta x \quad . \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Bezeichnet man nun die Cosinus der Richtungswinkel einer vom Schwerpunkt nach dem Punkt (xyz) gezogenen Linie für die 1. Lage der Axen mit l, m und n, so ist für die 2. Lage die Variation in l, m und n bezw.:

$$\begin{aligned} \delta l &= \quad . \quad - \beta n + \gamma m \\ \delta m &= + \alpha n \quad . \quad - \gamma l \\ \delta n &= - \alpha m + \beta l \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

wie man aus (1) findet, indem man beachtet, daſs z. B. $l = x : r$, mit r als Radiusvektor, ist.

Am Schlusse der Zeiteinheit ist das System in seiner 1. Lage nicht mehr System der Hauptaxen; das Trägheitsmoment in Bezug auf die Linie (l, m, n) hat daher alsdann für diese Lage des Systems die Form

$$A_1 l^2 + B_1 m^2 + C_1 n^2 - 2A'mn - 2B'ln - 2C'lm\,. \tag{3}$$

Dagegen ist dasselbe Trägheitsmoment für die 2. Lage des Systems der Hauptaxen von der Form

$$\mathfrak{A}(l+\delta l)^2 + \mathfrak{B}(m+\delta m)^2 + \mathfrak{C}(n+\delta n)^2,$$

d. i. für sehr kleine Variationen angenähert gleich

$$\mathfrak{A}l^2 + \mathfrak{B}m^2 + \mathfrak{C}n^2 + 2\mathfrak{A}l\delta l + 2\mathfrak{B}m\delta m + 2\mathfrak{C}n\delta n,$$

oder mit Benutzung der (2):

$$\mathfrak{A}l^2 + \mathfrak{B}m^2 + \mathfrak{C}n^2 + 2mn\alpha(\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) + 2ln\beta(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}) + 2lm\gamma(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}). \tag{4}$$

Da (3) und (4) bei beliebigen Werten von l, m und n übereinstimmen müssen, so zeigt sich, daſs

$$A_1 = \mathfrak{A}, \qquad B_1 = \mathfrak{B}, \qquad C_1 = \mathfrak{C} \tag{5}$$

$$\alpha = \frac{A'}{C_1 - B_1}, \ \beta = \frac{B'}{A_1 - C_1}, \ \gamma = \frac{C'}{B_1 - A_1} \tag{6}$$

wird. Diese Formeln gestatten nicht nur eine Schätzung der α, β und γ, sondern auch der Änderungen der Hauptträgheitsmomente. Da nämlich am Ende der Zeiteinheit die Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bezw. gleich A_1, B_1 und C_1, den Trägheitsmomenten für die 1. Lage der Hauptaxen, sind, so sind die Variationen $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$ und $\delta\mathfrak{C}$ der Hauptträgheitsmomente gleich den Variationen der Träg-

heitsmomente für ein Axensystem, welches die 1. Lage der Hauptaxen hat. Zugleich erkennt man aus den Relationen

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum (y^2 + z^2)\, dm & A' &= \sum yz\, dm \\ B_1 &= \sum (z^2 + x^2)\, dm & B' &= \sum zx\, dm \\ C_1 &= \sum (x^2 + y^2)\, dm & C' &= \sum xy\, dm, \end{aligned} \tag{7}$$

dafs Variationen in den $A_1 B_1 C_1$ und den $A' B' C'$ im allgemeinen von gleicher Ordnung sind.

Bei der Betrachtung von Massenverschiebungen reicht es zur Gewinnung einer rohen Vorstellung für unsere Zwecke aus, anzunehmen, dafs eine über die ganze Erdoberfläche gleichmäfsig verteilte Masse sich in einem Punkte zusammenzieht. Denn nur in diesem oder einem ähnlichen Falle kann eine verhältnismäfsig kleine Masse infolge ihrer grofsen Verschiebung eine erhebliche Wirkung äufsern; dagegen geben kleine Verschiebungen an der Erdoberfläche nur geringfügige Wirkungen — Verschiebungen aber, bei denen auch das Erdinnere zu berücksichtigen ist, können wir wegen ihrer relativ geringen Wahrscheinlichkeit aufser acht lassen, solange zur Erklärung beobachteter Erscheinungen die Vorgänge auf der Erdoberfläche und in der Erdkruste genügen.

Indem wir die Erdoberfläche als Kugelfläche vom Radius R nehmen, verlegen wir zur Erlangung einer maximalen Drehung der Hauptaxe C den Konzentrationspunkt in 45° nördl. Breite und zugleich der Einfachheit halber in die zx-Ebene, sodafs von den drei Gröfsen $\alpha\beta\gamma$ nur β einen Wert erhält, der von null verschieden ist. Für den Konzentrationspunkt wird:

$$y = 0 \qquad z = x = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad zx = \frac{R^2}{2}; \tag{8}$$

es ergiebt sich somit nach (7) der allein in betracht kommende Wert $B' = \frac{1}{2} R^2 m$, wenn m die konzentrierte Masse bezeichnet. Bei genauerer Rechnung wird stets eine Verkleinerung dieses Wertes dadurch stattfinden, dafs die Konzentration in einer Fläche und nicht in einem Punkte erfolgt. Dagegen hat die mit der Konzentration verbundene Schwerpunktsverschiebung keinen Einflufs. Da es sich hier nur um eine Schätzung handelt, behalten wir den angegebenen Wert für B' bei.

Im 6. Kap. wird aber gezeigt, dafs die Trägheitsmomente der Erde annähernd gleich $\frac{1}{3} R^2 M$, für M als Erdmasse, sind. Da nun $C - A$ ungefähr $^1/_{305}$ von C oder A ist, so folgt $C - A = \frac{1}{900} R^2 M$



rund (vergl. hierzu auch (6) S. 127). Es ergiebt sich daher aus der 2. Gleichung (6):

$$\beta = -\ 450\,\frac{m}{M}\,. \tag{9}$$

Denken wir uns die Masse m ursprünglich als eine die ganze Erdoberfläche h^m hoch bedeckende Masse von der Dichtigkeit 1, so ist

$$m = 4\pi R^2 h\,;$$

aufserdem ist

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \Theta_m\,.$$

Mit $\Theta_m = 5{,}6$ und $R = 6370000^m$ folgt rund

$$\underset{\text{in Sek.}}{\beta} = -\ 8\,.\,h^m\,. \tag{9*}$$

Hiernach kann man die maximalen Wirkungen von verschiedenen meteorologischen Prozessen und von Verbiegungen der Erdkruste, die mit Hebungen und Senkungen verbunden sein werden, schätzen.

Nehmen wir beispielsweise an, dafs sich im Winter die Kontinente der nördlichen Erdhälfte nördlich von 45° Breite mit Schnee und Eis bedecken und zwar äquivalent mit $0{,}1^m$ Regenhöhe, so ist damit 0,01 bis 0,02″ Verschiebung der Hauptaxe C verbunden. Die betreffende Masse bedeckt nämlich in Europa-Asien etwa $^1/_{20}$ der Erdoberfläche, wovon durch die Gegenwirkung Nordamerikas indessen nur etwa die Hälfte wirksam bleibt, deren Einflufs wegen der geographischen Lage überdies kein maximaler ist. Reduzieren wir $h = 0{,}1^m$ von $^1/_{40}$ der Erdoberfläche auf die ganze Erdoberfläche, so wird $h = 0{,}0025^m$ und nach (9*) unter Voraussetzung der Maximalwirkung $\beta = -\ 0{,}02''$. In ähnlicher aber entgegengesetzter Weise wirkt in heifsen Sommern eine Austrocknung der Kontinente. Wir unterlassen es auf weiteres hier einzugehen und bemerken nur noch, dafs es uns immerhin nicht ganz leicht scheint, mehr wie einige Hundertelsekunden irreguläre Schwankungen aus meteorologischen Prozessen zu erklären.*) Dagegen würde z. B. eine zunehmende Vereisung des Südpols recht wohl säkulare Bewegungen von merkbarem Betrage erklären; denn mit derselben ist teils eine Verminderung der Wassermenge des Oceans und infolge dessen ein Hervortreten der Kontinente verbunden, teils eine Verschiebung der Niveauflächen, welche wieder ein Hervortreten der nördlichen Kontinente bedingt.

Was die Formänderungen der Erdkruste anlangt, so findet *G. H. Darwin*, dafs bei den gegenwärtigen Festigkeitsverhältnissen der Erde eine Kontinent- oder Meeresbildung nicht über 3° Ver-

*) *Will. Thomson* allerdings nimmt irreguläre Schwankungen der Erdaxe infolge meteorologischer Prozesse bis zu $^1/_2$″ an. Vergl. *American Journ. of Science and Arts* 1876 Bd. 12 S. 336—354, insbesondere S. 351.

schiebung der Hauptaxe C erzeugen werde. Selbstredend gehören dazu ausgedehnte Zeiträume.*)

Die mit den Massenverschiebungen verbundenen Änderungen der Rotationsdauer sind am gröſsten, wenn die Massen von den Polen nach äquatorialen Gegenden versetzt werden oder umgekehrt. Es ist alsdann $\delta\mathfrak{C} = \pm R^2 m$. Verteilt sich die vorher an den Polen befindliche Masse gleichmäſsig über die Erdoberfläche, so ist $\delta\mathfrak{C}$ vom vorigen Werte zwei Drittel. Behalten wir diesen Wert bei und setzen $\mathfrak{C}$ wie vorher gleich $\frac{1}{3}R^2M$, m und M aber ebenfalls wie vorher, so folgt mit Rücksicht auf (12) des vorigen Paragraphen für eine Massenversetzung vom Pole nach dem Äquator rund:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{h}{R}.$$

Damit sich ω um $^1/_{32\,000\,000}$ seines Betrages ändert, sodaſs also das Jahr um 1^s kürzer erscheint, müſste h etwa $^1/_5{}^m$ betragen, oder reduziert auf $^1/_{25}$ der Erdoberfläche als beiläufigen Flächeninhalt der etwa in betracht kommenden Umgebung der Pole: 5^m. Das Schmelzen einer Eisschicht von 5^m in der Umgebung der Pole würde also den angegebenen Erfolg haben.

§ 17. Verschwindender Einfluſs von Flut und Ebbe auf die Lage der Rotationsaxe. Wir betrachten hier die Flut und Ebbe unter der Voraussetzung, daſs die Erde gleichmäſsig mit Wasser bedeckt sei. Wir nehmen zugleich an, daſs ohne die Flutberge $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ sei und betrachten nur die Wirkung eines der beiden Himmelskörper, Mond oder Sonne, auf einmal.

Infolge der entstehenden Flutberge verschiebt sich die C-Axe, welche erfahrungsmäſsig der Momentanaxe naheliegt, etwas in einer durch deren Scheitel gehenden Ebene und rotiert dann um ihre ungestörte Lage C_0 mit dem störenden Körper und den Flutbergen. Die Axe des kleineren der beiden Hauptträgheitsmomente $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegt nun in jener Ebene und die des gröſseren in einer dazu senkrechten Ebene durch die Axe C. Da wir die jedesmalige Lage der Hauptaxen als Koordinatenaxen nehmen und $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ setzen, so geht also die zx-Ebene durch die Scheitel der Flutberge und die C-Axe.

In Fig. 68 ist die um den Erdschwerpunkt gelegte Kugelfläche vom Radius 1 in der Gegend des Durchschnitts mit der Hauptaxe C dargestellt: Z bezeichnet die z-Axe oder augenblickliche Lage der Axe C, C_0 deren ungestörte Lage; ZX und ZY sind die Durchschnittslinien mit der zx- und zy-Ebene. Da im Erdkörper das System der Hauptaxen gegen sich selbst im allgemeinen nach Maſsgabe der

*) Vergl. die S. 408 erwähnte Abhandlung.

Winkelgeschwindigkeiten $\alpha \beta \gamma$ bewegt gedacht wird, wobei der Drehungssinn durch die Pfeile der Fig. 68 angedeutet ist, so sieht man sofort, dafs beim Übergang des Systems in die Lage $X'Y'Z'$ nur Rotationen um die z-Axe und x-Axe stattfinden; dabei ist für das Zeitintervall dt

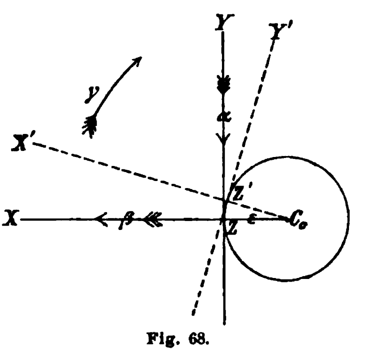


Fig. 68.

$$ZZ' = \varepsilon \gamma dt = -\alpha dt,$$

mithin

$$\alpha = -\varepsilon \gamma, \tag{1}$$

wenn ε den Winkelabstand der gestörten und ungestörten Lage der Hauptaxe C bedeutet.

Wie schon S. 415 am Schlusse des § 14 bemerkt wurde, ist jetzt in den Differentialgleichungen (6) S. 414 oder (2) S. 415 zu setzen anstatt

$$\lambda = \frac{C-A}{A} \frac{K}{C}$$

der Wert

$$\lambda - \gamma = \frac{C-A}{A} \frac{K}{C} - \gamma. \tag{2}$$

Damit werden die Endformeln nach S. 415 (1) und S. 416 (3):

$$\begin{aligned} \xi' &= f \cos(\lambda - \gamma)t - g \sin(\lambda - \gamma)t \\ \eta' &= f \sin(\lambda - \gamma)t + g \cos(\lambda - \gamma)t, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei

$$\begin{aligned} f &= \int \Big(-\beta \cos(\lambda - \gamma)t + \alpha \sin(\lambda - \gamma)t\Big) dt \\ g &= \int \Big(+\beta \sin(\lambda - \gamma)t + \alpha \cos(\lambda - \gamma)t\Big) dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Hierin ist jetzt nach (1) zu setzen $\alpha = -\varepsilon\gamma$ und $\beta = \text{null}$. ε selbst ist langsam veränderlich. Es beschreibt thatsächlich Z keinen Kreis um C_0, sondern eine Art Spirale, indem mit wechselndem Polabstande der störenden Körper die Flutberge ihren Äquatorabstand ändern.*) Wir tragen dem Rechnung, indem wir

$$\varepsilon = E \sin \varkappa t \tag{5}$$

setzen. E bezeichnet den Maximalabstand. Die Periode T in der Änderung von ε entspricht dem Mond- bezw. dem scheinbaren Sonnenumlauf um die Erde; $\varkappa$ ist gegeben durch

$$\varkappa T = 2\pi.$$

*) Infolge dessen ist β nicht genau gleich null. Durch den Verlauf der Flut auf der wirklichen Erdoberfläche findet aufserdem eine ungleichmäfsige Änderung von ε und eine ungleichförmige Drehung um C_0 statt. Diese Umstände ändern indessen das Resultat unserer Untersuchung nicht wesentlich.

Da T einem Monat bezw. Jahr entspricht (genauer $27^1/_3{}^d$ bezw. $365^1/_4{}^d$), so ist $\varkappa$ ein kleiner Bruchteil von 2π und daher weit kleiner als ω, welches bereits in einem Tage 2π giebt. Da ferner γ für Mond und Sonne nahezu gleich ω ist (im letzteren Falle erheblich genauer als im zweiten) so ist also $\varkappa$ von γ ein Bruchteil derselben Ordnung wie angenähert der Tag vom Monat bezw. Jahr.

Wir erhalten jetzt:

$$f = -E\gamma \int \sin(\lambda-\gamma)t \sin \varkappa t \, dt$$

$$g = -E\gamma \int \cos(\lambda-\gamma)t \sin \varkappa t \, dt$$

und hieraus, da

$$\sin(\lambda-\gamma)t \sin \varkappa t = \frac{1}{2}\Big(\cos(\lambda-\gamma-\varkappa)t - \cos(\lambda-\gamma+\varkappa)t\Big)$$

$$\cos(\lambda-\gamma)t \sin \varkappa t = \frac{1}{2}\Big(\sin(\lambda-\gamma+\varkappa)t - \sin(\lambda-\gamma-\varkappa)t\Big),$$

wenn der Einfachheit halber zunächst die Werte f_0 und g_0, welche zur Zeit $t =$ null stattfinden, gleich null angenommen werden:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} E\gamma \left(-\frac{\sin(\lambda-\gamma-\varkappa)t}{\lambda-\gamma-\varkappa} + \frac{\sin(\lambda-\gamma+\varkappa)t}{\lambda-\gamma+\varkappa}\right) \\ g &= \frac{1}{2} E\gamma \left(-\frac{\cos(\lambda-\gamma-\varkappa)t}{\lambda-\gamma-\varkappa} + \frac{\cos(\lambda-\gamma+\varkappa)t}{\lambda-\gamma+\varkappa}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} E\gamma \left(\frac{1}{\lambda-\gamma-\varkappa} - \frac{1}{\lambda-\gamma+\varkappa}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Das konstante Glied in g vernachlässigen wir, denn es giebt zusammengezogen

$$+E\frac{\gamma\varkappa}{(\lambda-\gamma)^2-\varkappa^2}; \tag{7}$$

da aber λ von ω und γ nur etwa $^1/_{305}$ ist und auch $\varkappa$ einen gegen γ kleinen Wert hat, so giebt dieses Glied angenähert

$$+E\frac{\varkappa}{\gamma}, \tag{7*}$$

mithin selbst für den Mond nur einige Prozent von E. Nimmt man die Höhe der Mondflut auf dem offenen Ocean zu rund $^1/_2{}^m$ an, so wird die behufs Anwendung der Formel (9*) S. 422 auf die ganze Erdoberfläche reduzierte Höhe h den Betrag von $^1/_6{}^m$ nicht erreichen und β, d. h. jetzt E, mit Rücksicht darauf, daſs auch die Maximalwirkung nicht entsteht, $< 1''$ sein. Mithin beträgt (7*) kaum ein paar Hundertelsekunden.

Wir erhalten endlich durch Einführung der (6) in die (3) nach einiger Reduktion:

$$\xi' = \frac{1}{2} E\gamma \left(\frac{\sin \varkappa t}{\lambda-\gamma-\varkappa} + \frac{\sin \varkappa t}{\lambda-\gamma+\varkappa}\right) = E\frac{\gamma(\lambda-\gamma)\sin \varkappa t}{(\lambda-\gamma)^2-\varkappa^2}$$

$$\eta' = \frac{1}{2} E\gamma \left(-\frac{\cos \varkappa t}{\lambda-\gamma-\varkappa} + \frac{\cos \varkappa t}{\lambda-\gamma+\varkappa}\right) = -E\frac{\gamma\varkappa \cos \varkappa t}{(\lambda-\gamma)^2-\varkappa^2}.$$

Vernachlässigen wir wieder Gröfsen von der Ordnung des Gliedes (7*), so folgt

$$\xi' = -E \sin \varkappa t = -\varepsilon, \quad \eta' = \text{null}, \tag{8}$$

und dies bedeutet, dafs die Normale der u. E. und also auch die Momentanaxe immer bis auf Gröfsen der Ordnung (7*) mit der ungestörten Lage der Hauptaxe C zusammenfällt; denn in Fig. 68 liegt zufolge der (8) der Durchschnitt dieser Normalen mit der Kugelfläche konstant in C_0. An der wesentlichen Bedeutung dieses Resultates wird auch nichts geändert, wenn f_0 und g_0 sowie Bewegungen der Hauptaxe C aus früher erörterten Gründen mit in die Rechnung aufgenommen werden, wofür wir die Ausführung aber übergehen. Dagegen ist noch hervorzuheben, dafs die Momentanaxe für die mittlere Drehbewegung des ganzen Erdkörpers auch eine solche für den festen Erdkörper allein ist, weil sie auch im wesentlichen als Drehaxe für die Flutberge auftritt.

Zu dem Resultate, dafs die Flut und Ebbe (dynamisch und ohne Rücksicht auf Kontinente u. s. f. berechnet) keinen Einflufs auf die Lage der Rotationsaxe im Raume hat, gelangte schon *Laplace*, *Méc. cél.*, t. II, l. V, p. 325—339; p. 341—347 berücksichtigt er auch ungleiche Meerestiefe, Reibung u. a. m.

Man vergl. übrigens noch in der *Méc. cél.*, t. II, l. IV, p. 204—211 sowie t. V, l. XI, p. 16—17 und p. 57—71 über die Stabilität des Meeres. Flutartige Massenverschiebungen behandelt auch *Gyldén* in der S. 408 genannten Abhandlung.

§ 18. **Die Rotationsaxe im Erdkörper unter dem Einflufs des Mondes und der Sonne.** Mond und Sonne sind die einzigen Himmelskörper, welche beachtenswerte Drehungsmomente L, M und N erzeugen. Dafs solche überhaupt entstehen, ist lediglich eine Folge der Ungleichheit der Hauptträgheitsmomente oder, wie man häufig weniger korrekt sagt: der ellipsoidischen Erdgestalt. Infolge dessen geht die Resultante der gegenseitigen Anziehungen der Erde und eines Himmelskörpers nicht durch den Erdschwerpunkt. Die Wirkung der so entstehenden Drehungsmomente ist allerdings unerheblich hinsichtlich der Verschiebung der Momentanaxe im Erdkörper, aber nicht verschwindend für die Bewegung der Momentanaxe im Raume. Wir werden hier ausführlich nur die Bewegung im Erdkörper betrachten, dagegen über die Bewegung im Raume nur berichten, weil diese Bewegung kein direktes geodätisches, sondern ein hervorragend astronomisches Interesse hat.

Wir gehen, indem wir die Erde als starr betrachten, von den Gleichungen (6) S. 391 aus:

$$\begin{aligned} C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq &= N \\ A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr &= L \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp &= M\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Hierzu sind jetzt die N, L und M zu berechnen. Es ist nach S. 388 z. B.:

$$N = \sum (x Y - y X)\, dm,$$

wobei wir unter X, Y und Z die Komponenten der beschleunigenden Kräfte (d. i. der Kräfte für die Masseneinheit) verstehen, welche Mond und Sonne auf das im Punkt (xyz) lagernde Massenteilchen dm der Erde ausüben. Es genügt, wenn wir jeden dieser Körper einzeln ins Auge fassen, und zwar soll immer der Mond genannt werden, da er die gröſsere Wirkung ausübt. Die Modifikation für die Sonne leuchtet sofort ein.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$ die Mondmasse und mit e den Abstand des Mondschwerpunktes von dem Teilchen dm, so ist die gegenseitige Anziehung des Mondes und dieses Teilchens, wobei wir uns die Mondmasse in ihrem Schwerpunkt vereinigt denken können, gleich

$$k^2 \frac{\mathfrak{M}\, dm}{e^2}.$$

$X dm$, $Y dm$, $Z dm$ sind die Komponenten dieser Anziehung in Richtung nach dem Monde. Entgegengesetzt gleich diesen Komponenten sind die Komponenten derselben Anziehung in Richtung nach dm. Diese letzteren kann man aber mit $X'\mathfrak{M}$, $Y'\mathfrak{M}$, $Z'\mathfrak{M}$ bezeichnen, wenn X', Y' und Z' die Komponenten der Anziehung $k^2 dm : e^2$ von dm auf die Masseneinheit von $\mathfrak{M}$ bezeichnen.

Wir führen nun in dem Ausdruck für N anstatt $X dm$ und $Y dm$ bezw. die negativen Werte von $X'\mathfrak{M}$ und $Y'\mathfrak{M}$ ein; zugleich aber anstatt der Koordinaten xyz von dm, die Koordinaten $x'y'z'$ des Mondschwerpunktes, was zulässig ist, da die Richtung der Anziehung in die Verbindungslinie beider Punkte fällt und das Drehungsmoment einer Kraft für jeden Punkt ihrer Richtung als Angriffspunkt dasselbe bleibt. Wir erhalten so:

$$N = \sum (y' X' - x' Y')\, \mathfrak{M},$$

und da x', y' und $\mathfrak{M}$ konstant sind für alle Summanden:

$$N = \mathfrak{M} \left(y' \sum X' - x' \sum Y' \right).$$

Die Summen der X', Y' und Z' sind aber die Resultanten der Anziehungen aller Erdteile auf die Masseneinheit des Mondes. Ist V das Potential der Erde, so ist somit nach § 6 im 1. Kap. S. 9:

$$\sum X' = \frac{\partial V}{\partial x'} \quad \sum Y' = \frac{\partial V}{\partial y'} \quad \sum Z' = \frac{\partial V}{\partial z'}$$

und hiermit folgt

Ebenso wird

$$\left.\begin{aligned} N &= \left(y'\frac{\partial V}{\partial x'} - x'\frac{\partial V}{\partial y'}\right)\mathfrak{M}. \\ L &= \left(z'\frac{\partial V}{\partial y'} - y'\frac{\partial V}{\partial z'}\right)\mathfrak{M} \\ M &= \left(x'\frac{\partial V}{\partial z'} - z'\frac{\partial V}{\partial x'}\right)\mathfrak{M}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nach § 5 (7) S. 60 im 2. Kap. ist aber, wenn r', φ', λ' die Polarkoordinaten des Mondschwerpunktes in Bezug auf den Erdschwerpunkt als Koordinatenanfang sind, in hier jedenfalls ausreichender Annäherung:

$$V = \frac{k^2}{r'}\left\{M + \frac{1}{2r'^2}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)(1 - 3\sin^2\varphi') + \frac{3}{4r'^2}(B-A)\cos^2\varphi'\cos 2\lambda'\right\},$$

wobei nach S. 56 (2) für die Polar- und rechtwinkeligen Koordinaten die Beziehung besteht:

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\varphi'\cos\lambda' \\ y' &= r'\cdot\cos\varphi'\sin\lambda' \\ z' &= r'\sin\varphi'. \end{aligned} \quad (3)$$

Es ist hierbei in Erinnerung zu bringen, dafs an der angezogenen Stelle des 2. Kapitels ebenso wie bei den (1) oben vorausgesetzt ist, dafs die drei Hauptaxen A, B, C bezw. mit der Axe der x, y und z identisch sind.

Eliminieren wir $\sin^2\varphi'$ und $\cos^2\varphi'\cos 2\lambda'$ aus dem Ausdruck für V und setzen zu diesem Zwecke:

$$1 - 3\sin^2\varphi' = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 3z'^2}{r'^2}$$

und

$$\cos^2\varphi'\cos 2\lambda' = \frac{x'^2 - y'^2}{r'^2},$$

so folgt

$$V = k^2\left\{\frac{M}{r'} + \frac{1}{2r'^5}\begin{bmatrix} (B + C - 2A)\,x'^2 \\ +\,(C + A - 2B)\,y'^2 \\ +\,(A + B - 2C)\,z'^2 \end{bmatrix}\right\}. \quad (4)$$

Hiermit ergiebt sich

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial r'}\cdot\frac{x'}{r'} + \frac{k^2}{r'^5}(B + C - 2A)\,x',$$

oder in anderer Schreibweise und wenn zur Abkürzung die zu $x'y'z'$ symmetrische Funktion

$$\frac{\partial V}{\partial r'}\cdot\frac{1}{r'} + \frac{k^2}{r'^5}(A + B + C) = H$$

gesetzt wird:

Ebenso findet sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x'} &= \left(H - \frac{3k^2}{r'^5}A\right)x' \\ \frac{\partial V}{\partial y'} &= \left(H - \frac{3k^2}{r'^5}B\right)y' \\ \frac{\partial V}{\partial z'} &= \left(H - \frac{3k^2}{r'^5}C\right)z', \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

womit sich endlich aus den (2) ergiebt:

$$\begin{aligned} N &= k^2 \frac{3\mathfrak{M}(B-A)}{r'^5} x'y' \\ L &= k^2 \frac{3\mathfrak{M}(C-B)}{r'^5} y'z' \\ M &= k^2 \frac{3\mathfrak{M}(A-C)}{r'^5} z'x'. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Differentialgleichungen (1) lauten hiermit wie folgt:

$$\begin{aligned} C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= k^2 \frac{3\mathfrak{M}(B-A)}{r'^5} x'y' \\ A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= k^2 \frac{3\mathfrak{M}(C-B)}{r'^5} y'z' \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= k^2 \frac{3\mathfrak{M}(A-C)}{r'^5} z'x'. \end{aligned} \tag{7}$$

§ 19. **Fortsetzung.** Die Integration erfordert die Kenntnis von x', y' und z' als Funktionen der Zeit t. Kehren wir zu Polarkoordinaten zurück, so sind für $x'y'z'$ die Gleichungen (3) anzuwenden, in denen nun φ' und λ' Funktionen der Zeit sind. Um dieselben kennen zu lernen, betrachten wir Fig. 69. Sie zeigt die Koordinatenaxen und Ebenen im Durchschnitt mit einer um den Erdschwerpunkt gelegten Kugel vom Radius 1. Für unsere Zwecke genügt es bei Ermittelung der Ausdrücke für x', y' und z' anzunehmen, daſs die z-Axe, d. i. die Hauptaxe C,

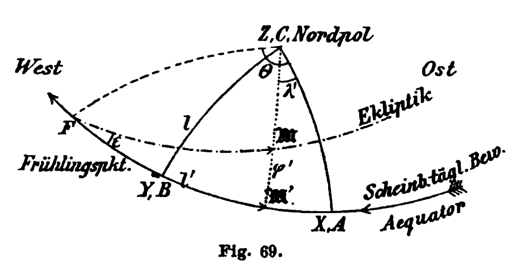


Fig. 69.

stets zugleich Momentanaxe und mithin die xy-Ebene Äquatorebene sei. Ferner nehmen wir an, daſs der Mond sich in der Ebene der Erdbahn (Ekliptik) bewegt, da die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik nur einige Grade beträgt. Ein groſser Fehler kann durch diese Annahme um so weniger entstehen, als die Mondbahn zur Ekliptik keine feste Lage hat, indem ihre Durchschnittslinie in derselben in $18^2/_3$ Jahren einen ganzen Umlauf ausführt.

Ist nun n' die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondes in der

Ekliptik und beachtet man, daſs der Bogen $F\mathfrak{M}$ in der Fig. 69 mit der Zeit wächst, so ist zur Zeit t angenähert

$$F\mathfrak{M} = l = l_0 + n't\,, \tag{1}$$

wenn $F\mathfrak{M}$ zur Zeit null gleich l_0 ist. Das sphärische Dreieck $F\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$, in welchem der Winkel ε bei F die Schiefe der Ekliptik gleich 23,5° bedeutet, giebt bei Bezeichnung von $F\mathfrak{M}'$ mit l':

$$\begin{aligned} \sin\varphi' &= \sin l \sin\varepsilon \\ \sin l' \cos\varphi' &= \sin l \cos\varepsilon \\ \cos l' \cos\varphi' &= \cos l\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Bezeichnen wir nun FX, die Sternzeit des Meridianes ZX, mit Θ, so ist zufolge der Figur

$$l' = \Theta - \lambda'\,.$$

Indem wir dies in die 2. und 3. Gleichung (2) setzen, erhalten wir nach Auflösung von $\sin l'$ und $\cos l'$ linker Hand:

$$\begin{aligned} (\sin\Theta\cos\lambda' - \cos\Theta\sin\lambda')\cos\varphi' &= \sin l\cos\varepsilon \\ (\cos\Theta\cos\lambda' + \sin\Theta\sin\lambda')\cos\varphi' &= \cos l \end{aligned}$$

und hieraus durch Kombination:

$$\begin{aligned} \cos\lambda'\cos\varphi' &= +\sin l\sin\Theta\cos\varepsilon + \cos l\cos\Theta \\ \sin\lambda'\cos\varphi' &= -\sin l\cos\Theta\cos\varepsilon + \cos l\sin\Theta\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Für die Koordinaten x', y' und z' ergiebt sich jetzt mittelst Einführung der (3) und der 1. Gleichung (2) in die (3) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned} x' &= r'(+\sin l\sin\Theta\cos\varepsilon + \cos l\cos\Theta) = \frac{r'}{2}\Big(+s\cos(l-\Theta) + d\cos(l+\Theta)\Big) \\ y' &= r'(-\sin l\cos\Theta\cos\varepsilon + \cos l\sin\Theta) = \frac{r'}{2}\Big(-s\sin(l-\Theta) + d\sin(l+\Theta)\Big) \\ z' &= r'\sin l\sin\varepsilon \end{aligned} \tag{4}$$

$$\text{für } s = 1 + \cos\varepsilon \text{ und } d = 1 - \cos\varepsilon\,. \tag{5}$$

Indem wir diese Gleichungen paarweise miteinander multiplizieren und die Produkte in naheliegender Weise transformieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} x'y' &= \frac{r'^2}{8}\Big\{-s^2\sin 2(l-\Theta) + d^2\sin 2(l+\Theta) + 2sd\sin 2\Theta\Big\} \\ y'z' &= \frac{r'^2}{4}\sin\varepsilon\Big\{s\Big[-\cos\Theta + \cos(2l-\Theta)\Big] + d\Big[\cos\Theta - \cos(2l+\Theta)\Big]\Big\} \\ z'x' &= \frac{r'^2}{4}\sin\varepsilon\Big\{s\Big[+\sin\Theta + \sin(2l-\Theta)\Big] - d\Big[\sin\Theta - \sin(2l+\Theta)\Big]\Big\}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Integration der Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen wird in der Regel unter der Annahme $B = A$ ausgeführt. Diese Annahme giebt jedenfalls eine sehr scharfe Annäherung. Zufolge

derselben wird r konstant gleich r_0 und die 2. und 3. der Gleichungen (7) geben für p und q nach einfacher Transformation:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \lambda q &= + Q \left\{ s \cos(2l - \Theta) - d \cos(2l + \Theta) - 2 \cos\varepsilon \cos\Theta \right\} \\ \frac{dq}{dt} - \lambda p &= - Q \left\{ s \sin(2l - \Theta) + d \sin(2l + \Theta) + 2 \cos\varepsilon \sin\Theta \right\}, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei

$$\lambda = \frac{C - A}{A} r_0 \qquad Q = k^2 \frac{3\mathfrak{M}(C - A)}{4r'^3 A} \sin\varepsilon . \tag{8}$$

Nach dem Muster der Integration der Gleichungen (2) § 15 S. 415 folgt jetzt, wenn wir die rechten Seiten der (7) für den Augenblick mit β und α bezeichnen:

$$\begin{aligned} p &= f \cos\lambda t - g \sin\lambda t \\ q &= f \sin\lambda t + g \cos\lambda t , \end{aligned} \tag{9}$$

wobei gesetzt ist:

$$f = \int^t (\beta \cos\lambda t + \alpha \sin\lambda t)\, dt$$

$$g = \int^t (-\beta \sin\lambda t + \alpha \cos\lambda t)\, dt .$$

Die Substitution der Werte von α und β giebt:

$$\frac{f}{Q} = + s \int \cos(2l - \Theta + \lambda t)\, dt - d \int \cos(2l + \Theta - \lambda t) dt - 2\cos\varepsilon \int \cos(\Theta - \lambda t)\, dt$$

$$\frac{g}{Q} = - s \int \sin(2l - \Theta + \lambda t)\, dt - d \int \sin(2l + \Theta - \lambda t) dt - 2\cos\varepsilon \int \sin(\Theta - \lambda t)\, dt .$$

Bei Ausführung der Integration ist zu beachten, daſs zufolge des Ausdruckes (1) l die Form hat:

$$l = l_0 + n' t ;$$

ferner ist zu beachten, daſs die Sternzeit ganz entsprechend die Form hat:

$$\Theta = \Theta_0 + n t , \tag{10}$$

worin Θ_0 eine Konstante und n den absoluten Wert der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation bezeichnet. Hiermit folgt, wenn in f' und g' diejenigen Glieder von f bezw. g vereinigt werden, welche von t unabhängig sind:

$$\frac{f}{Q} = \frac{f'}{Q} + s \frac{\sin(2l - \Theta + \lambda t)}{2n' - n + \lambda} - d \frac{\sin(2l + \Theta - \lambda t)}{2n' + n - \lambda} - 2\cos\varepsilon \frac{\sin(\Theta - \lambda t)}{n - \lambda}$$

$$\frac{g}{Q} = \frac{g'}{Q} + s \frac{\cos(2l - \Theta + \lambda t)}{2n' - n + \lambda} + d \frac{\cos(2l + \Theta - \lambda t)}{2n' + n - \lambda} + 2\cos\varepsilon \frac{\cos(\Theta - \lambda t)}{n - \lambda} .$$

Endlich ergiebt sich:

$$\begin{aligned} p &= f' \cos\lambda t - g' \sin\lambda t - Q \left\{ \frac{2\cos\varepsilon}{n - \lambda} \sin\Theta - \frac{1 + \cos\varepsilon}{n - \lambda - 2n'} \sin(\Theta - 2l) + \frac{1 - \cos\varepsilon}{n - \lambda + 2n'} \sin(\Theta + 2l) \right\} \\ q &= f' \sin\lambda t + g' \cos\lambda t + Q \left\{ \frac{2\cos\varepsilon}{n - \lambda} \cos\Theta - \frac{1 + \cos\varepsilon}{n - \lambda - 2n'} \cos(\Theta - 2l) + \frac{1 - \cos\varepsilon}{n - \lambda + 2n'} \cos(\Theta + 2l) \right\} . \end{aligned} \tag{11}$$

Die Glieder mit f' und g' entsprechen der in den §§ 5 und 6 dieses Kapitels betrachteten Bewegung der Momentanaxe, insbesondere den Ausdrücken (5) S. 392.

Mit Rücksicht auf (6) S. 392 und (8) S. 393 sowie auf die Ergebnisse des § 7 S. 399 ist für die von f' und g' abhängigen Glieder:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{\omega}\,\varrho'' &= 0{,}07'' \cos(\lambda t - 70^0) \\ \frac{q}{\omega}\,\varrho'' &= 0{,}07'' \sin(\lambda t - 70^0), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

t von 1868,0 ab gezählt und der Meridian von *Pulkowa* als zx-Ebene.

Bezüglich der neu hinzutretenden Glieder, welche man sich sowohl für den Mond als auch für die Sonne hingesetzt zu denken hat, ist zu bemerken, dafs für λ die 1. Gleichung (8) in betracht kommt; da aber r_0 sehr nahe gleich ω ist und ω gleich $-n$ wird, indem vom Nordpol aus gesehen die Erde thatsächlich der Richtung von ω (siehe S. 392 Fig. 64) entgegengesetzt, d. h. entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers, rotiert, so hat man:

$$\lambda = -\frac{C-A}{A}\,n$$

und mit Rücksicht auf S. 394 (12):

$$n - \lambda = \frac{C}{A}\,n = 1{,}003283\,n. \quad (13)$$

Da ferner die siderische Umlaufszeit des Mondes 27,322 mittlere Tage beträgt, diejenige der Erde um ihre Axe aber 86164 : 86400 = 0,99727 m. Tage, so ist

$$n' = \frac{0{,}99727\,n}{27{,}322} = 0{,}03650\,n$$

und

$$\left.\begin{aligned} n - \lambda - 2n' &= 0{,}93028\,n \\ n - \lambda + 2n' &= 1{,}07628\,n. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Mit $\varepsilon = 23^0\,27{,}5'$ wird also für den Mond:

$$\frac{2\cos\varepsilon}{n-\lambda} = \frac{[0{,}26215]}{n} = \frac{1{,}8287}{n} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+\cos\varepsilon}{n-\lambda-2n'} &= \frac{[0{,}31409]}{n} = \frac{2{,}061}{n} \\ \frac{1-\cos\varepsilon}{n-\lambda+2n'} &= \frac{[8{,}885-10]}{n} = \frac{0{,}077}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Der Wert (15) gilt auch für die Sonne; da für diese die Umlaufszeit (die siderische der Erde) 365,256 mittlere Tage beträgt, so ist hier ferner:

$$\left.\begin{aligned} n' &= \frac{0{,}99727\,n}{365{,}256} = [7{,}43621-10]\,n = 0{,}00273\,n \\ \frac{1+\cos\varepsilon}{n-\lambda-2n'} &= \frac{[0{,}28365]}{n} = \frac{1{,}921}{n} \\ \frac{1-\cos\varepsilon}{n-\lambda+2n'} &= \frac{[8{,}913-10]}{n} = \frac{0{,}082}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Um Q zu ermitteln, bringen wir es auf die Form

$$Q = \frac{3}{4} \frac{k^2 M}{a_0^3} \frac{\mathfrak{M}}{M} \left(\frac{a_0}{r'}\right)^3 \frac{C - A}{A} \sin \varepsilon , \tag{18}$$

worin M die Erdmasse und a_0 der Äquatorialhalbmesser des Erdellipsoids ist. $k^2 M : a_0^2$ läſst sich aus den Pendelbeobachtungen entnehmen (vergl. auch im nächsten Kapitel § 4). Nach § 15 des 2. Kapitels Formel (7) S. 83 und den Zahlen (1*) bis (5*) des § 16 daselbst ist, bezogen auf die mittlere Zeitsekunde als Zeiteinheit:

$$\begin{aligned} \frac{k^2 M}{a_0^2} &= 9{,}7800 : (1 - 0{,}001843 - 0{,}000005) \\ &= 9{,}7981 . \end{aligned} \tag{19}$$

Hierzu nehmen wir entsprechend der angenommenen Abplattung den *Bessel*schen Wert

$$a_0 = 6377397 .$$

Endlich wird mit $\varepsilon = 23^0 27',5$ und $\frac{C - A}{A} = 0{,}003283$:

$$Q = [1{,}17781 - 10] \frac{\mathfrak{M}}{M} \left(\frac{a_0}{r'}\right)^3 .$$

$a_0 : r'$ ist der Sinus der Äquatorial-Horizontalparallaxe p, deren Wert nebst $\mathfrak{M} : M$ bereits S. 384 § 1 (8*) für Mond und Sonne angegeben worden ist*). Damit folgt:

$$\begin{aligned} Q \text{ für den Mond} &= [3{,}92781 - 20] \\ Q \text{ für die Sonne} &= [3{,}58960 - 20] , \end{aligned} \tag{20}$$

womit sich nun die in den (11) vom Monde und der Sonne herrührenden Glieder berechnen lassen.

Wir berechnen aber nicht p und q selbst, sondern die Werte

$$\cos \mathfrak{a} = \xi = \frac{p}{\omega} , \qquad \cos \mathfrak{b} = \eta = \frac{q}{\omega} . \tag{21}$$

ξ und η sind die x- und y-Koordinaten des Durchschnittspunktes der Momentanaxe mit der um den Erdschwerpunkt gelegten Kugel vom Radius 1.

Beachten wir, daſs für die mittlere Zeitsekunde, indem die Erde in $23^h 56^m 4^s$ um ihre Axe rotiert,

$$\omega = - n = - \frac{2\pi}{86164} \tag{22}$$

*) Die Mondparallaxe ist nicht über 0,5″ unsicher. (Siehe auch Kap. 6 § 5.)

Die Parallaxe 8,83″ der Sonne ist eine Mittelbildung aus den besten Werten und kaum mehr als 0,03″ irrig. Vergl. die Zusammenstellung in *S. Newcomb*, *Populäre Astronomie, deutsche Ausgabe von R. Engelmann*, 1881, S. 225.

Die Mondmasse wird zu $^1/_{80}$ bis $^1/_{81,5}$ angegeben. Nach *Newcomb* ist sie gleich 0,0123, d. i. nahezu $^1/_{81,3}$.

Über die Sonnenmasse siehe weiterhin.

ist, so wird nun mit Weglassung der kleinen von $(1 - \cos\varepsilon)$ abhängigen Glieder und unter Vereinigung der in $\sin\Theta$ bezw. $\cos\Theta$ multiplizierten Glieder für Mond und Sonne:

$$\begin{aligned} \underset{\text{in Sek.}}{\xi} &= +\,0{,}07\cos(70^0 + L - \lambda t) + 0{,}008765\sin\Theta \\ &\qquad - 0{,}0068\sin(\Theta - 2l_1) - 0{,}0029\sin(\Theta - 2l_2) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\eta} &= -\,0{,}07\sin(70^0 + L - \lambda t) - 0{,}008765\cos\Theta \\ &\qquad + 0{,}0068\cos(\Theta - 2l_1) + 0{,}0029\cos(\Theta - 2l_2)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

L die westl. Länge der zx-Ebene geg. den Meridian v. *Pulkowa*; t von 1868,0 ab. l_1 bedeutet l für den Mond, l_2 " l " die Sonne } Fig. 69 S. 429.

Die Anteile des Mondes und der Sonne am Koefficienten 0,008765 sind bezw.

$$0{,}0060074 \text{ und } 0{,}0027573\,.$$

Mit Rücksicht auf § 6 S. 394 erkennt man, dafs ξ die Variation der Polhöhe eines Ortes ist, wenn man die positive x-Axe in den Meridian desselben legt, was angänglich ist, da wir wegen $A = B$ die x- und y-Axe in der Äquatorebene beliebig wählen können. Θ ist alsdann die Sternzeit des betreffenden Ortes und L seine westliche Länge gegen *Pulkowa*. Für λ ist (13) S. 432 zu beachten.

Die Teile von ξ und η, welche mit Θ und $(\Theta - 2l)$, also in täglicher oder nahezu täglicher Periode variieren, sind so klein, dafs sie sich den Beobachtungen gänzlich entziehen. Auch in der Rotationsdauer entstehen durch ξ und η keine merklichen periodischen Glieder, was wir hier nicht weiter untersuchen wollen, da ähnliche Untersuchungen schon in früheren Paragraphen geführt worden sind. — An diesen Verhältnissen ändert endlich auch die Berücksichtigung einer geringen Ungleichheit von A und B nichts.

§ 20. **Notiz über die Präzession und Nutation.** Die Ausdrücke für p und q bezw. ξ und η gestatten nun auch die Bewegung der Momentanaxe im Raume zu verfolgen. Man mufs zu diesem Zwecke ein festes Axensystem einführen und ermitteln, wie sich gegen dasselbe das Hauptaxensystem nach Mafsgabe von p, q und r und mit ihm die Momentanaxe nach Mafsgabe von ξ und η bewegen. Es findet sich, dafs die Momentanaxe abgesehen von kleinen, periodischen Schwankungen eine Kreiskegelfläche um die Normale der Ekliptik beschreibt, wobei sich die Durchschnittslinie der zur Momentanaxe normalen Äquatorebene mit der Ekliptik auf dieser entgegengesetzt der Bewegung der Sonne verschiebt. Diese Verschiebung heifst lunisolare *Präzession*, jene kleinen periodischen Schwankungen bezeichnet man als *Nutation*.

Wir gehen hier auf die Aufstellung der allgemeinen Ausdrücke für Präzession und Nutation nicht ein und beschränken uns darauf,

lediglich für das Hauptglied der Präzession unter vereinfachenden Annahmen einen Näherungswert abzuleiten. Berücksichtigen wir in ξ und η nur das in $\sin\Theta$ bezw. $\cos\Theta$ multiplizierte Glied, so ist

$$\xi = \frac{0{,}008765}{206265}\sin\Theta \qquad \eta = -\frac{0{,}008765}{206265}\cos\Theta. \tag{1}$$

Legen wir aber in irgend einem Zeitmoment die positive x-Axe in den Durchschnitt von Äquator und Ekliptik nach dem Frühlingspunkte F hin, Fig. 69 S. 429, so wird $\Theta =$ null und

$$\xi = 0 \qquad \eta = -\frac{0{,}008765}{206265}.$$

Der Nordpol M der Momentanaxe liegt somit auf dem gröfsten Kreis YZ, wie es die Fig. 70 andeutet, wobei $CM = \frac{0{,}008765}{206265}$ ist. Rotiert nun im Zeitelement dt der Erdkörper um $n\,dt$, so wird sich C in Fig. 70 etwa nach C_1 verschieben, und zwar ist

$$CC_1 = \frac{0{,}008765}{206265}\,n\,dt.$$

In Bezug auf die neue Lage des Axensystems $C_1 X_1 Y_1$ hat aber der Pol der Momentanaxe die Koordinaten

Fig. 70.

$$\xi = \frac{0{,}008765}{206265}\,n\,dt \qquad \eta = -\frac{0{,}008765}{206265},$$

da Θ von null in $n\,dt$ übergeht. Bezeichnet man die neue Lage des Pols der Momentanaxe mit M_1, so ist also

$$MM_1 = \frac{0{,}008765}{206265}\,n\,dt. \tag{2}$$

Es ist hiernach MM_1 gleich grofs und parallel mit CC_1, d. h. der Pol der Momentanaxe verschiebt sich in jedem Zeitelement um die für MM_1 angegebene Gröfse gegen den Frühlingspunkt F.

Bezeichnet nun in Fig. 71 F den Frühlingspunkt, d. h. den Durchschnittspunkt zwischen Ekliptik und Äquator auf der Einheitskugel, für die Anfangslage, F' aber nach Verlauf der Zeit dt, und beachten wir, dafs streng genommen die Ebene des Äquators normal zur Momentanaxe steht,

Fig. 71.

so ist $FF_1 = MM_1$ und $F'F = MM_1 : \sin\varepsilon$. In einem tropischen

Jahre von 365,24 mittleren oder 366,24 Sterntagen wird, weil n in einem Sterntage sehr nahe gleich 2π ist:

$$\underset{\text{in Sek.}}{F'F} = \frac{0{,}008765}{\sin \varepsilon} \cdot 366{,}24 \cdot 2\pi = 50{,}7. \tag{3}$$

Die Anteile des Mondes und der Sonne hieran sind einzeln bezw. 34,73 und 15,93.

Die Präzession ist durch Beobachtungen bestimmt und zwar zu 50,37″; da sie dem Werte $Q:(n-\lambda)$ und somit nach (8) und (13) des vorigen Paragraphen dem Quotienten

$$\frac{C-A}{C}$$

proportional ist, so gewährt sie ein Mittel zur Berechnung desselben, dessen Wert jedoch durch die Unsicherheit in der Kenntnis der anderen Elemente, die in Q auftreten, etwas beeinträchtigt wird.

Theodor Ritter v. Oppolzer giebt im ersten Bande seines Lehrbuchs zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2. Aufl., 1882, auch eine ausführliche Entwicklung der Präzession und Nutation, wie sie in gleicher Ausführlichkeit und Strenge noch nicht existiert. S. 154 (25) finden sich die Ausdrücke für ξ und η, die auch wir entwickelt haben, im wesentlichen mit unseren übereinstimmend. Für $F'F$ wird S. 180 aus den Beobachtungen der Wert 50,37″

abgeleitet. Die Nichtübereinstimmung des oben berechneten Wertes mit diesem liegt aufser an Unsicherheiten in den von uns benutzten Werten für die Mondmasse und $(C-A):A$ hauptsächlich in der Nichtberücksichtigung der Abweichung des Mondes von der Ekliptik und der ungleichmäfsigen Bewegung des Mondes und der Sonne in l. Infolge dessen mufs nach *Oppolzer* zum Anteil der Präzession für den Mond der Faktor

$$0{,}99258\,,$$

für die Sonne der Faktor

$$1{,}00042$$

hinzutreten. Die Anteile werden dann

$$\left.\begin{matrix}34{,}47\\15{,}94\end{matrix}\right\} \text{ zusammen } = 50{,}41''.$$

Die noch verbleibende Differenz ist unerheblich.

S. 179—182 ist die Bestimmung von $(C-A):C$ behandelt. Hier wird noch der Beobachtungswert des Hauptgliedes der Nutation hinzugezogen, welcher nur vom Monde abhängt und unmittelbar den ersten Wert Q unter (20) S. 433 ergiebt.

Nun läfst sich mit diesem Q, welches an Stelle des ersten Wertes (20) tritt, der Anteil an der Präzession berechnen, welcher vom Mond herrührt. Der Rest gehört alsdann der Sonne zu und gestattet $(C-A):C$ zu bestimmen. Da der Anteil an $F'F$ für den Mond sowie die Sonne durch die aus Vorstehendem leicht abzuleitende Formel

$$\frac{k^2 \mathfrak{M}}{n^2 r'^3} \cdot 3\pi \cos \varepsilon \,.\, 206265 \,.\, 366{,}24\; \frac{C-A}{C} \tag{4}$$

dargestellt wird, je nachdem man darin $\mathfrak{M}$ und r' auf Mond oder Sonne bezieht, so ist vorerst noch $k^2 \mathfrak{M} : r'^3$ für die Sonne anzugeben, wenn der Wert des Ausdruckes (4) für die Sonne dazu dienen soll, um $(C-A):C$ zu ermitteln.

$k^2 \mathfrak{M} : r'^2$ für die Sonne ist aber die Beschleunigung der Anziehung der Sonne auf die Erde, welcher die Zentrifugalbeschleunigung der Erdbewegung, abgesehen von der geringen Beschleunigung der Anziehung der Erde auf die Sonne, das Gleichgewicht hält. Es ist also:

$$\frac{k^2 \mathfrak{M}}{r'^2} = n'^2 r'$$

und mit Rücksicht auf die Angabe für n' S. 432:

$$\frac{k^2 \mathfrak{M}}{n^2 r'^3} = [4{,}87242 - 10]. \tag{5}$$

Mit dem von uns adoptierten Werte von

$$\frac{C - A}{C} = 0{,}003272 \tag{6}$$

ergiebt sich nunmehr als Anteil (4) der Sonne an der Präzession wieder ebenso wie oben 15,93 und nach Anbringung des Faktors 1,00042 15,94. Nehmen wir aber mit *Oppolzer* S. 182

$$\frac{C - A}{C} = 0{,}003261\,, \tag{6*}$$

so ergiebt sich 15,89, welcher Wert nach seiner Rechnung S. 180 — 181 aus der Präzession und Nutation in der oben angedeuteten Weise folgt*).

Obgleich dieser Wert den in § 7 dieses Kapitels S. 399 erwähnten Beobachtungen über die zehnmonatliche Rotationsdauer der Momentanaxe im Erdkörper gut entspricht, kann er dennoch vom wahren Wert um mehrere Einheiten der *fünften* Decimalstelle abweichen, sowohl wegen der Unsicherheit der angewandten Werte für die Präzessions- und Nutationskonstante als auch wegen der zweifelhaften Güte der eben angegebenen Kontrolle. Es ist daher ziemlich gleichgültig, ob man $(C - A) : C$ nach (6) oder (6*) annimmt**).

---

*) Denkt man sich die Ausdrücke (4) für Mond und Sonne angeschrieben, so ersieht man, daſs durch Division beider Präzessionsanteile, d. h. durch Kombination von Präzession und Nutation, ein Mittel zur Bestimmung des Verhältnisses von Mond und Sonnenmasse erhalten wird. Jedoch ist diese Bestimmung der Mondmasse sehr unsicher. Vergl. *Oppolzer* S. 182.

Aus der Verbindung der Ausdrücke (19) S. 433 und (5) oben ergiebt sich ferner ein Mittel um das Verhältnis der Erd- und Sonnenmasse zu berechnen. Division beider Ausdrücke giebt:

$$\frac{\mathfrak{M}}{M} = [3{,}88128 - 10]\,\frac{n^2 r'^3}{a_0^2} = [3{,}88128 - 10]\,\frac{a_0\, n^2}{\sin^3 p}\,,$$

worin p wieder die Horizontalparallaxe der Sonne ist. Mit $p = 8{,}83''$, $a_0 = 6377397$ und $n = 2\pi : 86164$ folgt für die Sonnenmasse:

$$\frac{\mathfrak{M}}{M} = 329000\,,$$

welchen Wert wir adoptiert haben, um bei Anwendung verschiedener Relationen für k^2 übereinstimmende Präzessionswerte zu erhalten. Nach *Oppolzer* S. 182 entspricht 330000 den letzten *Leverrier*schen Bestimmungen, während *Newcomb* 324000 angiebt.

**) Zu dem Werte (6) gelangte *Hansen* in den Abhandl. der math.-phys. Cl. der Ges. der Wissenschaften zu Leipzig 1864 S. 471 mit der Präzessionskonstante 50,356 durch eine etwas andere Berechnung als oben. Zu wesentlich dem-



Die erste Untersuchung über die Bewegung der Erdaxe durch die Anziehung des Mondes und der Sonne stellte *d'Alembert* 1749 an. In der *Méc. cél.* von *Laplace* befinden sich die betreffenden Fragen t. II, l. V, p. 299—355 und t. V, l. XIV, p. 245—278 behandelt. Eingehendere Entwicklungen gaben 1858 *Poisson* in der *Connaissance des temps* und *Serret* 1859 in den *Annales de l'Observatoire de Paris* t. V. Vergl. auch *Cayley* in den *Monthly Notices of the Royal Astr. Soc.* Bd. 35 (1875).

G. H. Darwin untersucht in der S. 408 angegebenen Abhandlung auch den Einfluſs von Massenbewegungen in der Erdkruste auf die Bewegung der Erdaxe unter dem Einfluſs des Mondes und der Sonne. Er prüft namentlich den Einfluſs auf die Schiefe der Ekliptik und findet ihn ohne Bedeutung.

Hopkins hat in den *Phil. Transact.* 1839 S. 381, 1840 S. 193 und 1842 S. 43—55 die Untersuchung der Bewegung der Erdaxe auch für den Fall durchgeführt, daſs die Erde aus einer festen Kruste und flüssigem Inneren bestehe, und er gelangt zu der Ansicht, daſs die Erde eine, mindestens $^1/_4$ bis $^1/_5$ ihres Radius dicke Rinde haben müsse, wenn den Erscheinungen genügt werden soll. *W. Thomson* und *G. H. Darwin* haben diese Frage eingehender studiert und sind sogar zu der Ansicht gelangt, daſs die Erde durchaus einen überaus hohen Grad von Festigkeit besitzen müsse. Vergl. weiterhin Kap. 6 § 12.

Man vergleiche ferner in den *Astronom. Nachr.* 1883 Bd. 106 S. 337 Nr. 2542—2544 sowie 1884 Bd. 109 Nr. 2595 Mitteilungen von *L. de Ball* über die Entstehung einer täglichen Nutation durch die Ungleichheit der Hauptträgheitsmomente A und B.

§ 21. Die Formänderung der Niveauflächen durch die Bewegung der Momentanaxe und die Änderung der Rotationsgeschwindigkeit.

Nachdem in § 1 dieses Kapitels die Wirkung des Mondes und der Sonne auf die Form der Niveauflächen bei Annahme einer Rotation mit konstanter Geschwindigkeit um eine Axe von unveränderter Richtung untersucht worden ist, hat sich in den folgenden Paragraphen gezeigt, daſs die Erdaxe Drehbewegungen um den Erdschwerpunkt ausführt, sowohl unter dem Einfluſs der Anziehung der genannten Himmelskörper, als auch infolge geologischer und meteorologischer Massenverschiebungen, welche letztere auch Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit erzeugen können.

Mit allen diesen Bewegungen sind notwendig Änderungen der Form der Niveauflächen verknüpft, denn sie beeinflussen wenigstens der Theorie nach die Komponenten der Schwerkraft. Nach dem 1. Kap. § 5 (1) S. 6 sind die letzteren in Bezug auf drei konstant gerichtete, zu einander rechtwinkelige Koordinatenaxen durch den Schwerpunkt bezw. gleich

selben Werte gelangten auch *Leverrier* und *Serret* durch sorgfältige Untersuchung der Präzession und Nutation in den *Annales de l'Observatoire de Paris* t. V, 1859, p. 324. Sie fanden $^1/_{305}$ bis $^1/_{306}$ d. h. 0,003278 bis 0,003268. [Wir haben die Originalmitteilung nicht in Händen gehabt; *Thomson und Tait, Handbuch*, giebt S. 401 nach *Leverrier* und *Serret* 0,00327 an].

$$X - \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad Z - \frac{d^2 z}{dt^2}, \tag{1}$$

wenn X, Y, Z die Komponenten der wirkenden Kräfte in dem in betracht gezogenen Punkte (xyz) sind. Änderungen finden nun sowohl in X, Y und Z, wie in den zweiten Differentialquotienten von x, y und z nach t statt.

Insoweit X, Y und Z und infolge dessen die Gestalt der Niveauflächen durch die Anziehung von Mond und Sonne beeinflufst werden, ist bereits in § 1 dieses Kapitels das Nötige bemerkt worden. § 17 zeigte ferner die Unerheblichkeit des Einflusses von Flut und Ebbe. Zu untersuchen ist nun noch der Einflufs von Massenbewegungen im Erdkörper auf X, Y und Z, sowie der Einflufs von Drehbewegungen der Momentanaxe und von Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit auf die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten.

Um Ausdrücke für die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten zu erhalten, nehmen wir wie in § 13 S. 410 zur Zeit t die augenblickliche Lage der Hauptaxen als festes Koordinatenaxensystem und denken uns, dafs im allgemeinen der Erdkörper sich mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 und ω_3, die im Anfang des genannten Paragraphen noch mit $p - \alpha$, $q - \beta$ und $r - \gamma$ bezeichnet sind, gegen die festen Axen verdrehe. Indem wir nun von den besonderen Bewegungen einzelner Teile des Erdkörpers absehen, wird nach den (1) S. 411:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega_2 z - \omega_3 y \\ \frac{dy}{dt} &= \omega_3 x - \omega_1 z \\ \frac{dz}{dt} &= \omega_1 y - \omega_2 x\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Differenzieren wir zunächst die erste dieser Gleichungen nach t, so folgt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega_2 \frac{dz}{dt} - \omega_3 \frac{dy}{dt} + z \frac{d\omega_2}{dt} - y \frac{d\omega_3}{dt}$$

und hieraus mittelst der (1) und mit Rücksicht auf die Relation $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - x\omega^2 + (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\,\omega_1 + z\frac{d\omega_2}{dt} - y\frac{d\omega_3}{dt}\,.$$

In gleicher Weise findet sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= - y\omega^2 + (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\,\omega_2 + x\frac{d\omega_3}{dt} - z\frac{d\omega_1}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= - z\omega^2 + (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\,\omega_3 + y\frac{d\omega_1}{dt} - x\frac{d\omega_2}{dt}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hierzu treten die Relationen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \cos \mathfrak{a} = \omega \sin \mathfrak{c} \cos \chi \\ \omega_2 &= \omega \cos \mathfrak{b} = \omega \sin \mathfrak{c} \sin \chi \\ \omega_2 &= \omega \cos \mathfrak{c}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

worin $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Stellungswinkel der Momentanaxe gegen die drei Hauptaxen bezeichnen, Fig. 64 S. 392.

Wenn wir die Schwerkraft zu einer Zeit betrachten, wo keine Verschiebungen der Hauptaxen stattfinden, so haben ω_1, ω_2 und ω_3 bezw. die Werte p, q und r. Für p und q kommen dabei die Ausdrücke (23) S. 434 in betracht; mittelst (21) S. 433 ist der Übergang von ξ und η auf p und q herzustellen.

Nehmen wir in (23) S. 434 anstatt 0,07″ den grofsen Betrag von 1″, schreiben für $70^0 + L$ allgemeiner $-\chi_0$ und beachten, dafs mit Rücksicht auf (10) S. 431 und (13) S. 432

$$\lambda t = 0{,}003283\,\omega t \quad \text{und} \quad \Theta = \Theta_0 - \omega t$$

ist, sowie endlich hinreichend genau

$$\cos \mathfrak{c} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \mathfrak{c}$$

gesetzt werden kann, so folgt unter Beschränkung auf die ersten beiden Glieder von (23) S. 434:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega}{206265} \left\{ \cos(0{,}003283\,\omega t + \chi_0) - 0{,}009 \sin(\omega t - \Theta_0) \right\} \\ \omega_2 &= \frac{\omega}{206265} \left\{ \sin(0{,}003283\,\omega t + \chi_0) - 0{,}009 \cos(\omega t - \Theta_0) \right\} \\ \omega_3 &= \omega \left\{ 1 - \frac{1 - 0{,}018 \sin(1{,}003\,\omega t + \chi_0 - \Theta_0)}{2 \,.\, (206265)^2} \right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Nehmen wir zunächst ω konstant an (die Bewegungen der Momentanaxe, welche durch die (23) S. 434 charakterisiert werden, geben keine merklichen Variationen in ω), so zeigen diese Ausdrücke, dafs man die Differentialquotienten der drei Komponenten von ω nach t vernachlässigen kann. Am gröfsten sind noch die Beschleunigungen $d\omega_1 : dt$ und $d\omega_2 : dt$, nämlich im Maximum angenähert gleich

$$\omega^2 : 20\,000\,000\,.$$

Das Produkt eines dieser Differentialquotienten in eine Koordinate ist also im Maximum etwa gleich

$$a\omega^2 : 20\,000\,000\,,$$

wenn a einen äquatorialen Radiusvektor bezeichnet; da aber $a\omega^2$ rund gleich $G : 300$ ist, so wird dies

$$G : 6000\,000\,000\,, \tag{5}$$

was auf keine Art etwas geben kann.

Ist ω veränderlich, so wird dieser Umstand hauptsächlich nur ω_3 beeinflussen. Wir setzen in den (2) demgemäfs:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 0 = \frac{d\omega_2}{dt}, \qquad \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{6}$$

Gelegentlich der Einführung dieser Werte vernachlässigen wir in den (2) noch mehrere offenbar ganz unerhebliche Glieder und erhalten folgende, selbst für die feinsten Untersuchungen ausreichenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -x\omega^2 + z\omega^2 \sin\mathfrak{c}\cos\chi - y\frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt} &= -y\omega^2 + z\omega^2 \sin\mathfrak{c}\sin\chi + x\frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= +(x\cos\chi + y\sin\chi)\,\omega^2\sin\mathfrak{c}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Glieder der rechten Seiten, welche in $\sin\mathfrak{c}$ multipliziert sind, geben für $\mathfrak{c} = 1''$ höchstens $G : 60\,000\,000$; für den gegenwärtigen Zustand mit $\mathfrak{c} = 0{,}07''$ aber nur etwa

$$G : 800\,000\,000\,, \tag{8}$$

was in keiner Weise etwas Merkliches ausmachen kann.

Die (7) berücksichtigen zufolge ihrer Entwicklung noch nicht den Einflufs von Verschiebungen der Hauptaxen im Erdkörper auf die Differentialquotienten von ω_1, ω_2 und ω_3 nach t. Wenn solche stattfinden, kommen für ω_1 und ω_2 noch Glieder in betracht, die sich aus den Ausdrücken für ξ' und η' des § 15 ergeben, wobei für ξ' und η' einfach ξ und η gesetzt werden können. Säkulare Verschiebungen sind jedenfalls wirkungslos, wie leicht einzusehen ist. Plötzliche Verschiebungen können zwar merklich werden, aber nur rasch vorübergehend; sie sind somit auch ohne Bedeutung. Endlich erlangen die durch meteorologische Prozesse erzeugten periodischen Verschiebungen (S. 418) wenigstens nicht mehr Einflufs als von der Ordnung des Ausdrucks (5). Denn nach (5*) S. 416, welches Formelsystem für eine kurze Zeit Anwendung finden kann, sind $d\omega_1 : dt$ und $d\omega_2 : dt$ von derselben Ordnung wie die Geschwindigkeiten β und α, mit welchen sich die Hauptaxen im Erdkörper verschieben. Dieselben dürften aber bei diesen Prozessen nicht gröfser sein, als die aus der zehnmonatlichen Drehbewegung der Momentanaxe bei $1''$ Winkelabstand von der Hauptaxe C resultierenden Werte dieser Differentialquotienten.

Unter der Voraussetzung, dafs die Rotation um die Momentanaxe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit erfolgt, fallen in den (7) jedenfalls die Glieder mit $d\omega : dt$ weg, und wir erhalten als Potential der Schwerkraft den Ausdruck

$$W = V + \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\,\omega^2 - (zx\cos\chi + zy\sin\chi)\,\omega^2\sin\mathfrak{c}\,. \tag{9}$$

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die augenblicklichen Trägheitsmomente, so hat man für V nach S. 428 (4) den Ausdruck:

$$V = k^2 \left\{ \frac{M}{r} + \frac{1}{2r^3} \begin{bmatrix} (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2\mathfrak{A})\, x^2 \\ + (\mathfrak{C} + \mathfrak{A} - 2\mathfrak{B})\, y^2 \\ + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C})\, z^2 \end{bmatrix} \right\} + T, \qquad (10)$$

worin T wesentlich die lokalen und kontinentalen Unregelmäfsigkeiten von V vorstellt.

Das Potential W unterliegt, wenn auch der Erdkörper keine Veränderungen erleidet, zeitlichen Veränderungen wegen des in $\sin \mathfrak{r}$ multiplizierten Gliedes. Diesen Veränderungen entsprechen Veränderungen in den Höhenlagen der Niveauflächen bestimmten Potentialwertes, die in Bezug auf die Variable χ im Maximum durch

$$a\omega^2 \sin \mathfrak{r} \cdot \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{aG} \qquad (11)$$

gegeben sind, a ein äquatorialer Radius. Da $a\omega^2 : G$ etwa $^1/_{300}$ ist und $z\sqrt{x^2 + y^2}$ im Maximum etwa $a^2 : 2$, so giebt (11) selbst für $\mathfrak{r} = 1''$ nur

$$\frac{a}{120\,000\,000} \quad \text{oder rund } 50^{mm}. \qquad (12)$$

Gegenwärtig ist der Betrag nur etwa 4^{mm}. Die Oberfläche des Meeres wird infolge dessen eine *zehnmonatliche Flut und Ebbe* zeigen, die besonders in mittleren Breiten hervortreten wird (falls einige Millimeter überhaupt bemerkbar sind).

§ 22. **Fortsetzung: Veränderliche Rotationsdauer.** Das Vorhergehende zeigt, dafs man zu Zeiten, wo die Rotationsgeschwindigkeit der Erde konstant und $\mathfrak{r} \leq 1''$ ist, für das Potential der Schwerkraft, bezogen auf die (ohne Rücksicht auf Flut und Ebbe bestimmten) Hauptaxen, setzen kann:

$$W = V + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,\omega^2 \qquad (1)$$

mit V nach (10) des vorigen Paragraphen. Das ist also derselbe Ausdruck wie im zweiten und dritten Kapitel, nur ist jetzt die Rotationsaxe allgemeiner als eine im Erdkörper und im Raume bewegte Axe gedacht. Die mit der Bewegung der Rotationsaxe verbundene Veränderlichkeit von ω ist, wie schon bemerkt, unerheblich. Aber es kann ω sich selbständig verändern.

Wenn ω zu zwei verschiedenen Zeiten zwei um $\delta\omega$ verschiedene Werte hat, so giebt dies in W eine Änderung von

$$(x^2 + y^2)\,\omega\,\delta\omega\,. \qquad (2)$$

Dies ist ein Maximum für Äquatorpunkte. Setzen wir hier $x^2 + y^2 = a^2$ und formen um, so folgt aus (2):

$$a\,\omega^2 \,.\, a\,\frac{\delta\,\omega}{\omega}\;;$$

dazu gehört eine Änderung der Höhenlage der Niveauflächen bestimmten Potentialwertes gleich

$$\frac{a\,\omega^2}{G}\cdot a\,\frac{\delta\,\omega}{\omega},$$

d. i. für eine Änderung der Jahreslänge um 1^s, d. h. für $\delta\omega : \omega = 1 : 32\,000\,000$:

$$0{,}7^{mm}\,.\text{*)} \tag{3}$$

Der Übergang von einem Werte von ω in einen anderen erfordert, dafs eine Zeit lang $d\omega : dt$ von null verschieden ist. Alsdann kommen in den beiden ersten Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen die letzten Glieder zur Geltung. Allein der Wert dieser Glieder ist selbst für Annahmen, welche die wahrscheinlichen Grenzen der Veränderlichkeit bedeutend überschreiten, ganz unerheblich. Nehmen wir z. B. an, dafs die Änderung $\delta\omega = \omega : 32\,000\,000$ in der Zeit $\varDelta t$ mit konstanter Geschwindigkeit $d\omega : dt$ erfolgt, so ist

$$\frac{d\omega}{dt}\,\varDelta t = \frac{\omega}{32\,000\,000}\,. \tag{4}$$

Hiermit ergiebt sich für das Produkt $a\,d\omega : dt$, d. h. für den Maximalwert der betreffenden Glieder in (7) des vorigen Paragraphen, nach naheliegenden Umformungen:

$$a\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{a\,\omega^2}{32\,000\,000\,.\,\omega\,.\,\varDelta t} = \frac{G}{9000\,000\,000\,.\,\omega\,.\,\varDelta t}\,. \tag{5}$$

Eine Änderung $\delta\omega$ von so bedeutender Gröfse wird wohl kaum in einem Tage erfolgen (vergl. § 15 S. 419 und § 16 S. 423); nehmen wir dies aber an, so wird $\omega\,.\,\varDelta t = 2\pi$, der Wert (5) somit immer noch so klein, dafs er auf keine Art etwas ausmachen kann.

Der Umstand, dafs man in den (2) bezw. (7) des vorigen Paragraphen die Glieder vernachlässigen kann, welche die Änderungsgeschwindigkeit von ω mit der Zeit enthalten, ist sehr günstig. Denn für diese allgemeinen Ausdrücke hat die Schwerkraft kein Potential, d. h. es existiert keine Funktion, deren partielle Differentialquotienten nach den Koordinaten die Komponenten der Schwerkraft geben. Setzt man z. B. im Anschlufs an (7) den von $d\omega : dt$ abhängigen Teil von W gleich W_1, so müfste gleichzeitig

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = y\,\frac{d\omega}{dt}\,, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = -\,x\,\frac{d\omega}{dt}$$

sein, und mithin

*) Ändert sich dagegen die Tageslänge um 1^s, so wird der Betrag das 365-fache, also $^1/_4{}^m$. *Vogler* findet S. 30 seiner *„Ziele und Hilfsmittel geometr. Präzisionsnivellements“* 1873 das Dreifache, nämlich $^3/_4{}^m$. Er geht von *Clairauts* Theorem aus, berücksichtigt aber nicht die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe.

$$W_1 = xy \frac{d\omega}{dt} + \text{Funkt.} (y) \text{ sowie gleich } - xy \frac{d\omega}{dt} + \text{Funkt.} (x)$$

werden, was unmöglich ist.

Der physikalische Grund der Nichtexistenz des Potentials ist der, dafs bei veränderlicher Rotation keine Niveauflächen existieren können. Die Geringfügigkeit der Veränderlichkeit überhebt uns nun auch der Erörterung der Frage, in welcher Weise diese Veränderlichkeit die Angaben der Libellen beeinflufst, insofern nur bei verschwindenden Werten von $d\omega : dt$ u. s. w. (wie überhaupt nur bei ganz langsam veränderlicher Schwerkraft) anzunehmen ist, dafs die Angaben der Libellen der Richtung der augenblicklichen Schwerkraft entsprechen.

§ 23. **Fortsetzung: Bedeutendere Veränderungen** als durch die Rotationsgeschwindigkeit ω entstehen im Potentialausdruck (1) des vorigen Paragraphen dadurch, dafs die mit Massenbewegungen verbundene Verschiebung der Hauptaxen die Koordinaten xyz eines Punktes ändert, sowie dadurch, dafs die Massenbewegungen das Potential der Anziehung V beeinflussen.

Nehmen wir eine Drehung der Hauptaxe C, also der z-Axe, um 1″ an, so kann sich $\sqrt{x^2+y^2}$ im Maximum um $z : 206265$ ändern, somit das zweite Glied im Ausdruck (1) für W § 22 S. 442 um

$$\frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{206265}\,\omega^2 . \tag{1}$$

Dies ist im Maximum etwa

$$a\,\omega^2 \cdot \frac{a}{2 \cdot 206265} = G \cdot \frac{a}{120\,000\,000} .$$

Die entsprechende Änderung der Höhenlage der Niveaufläche bestimmten Potentialwertes beträgt

$$\frac{a}{120\,000\,000} \quad \text{oder rund } 50^{mm} . \tag{2}$$

Die indirekte Beeinflussung der Gestalt der Niveauflächen durch die mit Massenbewegungen verbundenen Drehung der Hauptaxe C ist also nicht ganz unerheblich, wenn die Drehung 1″ beträgt. Dagegen ist die mit Massenbewegungen gleicher Ordnung verbundene Parallelverschiebung der Koordinatenaxen als Folge relativer Bewegung des Erdschwerpunkts zum Erdkörper von geringem Einflufs, weshalb wir dieses nicht weiter erörtern.

Die gröfste Beeinflussung erfährt im allgemeinen das Potential W und die Lage der Niveauflächen durch die Änderungen von V. Denken wir uns beispielsweise eine anfangs auf Südamerika lagernde Masse, welche gleich grofs ist mit einer die ganze Erdoberfläche in der Höhe $h = {}^1/_{80}{}^m$ bedeckenden Masse von der Dichtigkeit 1, sich nach Nordamerika verschieben, so giebt dies nach (9*) S. 422 etwa 0,1″ Verschiebung der Hauptaxe C und somit nach (2) im Maximum etwa 5^{mm} maximale Änderung des Meeresniveaus; dagegen ist nach dem vierten

Kapitel die direkte Wirkung auf die Lage des Meeresniveaus unterhalb des Kontinents etwa das Sechsfache jener indirekten Wirkung.

Mit der Änderung von V, ja auch bereits mit der Verschiebung der Hauptaxe C ist noch eine Änderung der Normalform der Niveauflächen verbunden, wie dies die Betrachtung des entsprechenden ersten Teiles des Ausdruckes (10) S. 442 zeigt. Auf diese Änderungen gehen wir aber nicht näher ein, da sie praktisch bedeutungslos bleiben.

§ 24. Wahrnehmungen über die Veränderlichkeit des Erdkörpers.

Dieser Wahrnehmungen giebt es verschiedene, indessen sind es fast ausschliefslich wegen ihrer Geringfügigkeit oder schwierigen Beobachtbarkeit mehr vermutete als festgestellte.

In erster Linie ist die *säkulare Veränderung der Polhöhe* zu erwähnen, die für einige Orte angedeutet ist.

Für *Pulkowa* fand *Nyrén* in der in § 7 erwähnten Schrift die Polhöhe aus den Reihen von

		wahrsch. Fehler	Epoche	Gröfste Fehler	Anzahl d. Beob.	w. F. einer Beob.
Peters:	59°46′18,727″	±0,013″	1843	+0,60″ −0,75″	371	±0,16″
Gyldén:	18,654	±0,014	1866	+0,95 −0,66	236	±0,18
Nyrén:	18,501	±0,014	1872,5	+0,70 −0,59	155	±0,13

Nyrén führt nach verschiedenen Quellen noch folgende Zahlen für die Polhöhen einiger Orte an, die allerdings nicht die Sicherheit derjenigen für *Pulkowa* haben:

Greenwich	1755	51° 28′ 39,56″
	1825—26	38,95
	1836—41	38,43
	1842—48	38,17
	1851—60	37,92
Rom	1807—12	41° 53′ 54,26″
	1866	54,09
Königsberg	1820	54° 42′ 50,71″
	1843	50,56
Washington	1845—46	38° 53′ 39,25″
	1861—64	38,78
Paris	vor 1825	48° 50′ 13 ″
	1851—54	11,2
Mailand	1811	45° 27′ 60,7 ″
	1871	59,19
Neapel	1820	40° 51′ 46,63″
	1871	45,41

Diese Zahlen zeigen dem Sinne nach dieselbe säkulare Variation der Polhöhe für alle vorkommenden Orte. Es ist nicht wahrscheinlich, dafs dieses zufällig ist. Man kann auch die Ursache nicht wohl darin suchen, dafs bei den sämtlichen älteren Bestimmungen die gröfseren Werte durch die angewandten Sternörter erzeugt sind, sondern wird wirkliche Änderungen der Polhöhen annehmen müssen.*)

Dieselben sind wahrscheinlich durch eine säkulare Bewegung der Hauptaxe C entstanden, welche wieder in säkularen Massenverschiebungen ihren Grund hat.

Auf solche weisen auch die *säkularen Hebungen und Senkungen der Meeresküsten* hin**). Dieselben betragen zwar im Jahrhundert kaum einen vollen Meter, aber dies reicht zur Erklärung von Bewegungen der Hauptaxe C im Betrage von etwa eben soviel Sekunden aus, obgleich es zur Zeit schwierig erscheint, die beobachteten Hebungswerte an den Küsten rechnungsmäfsig mit den Änderungen der Polhöhen zu verbinden. Eine Veränderung der Lotrichtung durch dergleichen Massenbewegungen kann nicht als Erklärungsgrund dienen, da Scheiben von 1^m Höhe selbst bei kontinentaler Ausdehnung wenig Anziehung geben. Auch ist es nicht plausibel anzunehmen, dafs die betreffenden Ländermassen eine südliche Bewegung erleiden, da dieselbe im Jahrhundert vielleicht 20^m und mehr betragen müfste.

Mit ziemlicher Sicherheit läfst sich nun behaupten, dafs an den Hebungen und Senkungen der Meeresküsten die Niveauveränderungen des Meeres infolge veränderlicher Vergletscherung der arktischen und antarktischen Landmassen einen hervorragenden Anteil haben. Denn es genügt allein die ganz plausible Annahme, dafs Grönlands Eisbedeckung in letzter Zeit eine säkulare Zunahme von 50^m Dicke erfahren hat, zur Erklärung der Veränderungen der oben angeführten Polhöhen infolge einer damit verbundenen Verschiebung der Hauptaxe C***).

---

*) Andererseits zeigt eine neue Publikation von *E. Fergola* die teilweise Unsicherheit obiger Zahlen. Darnach fanden sich für *Neapel* durch Neureduktion der Beobachtungen von 1820 und 1871 die Sek. der Breite gleich 45,70 ± 0,57 w. F. bezw. 45,86 ± 0,04. Eine Neubestimmung 1883 gab 45,445 ± 0,085.

**) In sicherer Weise ist die Veränderung konstatiert durch Ufermarken in Schweden, die auf *Celsius*' und *Linnés* Rat angebracht wurden. Die nördliche Küste des baltischen Meeres hebt sich im Jahrhundert um ca. zwei Fufs nach der kritischen Untersuchung von *G. v. Helmersen* in dem *Bulletin de la Classe physico-mathém. de l'Ac. imp. de St. Pét.* 1856 Bd. 14 S. 193 u. ff. Die Südspitze von Schweden sinkt dagegen, und nur für das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde ist nach *Seibts* Untersuchung der Pegelbeobachtungen daselbst (Publ. des königl. preufs. geodät. Instituts, 1881) von 1826 bis 1879 eine Veränderung der Höhenlage zur Küste nicht hervorgetreten.

Einen guten Überblick gewährt die Schrift von *F. G. Hahn*, das Aufsteigen und Sinken der Küsten, Leipzig 1879, sowie die Karte 5 des *Andree*schen Handatlasses von 1880.

***) Über den Einflufs der Vergletscherungen siehe *Penk*, *Schwankungen des*

Beachtenswert ist bei den *Pulkowa*er Beobachtungen die grofse Übereinstimmung. Allem Anschein nach sind die Abweichungen nur Beobachtungsfehler und Refraktionsfehler (*Nyrén* S. 34—35), aber nicht etwa *kleine Schwankungen in der Richtung des Lotes, die innerhalb eines Tages oder Jahres* stattfinden. Gegen solche Schwankungen spricht auch die vielfach treffliche Übereinstimmung der Breitenbeobachtungen im ersten Vertikale. Dieselben zeigten u. a. bei *Struve* nur einen wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0{,}117''$, in *Washington* 1862—67 einen solchen von $\pm 0{,}141''$ (aufser einem systematischen Fehler). Wenn andere Beobachtungsreihen eine geringere Übereinstimmung besitzen, wie z. B. die *Greenwich*er Beobachtungen des nahe dem Zenith kulminierenden Sternes γ *Draconis* mit dem Zenithsektor, deren w. F. etwa $\pm 0{,}5''$ ist, so liegt dies wohl an Beobachtungsfehlern und nicht an Lotschwankungen*).

Merkliche Lotschwankungen von täglicher oder jährlicher, oder überhaupt kurzer Periode sind jedenfalls wenig plausibel; nach Mafsgabe von Kap. 4 würden schon die zu wenigen Zehntelsekunden erforderlichen Massenverschiebungen sehr bedeutende Massen betreffen müssen, da diese Massenverschiebungen jedenfalls nicht in der Nähe der Erdoberfläche stattfinden. Man müfste etwa starke Strömungen in gröfserer Tiefe oder im Erdinnern annehmen, die aber wenig wahrscheinlich sind, weil der Grund zu solchen, ungleiche Abkühlung, infolge des schlechten Wärmeleitungsvermögens der Erdrinde fehlt. Lotschwankungen infolge einer solchen Ursache würden sich übrigens in systematischer Weise über einen gröfseren Teil der Erdoberfläche verbreiten.

Die Beobachtungen, auf grund deren *d'Abbadie* 1852 Veränderungen der Lotrichtung glaubte annehmen zu müssen, sind weder in der ursprünglichen, noch in der später von demselben Gelehrten angewandten Form geeignet, Lotschwankungen zu konstatieren, da sie lediglich die relative Lage der Lotrichtung zum Terrain untersuchen ohne Zuhilfenahme astronomischer Beobachtungen**). Während aber Lotschwankungen wenig wahrscheinlich sind, lassen sich genug Gründe dafür angeben, dafs das Terrain keine unveränderte Lage hat, sondern vielmehr kleine Bewegungen ausführt. *Philipp Plantamour* und *C. v. Orff*

Meeresspiegels, München 1882. Hier sind auch die betreffenden Arbeiten von *Adhémar* und *Croll* beleuchtet. Man vergleiche ferner auch die neuere Arbeit von *Croll* im *Phil. Magazine* vol. 16, 1883, p. 351: *The Ice of Greenland etc.*

Änderungen der Eisbedeckung Grönlands im angegebenen Betrage müssen übrigens mit entgegengesetzten Änderungen am Südpol (die auch die Lage der *C*-Axe beeinflussen können) verbunden sein, weil sie andernfalls die Rotationsdauer der Erde merklich verkürzen würden.

*) Diese w. F.-Angaben sind entnommen der Notiz von *Hall* in den *Astronom. Nachrichten* 1882 Bd. 102 S. 143 Nr. 2433.

**) *Comptes rendus* 1852 t. 34 p. 712.

welche Beobachtungen derselben Art wie *d'Abbadie* anstellten, bezeichnen daher die hervortretenden Schwankungen als *Bodenbewegungen*. Der Betrag dieser Schwankungen hält sich auch nicht innerhalb Zehntelsekunden oder einzelner Sekunden, sondern erhebt sich bis zu einer Minute und mehr*).

Zu einem grofsen Teile darf man die Bewegungen des Bodens der ungleichen Ausdehnung desselben bei wechselnder Temperatur zuschreiben. Es mögen aber auch noch andere Ursachen mitwirken.

Mit den Neigungsänderungen sind jedenfalls auch wirkliche Verschiebungen und Hebungen verbunden. Dafs dieselben in horizontaler Richtung durch Temperatureinwirkung erheblich werden und in den Winkeln geodätischer Dreiecke oder in längeren Grundlinien bemerkbar seien, ist uns vorläufig im allgemeinen nicht recht glaubhaft, weil die obere Erdrinde meist zu sehr zerklüftet ist. Wenn in den Winkeln von Dreiecken Änderungen hervortreten sollten (was zur Zeit wohl noch in keinem Falle ganz zweifellos konstatiert, aber sehr möglich ist), so wird man zunächst an kleine Verschiebungen aus anderen Ursachen, insbesondere durch Erdbeben, zu denken haben**). Die auf einigen Sternwarten bemerkten periodischen azimutalen Drehungen erstrecken sich jedenfalls nur auf geringe Entfernungen.

Erdbeben wie vulkanische Prozesse können auch *Ursache kleiner lokaler Lotrichtungsänderungen* werden, wenn die bewegten Massen nicht flächenförmig verteilt, sondern kompakt sind. In diesem Falle können sogar durch die *Kultur* angehäufte oder entfernte Massen von Einflufs sein.

Hier mag auch der *Aenderung der Niveauflächen* Erwähnung geschehen, welche dadurch entstehen, dafs *die Wasserläufe Erdmassen transportieren* und im Meere vor ihrer Mündung ablagern***).

---

*) *Ph. Plantamour* und *C. v. Orff* wandten feste Libellen in Kellerräumen nach *d'Abbadies* Vorgang an. Solche Libellen geben aber, wie auch diese Gelehrten hervorheben, keine untrüglichen Beobachtungen, da sie selbst sich verziehen. In der That zeigten parallele Libellen nahe bei einander sehr verschiedene Bewegungen. Der Ersatz der Libellen durch Axen ist nach *Orff* nicht thunlich wegen der Oxydation in Kellerräumen. Neuerdings bediente sich *d'Abbadie* eines Apparates mit künstlichem Horizont. Man vergleiche die Artikel von *Ph. Plantamour* und *v. Orff* in den *Archives des Sciences phys. et naturelles* (*Genève*) *Déc.* 1879–82, sowie *d'Abbadies* neuere (von uns nicht nachgesehene) Abhandlung *Recherches sur la verticale* in den *Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles* 1881 p. 37.

**) Man vergleiche verschiedene interessante Angaben in den „Verhandlungen der europäischen Gradmessung 1878 in Hamburg“ Berlin 1879 S. 19—21. Ferner den Aufsatz von *C. Bohn*, Über einen Temperatureinflufs bei Längenmessungen, Zeitschrift für Vermessungswesen 1882 Bd. 11 S. 514.

***) Vergl. *Zöppritz*, Über Schwankungen des Meeresspiegels infolge geologischer Veränderungen. *Wiedem. Ann.* Bd. 11, S. 1016.



Zum Schlufs müssen wir noch der Untersuchungen von *S. Newcomb* in betreff einer *Veränderlichkeit der Rotationsdauer der Erde* gedenken. In seinen *Researches on the Motion of the Moon* konstatierte dieser astronomische Forscher Ungleichheiten in der Mondbewegung, die er geneigt war, einer ungleichmäfsigen Rotation der Erde zuzuschreiben. Fig. 72 zeigt die Fehler der astronomischen Zeitbestimmung nach dieser Hypothese, wenn für 1750 und 1850 die Fehler null gesetzt

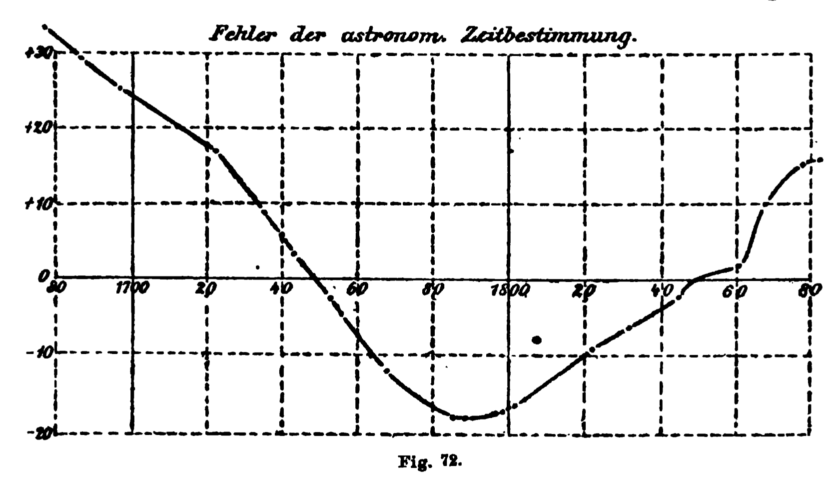


Fig. 72.

werden, also die Zeit zwischen beiden Epochen als Mafsstab dient. Die Hypothese ist inzwischen durch die Untersuchung der Merkurvorübergänge vor der Sonnenscheibe von 1677—1881 nicht bestätigt worden*); vielmehr nimmt *S. Newcomb* gegenwärtig (1882) an, dafs die mittlere Bewegung des Mondes zwischen 1800 und 1875 wirklich geringer als zwischen 1720 und 1800 war. Es mag übrigens doch erwähnt werden, dafs sich zunächst (1874) wenigstens für die Unregelmäfsigkeiten zwischen 1848 und 1873 eine Bestätigung, wenn auch von geringem Gewicht, durch die Untersuchung der Verfinsterungen des ersten Jupitersatelliten seitens des Pulkowaer Astronomen *Glasenapp* gefunden zu haben schien**). Dies war dadurch interessant, dafs nach den *Researches* gerade in diese Zeit eine starke Unregelmäfsigkeit fällt, zufolge welcher die Jahreslängen vor und nach 1862 sich um etwa 2^s unterschieden haben würden.

Wir gedenken hier endlich noch der Veränderung in der Rotationsdauer der Erde durch *Flutreibung*, *auffallende Meteore* und

*) *Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac.* Vol. I P. 6. Washington 1882. Die Fig. 72 ist nach den Zahlen dieser Quelle S. 449 konstruiert. Man vergleiche auch besonders S. 465.

**) Vergleiche die Mitteilung von *S. Newcomb* im *American Journal of Science and Arts* 1874 Bd. 8 S. 161—170.

säkulare Abkühlung der Erde. Erstere bewirkt eine stetige Verlangsamung der Rotation, so dafs nach *Adams'* Rechnung in einem Jahrhundert die astronomisch bestimmte Zeit gegen die durch die Anfangsgeschwindigkeit gegebene Zeit um 22^s zurückbleibt und die Änderung der Jahreslänge somit im Jahrhundert 0,44^s beträgt*). Der Einflufs der Meteore und der Abkühlung ist der Schätzung schwer zugänglich und mit einiger Sicherheit noch nicht bekannt**).

Sechstes Kapitel.

Verwertung astronomischer Angaben für die Erkenntnis der Erdgestalt und des Erdinnern.

§ 1. **Allgemeine Bemerkungen.** Die astronomischen Angaben, von denen die Überschrift dieses Kapitels redet, sind solche, welche allein für sich geeignet sind, Kenntnisse von der Erde zu gewähren. Es soll demnach hier nicht die Rede sein von denjenigen astronomischen Angaben, die für Gradmessungszwecke oder auch nur für rohe Krümmungsmessungen durch Bereisung der Erdoberfläche (Bd. 1 S. 619) erforderlich sind, ebensowenig wie von denen für Ausführung und Verwertung der Pendelbeobachtungen. Hierher gehört vielmehr die Beobachtung über die Form des Erdschattens bei Mondfinsternissen, die Beobachtung der Parallaxe des Mondes und anderer Himmelskörper, der Einflufs der Massenanordnung der Erde auf die Mondbewegung und endlich derselbe Einflufs auf die Drehbewegung der Erdaxe.

Der erste und der letzte dieser Punkte sollen hier keine weitere Besprechung finden. Der letzte, weil das vorige Kapitel schon ausreichende Mitteilung darüber giebt; der erste, weil er gegenwärtig von geringem Werte ist. Mehr wie die Erkenntnis der nahezu kugelförmigen Erdgestalt kann die Beobachtung des nicht scharf begrenz-

*) Vergleiche *Thomson und Tait*, Handbuch der theoretischen Physik, Bd. 1. T. 2, S. 402—403.

**) Vergleiche im allgemeinen auch *Vogler*, Ziele und Hilfsmittel geometrischer Präzisionsnivellements, München 1873, S. 31—32.

Vogler weist hier darauf hin, dafs solche Nivellements (sowie Pegelbeobachtungen), indem sie die zeitlichen Verschiebungen der Niveauflächen in Höhe markieren, geeignet sind, sehr kleine Beträge von Änderungen der Lotrichtungen zu erkennen, wenn solche Änderungen über weite Strecken in demselben Sinne erfolgen. Jedenfalls bilden von Zeit zu Zeit wiederholte Nivellements (und Pegelbeobachtungen) beim Studium der säkularen Veränderungen des Erdkörpers eine *notwendige* Ergänzung der Untersuchung durch wiederholte Bestimmung der geographischen Breite und Länge.

ten Erdschattens am Monde wohl kaum geben. Diese erste (für die Anwendung der Potentialtheorie [1. Kap. S. 17; 2. Kap. S. 72; 3. Kap. S. 149] wichtige) Annäherung gewährt uns gegenwärtig aber auch die Summe der zahllosen Bereisungen des gröfsten Teiles der Erdoberfläche, 1. Bd. S. 613. Es hat daher die Beobachtung des Erdschattens nur mehr den Wert einer augenfälligen Demonstration der kugeligen Erdform.*)

Was die Beobachtung der Parallaxen anbetrifft, so hat nur diejenige des Mondes Bedeutung, weil sie allein so erheblich werden kann, dafs ihre Kenntnis bei genügender Schärfe der Messung einen Schlufs auf die Erdgestalt zu geben verspricht. Selbst bei den Beobachtungen von Mars und Venus in ihrer gröfsten Annäherung an die Erde wird sich die Abweichung der Figur der letzteren von der Gestalt der Kugel nicht in solchem Betrage äufsern, dafs sie daraus ermittelt werden könnte; man wird eben nur die ellipsoidische Gestalt nach anderweiten Ermittelungen zur Reduktion dieser Beobachtungen benutzen können.

Aber auch beim Monde ist es fraglich, ob sich aus den Beobachtungen mehr als eine allgemeine Bestätigung der auf anderem Wege ermittelten speziellen Angaben für die Erdgestalt entnehmen lassen wird, und ob es insbesondere möglich sein wird, aus den Mondparallaxenbeobachtungen Abweichungen von der Gestalt eines zum Erdschwerpunkt konzentrischen und zur Erdaxe koaxialen Rotationsellipsoids zu erkennen.

Dagegen giebt jedenfalls die Mondbewegung einen Wert für die Differenz der Trägheitsmomente des Erdkörpers und daraus einen Wert seiner Abplattung, der neben den auf anderen Wegen dafür ermittelten Werten in betracht kommt. Aufserdem gewähren die verschiedenartigen Mondbeobachtungen (Finsternisse, Monddistanzen) erwünschte Sicherheit für die Zulässigkeit der bei den Entwicklungen des zweiten Kapitels erforderlichen Voraussetzung, dafs der Erdschwerpunkt nahezu Mittelpunkt der Figur sei, wenn man deren Bestätigung nicht in der im 1. Kap. § 14 S. 17 u. erwähnten Thatsache finden will.

§ 2. Bestimmung der geozentrischen Koordinaten eines Punktes der Erdoberfläche aus Beobachtungen der Mondparallaxe. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dafs der Mondmittelpunkt $\mathfrak{M}$ beobachtet werde. Wäre nun die Erde eine Kugel, oder genauer:

*) *Bohnenberger* sagt in seiner *Astronomie*, Tübingen 1811, S. 119 und 590, dafs die Astronomen auf die kugelförmige Gestalt der Erde aus der Begrenzung des Erdschattens geschlossen haben, weil diese Begrenzung bei allen Lagen des Mondes gegen den Horizont beständig dieselbe kreisförmige Figur behält. *B.* sagt aber nicht, ob jemand den Gegenstand an der Hand von Beobachtungsmaterial untersucht hat.

führten alle Lotrichtungen durch den Erdschwerpunkt C, so würden wie in Fig. 73 die beiden von C und von einem Punkt P der physischen Erdoberfläche nach $\mathfrak{M}$ führenden Richtungen mit der Lotrichtung ZPC in einer Ebene, in einer Vertikalebene von P, liegen. Es würde also der Richtungsunterschied von $C\mathfrak{M}$ und $P\mathfrak{M}$ nur in Zenithdistanz als Differenz $z' - z$ sich äufsern, und es würde somit nur von Höhenparallaxe die Rede sein.

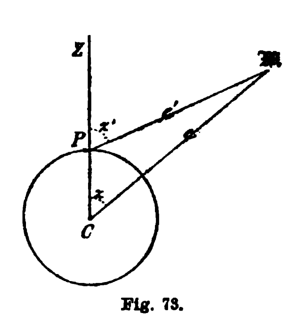


Fig. 73.

Die Lotrichtung eines Punktes P geht aber im allgemeinen nicht durch den Erdschwerpunkt, ja nicht einmal durch die Erdaxe; infolge dessen entsteht auch eine Azimutalparallaxe. Wir gehen dazu über, die Ausdrücke für die Parallaxe in Zenithdistanz und Azimut aufzustellen, ohne eine bestimmte Voraussetzung für die Erdgestalt.*)

Nehmen wir P als Koordinatenanfang, legen die x-Axe nach Süden, die y-Axe nach Westen, die z-Axe nach dem Zenith, so sind die Koordinaten des Mondmittelpunktes $\mathfrak{M}$, wenn e', z' und a' bezw. Entfernung, Zenithdistanz und südwestliches Azimut sind:

$$\begin{aligned} x' &= e' \sin z' \cos a' \\ y' &= e' \sin z' \sin a' \\ z' &= e' \cos z' . \end{aligned} \tag{1}$$

Nehmen wir dagegen C als Koordinatenanfang für ein System von Axen, die bezw. zu den vorigen parallel sind und bezeichnen mit e, z und a geozentrische Entfernung, Zenithdistanz und Azimut, so werden die Koordinaten von $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} x &= e \sin z \cos a \\ y &= e \sin z \sin a \\ z &= e \cos z . \end{aligned} \tag{2}$$

Bezogen auf dasselbe System von Axen erhalten wir die Koordinaten von P, d. h. $x - x'$, $y - y'$ und $z - z'$, wenn wir den Radiusvektor, CP, seine Zenithdistanz und sein Azimut bezw. mit r, ζ und α bezeichnen, gleich

$$\begin{aligned} x - x' &= r \sin\zeta \cos\alpha \\ y - y' &= r \sin\zeta \sin\alpha \\ z - z' &= r \cos\zeta . \end{aligned} \tag{3}$$

Aus der Verbindung von (1), (2) und (3) folgt:

*) Mit teilweiser Benutzung einer Entwicklung von *Encke* in *Brünnow*, *Sphärische Astronomie*, 2. Ausgabe 1862, S. 155.

$$
\begin{aligned}
e' \sin z' \cos a' &= e \sin z \cos a - r \sin\zeta \cos\alpha \\
e' \sin z' \sin a' &= e \sin z \sin a - r \sin\zeta \sin\alpha \qquad (4) \\
e' \cos z' &= e \cos z - r \cos\zeta .
\end{aligned}
$$

Hieraus sind nun zunächst noch ζ und α durch Einführung gebräuchlicher Gröſsen zu eliminieren.

Wir denken uns zu dem Zwecke wieder eine Einheitskugel um den Erdschwerpunkt C gelegt. Auf dieser Kugel bezeichne Z den Durchschnitt der z-Axe, P den Durchschnitt des Radiusvektors CP, N den Nordpol der Erdaxe. Zum weiteren Verständnis der Fig. 74 erwähnen wir, daſs geographische Breite u. Länge des Punktes P mit B' und L', dagegen geozentrische Breite und Länge mit φ und L bezeichnet sind.

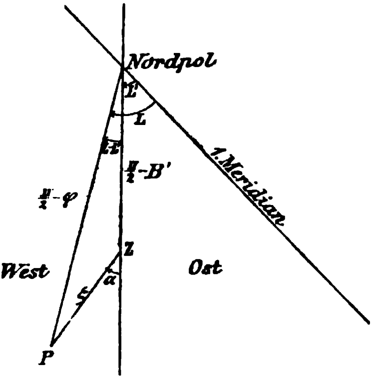


Fig. 74.

Das sphärische Dreieck zwischen N, Z und P giebt nun nach bekannten Regeln:

$$
\begin{aligned}
\cos\zeta &= \sin\varphi \sin B' + \cos\varphi \cos B' \cos(L - L') \\
-\sin\zeta \cos\alpha &= \sin\varphi \cos B' - \cos\varphi \sin B' \cos(L - L') \qquad (5) \\
\sin\zeta \sin\alpha &= \cos\varphi \sin(L - L') .
\end{aligned}
$$

Zur Vereinfachung setzen wir in den beiden ersten Gleichungen

$$\cos(L - L') = 1 - 2\sin^2 \frac{L - L'}{2}$$

und erhalten damit

$$
\begin{aligned}
\cos\zeta &= \cos(B' - \varphi) - 2 \cos\varphi \cos B' \sin^2 \frac{L - L'}{2} \\
\sin\zeta \cos\alpha &= \sin(B' - \varphi) - 2 \cos\varphi \sin B' \sin^2 \frac{L - L'}{2} . \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Diese beiden und die dritte Gleichung (5) geben in (4) eingeführt:

$$
\begin{aligned}
e' \sin z' \cos a' &= e \sin z \cos a - S + q \sin B' \\
e' \sin z' \sin a' &= e \sin z \sin a + Q \qquad (7) \\
e' \cos z' &= e \cos z - C + q \cos B' ,
\end{aligned}
$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$
\begin{aligned}
r \sin(B' - \varphi) &= S \\
r \cos(B' - \varphi) &= C \\
r \cos\varphi \sin(L' - L) &= Q \qquad (8) \\
2r \cos\varphi \sin^2 \frac{L' - L}{2} &= q .
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren nun die erste von (7) mit $\sin a'$, die zweite mit $\cos a'$ und finden durch Subtraktion:

$$0 = e \sin z \sin(a - a') + S \sin a' + Q \cos a' - q \sin B' \sin a' ; \quad (9)$$

dagegen giebt die Multiplikation mit $\cos a'$ bezw. $\sin a'$ und Addition:

$$e' \sin z' = e \sin z \cos(a - a') - S \cos a' + Q \sin a' + q \sin B' \cos a' .$$

Multiplizieren wir noch die vorige Gleichung mit $\sin \frac{a - a'}{2}$, die letzte mit $\cos \frac{a - a'}{2}$ und addieren, so folgt:

$$\begin{aligned} e' \sin z' \cos \frac{a - a'}{2} &= e \sin z \cos \frac{a - a'}{2} - S \cos \frac{a + a'}{2} \\ &\quad + Q \sin \frac{a + a'}{2} + q \sin B' \cos \frac{a + a'}{2} . \end{aligned}$$

Diese Gleichung giebt mit der Gleichung (9) und der dritten Gleichung (7) nachstehende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned} e \sin z \sin(a' - a) &= S \sin a' + Q \cos a' - q \sin B' \sin a' \\ e' \sin z' &= e \sin z - S \frac{\cos \frac{a + a'}{2}}{\cos \frac{a - a'}{2}} + Q \frac{\sin \frac{a + a'}{2}}{\cos \frac{a - a'}{2}} + q \sin B' \frac{\cos \frac{a + a'}{2}}{\cos \frac{a - a'}{2}} \quad (10) \\ e' \cos z' &= e \cos z - C + q \cos B' , \end{aligned}$$

woraus man durch Kombination der zweiten und dritten Gleichung in ähnlicher Behandlungsweise wie oben für die ersten beiden (7) leicht ableitet:

$$\sin(a' - a) = S \frac{\sin a'}{e \sin z} + Q \frac{\cos a'}{e \sin z} - \frac{q \sin B' \sin a'}{e \sin z} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sin(z' - z) &= C \frac{\sin z'}{e} - S \frac{\cos z'}{e} \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} + Q \frac{\cos z'}{e} \frac{\sin \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} \\ &\quad + q \frac{\sin B' \cos z'}{e} \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} - q \frac{\cos B' \sin z'}{e} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{e'}{e} &= \cos(z' - z) - C \frac{\cos z'}{e} - S \frac{\sin z'}{e} \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} + Q \frac{\sin z'}{e} \frac{\sin \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} \\ &\quad + q \frac{\sin B' \sin z'}{e} \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} + q \frac{\cos B' \cos z'}{e} . \end{aligned} \quad (13)$$

Diese Formeln sind noch einer erheblichen Vereinfachung fähig. Um dieselbe zu finden, ist zunächst der maximale Betrag von S, C, Q

und q festzustellen. Nehmen wir als Einheit der linearen Längen den äquatorialen Radius des Erdellipsoids, so ist

$$\frac{1}{e} \text{ der Sinus der Horizontal-Äquatorial-Parallaxe},$$

welche in Sekunden rund gleich 3422 ist. Da ferner $B' - \varphi$ im Maximum etwa 11′ beträgt (Bd. 1 S. 60), so sind die Werte von $\varrho'' \frac{S}{e}$ und $\varrho'' \frac{C}{e}$ mit Rücksicht auf (8) im Maximum etwa gleich 11″ und 3422″.

Setzen wir ferner als maximale Lotabweichung 1,5 Minuten fest, so wird $L' - L$, da es nach Bd. 1 S. 518 mit $\sec B'$ wächst, für 80° geographischer Breite rund 9′ betragen können, welcher Betrag in praktischen Fällen etwa das Maximum angiebt. Das Maximum von $\varrho'' \frac{Q}{r}$ ist mit Rücksicht auf (8), weil φ und B' wenig verschieden sind, indessen nur 1,5′ oder 90″, das Maximum von $\varrho'' \frac{q}{r}$ nur 0,12″. Die entsprechenden Maxima von $\varrho'' \frac{Q}{e}$ und $\varrho'' \frac{q}{e}$ betragen endlich nur 1,5″ und 0,002″.

Mit Rücksicht hierauf setzen wir näherungsweise:

$$\underset{\text{in Sek.}}{z' - z} = \varrho'' \left\{ C \frac{\sin z'}{e} - S \frac{\cos z'}{e} \cos a' + Q \frac{\cos z'}{e} \sin a' + \frac{1}{6} C^3 \left(\frac{\sin z'}{e} \right)^3 \right\} \quad (14)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{a' - a} = \varrho'' \left\{ S \frac{\sin a'}{e \sin z} + Q \frac{\cos a'}{e \sin z} \right\} \quad (15)$$

$$\frac{e'}{e} = \cos(z' - z) - C \frac{\cos z'}{e} - S \frac{\sin z'}{e} \cos a' . \quad (16)$$

Die Gleichung (14) hat wegen Vernachlässigung der Glieder mit q und der höheren Glieder der Reihenentwicklung einen Fehler von einigen Tausendelsekunden. Aufserdem ist in den Gliedern mit S und Q bezw. gesetzt

$$\cos a' \text{ für } \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} \quad \text{und} \quad \sin a' \text{ für } \frac{\sin \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}};$$

hierdurch entsteht indessen nur bei Beobachtungen in nächster Nähe des Zeniths aufserhalb des Meridians ein merklicher Fehler, nämlich für $z = 2^0$ im Maximum knapp 0,01″ und bei weiterer Annäherung umgekehrt proportional z wachsend. Die nächste Nähe des Zeniths wird man aber ohnehin wegen des stärkeren Einflusses gewisser Instrumentalfehler gern vermeiden.

Die Gleichung (15) vernachlässigt namentlich ein in q multipliziertes Glied, dessen Einflufs auf $a' - a$ mit abnehmendem z wächst und bei $z = 2^0$ im Maximum bereits 0,06″ erreicht, welches aber doch für unsere Absichten der Berechnung von S und Q wegbleiben kann, da sein Einflufs auf das Aggregat $(S \sin a' + Q \cos a') : e$ im Maximum

nur 0,002″ für jede Zenithdistanz beträgt. Die in (15) vernachlässigten höheren Glieder der Reihenentwicklung werden erst für Werte von z wesentlich $< 2^0$ merklich.

Was endlich Gleichung (16) anbetrifft, so genügt zur Begründung der im Vergleiche zu (13) stattgefundenen Vernachlässigung die Bemerkung, dafs e' nur gebraucht wird, um vom beobachteten Mondrand aufs Mondzentrum zu reduzieren.

§ 3. **Fortsetzung: Die praktische Lösung** der Aufgabe bietet viele Schwierigkeiten. Als Unbekannte treten zunächst C, S und Q auf, welche nach (8) ausreichen, um r, $B' - \varphi$ und $L' - L$ zu ermitteln. Zu diesen drei Unbekannten treten aber noch als Unbekannte hinzu die Fehler der Mondtafeln. Man wird aus den letzteren jedenfalls nur die *Mondbewegung* für einen kurzen Zeitraum, etwa einen halben Tag, korrekt entnehmen können. Berechnen wir nun die geozentrischen Werte z und a aus den in den Mondtafeln gegebenen Werten der Rektascension α und Deklination δ des Mondmittelpunktes, so werden z und a wegen der in α und δ enthaltenen Fehler unrichtig. In welcher Weise, entnehmen wir leicht aus Fig. 75, welche auf einer den Erdschwerpunkt umgebenden Kugel vom Radius 1 gedacht ist.

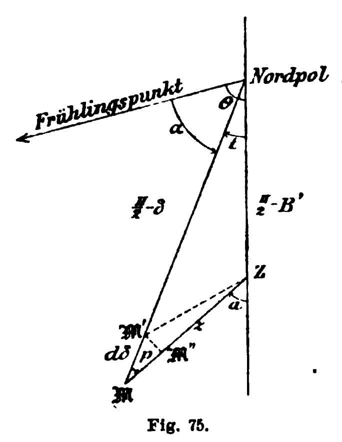


Fig. 75.

Ist δ um $d\delta$ irrig, wird also der Mondmittelpunkt nach $\mathfrak{M}'$ verlegt, so wird nach Mafsgabe des in $\mathfrak{M}''$ rechtwinkeligen Differentialdreiecks $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$:

$$dz = -d\delta\cos p \qquad da = +d\delta\frac{\sin p}{\sin z}\,. \quad (1)$$

Ist dagegen t um dt irrig, so fällt der Mondmittelpunkt bei unveränderter Deklination δ nach $\mathfrak{M}'$, Fig. 76, und das Differentialdreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ giebt, da $\mathfrak{M}\mathfrak{M}' = dt\cos\delta$ ist:

$$dz = +dt\cos\delta\sin p \qquad da = +dt\cos\delta\frac{\cos p}{\sin z}\,. \quad (2)$$

Der Fehler in dem Stundenwinkel t setzt sich zusammen aus den Fehlern in der Sternzeit Θ und in der Rektascension α; denn man hat $t = \Theta - \alpha$, Fig. 75, und somit

$$dt = d\Theta - d\alpha\,. \quad (3)$$

Fig. 76.

Bezeichnen wir nun die aus den Tafelwerten berechneten geozentrischen Werte a und z mit a^0 und z^0, so geben (14) und (15)

des vorigen Paragraphen, indem wir die Verbesserungen von α und δ als Differentiale ansehen und dieselben in Bogensekunden verstehen, die Gleichungen:

$$\underset{\text{in Sek.}}{z' - z^0} = \varrho''\left\{C\frac{\sin z'}{e} - S\frac{\cos z'}{e}\cos a' + Q\frac{\cos z'}{e}\sin a' + \frac{1}{6}C^3\left(\frac{\sin z'}{e}\right)^3\right\} \quad (4)$$
$$- d\delta\cos p + dt\cos\delta\sin p$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{a' - a^0} = \varrho''\left\{S\frac{\sin a'}{e\sin z} + Q\frac{\cos a'}{e\sin z}\right\} + d\delta\frac{\sin p}{\sin z} + dt\cos\delta\frac{\cos p}{\sin z}\,. \quad (5)$$

Wenn man diese Gleichungen betrachtet, so scheint auf den ersten Blick für nicht zu hohe Breiten eine vollständige Bestimmung der fünf Unbekannten C, S, Q, $d\delta$ und dt nicht unmöglich, falls bei geeigneten Werten der Monddeklination Beobachtungen im Meridian mit solchen in gröfserem Abstand vom Meridian, insbesondere dem Ost- und Westvertikal kombiniert werden. Durch Beobachtung entgegengesetzter Teile des Mondrandes, wenn auch zu verschiedenen Zeiten, würde sich die Unsicherheit in der Kenntnis des Mondradius und in der Auffassung des Mondrandes eliminieren lassen, und eine etwaige Ungenauigkeit in dem aus den Mondtafeln entnommenen Werte von $\frac{1}{e}$ würde unschädlich werden, indem annähernd gleichzeitige Bestimmungen an verschiedenen Beobachtungsstationen mit einander verglichen würden.*)

Allein bei näherer Betrachtung zeigt sich der Übelstand, dafs man $d\delta$ aus den Beobachtungen *einer* Station nicht eliminieren kann, sodafs die Möglichkeit der Bestimmung von r im allgemeinen verloren geht. Hierauf wird man aufmerksam bei der Aufstellung der Parallaxenformeln für Deklination δ und Stundenwinkel t.**) Wir können es aber direkt an (4) und (5) zeigen, wenn wir anstatt C und S andere Unbekannte einführen. Es war

$$C = r\cos(B' - \varphi) \qquad S = r\sin(B' - \varphi)\,.$$

*) Hierbei würde es sich mehr um einen konstanten Fehler der in den Tafeln gegebenen Horizontalparallaxe handeln, als um veränderliche Fehler. Wenigstens sind Fehler in $\frac{1}{e}$ von gleicher Ordnung mit denen, welche in Rektaszension und Deklination des Mondes bei *Hansens* Mondtafeln (als Arcus genommen) hervortreten, noch von ziemlich unerheblichem Einflufs.

**) Um die Parallaxenformeln für Deklination und Stundenwinkel zu erhalten, legt man die z-Axe nach dem Nordpol, die x-Axe in die Meridianebene nach Süden, die y-Axe nach Westen. Die Grundformeln werden:

$$\begin{aligned} e'\cos\delta'\cos t' &= e\cos\delta\cos t - r\cos\varphi\cos(L' - L) \\ e'\cos\delta'\sin t' &= e\cos\delta\sin t + r\cos\varphi\sin(L' - L) \\ e'\sin\delta' &= e\sin\delta - r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt ganz in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen:

Bilden wir nun mit Rücksicht auf (4) und (5) die Identitäten

$$C \sin z' - S \cos z' \cos a' = r \cos\varphi \, (\cos B' \sin z' - \sin B' \cos z' \cos a') + r \sin\varphi \, (\sin B' \sin z' + \cos B' \cos z' \cos a')$$

und

$$S \sin a' = r \cos\varphi \, . \sin B' \sin a' - r \sin\varphi \, . \cos B' \sin a' ,$$

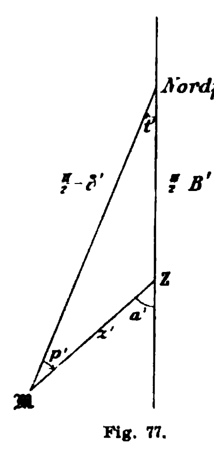


Fig. 77.

und beachten die folgenden Relationen, welche sich aus Fig. 77 ergeben, die auf einer den Punkt P umschliefsenden Einheitskugel liegt:

$$\sin B' \cos z' - \cos B' \sin z' \cos a' = \sin \delta'$$
$$\sin B' \sin z' + \cos B' \cos z' \cos a' = \cos\delta' \cos p'$$
$$\cos B' \sin a' = \cos\delta' \sin p' ,$$

aus deren erster man durch Multiplikation mit $\cos a'$ und einigen weiteren Transformationen leicht ableitet:

$$\cos B' \sin z' - \sin B' \cos z' \cos a' = \sin p' \sin t' - \cos p' \cos t' \sin \delta',$$

so gehen (4) und (5) über in:

$$\underset{\text{in Sek.}}{z' - z^0} = \varrho'' \left\{ \begin{array}{l} \frac{r \cos\varphi}{e} (\sin p' \sin t' - \cos p' \cos t' \sin\delta') + \frac{r \sin\varphi}{e} \cos\delta' \cos p' \\ \quad + \frac{Q}{e} \cos z' \sin a' + \frac{1}{6} \frac{C^3}{e^3} \sin^3 z' \end{array} \right\} - d\delta \cos p + dt \cos\delta \sin p \qquad (6)$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{a' - a^0} = \varrho'' \left\{ \frac{r \cos\varphi}{e} \frac{\sin B' \sin a'}{\sin z} - \frac{r \sin\varphi}{e} \frac{\cos\delta' \sin p'}{\sin z} + \frac{Q}{e} \frac{\cos a'}{\sin z} \right\} + d\delta \frac{\sin p}{\sin z} + dt \cos\delta \frac{\cos p}{\sin z} \, . \qquad (7)$$

$$\sin(\delta' - \delta) = \frac{R}{e} \frac{\cos\frac{t'+t}{2}}{\cos\frac{t'-t}{2}} \sin\delta' - \frac{Q}{e} \frac{\sin\frac{t'+t}{2}}{\cos\frac{t'-t}{2}} \sin\delta' - \frac{P}{e} \cos\delta'$$

$$\sin(t' - t) = \frac{R}{e} \frac{\sin t'}{\cos\delta} + \frac{Q}{e} \frac{\cos t'}{\cos\delta}$$

$$\frac{e'}{e} = \cos(\delta' - \delta) - \frac{R}{e} \frac{\cos\frac{t'+t}{2}}{\cos\frac{t'-t}{2}} \cos\delta' + \frac{Q}{e} \frac{\sin\frac{t'+t}{2}}{\cos\frac{t'-t}{2}} \cos\delta' - \frac{P}{e} \sin\delta ,$$

wobei gesetzt ist:

$$R = r \cos\varphi \cos(L' - L)$$
$$Q = r \cos\varphi \sin(L' - L)$$
$$P = r \sin\varphi \, .$$

Abgesehen von dem kleinen Unterschied zwischen p und p' infolge Parallaxenwirkung haben hiernach

$$\frac{r \sin \varphi}{e} \cos \delta' \quad \text{und} \quad d\delta$$

in beiden Gleichungen denselben Faktor, so dafs die Unkenntnis von $d\delta$ die Bestimmung von $r \sin \varphi$ verhindert.

Im allgemeinen ergeben sich daher aus den Beobachtungen eines Tages nur die Werte von

$$\frac{r \cos \varphi}{e}, \qquad \left(\frac{r \sin \varphi}{e} \cos \delta' - d\delta\right), \qquad \frac{Q}{e} \quad \text{und} \quad dt. \tag{8}$$

Mit Rücksicht auf die Relationen (8) S. 453 und infolge des geringen Betrages von $(L' - L)$ läfst sich daher zwar $(L' - L)$ für jede irgendwie gelegene Station finden — gewifs auch ein wertvolles Resultat*) —, nicht aber r und φ. r kann nur für äquatoriale Stationen ermittelt werden, etwa innerhalb der Breitenzone von -10^0 bis $+10^0$, φ dagegen läfst sich überhaupt nicht ohne weiteres finden.

Was die Bestimmung von r für äquatoriale Stationen anlangt, so ist zu bemerken, dafs man zwei Wege einschlagen kann. Man kann nämlich entweder $d\delta$ als null ansehen, oder man kann $\sin \varphi$ aus der geogr. Breite nach der ellipsoidischen Hypothese berechnen. Beide Wege dürften, wie man leicht sieht, ausreichen, um r aus $r \cos \varphi$ und $r \sin \varphi$ innerhalb der genannten Zone auf mindestens $^1/_{20000}$ seines Wertes genau berechnen zu lassen, was mit Rücksicht auf die überhaupt erreichbare Genauigkeit genügt.

Wenn man aus den Beobachtungen auf einer einzigen Station φ bestimmen will (womit sich dann auch r findet) so kann dies in möglichster Strenge wohl nur durch das sehr komplizierte Verfahren gleichzeitiger Bestimmung neuer Mondtafeln aus den betreffenden Beobachtungen geschehen, indem in eine solche Bestimmung $r \sin \varphi$ mit als Unbekannte aufgenommen wird.

Es giebt allerdings noch einen anderen, minder schwierigen Weg, der aber nicht ganz hypothesenfrei ist. Man denke sich für eine Anzahl Orte von nicht zu verschiedener Breite annähernd gleichzeitige Bestimmungen ausgeführt und die Unbekannten (8) berechnet. Bildet man nun die Werte

$$\frac{r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0}{e} \cos \delta' - d\delta, \tag{9}$$

worin die $r_0 \sin \varphi_0$ nach der ellipsoidischen Hypothese ermittelt sind, so wird das Mittel aller Werte (9) für diese Gruppe von Stationen einen Näherungswert für $-d\delta$ allein geben. In ähnlicher doch umständlicherer Weise kann man $d\delta$ überhaupt aus Beobachtungen an

*) Allerdings gehören *sehr viele* Beobachtungstage dazu, um $(L' - L)$ mit einiger Sicherheit zu gewinnen.



einer gröfseren Anzahl Stationen beliebiger Breite bestimmen, wobei als leitendes Prinzip zu gelten hat: die Abweichungen in r und φ von der ellipsoidischen Hypothese als zufällige anzusehen.

Den Gedanken, aus Moudbeobachtungen die Figur der Erde zu bestimmen, fafste nach *Todhunter*, *History of Attraction*, Bd. 1 S. 447 schon *Euler* und setzte ihn in der Abhandlung *„Versuch die Figur der Erde durch Beobachtung des Mondes zu bestimmen"* auseinander (in den *Abhandlungen der bayer. Akademie der Wissenschaften* Bd. 5, 1768). *Euler* scheint sich auf die Diskussion von Meridianbeobachtungen beschränkt zu haben und gelangte damit zu keiner genügenden, ihn selbst befriedigenden Methode.

Laplace erwähnt in der *Méc. cél.* t. II, l. III, p. 97 nur mehr beiläufig, dafs die Verschiedenheit des Radiusvektors für verschiedene Punkte der Erdoberfläche die Horizontalparallaxe des Mondes beeinflusse. Die Methode, aus dieser auf den Radiusvektor zu schliefsen, erörtert er nicht.

Dagegen widmet *H. Bruns* der Methode in seiner „Figur der Erde" einige Worte. Er sagt aber, dafs zur Zeit wegen der Ungenauigkeit der Beobachtung und der Theorie der Bewegung des Mondes an eine Benutzung der Methode nicht zu denken sei, dafs aber jedenfalls aus der Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung bei den Sonnenfinsternissen und Bedeckungen von Fixsternen durch den Mond gefolgert werden könne, dafs die radialen Anomalieen des Geoids einige Kilometer nicht überschreiten.

§ 4. **Bestimmung des Äquatorialhalbmessers des Erdellipsoids aus der Mondparallaxe in Verbindung mit der Intensität der Schwere an der Erdoberfläche.** Wäre die Meeresfläche eine zum Erdschwerpunkt konzentrische Kugelfläche vom Radius R, so hätten wir für die Beschleunigung g der Schwerkraft im Meeresniveau die einfache Formel

$$\frac{Mk^2}{R^2} = g, \tag{1}$$

worin M die Erdmasse und k^2 die Beschleunigung ist, welche die Masse 1 der in der Entfernung 1 befindlichen Masse 1 erteilt.

Wäre ferner die Mondbahn eine Kreisbahn vom Radius $\mathfrak{R}$, so würde diese Bahn nur bestehen können, wenn die der Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{n}$ entsprechende Zentrifugalbeschleunigung

$$\mathfrak{R}\mathfrak{n}^2$$

durch die gegenseitige Anziehung von Mond und Erde aufgehoben würde. Die Erde erteilt aber dem Mond die Beschleunigung

$$\frac{Mk^2}{\mathfrak{R}^2},$$

dagegen der Mond mit der Masse $\mathfrak{M}$ der Erde die Beschleunigung

$$\frac{\mathfrak{M}k^2}{\mathfrak{R}^2},$$

folglich ist

$$\frac{(M+\mathfrak{M})k^2}{\mathfrak{R}^2} = \mathfrak{R}\mathfrak{n}^2. \tag{2}$$

Die Vergleichung von (1) und (2) giebt unter Elimination von k^2:

$$R = g\left(1 + \frac{\mathfrak{M}}{M}\right)\frac{\sin^3 p}{\mathfrak{n}^2}, \tag{3}$$

worin der Quotient $R : \mathfrak{R}$, der Sinus der Horizontalparallaxe des Mondes, mit $\sin p$ bezeichnet ist:

$$\sin p = \frac{R}{\mathfrak{R}}. \tag{3*}$$

Ganz so einfach ist die Bestimmung des Erdradius nun allerdings nicht.

Was zunächst die Formel (1) anlangt, so ist sie durch die genauere Formel (7) § 15 S. 83 im 2. Kapitel zu ersetzen, wobei der Meeresfläche ein Normalsphäroid, also jedenfalls sehr nahe ein Rotationsellipsoid, substituiert ist. Dies ist zwar noch nicht streng, aber die einzige zur Zeit erreichbare Annäherung. Indem wir für g die Formel annehmen:

$$g = g_a\,(1 + \mathfrak{b}\sin^2 B) \tag{4}$$

und mit $\mathfrak{c}$ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator bezeichnen, wird damit in völlig ausreichender Annäherung:

$$\frac{Mk^2}{a_0^2} = \frac{g_a}{1 - \mathfrak{b} + \mathfrak{c}}, \tag{5}$$

a_0 Äquatorialhalbmesser. Für die Anwendung ist es vorteilhaft, nicht den von $\mathfrak{b}$ abhängigen Wert g_a, sondern den Mittelwert der g-Werte im Sinne der Kugelfunktionen:

$$G = g_a\left(1 + \frac{\mathfrak{b}}{3}\right), \tag{4*}$$

einzuführen. Es geht damit (5) über in:

$$\frac{Mk^2}{a_0^2} = \frac{G}{\left(1 + \frac{\mathfrak{b}}{3}\right)\left(1 - \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\right)},$$

woraus wir $\mathfrak{b}$ mittelst des *Clairaut*schen Theorems

$$\mathfrak{b} = \frac{5}{2}\mathfrak{c} - \mathfrak{a}$$

eliminieren und die hier ausreichende Näherungsformel erhalten:

$$\frac{Mk^2}{a_0^2} = \frac{G}{1 + 2\frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{c}}{3}}. \tag{6}$$

Bezüglich der Formel (2) ist zu bemerken, dafs sie auch noch für die elliptische Mondbewegung richtig bleibt, wenn $\mathfrak{R}$ die halbe grofse Axe der Mondbahn und $\mathfrak{n}$ die mittlere Winkelgeschwindigkeit (Geschwindigkeit der mittleren Anomalie) bezeichnet. Allein man mufs nun noch dem Umstande Rechnung tragen, dafs auch die Sonne

die Mondbewegung beeinflufst und zwar aufser periodischen Änderungen gewissermafsen eine Verminderung der gegenseitigen Anziehung von Mond und Erde um $^1/_{358}$ erzeugt*).

Denken wir uns, um letztgenannte Verminderung abzuleiten, im Anschlufs an Fig. 78 die als kreisförmig betrachtete Mondbahn in der Ekliptik liegend, so erteilt die Anziehung der Sonne S der Erde E die Beschleunigung

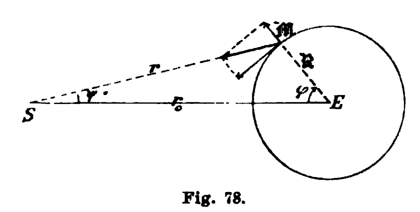


Fig. 78.

$$k^2 \frac{S}{r_0^2} \tag{7}$$

in Richtung ES, dagegen dem Monde M die Beschleunigung

$$k^2 \frac{S}{r^2} \tag{8}$$

in Richtung 𝔐S. Denken wir uns ferner die Erde festgehalten, da es auf die zur Erde relative Mondbewegung ankommt, so ist die Beschleunigung (7) dem Monde in entgegengesetzter Richtung, also parallel SE wirkend, zu erteilen. Wir zerlegen diese Beschleunigung sowie (8) radial und tangential und erhalten als radial nach aufsen, in Richtung E𝔐, wirkende Komponente:

$$k^2 \left\{\frac{S}{r^2} \cos(\varphi + \psi) - \frac{S}{r_0^2} \cos\varphi\right\},$$

oder für $r \cos\psi = r_0 - \mathfrak{R} \cos\varphi$:

$$k^2 \frac{S}{r_0^2} \left\{\frac{\cos^2\psi \cos(\varphi + \psi)}{\left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_0} \cos\varphi\right)^2} - \cos\varphi\right\}. \tag{9}$$

Indem wir die 2. Potenz von $\frac{\mathfrak{R}}{r_0}$ vernachlässigen, setzen wir hierin

$$\sin\psi = \frac{\mathfrak{R}}{r_0} \sin\varphi, \quad \cos\psi = 1$$

und gelangen für die in Rede stehende Komponente zu dem Ausdruck:

$$k^2 S \frac{\mathfrak{R}}{r_0^3} \cos^2\varphi\,(2 - \tan^2\varphi).$$

Hiervon haben wir den Durchschnittswert für alle Werte von φ = null bis 2π zu bilden, also unter einfacher Transformation des letzten Ausdruckes den Wert:

$$k^2 S \frac{\mathfrak{R}}{r_0^3} \int_0^{2\pi} (3\cos^2\varphi - 1)\, d\varphi : \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

*) Nachstehende Entwicklung ist mit teilweiser Benutzung von *Bohnenberger, Astronomie,* Tübingen 1811, § 308 S. 545 gegeben. Übrigens kannte schon *Newton* den betr. Einflufs der Sonne.

Derselbe ist gleich $$k^2 S \frac{\mathfrak{R}}{2 r_0^3}. \tag{10}$$

Nun ist aber, abgesehen von dem geringen Einflufs der Erdmasse, $k^2 S : r_0^2 = n^2 r_0$, wenn n die Winkelgeschwindigkeit bei der Erdbewegung um die Sonne ist; damit geht (10) über in

$$\frac{1}{2} \mathfrak{R} n^2. \tag{10*}$$

Dieses ist der rechten Seite von Gleichung (2) hinzuzufügen, womit diese in

$$\frac{(M + \mathfrak{M}) k^2}{\mathfrak{R}^2} = \mathfrak{R}\left(\mathfrak{n}^2 + \frac{1}{2} n^2\right) \tag{11}$$

übergeht. Die tangentiale Komponente der Beschleunigungen giebt im Mittel für $\varphi =$ null bis 2π den Wert null. Sie ist somit einflufslos.

Aus (11) und (6) folgt jetzt unter Elimination von k^2 als Ersatz der Gleichung (3):

$$a_0 = G\left(1 + \frac{\mathfrak{M}}{M}\right) \frac{\sin^3 p}{\mathfrak{n}^2 \left(1 + \frac{n^2}{2\mathfrak{n}^2}\right)\left(1 + \frac{2}{3}[\mathfrak{a} - \mathfrak{c}]\right)}, \tag{12}$$

mit dem Sinus der Äquatorialhorizontalparallaxe des Mondes:

$$\sin p = \frac{a_0}{\mathfrak{R}}. \tag{12*}$$

Die Formel (12) ist auch noch nicht völlig streng, weil die zu grunde gelegte Formel (11) einer nur rohen Theorie der Mondbewegung entnommen ist. Aber sie gewährt mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Bestimmung von p aus Beobachtungen eine völlig genügende Schärfe.

§ 5. **Fortsetzung: Zahlwerte.** Aus den im 2. Kap. S. 85 und 83 angegebenen Formeln für die Schwerebeschleunigung:

$$g = 9{,}7800\,(1 + 0{,}00531 \sin^2 B) \text{ mit } \mathfrak{a} = {}^1/_{299{,}26}$$

und

$$g = 9{,}7806\,(1 + 0{,}0052 \sin^2 B) \text{ mit } \mathfrak{a} = {}^1/_{289{,}76}$$

folgt bezw. der Mittelwert:

$$G = 9{,}7800\left(1 + \frac{0{,}00531}{3}\right) = 9{,}7973 \tag{1}$$

und

$$G = 9{,}7806\left(1 + \frac{0{,}0052}{3}\right) = 9{,}7975. \tag{1*}$$

Ferner hat man (vergl. 5. Kap. S. 384 und 433) für das Verhältnis der Mondmasse zur Erdmasse

$$\frac{\mathfrak{M}}{M} = \frac{1}{81{,}25}$$

und also

$$\log\left(1 + \frac{\mathfrak{M}}{M}\right) = \log \frac{82{,}25}{81{,}25} = 0{,}005313. \tag{2}$$

Für die Horizontal-Äquatorial-Parallaxe p liegen mehrere Bestimmungen vor. Nach *Olufsens* Berechnung der 1751—53 auf dem *Kap der guten Hoffnung* und mehreren europäischen Sternwarten angestellten 59 korrespondierenden Mondbeobachtungen (Meridianzenithdistanzen) ist

$$\operatorname{arc} p = 0{,}01651233 + 0{,}02449201\,\mathfrak{a}\,, \tag{3}$$

und zwar nach *Hansen* mit einem mittleren Fehler in p von $\pm 0{,}52''$ *). Die von *Olufsen* willkürlich gelassene Abplattung $\mathfrak{a}$ setzen wir nach *Bessel* sowie nach dem 2. Kap. S. 84 (5) an und erhalten bezw. für

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= {}^{1}/_{299{,}15} \qquad & p &= 3422{,}80'' \\ \mathfrak{a} &= {}^{1}/_{289{,}76} \qquad & p &= 3423{,}35^{**}). \end{aligned} \tag{3*}$$

Nach den neueren Berechnungen von *Breen* und von *Stone* ist nahezu übereinstimmend

$$\begin{aligned} p &= 3422{,}82'', \\ \log \sin p &= 8{,}219939 - 10\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Die hierbei angewandte Abplattung ist uns unbekannt, wahrscheinlich ist aber die *Bessel*sche oder eine nur wenig gröfsere angewandt. Infolge der Übereinstimmung der Beobachtungsstationen mit denen der älteren Berechnung läfst sich eventuell der Einflufs des für $\mathfrak{a}$ eingeführten Wertes auf (4) nach den unter (3*) gegebenen Zahlen beurteilen***).

Für die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{n}$ der Bewegung des Mondes um die Erde haben wir, da die siderische Umlaufszeit des Mondes 27,321661 mittlere Tage oder 2360592 Sekunden mittlerer Zeit beträgt, den Wert

$$\mathfrak{n} = \frac{2\pi}{2\,360\,592}\,, \quad \log \frac{1}{\mathfrak{n}} = 5{,}574841\,. \tag{5}$$

Für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit n der Bewegung der Erde um die Sonne zu $\mathfrak{n}$ haben wir den Wert

$$\frac{n}{\mathfrak{n}} = \frac{27{,}32166}{365{,}256} \quad \text{also} \quad \frac{n^2}{2\,\mathfrak{n}^2} = \frac{1}{357{,}45}$$

und

$$\log\left(1 + \frac{n^2}{2\,\mathfrak{n}^2}\right) = 0{,}001213\,. \tag{6}$$

---

*) *Olufsens* Abhandlung findet sich in Bd. 14 (1837) der *Astronom. Nachr.* Nr. 326, S. 209—226, vergl. insbesondere S. 226. *Hansens* Angabe findet sich in Bd. 17 (1840) Nr. 403 S. 299. Nach *Hansen* entspricht der aus (3) folgende Wert dem konstanten Teil (d. i. Mittelwert) des Sinus der Parallaxe; zum Übergang auf den konstanten Teil von p selbst ist (vergl. nachstehende Abhandlung von *Newcomb* S. 80), $+ 0{,}16''$ hinzuzufügen.

**) Strenggenommen ist also diesen Zahlen noch $+ 0{,}16''$ hinzuzufügen.

***) Wir entnahmen den Zahlwert (4) von S. 79 des Bds. 1 der *Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac under the direction of Simon Newcomb. Washington* 1882.

Die Abhandlungen von *Breen* und *Stone* sind in den *Memoirs of the Royal Astronom. Society* Bd. 32 und 34 (etwa 1864) erschienen, konnten aber nicht nachgesehen werden.

Endlich ist, vergl. 2. Kap. S. 84 (2*), für

$$\mathfrak{r} = {}^1/_{288{,}41} = 0{,}0034672$$

und

$$\mathfrak{a} = {}^1/_{299{,}15} = 0{,}0033428$$

$$\log\left(1 + \frac{2}{3}\,[\mathfrak{a} - \mathfrak{r}]\right) = 9{,}999964 - 10\,, \qquad (7)$$

dagegen für

$$\mathfrak{a} = {}^1/_{289{,}76} = 0{,}0034511$$

$$\log\left(1 + \frac{2}{3}\,[\mathfrak{a} - \mathfrak{r}]\right) = 9{,}999995 - 10. \qquad (7^*)$$

Mit den Werten (1), (2), (4), (5), (6) und (7) giebt die Formel (12) des vorigen Paragraphen:

$$\log a_0 = 6{,}804741 \qquad a_0 = 6378830\,, \qquad (8)$$

dagegen mit den Werten (1*), (2), (3*) 2. Zeile, (5), (6) und (7*):

$$\log a_0 = 6{,}804920 \qquad a_0 = 6381460\,. \qquad (8^*)$$

Bessel fand $a_0 = 6377397$ mit $\mathfrak{a} = {}^1/_{299{,}15}$, vergleichbar mit (8);
Klein fand*) $a_0 = 6378740$ für $\mathfrak{a} = {}^1/_{289}$, vergleichbar mit (8*).

Vorstehende Berechnung weist also, wenn man den Unterschied der vergleichbaren Werte von a_0 immer nur in einer Ursache allein suchen wollte, entweder auf eine *Vergrößerung von* a_0 hin, wie es die Gradmessungen geben, um ca. $^1/_{3000}$ seines Betrages gleich rund 2^{km}, oder auf eine *Verminderung der Äquatorial-Horizontal-Parallaxe* des Mondes, wie ihn die korrespondierenden Beobachtungen nach (3*) bezw. (4) geben, um ca. $^1/_{9000}$ ihres Betrages gleich rund $^1/_3{}''$. Letzteres ist mit Rücksicht auf nachfolgende Anmerkung nicht unwahrscheinlich.

Wollte man die Werte a_0 in (8) und (8*) durch Änderung der Mondmasse verkleinern, so müßte $\mathfrak{M} : M$ etwa gleich $^1/_{83}$ gesetzt werden, welcher Wert aber wenig wahrscheinlich ist.

Es ist hier noch zu erwähnen, daß nach *Hansens* Ermittelungen von 1856 der Mondschwerpunkt um 0,0001544 weiter entfernt ist, als der Mittelpunkt der Figur. (Wir citieren hier nach *Wolff*, *Handbuch der Math., Physik, Geodäsie und Astronomie*, 2. Bd., 1872 S. 200, da uns die Originalabhandlung in den *Memoirs of the Royal Astronom. Soc.* Bd. 24 1856 nicht zur Hand ist. Nur die Zahl 0,0001544 haben wir der im nächsten Paragraphen zu erwähnenden Abhandlung *Hansens* von 1864 S. 175 entlehnt.) Der aus den Mondbeobachtungen ermittelte Wert von p, welcher sich auf den Mittelpunkt bezieht, ist demgemäß um 0,52″ zu verkleinern, ehe er zur Berechnung von a_0 verwandt werden darf. Bei *Olufsens* Werten (3*) ist diese Korrektion sicher nicht angebracht, vielleicht aber bei dem Werte (4). Nach Anbringung dieser wohl noch nicht ganz sicher konstatierten Korrektion und der in der Anm. zu (3) erwähnten, entgegengesetzt fallenden Korrektion von + 0,16″ wird a_0 in (8) etwa 600^m kleiner

*) Bd. 1 S. 18.

als *Bessels* a_0, während a_0 in (8*) dann *Kleins* a_0 um einen nur wenig gröfseren Betrag überschreitet.

Die Beziehung zwischen der Bewegung des Mondes um die Erde und der Schwerkraft an der Erdoberfläche gab bekanntlich *Newton* in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts das Fundament für sein Gravitationsgesetz. Etwa 100 Jahre später hatte *Lambert* die Idee, mittelst derselben Beziehung unter Voraussetzung der Gültigkeit des inzwischen anderweit geprüften *Newton*schen Gesetzes aus den Dimensionen der Erde und der Schwerkraft an ihrer Oberfläche auf die Mondparallaxe zu schliefsen (nach *Seidels* Angabe 1859 im 50. Bde. der *Astronom. Nachr.* No. 1193 S. 264); doch hat er anscheinend darüber nichts publiziert. *Laplace* berechnet aber in der That auf diese Weise 1799 die Mondparallaxe in der *Méc. cél.* t. I p. 118—120, auf grund eingehenderer Behandlung der Mondbewegung aber 1802 t. III p. 247—248.

Auch *Hansen* leitet die Mondparallaxe in derselben Weise 1840 ab in den *Astronom. Nachr.* Bd. 17 No. 403 S. 297—299 (oder Abhandlungen der *math. phys. Cl. der kön. sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig* 1864 6. B., S. 415), ebenso *Adams* in den *Monthly Notices of the Royal Astronom. Soc.*, Vol. 13 und im *British Nautical Almanac for* 1856. Beide wenden a_0 nach *Bessel*, aber etwas verschiedene Werte für G und $\mathfrak{M}$ an und finden nach der Reduktion von *Newcomb* auf gleiche Daten mit *Hansen* (a. oben a. O. S. 79) nahezu übereinstimmend 3422,27″. Mit denselben Daten giebt Formel (12) des vorigen Paragraphen 3422,31; die unwesentliche Differenz beruht fast ausschliefslich auf der genaueren Berücksichtigung der Mondbewegung bei *Hansen-Adams*. Mit unseren Daten vergröfsern sich vorstehende Werte der Parallaxe um + 0,19″, also auf rund 3422,5″.

[Eine sehr merkwürdige Abhandlung von *Fr. Unferdinger* enthält, wie bei dieser Gelegenheit erwähnt sei, *Grunerts Archiv der Mathematik* 1869 Bd. 49, S. 309—331, im Anschlufs an Abhandlungen desselben Verfassers in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wiss. von 1863/64. Verf. will hier aus der Formel für die Länge des Sekundenpendels im Meeresniveau allein (also nicht etwa unter Zuziehung der Mondparallaxe) die *Gröfse* der Erde bestimmen. Dieses unmögliche Vorhaben gelingt auch durch Trugschlüsse und Zirkelrechnungen.]

§ 6. Bestimmung der Differenz MK der Hauptträgheitsmomente der Erde sowie der Abplattung der Erde aus der Mondbewegung. Im 2. Kap. § 15 S. 83 (6) sind wir zu der bis zu Gliedern der Ordnung $\mathfrak{a}^2$ einschliefslich genauen Formel gelangt

$$\mathfrak{a} = \frac{3K}{2a_0^2}(1+\mathfrak{a}) + \frac{\mathfrak{c}}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\mathfrak{c}\right) - \frac{1}{7}\mathfrak{d}, \tag{1}$$

worin MK die Differenz der Trägheitsmomente $C - \frac{1}{2}(A+B)$, M die Erdmasse, a_0 den Äquatorialhalbmesser und $\mathfrak{a}$ die Abplattung eines dem Geoid angepafsten Normalsphäroids, endlich $\mathfrak{c}$ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator bezeichnet.

Nach § 16 S. 84 ist jedenfalls ausreichend genau

$$\mathfrak{c} = 0{,}0034672\,. \tag{2}$$

Was $\mathfrak{d}$ anlangt, so nehmen wir dasselbe nach S. 91 (3*) so an, dafs

das Normalsphäroid bis auf Bruchteile des Radiusvektors von der Ordnung $\mathfrak{a}^2$ einschliefslich genau ein Rotationsellipsoid (das Erdellipsoid) ist, nehmen also, indem hierbei $\mathfrak{b} = \frac{3}{2}\,\mathfrak{a}$ gesetzt werden kann:

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a}^2 . \tag{3}$$

Die Formel (1), in welcher nunmehr nur 2 Unbekannte, $\mathfrak{a}$ und K, auftreten, gestattet $\mathfrak{a}$ zu berechnen, wenn K anderweit ermittelt ist. Zu diesem Zweck hat zuerst *Laplace* diese Formel in der Abkürzung

$$\mathfrak{a} = \frac{3K}{2a_0^2} + \frac{\mathfrak{c}}{2} \tag{4}$$

oder

$$K = \frac{2}{3}\,a_0^2 \left(\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{c}}{2}\right) \tag{5}$$

aufgestellt. Er zeigte zugleich, dafs man K aus der Mondbewegung ermitteln könne. Derselbe Umstand nämlich, welcher die Präzession und Nutation erzeugt, also nach den §§ 18 bis 20 in dem 5. Kap. die Ungleichheit von C und $\frac{1}{2}(A + B)$, infolge welcher die Richtung der Resultante der gegenseitigen Anziehung von Mond und Erde zum Erdschwerpunkt exzentrisch ist, bewirkt auch kleine Störungen in der Mondbewegung, welche somit von K abhängen.

Von den betreffenden Störungsgliedern sind nur zwei grofs genug, um mit einiger Sicherheit auf K einen Schlufs zu gestatten. In der Länge des Mondes bemerkte bereits *Tob. Mayer*, welcher 1767 eine Theorie der Mondbewegung ohne Rücksicht auf die elliptische Erdgestalt aufgestellt hatte, empirisch ein periodisches Glied, welches er theoretisch nicht zu erklären vermochte. Nachdem der Koefficient inzwischen genauer ermittelt worden war, gelang es dem Verfasser der *Méc. cél.* dieses Störungsglied aus der elliptischen Gestalt der Erde zu erklären und zugleich ein anderes Störungsglied derselben Art in der Mondbreite anzuzeigen. Mit Hilfe der von *Bürg* aus Greenwicher Beobachtungen gefundenen Werte der Koefficienten dieser Glieder leitete *Laplace* 1802 in der *Méc. cél.* t. III p. 282 und 285 die Abplattung der Erde zu

$$1/_{304,6} \quad \text{und} \quad 1/_{305,05}$$

aus der Breiten- bezw. Längenstörung ab*).

Nachdem *Laplace* später in einer Abhandlung einen etwas gröfseren Wert und *Bürg* (um 1833) in den *Astronom. Nachr.* Nr. 73 aus der Breitenstörung und der Längenstörung die Abplattung bezw. zu

$$1/_{295} \quad \text{und} \quad 1/_{294}$$

*) Man vergl. auch *Méc. cél.* t. III p. 173—174 oder *Bohnenberger, Astronomie*, Tübingen 1811, S. 589—591.

berechnet hatten, gelangte um die Mitte dieses Jahrhunderts *Hansen* an der Hand seiner neuen grofsartigen Theorie der Mondbewegung auch zu einer Neubestimmung der Abplattung.*) Auch *Hansen* bestimmt die Koefficienten der beiden Störungsglieder empirisch, scheint aber den Koefficienten der Breitenstörung für sicherer zu halten, denn er leitet nur aus ihm $\mathfrak{a}$ ab zu

$$^1/_{296}\,.$$

Da es unmöglich angeht, hier eine Darstellung der Theorie zu geben, begnügen wir uns die Resultate mitzuteilen. Nach *Laplace*, *Méc. cél.* t. III. p. 251 u., p. 255 u. und 254 u. (hier bedarf es erst noch einer Integration) lauten die betreffenden Störungsglieder in *Laplace*' Bezeichnungen, wobei wir nur ε für λ geschrieben haben und zur Abkürzung mit Benutzung des *Hansen*schen Symbols λ_1 setzen:

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha\varrho - \frac{1}{2}\alpha\varphi}{g-1}\cdot\frac{D^2}{a^2}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,, \tag{6}$$

$$\text{in Breite: } \lambda_1 \sin fv \tag{7}$$

$$\text{in Länge: } \frac{19}{2}\gamma\lambda_1\sin(gv - fv - \Theta) \tag{8}$$

$$\text{in Länge in der Bahn: } 10\gamma\lambda_1\sin(gv - fv - \Theta)\,, \tag{9}$$

und zwar ist

$\alpha\varrho$ die Abplattung $\mathfrak{a}$,
$\alpha\varphi$ die Konstante $\mathfrak{c}$ der Zentrifugalkraft,
D der Äquatorialradius a_0,
a die halbe grofse Axe der Mondbahn,
ε die Schiefe der Ekliptik,
γ die Neigung der Mondbahn zur Ekliptik,
fv die Länge des Mondes,
$\Theta - gv + fv$ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn,
$(g-1)v$ die retrograde Knotenbewegung in der Zeit, wo der auf die Ekliptik projizierte Radiusvektor Erde-Mond den Winkel v durchläuft.

Die Längen sind hierbei von dem Frühlingspunkt aus wie gewöhnlich in der Ekliptik gezählt und unter Länge in der Bahn, für welche wir die Störung behufs Vergleichung mit *Hansen* aufgenommen

*) Über diese Theorie sind zu vergleichen die Mondtafeln mit Einleitung, die wir leider nicht zur Hand hatten und zwei Abhandlungen in den *Abh. der mathem.-physischen Cl. der kön. sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig* 1864 u. 1865, betitelt: *Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen von P. A. Hansen.*

haben, die Länge des aufsteigenden Knotens vermehrt um den in der Bahn des Mondes gemessenen Winkel vom Knoten bis zum Mond verstanden.*)

Für *Hansens* Theorie ist im allgemeinen zu vergleichen die Einleitung zu seiner 1. Abh. (1864) S. 93—101, sowie für die in Rede stehenden Störungen ebenda § 11 S. 459—474. Die Formel für s S. 465, Schlufs vom Abschn. 154, giebt die Breitenstörung, diejenige für $n\delta z$ S. 468 die Störung der Länge in der Bahn (vergl. auch S. 102). Darnach ist, wenn gesetzt wird

$$\lambda_1 = -\frac{3K}{4a^2}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\left(1 - 4\sin^2\frac{1}{2}J\right)\frac{2+(\alpha+\eta-p)}{(\alpha+\eta-p)}, \tag{10}$$

das gröfste Glied der Störung

$$\text{in Breite: } \lambda_1 \sin(f+\omega-\Theta) \tag{11}$$

$$\text{in Länge in der Bahn: } 20\sin\frac{J}{2}\left(1+\frac{3}{2}\sin^2\frac{J}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha+\eta-p}{2}\right)\lambda_1\sin\Theta, \tag{12}$$

worin bezeichnen:

K den Quotienten $\left(C - \frac{A+B}{2}\right) : M$,

a die halbe grofse Axe der Mondbahn,

ε die Schiefe der Ekliptik,

J die Neigung der Mondbahn zur Ekliptik,

$f+\omega-\Theta$ die Länge des Mondes in seiner Bahn,

Θ das Supplement der Länge des aufsteigenden Mondknotens,

$\alpha+\eta-p$ das *Laplace*sche Symbol $g-1$, nur ist dieses *ohne* Rücksicht auf die Präzession des Frühlingspunktes (siderisch), jenes *mit* Rücksicht darauf (tropisch), verstanden.

In der Abhandlung von 1864 § 14 S. 481—497 insbesondere S. 494 (vergl. auch S. 120 Abschn. 15) zeigt *Hansen*, dafs auch die Einwirkung der Planeten (namentlich durch Änderung der Schiefe der Ekliptik) Störungsglieder erzeugt, die für Breite und Länge bezw. von den Argumenten $f+\omega-\Theta$ und Θ abhängen. Der Betrag der Koefficienten dieser Glieder wird theoretisch abgeleitet; die Glieder lauten danach:

$$\text{in Breite: } -0{,}240'' \sin(f+\omega-\Theta) \tag{13}$$

$$\text{in Länge in der Bahn: } -0{,}061'' \sin\Theta. \tag{14}$$

*) Die Ableitung der *Laplace*schen Formeln ist nicht gerade schwierig, erfordert aber immerhin einen gröfseren Raum. Zunächst sind die drei Grundformeln (L) in der *Méc. cél.* t. III p. 181 herzuleiten; dann kann man die Entwicklungen p. 250—257 ziemlich rasch erhalten, wenn man, von einer genaueren Theorie im allgemeinen absehend, die Mondbewegung als in einer mobilen Kreisbahn verlaufend annimmt. Freilich zeigt die *Hansen*sche Theorie, dafs die Formeln (7) bis (9) nicht genügen, hauptsächlich wegen vernachlässigter Glieder höherer Ordnung und Planetenstörungen.

Werden nun empirisch die Koefficienten von $\sin(f + \omega - \Theta)$ und $\sin\Theta$ bestimmt, so mufs — 0,240 bezw. — 0,061 zunächst abgezogen werden, ehe man dieselben der Einwirkung der Erdabplattung zuschreiben kann. *Laplace* kannte diese kleinen Glieder noch nicht, ebenso wenig die Einflüsse höherer Ordnung, die *Hansen* 1865 darlegte.

§ 7. Fortsetzung: Zahlwerte und Hansens Angaben von 1865. Wir haben folgende Zahlwerte:

$$J = 5^0\ 8'\ 48''\quad \text{Abh. 1864 S. 173,}$$
$$\varepsilon = 23^0\ 27'\ 55''\quad \text{,, 1865 S. 275,}$$
$$a = a_0 \csc 57'\quad \text{,, 1864 S. 471 und 473,}$$
$$\alpha + \eta - p = 0{,}0040531\quad \text{,, 1865 S. 282.}$$

Da $\alpha + \eta$ nach Abh. 1864 S. 348 jährlich 69677″, p aber, welches von der allgemeinen Präzession abhängt, jährlich nur 50,2″ giebt, so hat für den vorliegenden Zweck $\alpha + \eta - p$ denselben Wert, wie $\alpha + \eta$ oder $g - 1$ nach *Laplace.*

Wenn man ferner beachtet, dafs $\alpha\mathfrak{p} - \frac{1}{2}\alpha\varphi$ bei *Laplace* mit $\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{c}}{2}$ identisch ist und somit nach (5) des vorigen Paragraphen sehr nahe mit $\frac{3}{2} K : a_0^2$ übereinstimmt, so erkennt man leicht, dafs die analytischen Ausdrücke der Koefficienten in den Formeln (6) bis (9) von *Laplace* mit den entsprechenden der Formeln (10) bis (12) von *Hansen* immerhin bis auf weniger als 1 Prozent übereinstimmen.

Wichtiger als die Verbesserung der Formeln durch *Hansen* ist der von ihm erzielte Nachweis der Planetenstörungen gleichen Arguments (s. o.) und die Berechnung des Einflusses der Glieder höherer Ordnung in der Abhandlung von 1865 § 21 S. 273—322. Dieser Einflufs wird nicht analytisch, sondern numerisch entwickelt.

Hansen geht hierbei von dem Näherungswert für $K : a_0^2$ aus, den die Gleichung (10) des vorigen Paragraphen liefert. Aus den Beobachtungen hatte *Hansen* gefunden:

$$\underset{\text{in Sek.}}{\lambda_1} = -8{,}382;\ \text{Abh. 1864 S. 470.}$$

Wendet man nun obenstehende Zahlwerte an, so folgt hiermit:

$$\varrho'' \frac{K}{a_0^2} = 0{,}06238''.$$

Dies ist unerheblich verschieden von 0,0624 und *Hansen* berechnet daher nun die Störungen, die alle dem Wert $K : a_0^2$ proportional sind, genauer mit Rücksicht auf höhere Glieder unter Anwendung von

$$\varrho'' \frac{K}{a_0^2} = 0{,}0624\,(1 + \mu), \tag{1}$$

wobei μ einen Korrektionsfaktor bezeichnet.

Es findet sich nunmehr das Störungsglied in Breite nach Abh. 1865 S. 285 gleich

$$-8{,}618''\,(1+\mu)\sin(f+\omega-\Theta)\,, \tag{2}$$

wogegen die Beobachtungen ergeben haben nach Abh. 1864 S. 470

$$-8{,}382''\sin(f+\omega-\Theta)\,; \tag{3}$$

folglich wird

$$1+\mu=\frac{8{,}382}{8{,}618}\,,\quad \mu=-0{,}02738$$

und somit, vergl. auch 1865 S. 290:

$$\varrho''\,\frac{K}{a_0^2}=0{,}06069''\,,\qquad \frac{K}{a_0^2}=0{,}001070\,. \tag{4}$$

Nach Maſsgabe des Ausdrucks (12) des vorigen Paragraphen hatte *Hansen* 1864 S. 469—470 mit $\lambda_1 = -8{,}382''$ als Störung der Länge in der Bahn abgeleitet

$$-7{,}533''\sin\Theta\,,$$

was man leicht verifizieren kann. Die Beobachtungen dagegen gaben ihm

$$-7{,}624''\sin\Theta\,. \tag{5}$$

Durch die genauere Rechnung von 1865 gestaltet sich der Widerspruch etwas anders. Nach S. 290 und 297 wird unter Anwendung des Wertes (4) für $\varrho'' K : a_0^2$ das Störungsglied

$$-7{,}400''\sin\Theta\,. \tag{6}$$

Um diesen Wert mit dem beobachteten Koefficientenwert in Übereinstimmung zu bringen, ist zu setzen

$$\frac{K}{a_0^2}=0{,}001070\cdot\frac{7{,}624}{7{,}400}=0{,}001103\,. \tag{7}$$

Hansen benutzt nur den Wert (4), wahrscheinlich weil er diesen Wert für wesentlich genauer hält. In der That hat auch das Glied (3) eine weit kleinere Periode als (5), nämlich eine etwa 27-tägige, dieses eine etwa 19-jährige.

Man kann daher den ersten Koefficienten aus einer gegebenen Beobachtungsreihe öfter als den zweiten bestimmen. Zwar wird dies völlig ausgeglichen durch die gröſsere Anzahl der Beobachtungen für eine Bestimmung im zweiten Falle, wie die Ausgleichungsrechnung lehrt. Immerhin aber bleibt der Übelstand, daſs ein Koefficient eines Gliedes von langer Periode sich leichter mit Koefficienten von Gliedern ähnlicher Periode mischt, falls der Zeitraum des vorliegenden Beobachtungsmaterials nicht sehr vielmal die Zeitdauer der Periode überschreitet. Für die Längenstörung wird in der That die Periode von 19 Jahren nur wenige Male von dem Zeitraum der brauchbaren

Beobachtungen umfaſst. *Hansen* wird vielleicht diesen Grund gehabt haben, den Wert (4) vorzuziehen. Wir wollen indessen auch (7) beibehalten und das Mittel nehmen.

Mit Rücksicht auf (1), (2) und (3) des § 6 wird

$$\mathfrak{a} = \frac{3K}{2a_0^2}(1+\mathfrak{a}) - \frac{\mathfrak{a}^2}{7} + 0{,}0017246\,. \tag{8}$$

Für

$$\frac{K}{a_0^2} = 0{,}001070 \text{ folgt } \mathfrak{a} = 0{,}0033333 = {}^1/_{300{,}0}$$
$$\frac{K}{a_0^2} = 0{,}001103 \quad \text{„} \quad \mathfrak{a} = 0{,}0033830 = {}^1/_{295{,}6}\,, \tag{9}$$

im Mittel für

$$\frac{K}{a_0^2} = 0{,}0010865 \text{ folgt } \mathfrak{a} = 0{,}0033582 = {}^1/_{297{,}8}\,. \tag{10}$$

Hiernach ist es wenig wahrscheinlich, daſs (2. Kap. S. 84) $\mathfrak{a} = {}^1/_{289{,}76}$ ist. Denn dazu würde gehören

$$\frac{K}{a_0^2} = 0{,}0011484\,, \tag{10*}$$

und die Koefficienten der Störungsglieder in Breite und Länge in der Bahn würden werden (insoweit sie von der Erde herrühren):

$$-\,9{,}00'' \quad \text{bezw.} \quad -\,7{,}94''\,, \tag{11}$$

während sie nach *Hansen* betragen:

$$-\,8{,}38 \quad \text{bezw.} \quad -\,7{,}62\,. \tag{12}$$

Laplace nahm in der *Méc. cél.* nach *Bürg*s erster Bestimmung für Breite und Länge bezw. — 8,00 und — 6,80 an; wenn wir hieran noch den Einfluſs der entsprechenden Störungen durch die Planeten anbringen und den Koefficienten 6,80 für die Länge durch Multiplikation mit 20 : 19 auf die Länge in der Bahn reduzieren, so ergiebt sich

$$-\,7{,}76'' \quad \text{bezw.} \quad -\,7{,}10''\,. \tag{13}$$

Dies weicht allerdings noch stark von *Hansen*s Werten ab, aber schon die zweite Bestimmung der Koefficienten durch *Bürg* paſst gut mit *Hansen*. Die Koefficienten werden (nach den Näherungsformeln (5) S. 467 und (6) bis (8) S. 468 rückwärts aus den Abplattungswerten berechnet, da uns der betr. Bd. der Astronom. Nachr. nicht zur Hand ist) — 8,5 und — 7,7 oder mit Rücksicht auf die von *Bürg* jedenfalls noch nicht berücksichtigten Anteile der Planetenwirkung:

$$-\,8{,}2'' \quad \text{bezw.} \quad -\,7{,}6''\,. \tag{14}$$

Man erkennt hieraus, daſs *Bürg* den *Hansen*schen Werten (12) der Koefficienten schon sehr nahe gekommen ist. Wenn letztere sich durch genauere Bestimmung nun auch noch ändern können, so ist

es doch höchst unwahrscheinlich, dafs der Koefficient der Breitenstörung, anstatt 8,38 nach (12), gleich 9,00 nach (11) sei. Wir möchten vielmehr die Unsicherheit des Koefficienten 8,38 nur auf höchstens 0,2″ taxieren und den entsprechenden Fehler in $\mathfrak{a} = {}^1/_{300}$ nach der ersten Angabe (9) auf höchstens 4 Einheiten des Nenners. Nehmen wir nach bekannten Regeln aus der Differenz der beiden Werte (9) den mittleren Fehler für den Wert (10) an, setzen also die Abplattung des Erdellipsoids

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{297,8 \pm 2,2}, \tag{15}$$

so dürfte dieser mittlere Fehler nach unserer Ansicht eher etwas zu grofs als zu klein geschätzt sein.

§ 8. **Die Trägheitsmomente der Erde und die Zunahme der Dichtigkeit nach dem Erdinnern.** Halten wir an dem Resultat (10) des vorigen Paragraphen fest und sehen von der Ungleichheit der Hauptträgheitsmomente A und B ab, so folgt aus der Mondbewegung:

$$C - A = 0,0010865\, a_0^2 M, \tag{1}$$

M Erdmasse, a_0 Äquatorialradius des Erdellipsoids. Nach dem 5. Kap. S. 437 (6) ist ferner aus der Präzession und Nutation bezw. aus der zehnmonatlichen Bewegung der Erdaxe im Erdkörper:

$$\frac{C - A}{C} = 0,003272. \tag{2}$$

Aus diesen Ergebnissen findet sich durch Division:

und hiermit aus (1):

$$\left.\begin{aligned} C &= 0,3321\, a_0^2 M \\ A &= 0,3310\, a_0^2 M. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Was die Gleichung (1) anbetrifft, so ist schon im 2. Kap. S. 127 mit Benutzung der entsprechenden Ergebnisse der Pendelbeobachtungen darauf hingewiesen worden, dafs sie einem homogenen Ellipsoid von gleicher Masse M und von gleichem Äquatorialradius a_0 nicht entspricht, dafs sie vielmehr eine allmähliche Zunahme der Dichtigkeit nach dem Erdinnern wahrscheinlich macht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs diese Ansicht richtig ist, verstärkt sich durch die Gleichung (2), welche mit (1) zu den (3) führt. Für ein homogenes Ellipsoid wäre nach S. 126 (3) $C = 0,4\, a_0^2 M$.*)

Man kann nun versuchen die Erddichtigkeit als Funktion des Abstandes vom Erdschwerpunkt, die Erde als homogen geschichtete Kugel betrachtet, darzustellen. Gegeben sind zur Lösung dieses Prob-

*) Dergleichen Betrachtungen stellt *Hansen* an S. 472—474 der Abhandlung von 1864.



lems die Dichtigkeit Θ_0 des festen Teiles der Erdoberfläche, die mittlere Dichtigkeit Θ_m des Erdkörpers und die in eine Relation zusammenzufassenden Gleichungen (3) für das Trägheitsmoment des Erdkörpers:

$$C = 0{,}332\, a_0^2 M. \tag{4}$$

Im Abstande a vom Zentrum sei die Dichtigkeit Θ, für welche wir ansetzen:

$$\Theta = \Theta_c \left\{1 + d_1 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + d_2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right\}. \tag{5}$$

Diese Formel, in welcher Θ_c offenbar die Bedeutung als Dichtigkeit im Zentrum hat, trägt dem Umstande Rechnung, dafs $d\Theta : da$ für $a =$ null verschwinden mufs. Um nun von Gleichung (4) Nutzen ziehen zu können, sind für eine homogen geschichtete Kugel auf grund der Relation (5) M und C zu berechnen.

Für die Kugelschale mit den Grenzradien a und $a + da$ sowie der Dichtigkeit Θ ist die Masse

$$dM = 4\pi \Theta a^2 da;$$

mithin ist die Masse der Kugel vom Radius a_0 gleich

$$M = 4\pi \int_0^{a_0} \Theta a^2 da,$$

woraus durch Einführung des Ausdruckes (5) folgt:

$$M = \frac{4}{3} \pi \Theta_c a_0^3 \left(1 + \frac{3 d_1}{5} + \frac{3 d_2}{7}\right). \tag{6}$$

Da ferner das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel vom Radius a und der Dichtigkeit Θ nach S. 126 (3) gleich ist

$$\frac{8}{15} \pi \Theta a^5,$$

so ist das Trägheitsmoment einer Kugelschale mit den Grenzradien a und $a + da$ sowie der Dichtigkeit Θ gleich

$$dC = \frac{8}{3} \pi \Theta a^4 da;$$

mithin ist das Trägheitsmoment der geschichteten Kugel vom Radius a_0 gleich

$$C = \frac{8}{3} \pi \int_0^{a_0} \Theta\, a^4\, da,$$

woraus mit Beachtung von (5) folgt:

$$C = \frac{8}{15} \pi \Theta_c a_0^5 \left(1 + \frac{5 d_1}{7} + \frac{5 d_2}{9}\right). \tag{7}$$

Ehe wir diese Ergebnisse in (4) einführen, erwähnen wir noch die Relation:

$$M = \frac{4}{3} \pi \Theta_m a_0^3 . \tag{8}$$

Es folgt nun aus (4), (7) und (8):

$$\Theta_c \left(1 + \frac{5 d_1}{7} + \frac{5 d_2}{9}\right) = 0{,}830 \, \Theta_m ,$$

ferner aus (6) und (8):

$$\Theta_c \left(1 + \frac{3 d_1}{5} + \frac{3 d_2}{7}\right) = \Theta_m , \tag{9}$$

und aus (5) im Falle $a = a_0$:

$$\Theta_c (1 + d_1 + d_2) = \Theta_0 .$$

Durch paarweise Subtraktion geben diese Gleichungen

$$\Theta_c \left(\frac{4}{35} d_1 + \frac{8}{63} d_2\right) = - 0{,}170 \, \Theta_m$$

$$\Theta_c \left(\frac{2}{7} d_1 + \frac{4}{9} d_2\right) = \Theta_0 - 0{,}830 \, \Theta_m ,$$

und hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \Theta_c d_1 &= \frac{1}{16} (32{,}9 \, \Theta_m - 140 \, \Theta_0) \\ \Theta_c d_2 &= \frac{1}{16} (- 51{,}03 \, \Theta_m + 126 \, \Theta_0) \\ \Theta_c &= \frac{1}{16} (18{,}13 \, \Theta_m + 30 \, \Theta_0) . \end{aligned} \tag{10}$$

Mit $\Theta_m = 5{,}6$ und $\Theta_0 = 2{,}8$ ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \Theta_c d_1 &= - 12{,}985 & d_1 &= - 1{,}12 \\ \Theta_c d_2 &= + 4{,}189 & d_2 &= + 0{,}36 \\ \Theta_c &= + 11{,}595 , \end{aligned}$$

es wird also:

$$\Theta = 11{,}6 \left\{1 - 1{,}12 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}36 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right\} . \tag{11}$$

Setzen wir aber $\Theta_m = 5{,}6$ und $\Theta_0 = 2{,}6$, so folgt:

$$\begin{aligned} \Theta_c d_1 &= - 11{,}235 & d_1 &= - 1{,}00 \\ \Theta_c d_2 &= + 2{,}614 & d_2 &= + 0{,}23 \\ \Theta_c &= + 11{,}220 , \end{aligned}$$

und es wird:

$$\Theta = 11{,}2 \left\{1 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}23 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right\} . \tag{12}$$

Die Vergleichung von (11) und (12) zeigt den grofsen Einflufs einer Änderung des Wertes von Θ_0 auf die Formel. Derselbe läfst sich aber bei dem hier gewählten Vorgange nicht beseitigen, obgleich dies wünschenswert wäre, da gerade die Ermittelung von Θ_0 an grofser Unsicherheit leidet*). Übrigens ist der Verlauf von Θ nach (11) und (12) wesentlich derselbe, wie Fig. 79 zeigt. Derselbe scheint auch den wirklichen Verhältnissen, über die man allerdings nur Vermutungen anstellen kann, ganz gut zu entsprechen.

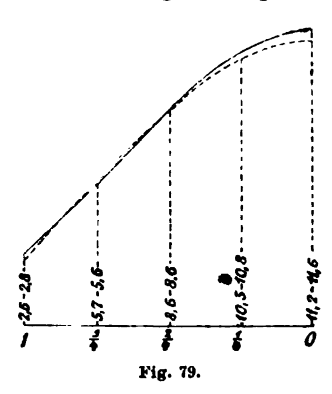


Fig. 79.

Es mag noch bemerkt werden, dafs man zu weniger plausibeln Formeln gelangt, wenn man

$$C = 0{,}351\, a_0^2 M \tag{13}$$

setzt, welcher Wert nach S. 472 (10*) der Abplattung $1/_{289{,}76}$ zukommt. Alsdann findet man z. B. für $\Theta_0 = 2{,}8$:

$$\Theta = 8{,}45 \left\{ 1 - 0{,}30 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 - 0{,}37 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\}; \tag{13*}$$

man erhält also keine Reihe, welche den Anfang einer stark konvergenten unendlichen Reihe zu bilden scheint, wie im oben betrachteten Falle.

§ 9. Die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse in der Nähe der Erdoberfläche und die mittlere Dichtigkeit des Erdkörpers. Im Anschlufs an vorstehende Rechnung bemerken wir zunächst in Bezug auf die mittlere Dichtigkeit Θ_0 der äufseren Erdschichten, dafs jeder Versuch, dieselbe aus den Dichtigkeiten der Gesteine abzuleiten, nur zu einem sehr unsicheren Werte führen kann. Da man annehmen darf, dafs die sedimentären Gesteine nur eine sehr dünne Schicht bilden, so wird man zur Bildung eines Wertes von Θ_0, wenigstens für den vorliegenden Zweck eines Schlusses auf das Erdinnere, den spezifischen Gewichten der krystallinischen Massengesteine das Hauptgewicht beizulegen haben. Aber auch für diese Gesteine sind die spezifischen Gewichte sehr verschieden, und es finden sogar innerhalb derselben Art bedeutende Abweichungen statt. Einige Mittelwerte sind:

Granit	2,7
Syenit	2,7
Grünstein	2,85
Porphyr	2,65
Basalt	3,05
Klingstein	2,55.

*) Vergl. weiterhin die Anm. zu § 12.

Hiernach wird $\Theta_0 = 2{,}6$ bis 3,0 anzunehmen sein. Wir haben oben zunächst $\Theta_0 = 2{,}8$ gesetzt, aufserdem aber auch $\Theta_0 = 2{,}6$ angenommen, eine Annahme die einigermafsen die leichteren Bestandteile der äufsersten Schichten des Erdkörpers berücksichtigt.

Weit genauer als Θ_0 läfst sich die mittlere Dichtigkeit Θ_m des ganzen Erdkörpers angeben. Man hat dieselbe mittelst der Drehwage und durch Wägungen auf der Wage bestimmt, ferner durch Lotablenkungen von Gebirgsmassen und durch Pendelbeobachtungen auf Bergkuppen sowie in tiefen Schächten. Die ersteren beiden Methoden, Methoden des rein physikalischen Experiments unter genau bekannten Bedingungen, sind die besten, während die letzten beiden dadurch an Wert verlieren, dafs es unmöglich ist, die lokalen Massenverhältnisse der Rechnung hinreichend genau zu unterwerfen.*)

Mit der Drehwage fand *Cavendish* aus Versuchen in den Jahren 1797—98 $\Theta_m = 5{,}48$ (*Phil. Transact.* 1798, Ausgabe von 1809 Bd. 18 S. 388—406), *Huttons* Revisionsrechnung gab (*Phil. Transact.* 1821 p. 276—292):

$$5{,}32\,;$$

Reich fand bei seinen ersten Versuchen im Jahre 1837 (publ. 1838) $\Theta_m = 5{,}44$, oder 5,49 nach der Berechnung von 1852; als Ergebnis seiner 1847—50 fortgesetzten Versuche ist aber zu nehmen (*Abh. der kön. sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig* 1852 Bd. 1 S. 383—431):

$$5{,}58\,;$$

Baily fand 1842 aus einer grofsen Versuchsreihe (*Mem. of the Royal Astronom. Soc.* 1843 Bd. 14):

$$5{,}67\,;$$

jedoch ist dieser Wert nach *Reich* sowie nach *Cornu* und *Baille* jedenfalls wegen konstanter Fehlerursachen bis zu 0,10 zu grofs.

A. Cornu und *J. Baille* erhielten endlich aus sehr scharfen Messungen 1872—78 (*Comptes rendus* 1873 Bd. 76 S. 954 und 1878 Bd. 86 S. 699) den Wert

$$5{,}56\,.$$

Durch Wägungen fand *Ph. v. Jolly* 1879—80 (vergl. 4. Kap. § 43 S. 382):

$$5{,}69\,.$$

---

*) Über die Messungen bezw. Ergebnisse für Θ_m findet sich in vielen Werken berichtet. Vergl. u. a.

Todhunter, History of Attraction etc.; Bd. 1 giebt S. 468—470 eine vollständige Übersicht aller diese Materie betreffenden Abhandlungen bis 1869.

Vergl. ferner

Ph. Fischer, Untersuchungen über die Gestalt der Erde, S. 68 und

Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 1, 1882.

Die vier letzten Werte, denen eine erhebliche Sicherheit zukommt, geben 5,62 als Mittel, alle fünf Werte 5,56. Darnach dürfte

$$\Theta_m = 5{,}6$$

eine sehr wahrscheinliche Annahme sein. Sie erteilt dem ersten der 5 Werte nur $1/3$ des Gewichtes der anderen. Der mittlere Fehler wird damit aus der Übereinstimmung $\pm$ 0,05.

Über die Bestimmung von Θ_m aus Lotablenkungen vergl. im 4. Kap. § 42 S. 380, über die Bestimmung aus Pendelbeobachtungen im 6. Kap. § 16.

§ 10. Die Abplattung der inneren Erdschichten gleicher Dichtigkeit.

Wenn wir die nicht unwahrscheinliche Annahme machen, dafs im Erdinnern sich die Massen gleicher Dichtigkeit annähernd so gruppieren wie für einen flüssigen Zustand, d. h. nach Niveauflächen, so läfst sich mit Rücksicht auf die Resultate (1) bis (3) § 8 S. 473 die Änderung der Abplattung nach innen bestimmen. Zugleich findet sich eine neue Gelegenheit, die Koefficienten der in § 8 für die Dichtigkeit angesetzten Reihe zu ermitteln.

Aus den Untersuchungen am Schlusse des 2. Kapitels ergiebt sich aber, dafs die Niveauflächen von Rotationsellipsoiden im Radiusvektor nicht mehr als um Glieder des Quadrates der Abplattung abweichen werden.*) Vernachlässigen wir nun das Quadrat der Abplattung, so können wir als Polargleichung für die Meridiankurve einer Niveaufläche ansetzen:

$$r = a(1 - \mathfrak{a}\sin^2\varphi)\,, \tag{1}$$

worin r der vom Erdschwerpunkt ausgehende Radiusvektor und φ die geozentrische Breite desselben ist.

Diese Gleichung ist aber bis auf Bruchteile von r von der Ordnung $\mathfrak{a}^2$ mit derjenigen einer Ellipse übereinstimmend. Um nun zunächst für das Potential eines homogenen Körpers, der von einer Niveaufläche (1) begrenzt ist, einen brauchbaren Näherungswert zu erhalten, können wir die im 2. Kapitel für das Rotationsellipsoid abgeleiteten Ausdrücke benutzen.

Nach S. 125 (8) ist das Potential für einen Punkt mit den Polarkoordinaten r' und φ' aufserhalb des Ellipsoids, wenn für e^2 gesetzt wird $2\mathfrak{a}$ und für die Masse M bei der Dichtigkeit Θ der Wert $\frac{4}{3}\pi\Theta a^3(1-\mathfrak{a})$, mit Vernachlässigung von $\mathfrak{a}^2$:

$$\underset{\text{aufserhalb}}{v} = \frac{4}{3}\pi k^2\,\frac{\Theta a^3}{r'}\left\{1 - \mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{a}a^2}{5r'^2}(1 - 3\sin^2\varphi')\right\} \cdot \cdot \tag{2}$$

*) Über ausführliche Nachweise vergl. *Laplace* oder *Lipschitz* an den S. 136 bezw. 489 angegebenen Orten.



Dagegen ist für einen innerhalb des Ellipsoids gelegenen Punkt nach S. 130 (12), wobei mit Vernachlässigung von $\mathfrak{a}^2$ für e'^2 zu setzen ist $2\mathfrak{a}$:

$$\underset{\text{innerhalb}}{v} = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2 \left(1 - \frac{2\mathfrak{a}}{3}\right) - \frac{r'^2}{3} + \frac{2r'^2}{15} \mathfrak{a} (1 - 3\sin^2\varphi') \right\}. \quad (3)$$

Denken wir uns $\mathfrak{a}$ als Funktion von a bekannt, so giebt die Differentiation der Ausdrücke (2) und (3) nach a die Potentiale unendlich dünner, homogener Schichten auf einen Punkt aufserhalb und innerhalb. Es wird

$$\underset{\text{aufserhalb}}{dv} = \frac{4}{3}\pi k^2 \frac{\Theta}{r'} \left\{ 3a^2 - \frac{d(\mathfrak{a}a^3)}{da} + \frac{1 - 3\sin^2\varphi'}{5r'^2} \frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da} \right\} \quad (4)$$

und

$$\underset{\text{innerhalb}}{dv} = 2\pi k^2 \Theta \left\{ 2a - \frac{2}{3} \frac{d(\mathfrak{a}a^2)}{da} + (1 - 3\sin^2\varphi') \frac{2r'^2}{15} \frac{d\mathfrak{a}}{da} \right\}. \quad (5)$$

Integrieren wir nun den Ausdruck (4) wieder von a gleich null bis a', wobei wir aber Θ als Funktion von a voraussetzen, so folgt als Potential eines geschichteten Rotationssphäroids vom äufseren Äquatorialradius a' auf einen Punkt aufserhalb

$$\underset{\text{aufserhalb}}{v} = \frac{4}{3}\pi k^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r'} \int_0^{a'} \left[3a^2 - \frac{d(\mathfrak{a}a^3)}{da} \right] \Theta \, da \\ + \frac{1 - 3\sin^2\varphi'}{5r'^3} \int_0^{a'} \frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da} \Theta \, da \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Damit aber der Punkt (r', φ') aufserhalb oder höchstens auf der Oberfläche liegt, mufs mit Rücksicht auf (1) sein:

$$r' \geqq a' (1 - \mathfrak{a}' \sin^2\varphi'),$$

wenn $\mathfrak{a}'$ die zu a' gehörende Abplattung ist.

Nehmen wir an, dafs der Punkt (r', φ') gerade auf der Oberfläche liegt, also $r' = a' (1 - \mathfrak{a}' \sin^2\varphi')$ ist, so wird aus (6) als Potentialfunktion des geschichteten Rotationssphäroids, auf dessen Oberfläche der Punkt (φ') liegt, erhalten:

$$\underset{\text{aufserhalb}}{v'} = \frac{4}{3}\pi k^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a'} \left(1 + \frac{\mathfrak{a}'}{3}\right) \int_0^{a'} \left[3a^2 - \frac{d(\mathfrak{a}a^3)}{da} \right] \Theta \, da \\ + (1 - 3\sin^2\varphi') \int_0^{a'} \left[\frac{1}{5a'^3} \frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da} - \frac{\mathfrak{a}'a^2}{a'} \right] \Theta \, da \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Hierbei sind Glieder vernachlässigt, die als Faktor entweder $\mathfrak{a}'^2$ selbst oder eine Gröfse gleicher Ordnung enthalten, z. B.

$$\mathfrak{a}' \int \frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da} da.$$

Integrieren wir ferner den Ausdruck (5) von $a = a'$ bis a_0, wobei wir Θ ebenfalls als Funktion von a betrachten und vorläufig allgemein

$$r' \leqq a' (1 - \mathfrak{a}' \sin^2 \varphi')$$

setzen, so folgt als Potential eines geschichteten, hohlen Rotationssphäroids vom inneren Äquatorialradius a' und äufseren Äquatorialradius a_0 auf einen Punkt innerhalb:

$$v_{\text{innerhalb}} = 4\pi k^2 \left\{ \int_{a'}^{a_0} \left[a - \frac{1}{3} \frac{d(\mathfrak{a} a^2)}{da} \right] \Theta \, da + \frac{r'^2}{15} (1 - 3\sin^2\varphi') \int_{a'}^{a_0} \frac{d\mathfrak{a}}{da} \Theta \, da \right\} \cdot (8)$$

Nehmen wir an, dafs der Punkt (r', φ') auf der inneren Begrenzungsfläche liegt, also $r' = a'(1 - \mathfrak{a}' \sin \varphi')$ ist, so folgt unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $\mathfrak{a}'^2$ als Potentialfunktion des geschichteten Rotationshohlsphäroids, auf dessen innerer Begrenzungsfläche der Punkt (φ') liegt:

$$v'_{\text{innerhalb}} = 4\pi k^2 \left\{ \int_{a'}^{a_0} \left[a - \frac{1}{3} \frac{d(\mathfrak{a} a^2)}{da} \right] \Theta \, da + \frac{a'^2}{15} (1 - 3\sin^2\varphi') \int_{a'}^{a_0} \frac{d\mathfrak{a}}{da} \Theta \, da \right\} \cdot (9)$$

Bilden wir endlich mittelst (7) und (9) den Ausdruck

$$v = v'_{\text{aufserhalb}} + v'_{\text{innerhalb}}, \tag{10}$$

so erhalten wir das Potential eines geschichteten Rotationssphäroids auf einen innerhalb liegenden Punkt. Dieser Potentialausdruck vermehrt um das Potential der Zentrifugalkraft, also der Ausdruck

$$v + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi',$$

oder mit Rücksicht auf (10) und mit der zulässigen Substitution von a' für r' im 2. Gliede:

$$v'_{\text{aufserhalb}} + v'_{\text{innerhalb}} + \frac{1}{3} \omega^2 a'^2 + \frac{1}{6} (1 - 3 \sin^2 \varphi') \omega^2 a'^2, \tag{11}$$

mufs aber konstant sein für alle Punkte derselben Niveaufläche mit dem Äquatorialradius a' und der Abplattung $\mathfrak{a}'$. Daher mufs in der Summe (11) der Faktor der veränderlichen Gröfse $(1 - 3 \sin^2 \varphi')$ verschwinden. Auf diese Weise gelangen wir zu der Bedingungsgleichung:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{4}{3} \pi k^2 \int_0^{a'} \left[\frac{1}{5 a'^3} \frac{d(\mathfrak{a} a^5)}{da} - \frac{\mathfrak{a}' a^2}{a'} \right] \Theta \, da \\ & + \frac{4}{15} \pi k^2 a'^2 \int_{a'}^{a_0} \frac{d\mathfrak{a}}{da} \Theta \, da + \frac{1}{6} \omega^2 a'^2 \end{aligned} \right\} = 0, \tag{12}$$

welche Bedingungsgleichung die Abplattung $\mathfrak{a}'$ einer Niveaufläche mit ihrem Äquatorialradius a' in Verbindung setzt nach Maſsgabe der Annahme über die veränderliche Dichtigkeit Θ.*)

Als gegebene Gröſsen treten bei der weiteren Behandlung des Problems auf: die Abplattung $\mathfrak{a}_0$ des Erdellipsoids, das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator des Erdellipsoids und die Variation der Schwerkraft mit der geographischen Breite, ferner die Dichtigkeit Θ_0 an der Erdoberfläche und die mittlere Dichtigkeit $\Theta_m = 5{,}6$, endlich $C - A$ nach (1) und $(C - A) : C$ nach (2) § 8 S. 473. Jedoch sind diese Gröſsen nicht sämtlich unabhängig von einander:

Die beiden ersten Gröſsen bestimmen nach dem *Clairaut*schen Theorem, welches auch bei der jetzt vorausgesetzten Massenanordnung gilt (ohne von ihr abhängig zu sein), die Veränderung der Schwerkraft auf der Oberfläche des Erdellipsoids, welche daher eine besondere Gleichung zur Bestimmung der Koefficienten der für $\mathfrak{a}$ und Θ einzuführenden Funktionen von a anzusetzen nicht gestattet, denn sie würde von den anderen nicht unabhängig sein. Ferner hängen $\mathfrak{a}_0$ und $C - A$ durch die Gleichung von *Laplace* (5) § 6 S. 467 zusammen, welche Gleichung ebenfalls bei der jetzt vorausgesetzten Massenanordnung gilt. Man wird daher nur aus der Kenntnis einer dieser Gröſsen eine Gleichung entnehmen können. Wir wählen $C - A$.

Die drei letzten der gegebenen Gröſsen, auf die es nunmehr besonders ankommt, führen zur Kenntnis bestimmter Integrale zwischen den Grenzen $a =$ null und $a = a_0$. Aus denselben kann man nur dann einen Nutzen ziehen, wenn Θ und $\mathfrak{a}$ als Funktionen von a versuchsweise angenommen werden. Wir setzen daher:

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_c \left\{1 + d_1 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + d_2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + d_3 \left(\frac{a}{a_0}\right)^6\right\}, \\ \mathfrak{a} &= \mathfrak{a}_c \left\{1 + c_1 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + c_2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + c_3 \left(\frac{a}{a_0}\right)^6\right\} \end{aligned} \tag{13}$$

*) Die Bedingungsgleichung (12), welche Abplattung und Dichtigkeit mit einander verbindet, stellte schon *Clairaut* 1743 in seiner *Figure de la Terre* p. 273 auf. Er formt dieselbe in eine Differentialgleichung 2. Ordnung um, deren Integration $\mathfrak{a}'$ als Funktion von a' giebt, wenn das Dichtigkeitsgesetz bekannt ist. Zur Ableitung dieser Differentialgleichung genügt es, (12) nach vorhergegangener Multiplikation mit $5a'^3$ zu differenzieren, das Resultat mit a'^4 zu dividieren und abermals zu differenzieren. Es folgt dann, wenn zur Abkürzung

$$\int_0^{a'} \Theta a^2 \, da = A,$$

einer Funktion von a', gesetzt wird, mit Weglassung der Striche an Θ, $\mathfrak{a}$ und a:

$$\frac{d^2\mathfrak{a}}{da^2} + \frac{2\Theta a^2}{A} \frac{d\mathfrak{a}}{da} + \left(\frac{2\Theta a}{A} - \frac{6}{a^2}\right)\mathfrak{a} = 0. \tag{12*}$$

und werden schliefslich finden, dafs diese Reihen von $a =$ null bis a_0 eine hinreichend starke Konvergenz zeigen, um sie mit grofser Annäherung als den Ausdruck des funktionalen Zusammenhanges von Θ und a bezw. $\mathfrak{k}$ und a ansehen zu dürfen. Wie wir übrigens sogleich sehen werden, läfst sich ohne starke Konvergenz der Reihen (13) die weitere Rechnung gar nicht durchführen.

§ 11. Fortsetzung: Entwicklung der Gleichungen. Wir führen nun zunächst die Annahmen (13) in die Bedingung (12) ein. Zu dem Zwecke bilden wir vorerst nachstehende Ausdrücke, wobei wir in allen Fällen der Multiplikation beider Reihen (13) Produkte vernachlässigen, welche der Ordnung der bereits vernachlässigten Glieder dieser Reihen entsprechen. Wir erhalten successive:

$$\frac{d(\mathfrak{k}a^5)}{da}\,\Theta = \Theta_c \mathfrak{k}_c a^4 \left\{ \begin{aligned} &5 + [7c_1 + 5d_1]\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + [9c_2 + 7c_1 d_1 + 5d_2]\left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \\ &\qquad + [11c_3 + 9c_2 d_1 + 7c_1 d_2 + 5d_3]\left(\frac{a}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\},$$

$$\int_0^{a'} \frac{d(\mathfrak{k}a^5)}{da}\,\Theta\,da = \Theta_c \mathfrak{k}_c a'^5 \left\{ \begin{aligned} &1 + \left[c_1 + \frac{5}{7}d_1\right]\left(\frac{a'}{a_0}\right)^2 + \left[c_2 + \frac{7}{9}c_1 d_1 + \frac{5}{9}d_2\right]\left(\frac{a'}{a_0}\right)^4 \\ &\qquad + \left[c_3 + \frac{9}{11}c_2 d_1 + \frac{7}{11}c_1 d_2 + \frac{5}{11}d_3\right]\left(\frac{a'}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\}; \quad (1)$$

ferner:

$$\mathfrak{k}'\int_0^{a'} \Theta a^2\,da = \frac{1}{3}\,\Theta_c \mathfrak{k}_c a'^3 \left\{ \begin{aligned} &1 + \left[c_1 + \frac{3}{5}d_1\right]\left(\frac{a'}{a_0}\right)^2 + \left[c_2 + \frac{3}{5}c_1 d_1 + \frac{3}{7}d_2\right]\left(\frac{a'}{a_0}\right)^4 \\ &\qquad + \left[c_3 + \frac{3}{5}c_2 d_1 + \frac{3}{7}c_1 d_2 + \frac{3}{9}d_3\right]\left(\frac{a'}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\}; \quad (2)$$

endlich:

$$\frac{d\mathfrak{k}}{da}\,\Theta = \frac{\Theta_c \mathfrak{k}_c}{a_0} \left\{ \begin{aligned} &2c_1\left(\frac{a}{a_0}\right) + [4c_2 + 2c_1 d_1]\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \\ &+ [6c_3 + 4c_2 d_1 + 2c_1 d_2]\left(\frac{a}{a_0}\right)^5 \end{aligned} \right\},$$

$$\int_{a'}^{a_0} \frac{d\mathfrak{k}}{da}\,\Theta\,da = \Theta_c \mathfrak{k}_c \left\{ \begin{aligned} &c_1 + c_2 + \frac{1}{2}c_1 d_1 + c_3 + \frac{2}{3}c_2 d_1 + \frac{1}{3}c_1 d_2 \\ &- c_1\left(\frac{a'}{a_0}\right)^2 - \left[c_2 + \frac{1}{2}c_1 d_1\right]\left(\frac{a'}{a_0}\right)^4 - \left[c_3 + \frac{2}{3}c_2 d_1 + \frac{1}{3}c_1 d_2\right]\left(\frac{a'}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Hiermit geht die Bedingungsgleichung (12) in nachstehende Form über:

$$\left. \begin{aligned} &\left\{c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2}c_1 d_1 + \frac{2}{3}c_2 d_1 + \frac{1}{3}c_1 d_2\right\} \\ &- \left\{\frac{5}{3}c_1 + \frac{2}{7}d_1\right\}\left(\frac{a'}{a_0}\right)^2 - \left\{\frac{5}{3}c_2 + \frac{13}{18}c_1 d_1 + \frac{10}{63}d_2\right\}\left(\frac{a'}{a_0}\right)^4 \\ &- \left\{\frac{5}{3}c_3 + \frac{28}{33}c_2 d_1 + \frac{95}{231}c_1 d_2 + \frac{10}{99}d_3\right\}\left(\frac{a'}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\} = \frac{2}{3} - \frac{5\omega^2}{8\pi k^2 \Theta_c \mathfrak{k}_c}. \quad (4)$$

Diese Gleichung mufs aber erfüllt sein für jeden Wert von a' zwischen null und a_0, folglich müssen die Koefficienten der Potenzen

von $a:a_0$ einzeln verschwinden. Hierdurch ergiebt sich die Möglichkeit, die Koefficienten c durch die d auszudrücken. Es wird:

$$c_1 = -\frac{6}{35}\,d_1$$

$$c_2 = -\frac{13}{30}\,c_1 d_1 - \frac{2}{21}\,d_2 = +\frac{13}{175}\,d_1^{\,2} - \frac{2}{21}\,d_2 \tag{5}$$

$$c_3 = -\frac{28}{55}\,c_2 d_1 - \frac{19}{77}\,c_1 d_2 - \frac{2}{33}\,d_3 = -\frac{52}{1375}\,d_1^{\,3} + \frac{734}{8085}\,d_1 d_2 - \frac{2}{33}\,d_3 .$$

Aufserdem ist

$$c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2}\,c_1 d_1 + \frac{2}{3}\,c_2 d_1 + \frac{1}{3}\,c_1 d_2 = \frac{2}{3} - \frac{5\,\omega^2}{8\pi k^2 \Theta_c \mathfrak{a}_c} . \tag{6}$$

Bezeichnen wir das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator des Erdellipsoids mit $\mathfrak{t}$, so haben wir, indem wir hierbei in ausreichender Annäherung die Erde als geschichtete Kugel behandeln:

$$\frac{\omega^2 a_0}{\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m a_0} = \mathfrak{t},$$

oder vereinfacht:

$$\frac{\omega^2}{\pi k^2} = \frac{4}{3}\,\mathfrak{t}\,\Theta_m . \tag{7}$$

Die Dichtigkeit Θ_0 der Oberfläche führt mittelst der 1. Gleichung (13) zu der Bedingung

$$\Theta_c(1 + d_1 + d_2 + d_3) = \Theta_0 ; \tag{8}$$

dagegen führt die mittlere Dichtigkeit des Erdkörpers Θ_m, indem unter der hinreichenden Annahme der Kugelgestalt die Erdmasse M in doppelter Aufstellung ergiebt

$$4\pi \int_0^{a_0} \Theta a^2\, da = M = \frac{4}{3}\,\pi\,\Theta_m a_0^{\,3} , \tag{9}$$

zu der Bedingung:

$$\Theta_c\left(1 + \frac{3}{5}\,d_1 + \frac{3}{7}\,d_2 + \frac{3}{9}\,d_3\right) = \Theta_m . \tag{10}$$

Um endlich noch die den beiden letzten Beobachtungsgröfsen, $C - A$ und $(C - A):C$ oder bequemer $C - A$ und C, entsprechenden Bedingungsgleichungen aufzustellen, entnehmen wir dem 2. Kap. § 32 (3) S. 126 die Trägheitsmomente C' und A' eines homogenen Rotationsellipsoids mit den Halbaxen a und b und der Dichtigkeit Θ. Es ist

$$C' = \frac{8}{15}\,\pi\,\Theta\, a^4 b ,$$

$$C' - A' = \frac{4}{15}\,\pi\,\Theta\, a^2 b\,(a^2 - b^2) .$$

Diese Ausdrücke können wir, insofern wir das Quadrat der Abplattung vernachlässigen, auch anwenden auf die Trägheitsmomente eines homogenen Rotationssphäroides, das eine Niveaufläche des Erdinnern zur Oberfläche hat.

Indem wir die Abplattung $\mathfrak{a}$ durch die Relation $b = a\,(1 - \mathfrak{a})$ einführen, setzen wir mit der angedeuteten Vernachlässigung:

$$C' = \frac{8}{15}\,\pi\Theta\,(1 - \mathfrak{a})\,a^5$$

$$C' - A' = \frac{8}{15}\,\pi\Theta\,\mathfrak{a}\,a^5\,.$$

Hieraus erhalten wir für eine unendlich dünne Schicht zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen:

$$dC = \frac{8}{15}\,\pi\Theta\,\frac{d([1-\mathfrak{a}]\,a^5)}{da}\,da$$

$$d(C - A) = \frac{8}{15}\,\pi\Theta\,\frac{d(\mathfrak{a}\,a^5)}{da}\,da\,,$$

durch Integration von $a =$ null bis a_0 aber für die Trägheitsmomente des Erdkörpers:

$$C = \frac{8}{15}\,\pi \int_0^{a_0} \frac{d([1-\mathfrak{a}]\,a^5)}{da}\,\Theta\,da$$

$$C - A = \frac{8}{15}\,\pi \int_0^{a_0} \frac{d(\mathfrak{a}\,a^5)}{da}\,\Theta\,da\,. \tag{11}$$

Für den ersten dieser Ausdrücke genügt es in weiterer Vernachlässigung zu setzen:

$$C = \frac{8}{3}\,\pi \int_0^{a_0} \Theta\,a^4\,da\,. \tag{12}$$

Bei der Entwicklung von (11) kann man den Ausdruck (1) für $a' = a_0$ benutzen. Es wird damit aus (11) und ferner unter Berücksichtigung der 1. Gleichung (13) des vorigen Paragraphen aus (12) erhalten:

$$\frac{8}{15}\,\pi\,\Theta_c\,\mathfrak{a}_c\,a_0^{\,5} \left\{ \begin{aligned} 1 &+ \left[c_1 + \tfrac{5}{7}\,d_1\right] + \left[c_2 + \tfrac{7}{9}\,c_1 d_1 + \tfrac{5}{9}\,d_2\right] \\ &+ \left[c_3 + \tfrac{9}{11}\,c_2 d_1 + \tfrac{7}{11}\,c_1 d_2 + \tfrac{5}{11}\,d_3\right] \end{aligned} \right\} = C - A \tag{13}$$

und

$$\frac{8}{15}\,\pi\,\Theta_0\,a_0^{\,5} \left\{1 + \tfrac{5}{7}\,d_1 + \tfrac{5}{9}\,d_2 + \tfrac{5}{11}\,d_3\right\} = C\,. \tag{14}$$

Andererseits sind zufolge der Beobachtungen nach § 8 (1) und (3) S. 473, wenn $M = \frac{4}{3}\,\pi\,\Theta_m\,a_0^{\,3}$ gesetzt wird:

$$C - A = 0{,}0010865 \cdot \frac{4}{3}\pi \Theta_m a_0^5 \tag{13*}$$

und

$$C = 0{,}3321 \cdot \frac{4}{3}\pi \Theta_m a_0^5, \tag{14*}$$

womit sich nun leicht die letzten beiden Gleichungen zur Bestimmung der Koefficienten c und d ergeben.

Indem wir die Gleichungen zusammenstellen, führen wir zugleich behufs Elimination von $\omega^2 : k^2$ die Beziehung (7) in (6) ein und nehmen einige naheliegende Vereinfachungen vor.

§ 12. **Fortsetzung: Auflösung und Endresultate.** Die Gleichungen zur Lösung der Aufgabe sind der Reihe nach aus (6) und (7), (13) und (13*), (10), (14) und (14*) sowie aus (8) zu entnehmen; dazu treten dann noch die Relationen (5):

$$\Theta_c \mathfrak{a}_c \left\{1 - \frac{3}{2}(c_1 + c_2 + c_3) - \frac{3}{4}c_1 d_1 - c_2 d_1 - \frac{1}{2}c_1 d_2\right\} = \frac{5}{4}\mathfrak{r}\Theta_m \tag{1}$$

$$\Theta_c \mathfrak{a}_c \left\{\begin{array}{l} 1 + (c_1 + c_2 + c_3) + \frac{5}{7}d_1 + \frac{5}{9}d_2 + \frac{5}{11}d_3 \\ + \frac{7}{9}c_1 d_1 + \frac{9}{11}c_2 d_1 + \frac{7}{11}c_1 d_2 \end{array}\right\} = 0{,}0010865 \cdot \frac{5}{2}\Theta_m \tag{2}$$

$$\Theta_c\left(1 + \frac{3}{5}d_1 + \frac{3}{7}d_2 + \frac{3}{9}d_3\right) = \Theta_m \tag{3}$$

$$\Theta_c\left(1 + \frac{5}{7}d_1 + \frac{5}{9}d_2 + \frac{5}{11}d_3\right) = 0{,}3321 \cdot \frac{5}{2}\Theta_m \tag{4}$$

$$\Theta_c(1 + d_1 + d_2 + d_3) = \Theta_0 \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{lll} c_1 = -\frac{6}{35}d_1 & & = -0{,}1714 d_1 \\ c_2 = +\frac{13}{175}d_1^2 - \frac{2}{21}d_2 & & = +0{,}0743 d_1^2 - 0{,}0952 d_2 \\ c_3 = -\frac{52}{1375}d_1^3 + \frac{734}{8085}d_1 d_2 - \frac{2}{33}d_3 & & = -0{,}0378 d_1^3 + 0{,}0908 d_1 d_2 - 0{,}0607 d_3. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Substituiert man die c in (1) und (2), so folgt:

$$\Theta_c \mathfrak{a}_c \left\{\begin{array}{l} 1 + 0{,}2571 d_1 + 0{,}1428 d_2 + 0{,}090 d_3 \\ + 0{,}0170 d_1^2 - 0{,}0176 d_1^3 + 0{,}0447\, d_1 d_2 \end{array}\right\} = \frac{5}{4}\mathfrak{r}\Theta_m \tag{7}$$

und

$$\Theta_c \mathfrak{a}_c \left\{\begin{array}{l} 1 + 0{,}5429 d_1 + 0{,}4604 d_2 + 0{,}395 d_3 \\ - 0{,}0590 d_1^2 + 0{,}0230 d_1^3 - 0{,}0962\, d_1 d_2 \end{array}\right\} = 0{,}0010865 \cdot \frac{5}{2}\Theta_m. \tag{8}$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen kreuzweise und setzt zur Abkürzung mit Berücksichtigung des numerischen Wertes von $\mathfrak{r}$ nach S. 84 (2*):

$$Q = \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{r}}{0{,}0010865} = \frac{1}{0{,}0010865 . 576{,}8} = 1{,}5956, \tag{9}$$

so folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned}&[0{,}5429\,\varrho - 0{,}2571]\,d_1 + [0{,}4604\,\varrho - 0{,}1428]\,d_2\\ &+ [0{,}395\,\varrho - 0{,}090]\,d_3 - [0{,}0590\,\varrho + 0{,}0170]\,d_1^2\\ &+ [0{,}0230\,\varrho + 0{,}0176]\,d_1^3 - [0{,}0962\,\varrho + 0{,}0447]\,d_1 d_2\end{aligned}\right\} = 1 - \varrho. \qquad (10)$$

Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\frac{5}{2} \cdot 0{,}3321 = 0{,}830 = R, \qquad (11)$$

so giebt die kreuzweise Multiplikation von (3) und (4):

$$[0{,}7143 - 0{,}6R]\,d_1 + \left[0{,}5556 - \frac{3}{7}R\right]d_2 + \left[0{,}455 - \frac{1}{3}R\right]d_3 = R - 1. \qquad (12)$$

Endlich folgt in gleicher Weise aus (3) und (5):

$$[\Theta_m - 0{,}6\,\Theta_0]\,d_1 + \left[\Theta_m - \frac{3}{7}\Theta_0\right]d_2 + \left[\Theta_m - \frac{1}{3}\Theta_0\right]d_3 = \Theta_0 - \Theta_m. \qquad (13)$$

Die Einführung der Zahlwerte giebt aus (10), (12) und (13):

$$0{,}6092\,d_1 + 0{,}5919\,d_2 + 0{,}540\,d_3 - 0{,}1111\,d_1^2 + 0{,}0543\,d_1^3 - 0{,}1982\,d_1 d_2 = -\,0{,}5956 \qquad (14)$$

$$0{,}2163\,d_1 + 0{,}1999\,d_2 + 0{,}178\,d_3 = -\,0{,}170 \qquad (15)$$

$$0{,}3920\,d_1 + 0{,}4400\,d_2 + 0{,}4667\,d_3 = -\,0{,}280 \text{ für } \Theta_0 = 2{,}8 \qquad (16)$$

$$0{,}4040\,d_1 + 0{,}4486\,d_2 + 0{,}4733\,d_3 = -\,0{,}300 \text{ ,, } \Theta_0 = 2{,}6. \qquad (16^*)$$

Aus (14) und (15) folgt durch Elimination von d_2:

$$0{,}1373\,d_1 + 0{,}1034\,d_1^2 + 0{,}0543\,d_1^3 + 0{,}176\,d_1 d_3 + 0{,}013\,d_3 = -\,0{,}0922, \qquad (17)$$

aus (15) und (16) bezw. (16*) dagegen:

$$0{,}0841\,d_1 - 0{,}075\,d_3 = -\,0{,}0942 \text{ für } \Theta_0 = 2{,}8, \qquad (18)$$

$$0{,}0814\,d_1 - 0{,}073\,d_3 = -\,0{,}0815 \text{ ,, } \Theta_0 = 2{,}6. \qquad (18^*)$$

Für $d_3 =$ null würde aus (17) folgen $d_1 = -\,1{,}04$. Auf dem Wege successiver Verbesserung finden sich leicht mit Rücksicht auf (18) bezw. (18*) die genaueren Werte von d_1 und d_3. (15) giebt sodann d_2. Es wird

$$d_1 = -\,1{,}19 \quad d_2 = +\,0{,}50 \quad d_3 = -\,0{,}08 \text{ für } \Theta_0 = 2{,}8, \qquad (19)$$

$$d_1 = -\,0{,}97 \quad d_2 = +\,0{,}16 \quad d_3 = +\,0{,}04 \text{ ,, } \Theta_0 = 2{,}6, \qquad (19^*)$$

woraus man erkennt, dafs eine geringe Änderung in dem für Θ_0 angenommenen Werte die Koefficienten d stark beeinflufst. Wir halten es unter diesen Umständen für angemessen $d_3 =$ null beizubehalten,

womit sich für Θ_0 ein ganz plausibler Wert, etwa 2,67, nach Maßgabe von (19) und (19*), ergeben wird. Mit Rücksicht auf (14) und (15) setzen wir also:

$$d_1 = -1{,}04 \quad d_2 = +0{,}275 \quad d_3 = 0. \tag{20}$$

Hierzu geben die (6), (3) und (4), (1) und (2) successive:

$$c_1 = +0{,}178 \quad c_2 = +0{,}054 \quad c_3 = +0{,}016$$
$$\Theta_c = 11{,}3 \qquad \Theta_c \mathfrak{a}_c = \frac{1}{32{,}88} \tag{21}$$
$$\mathfrak{a}_c = \frac{1}{371{,}6},$$

und es wird als *Endresultat* erhalten:

$$\begin{gathered}\Theta = 11{,}3\left\{1 - 1{,}04\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}275\left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right\} \\ \mathfrak{a} = \frac{1}{372}\left\{1 + 0{,}178\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}054\left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + 0{,}016\left(\frac{a}{a_0}\right)^6\right\},\end{gathered} \tag{22}$$

woraus sich berechnet:

$$\Theta_0 = 2{,}66 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_0 = \frac{1}{298}, \tag{22*}$$

letzterer Wert, wie es sein mufs, in genügender Übereinstimmung mit S. 473 (15).

Zu $\mathfrak{a}_0$ gehört $\mathfrak{b} = 0{,}00530$, und da nach dem 2. Kap. S. 93 an der Oberfläche

$$a_0 \frac{d\mathfrak{a}}{da} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \tag{A}$$

ist, so folgt dieses gleich 0,00194, wohingegen die 2. Formel (22) giebt:

0,00180.

Die geringe Differenz beider Werte hat nichts auf sich, da die Fehler der 2. Reihe (22) in $d\mathfrak{a} : da$ stark hervortreten. Wir haben es daher unterlassen, sie durch Aufnahme eines Koefficienten c_4 in die Reihe für $\mathfrak{a}$ zum Verschwinden zu bringen.

Übrigens giebt es aufser der Gleichung (*A*) noch eine Gleichung, die zur Kontrolle dienen kann. Es ist dies die *innerhalb* an der Oberfläche gültige, aus (12*) S. 481 mittelst (*A*) leicht ableitbare Gleichung:

$$a_0^2 \frac{d^2\mathfrak{a}}{da^2} = 6\left(\mathfrak{a} - \frac{\Theta_0}{\Theta_m}\mathfrak{b}\right). \tag{B}$$

Auf die Gleichungen (*A*) und (*B*) weist *Lipschitz* 1864 hin in *Crelles J.* Bd. 63 S. 289—295. Er entwickelt dieselben ausgehend von der Bedingung des Gleichgewichts eines rotierenden, geschichteten Sphäroids und zeigt, dafs sie wie *Clairauts* Theorem unabhängig vom Dichtigkeitsgesetz sind. Von den Gleichungen (16) a. a. O. ist die 1. das Theorem von *Clairaut*, die 2. die Gl. (*A*), die 3. die Gl. (*B*).

Dafs in der That aufser der Gl. (*A*) noch eine vom Dichtigkeitsgesetz unabhängige Gleichung bestehen mufs, erkennt man schon aus der ohne

Rücksicht auf dieses Gesetz im 1. Kap. § 26 S. 47 aufgestellten Formel (4) für $dg:dh$ innerhalb an der Oberfläche. In derselben Weise nun wie uns im 2. Kap. § 18 S. 92 die Kenntnis des Verlaufes von g auf der Oberfläche zu einer Gleichung für $d\mathfrak{a}:da$ führte, mufs auch die Kenntnis von $dg:dh$ zu einer Gleichung für $d^2\mathfrak{a}:da^2$ führen. Wir geben die Hauptmomente der Ableitung der Gleichung (B) nach diesem Verfahren an.

Aus $a - b = a\mathfrak{a}$ folgt, vergl. S. 92:

$$a_0^2 \frac{d^2\mathfrak{a}}{da^2} = 2\mathfrak{a} - 2\left(1 - \frac{db}{da}\right) - a_0 \frac{d^2 b}{da^2}.$$

Ferner ist wegen der Gleichheit der Potentialdifferenz zwischen denselben beiden Niveauflächen an Pol und Äquator

$$g_a \Delta a + \frac{1}{2}\frac{dg_a}{dh}\Delta a^2 + \cdots = g_p \Delta b + \frac{1}{2}\frac{dg_p}{dh}\Delta b^2 + \cdots.$$

Hieraus folgt durch Differentiation für $\Delta a = \Delta b =$ null:

$$\frac{db}{da} = \frac{g_a}{g_p}$$

$$a_0 \frac{d^2 b}{da^2} = \left\{\frac{a_0}{g_a}\frac{dg_a}{dh} - \frac{a_0}{g_p}\frac{dg_p}{dh}\frac{g_a}{g_p}\right\}\frac{g_a}{g_p}.$$

Diese Ausdrücke sind oben einzuführen und geben mit angemessenen Vernachlässigungen sofort die Gleichung (B), wenn noch gesetzt wird

$$g_p = g_a(1 + \mathfrak{b}),$$

sowie mit Rücksicht auf S. 46 (1) bis (2) und S. 96 (10):

$$\frac{a_0}{g_a}\frac{dg_a}{dh} = -2(1 + \mathfrak{c} + \mathfrak{a}) + \frac{3\Theta_0}{\Theta_m}\frac{g}{g_a}$$

$$\frac{a_0}{g_p}\frac{dg_p}{dh} = -2(1 + \mathfrak{c} - \mathfrak{a}) + \frac{3\Theta_0}{\Theta_m}\frac{g}{g_p},$$

wobei rechter Hand für g ohne Index in beiden Formeln derselbe, aber sonst beliebig zwischen g_a und g_p gelegene Wert zu nehmen ist.

Die Gleichung (B) giebt

$$a^2 \frac{d^2\mathfrak{a}}{da^2} = 0{,}0050,$$

die 2. Formel (22) dagegen nur 0,0040 infolge der Vernachlässigung der höheren Glieder.

Setzt man nach S. 472 (10*) entsprechend der Abplattung $1/_{299{,}76}$:

$$\left.\begin{aligned} C - A &= 0{,}0011484\, a_0^2 M \\ \text{und} \qquad C &= 0{,}351\, a_0^2 M, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

so gelangt man an der Hand der oben entwickelten Formeln für $d_2 =$ null zu nachstehenden, *unbrauchbaren* Ergebnissen:

$$\Theta = 11{,}4\left\{1 - 1{,}46\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}85\left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right\}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{371}\left\{1 + 0{,}250\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}077\left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + 0{,}005\left(\frac{a}{a_0}\right)^6\right\}.$$

Unbrauchbar sind diese Ergebnisse, weil $\mathfrak{a}_0$ nicht den angenommenen Wert erlangt, sondern gleich 1 : 278 folgt. Die Ursache hiervon ist der

Einflufs der vernachlässigten Glieder. Es wurde daher in die Entwicklung für $\mathfrak{a}$ noch ein Glied mit $(a : a_0)^3$ aufgenommen; allein erzielt wurde damit nichts Besseres, weder mit der Annahme $d_3 =$ null, noch unter Annahme von $\Theta_0 = 2{,}67$ und entsprechender Bestimmung von d_3. Der Ableitung eines brauchbaren Endresultates steht eben immer die geringe Konvergenz der Reihen für Θ und $\mathfrak{a}$ entgegen. Für diesen Fall würde daher mittelst der Differentialgleichung (12*) S. 481 zu versuchen sein, $\mathfrak{a}$ in Strenge als Funktion von a für ein gegebenes Gesetz der Dichtigkeit aufzustellen.

Eine derartige Untersuchung stellt 1863 *Lipschitz* an in *Crelles Journal* Bd. 62 S. 1—35, wobei er

$$\Theta = \Theta_m - C a^\lambda$$

setzt, mit Θ_m, C und λ als zu bestimmenden Konstanten. Er erhält unter Zugrundelegen der Werte $\Theta_0 = 2{,}5$, $\Theta_m = 5{,}58$ und $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{c} = 1 : 288$ (abgerundet):

$$\Theta = 9{,}45 - 6{,}95 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2,39}.$$

In dieser Abhandlung findet man auch im Anschlufs an die *Méc. cél.* eine allgemeinere Aufstellung der Bedingung für das Gleichgewicht des rotierenden, geschichteten Sphäroids im Falle der Existenz äufserer Kräfte, sowie den Nachweis, dafs mit Vernachlässigung von $\mathfrak{a}^2$ die Niveauflächen Rotationsellipsoide sind.

Roche bestimmte 1854 die Dichtigkeit der Erdschichten mittelst einer Potenzreihe, die bis $(a : a_0)^2$ geht. Er setzt mit Rücksicht auf das Ergebnis der Präzession und den Wert für die Abplattung $\mathfrak{a}_0$:

$$\Theta = \frac{25}{13}\,\Theta_m \left\{1 - 0{,}8 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2\right\}.$$

Der eingeschlagene Rechnungsgang ist uns unbekannt, da wir nur nach einer kurzen Notiz in den *Comptes rendus* Bd. 39 (1854) S. 1215 citieren. (Wahrscheinlich ging *Roche* von der weiterhin aufzustellenden Gleichung (25) aus.)

In seinem Lehrbuche der *mathematischen und physischen Geographie*, Bd. 1 S. 348—357, behandelt *Ed. Schmidt* 1829 die Frage nach der Dichtigkeitszunahme und der Abplattung im Erdinnern an der Hand der Hypothese, dafs die Zunahme des Druckes pro Flächeneinheit

$$dp = \text{Konst.}\ \Theta\, d\Theta \tag{24}$$

sei, welche Hypothese, wie er sagt, durch *Cantons* Versuche für Flüssigkeiten wahrscheinlich gemacht wird. Beachtet man nun andererseits, dafs nach den Regeln der Hydrostatik und weil Schwere mal Niveauflächenabstand gleich Potentialdifferenz ist, die Gleichung besteht:

$$dp = \Theta\, dv\,,$$

unter v das Potential verstanden, so folgt (abgesehen von der unerheblichen Zentrifugalkraft) mit Rücksicht auf den Ausdruck (10) S. 480 (in dem man entsprechend jener Vernachlässigung $\mathfrak{a} =$ null zu setzen und aufserdem die verschwindenden, in $1 - 3 \sin^2 \varphi'$ multiplizierten Glieder wegzulassen hat, womit

$$v = 4\pi k^2 \left\{\frac{1}{a'}\int_0^{a'} a^2 \Theta\, da + \int_{a'}^{a_0} a\Theta\, da\right\}$$

wird), für die Dichtigkeit Θ im Zentrumsabstand a die Gleichung:

$$\Theta = m \frac{\sin na}{na}, \tag{24*}$$

worin m und n Konstanten bezeichnen, m in der Bedeutung von Θ_c.

Führt man diese Funktion in (12*) S. 481 ein, so gelangt man zu einer Bedingung für die Abplattung und kann dieselbe als Funktion von n herstellen. *Schmidt* findet für $\mathfrak{a}_0 = {}^1/_{298}$:

$$\Theta_m = 2{,}057\ \Theta_0 \quad \text{und} \quad \Theta_c = 4{,}087\ \Theta_0;$$

dabei wird

$$\mathfrak{a}_c = {}^1/_{867}.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit den (22), die auf demselben Wert für $\mathfrak{a}_0$ basieren, aufserdem aber auch der Präzessionskonstanten genügen, sehr gut überein. Auch entspricht unsere Reihe für Θ sehr nahe dem Ausdrucke (24*), welcher mit Rücksicht auf die *Schmidt*schen Relationen zwischen den Θ giebt:

$$\Theta = 11{,}1 \left\{1 - 1{,}03 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}32 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 - 0{,}05 \left(\frac{a}{a_0}\right)^6\right\}.$$

Diese günstige Übereinstimmung ist jedoch nur den besonderen Zahlenwerten eigentümlich und für die mit $\mathfrak{a} = {}^1/_{289,76}$ verknüpften insbesondere ganz und gar nicht vorhanden. Da nun für die der *Schmidt*schen Rechnung zu grunde liegende Voraussetzung (24) einige Wahrscheinlichkeit wenigstens angenäherter Existenz vorhanden ist, so spricht die oben konstatierte Übereinstimmung zu gunsten einer Abplattung um ${}^1/_{298}$ herum, zu ungunsten aber von ${}^1/_{289}$.

Die Hypothese (24), welche *Ed. Schmidt* 1821 anwandte, wird in der Regel mit dem Namen *Laplace* verbunden, da *Laplace* dieselbe in einer 1820 publizierten und 1818 verfafsten Abhandlung (*Mém. de l'Ac. de France*), sodann 1825 im 5. Bde. der *Méc. cél.* benutzte; (vergl. daselbst S. 15 und 16, sowie S. 48—53). *Laplace* erwähnt aber, dafs *Legendre* bereits 1789 (*Mém. de l'Ac. de France*) von der Formel (24*) ausgegangen sei, um einen Ausdruck für die Abplattung herzuleiten. Man vergl. auch kritische Bemerkungen von *Young* in den *Phil. Transact.* 1819 S. 84 u. ff. Nach *Newcomb, Populäre Astronomie,* Ausgabe von Engelmann, S. 333, hat übrigens *H. Pfaff* gefunden, dafs die Zunahme der Dichtigkeit nach innen sich allein durch den Druck erklären läfst. Auch *Laplace* sagt bei Annahme der Relation (24), dafs dabei das Erdinnere als aus *einer* Substanz bestehend gedacht wird. Hierzu kann man bemerken, dafs im Erdinnern, falls eine wahrscheinlich bedeutende Hitze herrscht, Dissociation der Stoffe eintritt, was der Annahme einer einzigen Substanz günstig ist.

Ivory behandelt im *Phil. Magazine* 1825 Bd. 66 S. 321—329 die Frage nach der Relation von Dichtigkeit und Abplattung in sehr übersichtlicher Weise.

Ähnliche Fragen wie *Laplace, Ivory* und *Schmidt* behandelt auch schon *Clairaut* in seiner *Figure de la Terre.*

Bei allen diesen Untersuchungen von *Clairaut, Legendre, Laplace* und *Ivory* ist aber die Kenntnis von $(C - A) : C$ noch nicht verwertet.

Die Bedingungsgleichung, welche aus der Division der Gleichungen (11) und (12) S. 484 folgt und die also der Ausnutzung des Ergebnisses der Präzession und Nutation für $(C - A) : C$ zu Schlüssen auf die Beziehung zwischen Abplattung und Dichtigkeit entspricht, stellte zwar bereits *d'Alembert*

in seinen *Recherches sur la Précession des Equinoxes* 1749 auf (nach *Todhunter, History of Attraction*, Bd. 1 S. 264); jedoch gelangte er noch zu widersprechenden Resultaten, weil die Abplattung der Meeresfläche nach den Gradmessungen damals sehr irrig, zu $^1/_{174}$, angegeben wurde, zufolge seiner Rechnungen aber $\mathfrak{a}_0 < {}^1/_{256}$ sein mufste, falls die Voraussetzung über die Schichtung im Innern richtig war.

Die für verschiedene Annahmen über Θ mit der erwähnten, aus $(C-A):C$ folgenden Bedingungsgleichung verträglichen Werte der Abplattung $\mathfrak{a}_0$ der Meeresfläche untersucht *Laplace* in der *Méc. cél.* t. 2 l. 5 p. 352 und t. 5 l. 9 p. 46. Diese Gleichung giebt mit Rücksicht auf die Relation (12) S. 480, worin $a' = a_0$ zu setzen ist, sowie mit Rücksicht auf (7) und (9) S. 483:

$$\frac{C-A}{C} = \left(\mathfrak{a}_0 - \frac{\mathfrak{c}}{2}\right) a_0^2 \int\limits_0^{a_0} a^2 \Theta \, da : \int\limits_0^{a_0} a^4 \Theta \, da. \tag{25}$$

Laplace folgert hieraus als Abplattungsgrenzen $^1/_{304}$ und $^1/_{578}$. Für die obere Grenze, wobei Θ konstant angenommen ist, würde man mit Rücksicht auf den jetzt genauer bekannten Wert $(C-A):C = 0{,}00327$ nunmehr $^1/_{270}$ zu setzen haben. Nimmt man jedoch das Gesetz (24*) für Θ, so folgt nach *Thomson und Tait, Handbuch*, I, 2, S. 392—401 $\mathfrak{a}_0 = {}^1/_{297}$, also wieder sehr nahe der oben von uns benutzte Wert, wie es zufolge der Übereinstimmung unserer Rechnungsergebnisse mit denjenigen von *Ed. Schmidt* sein mufs.

In der Zeitschr. für Math. u. Physik von *Schlömilch* 1870 Bd. 15 S. 293 weist *R. Heger* nach, wie es kommt, dafs die wirkliche Abplattung der Erde der oberen Grenze sehr nahe liegt. Es beruht darauf, dafs im Falle ähnlicher elliptischer Schichtung $(C-A):C$ vom Dichtigkeitsgesetz ganz unabhängig ist und also die Annahme $\Theta =$ Konst. dasselbe für a_0 giebt, wie jedes andere Dichtigkeitsgesetz. Die noch vorhandene Differenz zwischen $^1/_{298}$ und $^1/_{270}$ ist also auf Rechnung der Änderung der Abplattung nach innen zu setzen.

Welchen Aggregatzustand das Innere der Erde gegenwärtig hat, ist noch nicht aufgeklärt. Die Ansichten stehen sich zur Zeit diametral gegenüber. *A. Ritter* folgert aus der mechanischen Wärmetheorie einen gasförmig-flüssigen Zustand (*Wiedemanns Annalen* 1878 Bd. 5, S. 422), während *William Thomson* und *G. H. Darwin* aus den Erscheinungen der Präzession und Nutation und dem Mangel von Fluten des Erdkörpers auf eine Festigkeit schliefsen, die bei irdischen Stoffen sonst unbekannt ist (vergl. 5. Kap. S. 438). Eine erhebliche Festigkeit ist nach *G. H. Darwin* auch nötig, damit die Kontinentalmassen getragen werden. Vielleicht beruht der Widerspruch nur darauf, dafs bei sehr hohen Temperaturen und starken Drucken der Aggregatzustand, obwohl wir ihn gasförmig nennen, doch nicht mehr die wesentliche Eigenschaft der Leichtbeweglichkeit der Gase hat. Übrigens sind die Untersuchungen sowohl in theoretischer als empirischer Hinsicht keineswegs als abgeschlossen zu betrachten.*)

Die betreffenden Untersuchungen finden sich, abgesehen von *Hopkins'* schon im 5. Kap. S. 438 erwähnten Abhandlungen, in den *Phil. Transactions* seit 1863 (mit *Thomsons Abh. über die Festigkeit der Erde*), besonders in den letzten Jahrgängen; ferner in *Thomson und Tait, Natural*

*) Man vergl. über diese Fragen auch die umfassende Abhandlung von *Zöppritz* im *Geographischen Jahrbuch* 8. Bd. 1880.



Philosophy und in *Thomson und Tait, Handbuch*, I, 2, S. 405 u. ff. Zahlreiche Abhandlungen, Notizen und Auszüge giebt auch in den letzten beiden Decennien das *American Journal of Science and Arts*. Vergl. besonders Bd. 12 1876 S. 336—354 *Thomsons* Rede auf der Glasgower Versammlung der *British Association*; ferner *J. D. Dana* Bd. 5 1873 S. 423 und Bd. 6 1874 S. 6, 104 und 162, sowie *G. H. Darwin* Bd. 17 1879 S. 320, Bd. 22 1881 und Bd. 24 1882. Man sehe auch *Delaunay* in den *Comptes rendus* 1868 Bd. 67 S. 65 und *Pratts* Entgegnung im *Phil. Magazine* 1870 Bd. 40 S. 10; ferner *H. Hennessys* mit *Delaunays* übereinstimmende Ansichten in den *Comptes rendus* Bd. 72 1871 S. 250 und im *Phil. Magazine* 1878 Bd. 6 S. 263 oder *American Journal* 1878 Bd. 16 S. 461.

Wenn die Massenverteilung im Erdinnern nach dem oben Mitgeteilten sehr gut der Voraussetzung eines flüssigen Zustandes entspricht, und wenn ferner die Momentanaxe der Erde sehr nahe Hauptaxe der Trägheit ist, so vermag dies seine Erklärung nicht nur darin zu finden, dafs die Erde in früheren Zeiten flüssig war, sondern auch wohl darin, dafs gegenwärtig das Erdinnere trotz grofser Festigkeit doch nicht fest genug ist, um dauernd den Spannungen zu widerstehen, welche erhebliche Abweichungen von diesen Lagenverhältnissen mit sich bringen würden.

§ 13. **Die Schwerkraft im Erdinnern.** Wenn wir die Erde als ein homogen geschichtetes Rotationssphäroid betrachten, für dessen Schichten sich Dichtigkeit und Abplattung nach Mafsgabe der Formeln (22) des vorigen Paragraphen ändern, so können wir auch angeben, wie sich die Schwerkraft im Innern verhält. Bei dieser Betrachtung wollen wir aber zur Vereinfachung die Schichten als konzentrische Kugelflächen annehmen, da sie nur den Zweck einer allgemeinen Orientierung hat. Wir knüpfen deshalb auch nicht an die Potentialentwicklung in § 10 an, sondern entwickeln direkt.

Die Anziehung einer unendlich dünnen Kugelschale vom Radius a und der Dichtigkeit Θ auf einen Punkt aufserhalb im Zentrumsabstand a' ist gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{4\pi k^2}{a'^2}\, a^2 \Theta\, da\,.$$

Hieraus folgt als Anziehung einer geschichteten Kugel vom Radius a' auf einen Punkt ihrer Oberfläche der Ausdruck

$$\frac{4\pi k^2}{a'^2} \int_0^{a'} a^2 \Theta\, da\,.$$

Da die Vernachlässigung der Abplattung diejenige der Zentrifugalkraft mit sich führt, da ferner die Anziehung von homogenen Kugelschichten auf innere Punkte des Hohlraumes null ist, so entspricht der vorstehende Ausdruck auch der Schwerkraft g für einen Punkt im Innern einer geschichteten Kugel vom Radius a_0 im Zentrumsabstand $a' \leqq a_0$. Setzen wir nun nach (22) S. 487:

$$\Theta = \Theta_c \left\{1 - 1{,}04 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}275 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right\},$$

so ergiebt sich, wenn wir den Strich an a weglassen:

$$g_a = 4\pi k^2\,\Theta_c\,a\left\{\frac{1}{3} - \frac{1{,}04}{5}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + \frac{0{,}275}{7}\left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right\}, \qquad (1)$$
$$a \leqq a_0\,.$$

Die Veränderung dieses Ausdruckes mit a wird gegeben durch den Differentialquotienten von g nach a, für dessen negativen Wert aus (1) folgt:

$$-\frac{dg_a}{da} = 4\pi k^2\,\Theta_c\left\{-\frac{1}{3} + \frac{3{,}12}{5}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 - \frac{1{,}375}{7}\left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right\}. \qquad (2)$$

Derselbe ist, wie leicht zu erkennen, für $a = a_0$ positiv, d. h. *die Schwerkraft nimmt zunächst zu, wenn man sich von der Erdoberfläche nach der Tiefe bewegt**). Der Ausdruck (2) wird aber gleich null für

$$a = 0{,}82\,a_0\,. \qquad (3)$$

Die Zunahme dauert somit bis zur Tiefe 0,18 des Erdradius an, wo die Schwerkraft ein Maximum (gleich 1,05 g_0) erreicht, um von da an stetig abzunehmen bis zum Mittelpunkt.

Ed. Schmidt untersucht Bd. 1 seiner math. u. phys. Geographie S. 360 bis 364 den Verlauf der Schwerkraft im Innern nahe der Oberfläche genauer und findet ebenfalls eine Zunahme, deren Existenz man nicht immer beachtet hat.

§ 14. **Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde aus der Kombination von Beobachtungen der Schwerkraft auf und unter der Erdoberfläche.** Wir nehmen an, daſs an zwei über einander liegenden Punkten, welche sich in der Nähe der Erdoberfläche befinden und durch eine Erdscholle getrennt sind, die Schwerkraft beobachtet sei; sollten die beiden Punkte nicht genau vertikal übereinander liegen, so ist wegen der Veränderlichkeit der Schwere mit der geographischen Breite auf gleiche Breite zu reduzieren. P_1 liege um h über P_2. Wenn nun P_2 sich nicht unterhalb des Meeresniveaus befindet, so können wir den Unterschied der Schwerkräfte g_1 und g_2, abgesehen von der zwischenliegenden Erdscholle und sonstigen Massenlagerungsanomalieen, nach den Formeln (17) und (18) des § 20 im 2. Kap. S. 97 berechnen:

$$\underset{\text{1. Teil}}{g_2 - g_1} = g_0 \cdot \frac{2h}{R}\left(1 + \frac{2}{3}\,\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{c}_0 - 2\mathfrak{a}_0\sin^2 B\right), \qquad (1)$$

*) An der Oberfläche wird der Wert des Differentialquotienten gleich $-0{,}57\ g:a$, genau so groſs wie Formel (4) in § 26 des ersten Kapitels für $\Theta_i = 2{,}66$ ergiebt. Selbstverständlich hat der Wert des Differentialquotienten in Wirklichkeit an der Erdoberfläche sehr verschiedene Beträge, abhängig von der lokalen Beschaffenheit der Dichtigkeit der Massen in der Umgebung des betreffenden Ortes.



wobei

$$g_0 = \frac{Mk^2}{R^2}\left(1 + \frac{1}{3}\,\mathfrak{a}_0 - \frac{3}{2}\,\mathfrak{c}_0\right)\left(1 + \mathfrak{b}_0 \sin^2 B\right) \tag{2}$$

die Schwerkraft im Meeresniveau ist.

Befindet sich zwischen den Punkten eine Scholle von der Form einer weitausgedehnten Platte mit der Dichtigkeit Θ, so unterscheiden sich g_2 und g_1 noch um die doppelte Anziehung der Scholle auf einen der Punkte; nach § 1 (2) im dritten Kapitel S. 141 ist:

$$\underset{\text{2. Teil}}{g_2 - g_1} = -4\pi k^2\,\Theta\,h\,, \tag{3}$$

oder mit Benutzung von (2) und der Relation $M = \frac{4}{3}\pi\Theta_m R^3$ umgeformt:

$$\underset{\text{2. Teil}}{g_2 - g_1} = -g_0 \cdot \frac{3h\,\Theta}{R\,\Theta_m}\left(1 + \frac{3}{2}\,\mathfrak{c}_0 - \frac{1}{3}\,\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{b}_0 \sin^2 B\right). \tag{3*}$$

Der totale Unterschied von g_2 und g_1 wird mit Rücksicht auf (1) und (3) hiernach gegeben durch die Formel:

$$\frac{g_2 - g_1}{g_0} = \frac{2h}{R}\left\{\begin{array}{c} 1 + \mathfrak{c}_0 + \frac{2}{3}\,\mathfrak{a}_0 - 2\mathfrak{a}_0 \sin^2 B \\ -\frac{3\Theta}{2\Theta_m}\left(1 + \frac{3}{2}\,\mathfrak{c}_0 - \frac{1}{3}\,\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{b}_0 \sin^2 B\right) \end{array}\right\}. \tag{4}$$

Mit Rücksicht auf die grofse Unsicherheit, die Θ jederzeit anhaftet, kann man dafür einfacher setzen:

$$\frac{g_2 - g_1}{g_0} = \frac{2h}{R}\left(1 - \frac{3\Theta}{2\Theta_m}\right). \tag{4*}$$

Hiernach ist

$$\Theta_m = \frac{3\Theta}{2} : \left\{1 - \frac{g_2 - g_1}{g_0}\,\frac{R}{2h}\right\}. \tag{5}$$

Diese Formel ist auch noch ausreichend, wenn h, die Höhe von P_1 über P_2, zum Teil oder ganz unterhalb des Meeresniveaus liegt. In diesem Falle denken wir uns durch P_2 eine zur Meeresfläche ähnliche Fläche gelegt. Sehen wir nun einstweilen von den aufserhalb dieser letzteren Fläche liegenden Massen ab, so gilt (1) mit (2) wieder für die Differenz $g_2 - g_1$, wenn man M auf den inneren Körper und $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{b}_0$, B und R auf irgend eine Niveaufläche bezieht, die der Meeresfläche nahe liegt, also nahezu denselben mittleren Radius R hat, deren Gestalt aber nur von der Anziehung des inneren Körpers abhängt. Da nun h nicht erheblich ist im Verhältnis zu R (gegenwärtig im Maximum 1000^m, wovon aber nur etwa die Hälfte unterhalb des Meeresniveaus), so wird M für den inneren Körper noch um weit weniger als $^1/_{1000}$ von der Masse des ganzen Erdkörpers abweichen (für 637^m knapp $^1/_{10000}$). Es werden damit auch nur sehr geringe Änderungen in $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$, sowie B verknüpft sein; man kann daher wieder

(1) und (2) anwenden und mit diesen Formeln so weiter rechnen, wie oben geschehen ist.

Was nun Formel (3) anbetrifft, den zweiten Teil der Differenz $g_2 - g_1$, welcher von der zwischen beiden Punkten liegenden Erdscholle herrührt, so läſst sich auch für diesen die Gültigkeit nachweisen. Nehmen wir an, h' sei derjenige Teil von h, der über dem Meeresniveau liegt, h'' der unterhalb liegende. Ist das Terrain weithin eben und horizontal und hat die Masse der Erdscholle die Dichtigkeit Θ, so giebt der obere Teil der Erdscholle von der Dicke h' einen Anteil an $g_2 - g_1$ gleich

$$-4\pi k^2 \Theta h' .$$

Für den unteren Teil h'' müssen wir bedenken, daſs es sich dabei um eine Masse handelt, die zwischen der Meeresfläche und der durch P_2 gelegten Fläche liegt und sich über die ganze Erdoberfläche erstreckt. Gröſstenteils wird diese Masse aus Wasser bestehen. Nehmen wir also zunächst dieselbe als eine von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte Wasserschicht an, so ist ihr Einfluſs auf g_2 gleich null (2. Kap. § 33 S. 130), auf g_1 aber wie für eine Kugelschale sehr nahe gleich $4\pi k^2 h''$, also auf $g_2 - g_1$ gleich

$$-4\pi k^2 h'' .$$

Will man hierbei auf die elliptische Gestalt Rücksicht nehmen, so hat man vom Ausdruck (8) § 31 S. 125 auszugehen, v für eine Schale durch Differentiation nach a und dann die radiale Anziehung durch Differentiation von v nach r' herzuleiten. Man findet aber bis auf Bruchteile der Ordnung $\mathfrak{a}$ incl. genau das frühere Resultat.

Da zwischen P_1 und P_2 die Erdschicht die Dichtigkeit Θ hat, so ist nun noch der Anteil einer weitausgedehnten Platte von der Dichtigkeit $\Theta - 1$ und der Dicke h'' an $g_2 - g_1$ zu bilden; er beträgt:

$$-4\pi k^2 (\Theta - 1) h'' .$$

Die drei Anteile zusammen geben wieder $-4\pi k^2 \Theta h$, sodaſs wir zu denselben Formeln wie früher gelangen.

Wir haben bisher die zwischen P_1 und P_2 befindliche Scholle als weitausgedehnte, ebene Platte von der Dicke h betrachtet. Die sphärische Gestalt dieser Platte hat in der That keinen nennenswerten Einfluſs. Es ist nämlich nach dem 3. Kap. § 4 S. 145 für eine unendlich dünne sphärische Platte vom Krümmungsradius r, der Dicke dr und dem halben Zentriwinkel Ψ die radiale Anziehung auf einen Punkt P_1, der auf dem zentralen Strahl im Abstand r' vom Kugelmittelpunkt auſserhalb liegt, gleich

$$2\pi k^2 \Theta \frac{r^2}{r_1'^2} dr \left\{1 - \frac{r_1' \cos\Psi - r}{E_1}\right\}$$

für $E_1 = \sqrt{r^2 + r_1'^2 - 2rr_1' \cos\Psi}$. Liegt er dagegen innerhalb im Abstand r_2' vom Kugelmittelpunkt, so ist die radiale Anziehung nach innen gleich

$$-2\pi k^2 \Theta \frac{r^2}{r_2'^2} dr \left\{1 + \frac{r_2' \cos\Psi - r}{E_2}\right\}$$

für $E_2 = \sqrt{r^2 + r_2'^2 - 2rr_2' \cos\Psi}$. Der Einflufs der Plattenanziehung auf $g_2 - g_1$ ist also gleich

$$-2\pi k^2 \Theta r^2 dr \left\{\frac{1}{r_2'^2} + \frac{1}{r_1'^2} + \frac{r_2' \cos\Psi - r}{r_2'^2 E_2} - \frac{r_1' \cos\Psi - r}{r_1'^2 E_1}\right\}.$$

Diesen Ausdruck wandeln wir um, indem wir in den beiden letzten Gliedern setzen $r_1' = r_2' + (r_1' - r_2')$ und $E_1 = E_2 + (E_1 - E_2)$, und $r_1' - r_2'$ sowie $E_1 - E_2$ als differentiale Änderungen betrachten. In den Faktoren von $r_1' - r_2'$ und $E_1 - E_2$ können wir dann $r_1' = r_2' = r$ nehmen und den Index von E_1 und E_2 weglassen. Bezeichnen wir $r_1' - r_2'$ mit h, so folgt:

$$-2\pi k^2 \Theta r^2 dr \left\{\frac{1}{r_2'^2} + \frac{1}{r_1'^2} - \frac{1 + 2\sin^2\frac{\Psi}{2}}{r^2} \frac{h}{E} + \frac{2(E_2 - E_1)\sin^2\frac{\Psi}{2}}{r E^2}\right\}.$$

Integriert man von $r = r_2'$ bis r_1', so kann man für die beiden letzten kleinen Glieder der Parenthese konstante Mittelwerte setzen und findet mit Rücksicht auf die geringe Gröfse von h im Vergleiche zu r_1' und r_2', sowie mit Benutzung der Näherungsformel $E = 2r \sin\frac{\Psi}{2}$ behufs Elimination von $\frac{\Psi}{2}$:

$$-4\pi k^2 \Theta h \left\{1 - \frac{h}{2E} - \frac{h}{4r}\frac{E}{r} + \frac{E_2 - E_1}{4r}\right\}. \qquad (6)$$

Dieser Ausdruck zeigt, dafs die Krümmung der Erde nicht berücksichtigt zu werden braucht, sobald für die weitausgedehnte Platte, insofern man sie als ebene Platte betrachtet, der Ausdruck $-4\pi k^2 \Theta h$ genügt. Denn dieser Ausdruck ist auch für die ebene Platte nicht streng und heifst genauer:

$$-4\pi k^2 \Theta h \left(1 - \frac{h}{2E}\right). \qquad (6^*)$$

Um anstatt dessen $-4\pi k^2 \Theta h$ anwenden zu können, mufs $h : 2E$ hinlänglich klein sein. Ist dies aber der Fall, so genügt dieser einfache Ausdruck auch anstatt (6), da das zweite und dritte der kleinen Glieder in der Parenthese von (6) wegen $(E_1 - E_2) < h$ immer bedeutungslos sind.

§ 15. **Fortsetzung: Unebenheiten des Terrains.** Wir haben jetzt nachgewiesen, dafs die Formel (5) genügt, auch mit Rücksicht auf die Krümmung der mathematischen Erdoberfläche, sobald zwischen

P_1 und P_2, den Beobachtungspunkten auf und unter der Erdoberfläche, liegt eine homogene Erdscholle, die den Charakter einer weitausgedehnten, gleichstarken Platte hat. Befindet sich der abfallende Rand der Platte im Abstand $E \geq 50\,h$, so ist nach (6*) der Fehler der Formel (5) sicher kleiner als $1\,^0/_0$.

Um zu erkennen, welchen Einflufs ungleiche Stärken der Erdscholle haben, betrachten wir zunächst den Fall, dafs die Dicke einer gleichstarken Platte geringer ist als der Punktabstand $P_1 P_2 = h$, indem etwa P_1 sich in freier Luft über dem Terrain befindet. Für diesen Fall ist mit Rücksicht auf § 1 (2) im 3. Kap. S. 141 an Stelle von (6*) zu setzen:

$$-4\pi k^2\,\Theta\left(h-h'\right)\left(1-\frac{h}{2E}\right), \tag{1}$$

worin h' die Erhebung von P_1 über dem Terrain bezeichnet, Fig. 80.

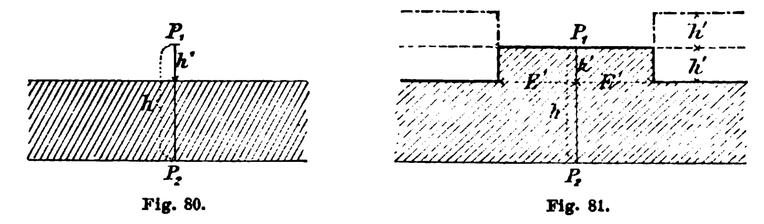


Fig. 80. Fig. 81.

Wenn sich die Platte in dieser Stärke $(h - h')$ weit genug ausdehnt, um $h : 2\,E$ vernachlässigen zu können, so wird man anstatt (1) setzen:

$$-4\pi k^2\,\Theta\,(h-h'). \tag{1*}$$

Befindet sich nun bis zur Entfernung E' unterhalb P_1 gewissermafsen noch eine zweite Platte, Fig. 81, so giebt diese für sich:

$$-4\pi k^2\,\Theta\,h'\left(1-\frac{h}{2E'}\right). \tag{2}$$

Dies mit (1*) vereinigt, führt zu dem Ausdruck:

$$-4\pi k^2\,\Theta\,h\left(1-\frac{h'}{2E'}\right). \tag{3}$$

Ganz denselben Ausdruck erhält man für den Fall, welchen Fig. 81 punktiert andeutet, wobei das in der Umgebung von P_1 bis zum Abstande E' ebene Terrain in gröfserer Entfernung sich um h' *erhebt*, nur mufs — entsprechend der entgegengesetzten Richtung von h' — das zweite Glied in der Klammer von (3) positiv eingeführt werden.

Die Formel (3) genügt vollkommen, um zu erkennen, ob der Einflufs von Unebenheiten klein genug ist, vernachlässigt werden zu dürfen. Reicht die Genauigkeit von $1\,^0/_0$ in der Berechnung des An-

teiles von $g_2 - g_1$, welcher aus der Schollenanziehung hervorgeht, aus, so brauchen Unebenheiten $h' < 0{,}02\ E'$ nicht beachtet zu werden. Hierbei ist überdies noch angenommen, dafs sie sich über den ganzen Umkreis erstrecken; ist dies nicht der Fall, so kommt von h' nur ein entsprechender Bruchteil zur Geltung.

Alle anderen Unebenheiten müssen besonders berücksichtigt werden, d. h. man mufs ihre Anziehungen auf jeden der beiden Punkte besonders berechnen. In dieser Beziehung sowie bezüglich der Behandlung des Falles ungleicher Massendichtigkeit verweisen wir auf den § 18 im 3. Kap. S. 169.

§ 16. **Fortsetzung: Zahlwerte.** Eingehende Versuche, welche nach den Formeln des § 14 behandelt werden müssen, hat 1854 *Airy* angestellt*). Er beobachtete in dem Kohlenrevier von *Durham* in der Grube *Harton*. Dabei war $h = 1256$ Fufs engl. $= 382{,}8^m$; ferner fand sich

$$\frac{g_2 - g_1}{g_0} = 0{,}00005185\,,$$

was einem täglichen Unterschied von $2{,}24^s$ für ein unveränderliches Pendel, welches nahezu Sekundenschwingungen macht, entspricht. Die Unebenheit des Terrains wurde bis zur Entfernung von drei englischen Meilen (also weit genug) in Rechnung gezogen; infolge derselben vermindert sich der aus Formel (3) S. 494 folgende zweite Teil $g_2 - g_1$ etwas, was sich dadurch berücksichtigen läfst, dafs $\Theta = 2{,}50$ in Formel (5) S. 494 um $^1/_{280}$, d. h. ganz unerheblich, verkleinert wird. Es folgt schliefslich

$$\Theta_m = 6{,}57\,.$$

Aus der Übereinstimmung der Resultate folgt der wahrscheinliche Fehler zu $\pm\, 0{,}02$. Wenn gleichwohl die Abweichung von demjenigen Werte, den man nach anderen zuverlässigen Beobachtungen für den wahrscheinlichsten halten mufs, nämlich 5,60, sehr grofs ist, so liegt dies einesteils vermutlich an versteckten Beobachtungsfehlern, andernteils an dem Einflufs von Unregelmäfsigkeiten in der Dichtigkeit der Massen unterhalb der unteren Station P_2. Beide Ursachen können recht wohl jede allein zur Erklärung der Differenz herangezogen werden. Berechnet man nämlich aus Formel (4*) S. 494 mit $\Theta_m = 5{,}6$ die Differenz $g_2 - g_1$, so folgt

$$\frac{g_2 - g_1}{g_0} = 0{,}000040 \text{ anstatt } 52\,.$$

Der Unterschied $g_2 - g_1$ beträgt also nur 0,000012 Bruchteile der Schwerkraft, was etwa 0,012 Millimeter in der Länge des Sekundenpendels und $0{,}5^s$ in der täglichen Schwingungsdauer giebt.

---

*) *Phil. Transact.*, 1856 I, Bd. 146 S. 297—355.

Eine solche Differenz ist aber bei der Ungunst der Beobachtungsumstände in Gruben recht wohl aus Beobachtungsfehlern erklärbar. Andererseits würde eine Vermehrung der Dichtigkeit in einem nahezu kugelförmigen Raume unterhalb des Beobachtungsortes den Mehrwert von $g_2 - g_1$ erklären, wenn der Durchmesser des Raumes mindestens einige Kilometer und der Dichtigkeitsüberschufs etwa $^2/_3$ der Dichtigkeit des Wassers betrüge.

Ganz unzutreffend ist *Haughtons* Berechnung von $\Theta_m = 5{,}48$ aus den *Airy*schen Messungen (*Pogg. Ann.* 1856 Bd. 99 S. 332), weil er für Θ denjenigen Wert einführt, der im Mittel für die ganze Schale zwischen den Niveauflächen von P_1 und P_2 *um die ganze Erde herum* gilt. Dagegen dürfte das Resultat der Berechnung von *F. Folie*, welcher eine Zerlegung der Massen in zwei Teile verschiedener Dichtigkeit vornahm [nach den Fortschr. der Physik von 1873 Bd. 29 S. 132] und 0,117 weniger als *Airy* findet, Beachtung verdienen. Freilich bestätigt es auch nur die Ansicht, dafs durch verschärfte Berücksichtigung der Massenanziehung das *Airy*sche Resultat nicht erheblich zu ändern ist.

Im Jahre 1882 hat *R. v. Sterneck* mit Benutzung des 1000_m tiefen Adalbertschachtes zu *Přibram* in Böhmen ebenfalls Beobachtungen zur Bestimmung von Θ_m und zur Ermittelung der Änderung der Schwerkraft mit der Tiefe ausgeführt*). Diese mit einem unveränderlichen Pendel angestellten Beobachtungen wurden 1883 wiederholt, wobei auf eine schärfere Bestimmung des Ausdehnungskoefficienten und auf eine vollständige Elimination des Uhrganges in der Differenz der Ergebnisse für die Stationen auf der Erdoberfläche und in der Tiefe Rücksicht genommen wurde, was in der That zur Folge hatte, dafs die in verschiedenen Tiefen erhaltenen Endwerte weit besser übereinstimmten als 1882.

Die Beobachtungen von 1883 geben unter Weglassung einiger, jedenfalls durch gröfsere Fehler entstellten Reihen von Messungen nach S. 89 VII (mit teilweiser Rücksicht auf S. 86 — 88), abgesehen von den irrigen Korrektionen wegen Zentrifugalkraft (S. 90) und mit Verbesserung zweier kleinen Rechenfehler:

	Seehöhe	Schwingungszeit	Relat. Schwere
Oberfläche	+ 509,1^m	0,5001638^s	1,0000000
9. Lauf	+ 242,6	1530	1,0000432
20. Lauf	— 6,9	1535	1,0000412
26. Lauf	— 238,8	1475	1,0000652
30. Lauf	— 463,4	1418	1,0000880

*) Mitteilungen des k. k. militär-geographischen Instituts; Bd. 2 und Bd. 3, Wien 1882 und 1883.

Mit $\Theta_0 = 2{,}75$ folgt hieraus, abgesehen von dem stark abweichenden Ergebnis des 9. Laufes, nach Formel (5) § 14 S. 494:

$$\Theta_m = 5{,}54 \quad 5{,}71 \quad 5{,}80\,,$$

welchen Werten mit Rücksicht auf Beobachtungsanzahl und Höhendifferenz die Gewichte

$$1 \quad 2 \quad 2$$

entsprechen, sodafs im Mittel $\Theta_m = 5{,}71$ wird. Die Abhandlung giebt 5,77.

Diese Zahl wird sich vielleicht noch etwas modifizieren, wenn die Terrainunebenheiten anstatt nur bis auf ca. $2{,}5^{km}$ auf gröfsere Entfernung hin berücksichtigt werden.

Die weiteren Schlüsse der Abhandlung von 1883 bezüglich der Änderung von g und Θ im Erdinnern sind illusorisch.

Wir erwähnen noch, nach *Sternecks* Abh. von 1882 S. 79 u. citierend, dafs *Carlini*, *Biot* und *Mathieu* aus Pendellängen in Bordeaux und auf dem Mont-Cenis 1820—22, mit Rücksicht auf *Giulios* Revision, $\Theta_m = 4{,}95$ fanden.

Mendenhall bestimmte kürzlich durch Beobachtungen in Tokio und auf dem Fusijama $\Theta_m = 5{,}77$; *American Journal* Bd. 20, 1881, S. 98—103.

Siebentes Kapitel.

Das geometrische Nivellement.

§ 1. **Die unmittelbaren Resultate geometrischer Nivellements.** Ein einfaches Nivellement besteht bekanntlich im wesentlichen darin, dafs man sich zwischen zwei Punkten mit dem Nivellierinstrument aufstellt und mittelst desselben nach jedem der beiden Punkte eine horizontale Visur giebt, welche an einem in den Punkten vertikal aufgestellten Mafsstab (der Nivellierlatte) die Zielhöhen abschneidet. Man pflegt dann die Differenz der letzteren als Höhenunterschied der beiden Punkte anzunehmen. Läfst sich diese Angabe nicht mit *einer* Aufstellung erreichen, so schaltet man Zwischenpunkte ein und nimmt ein zusammengesetztes Nivellement vor. Hier bildet man das Resultat als Summe der Eiuzelunterschiede.

Beachtet man aber den schon im ersten Kapitel § 8 S. 10, sowie im zweiten Kapitel § 18 S. 92 berührten Umstand, dafs die Niveauflächen keine Parallelflächen sind, so bemerkt man leicht eine gewisse Unbestimmtheit jenes Resultates.

Die Abweichung vom Parallelismus hat nämlich zunächst zur Folge, dafs beispielsweise die Erhebung eines Punktes C auf einem Berggipfel über die Niveaufläche eines anderen Punktes A am Fufse des Berges, Fig. 82, gemessen in der Lotlinie CC' von C im allge-

meinen einen anderen Wert hat, als die Senkung von A unter die Niveaufläche von C, gemessen in der Lotlinie AA' von A. Ein von A nach C geführtes zusammengesetztes Nivellement aber giebt in der Regel weder den einen noch den andern Betrag; denn indem es die Bergeshöhe allmählich ersteigt, wird mittelst eingeschalteter Niveauflächen der Abstand der Niveauflächen von C und A weder in der einen noch in der anderen Lotlinie gemessen, so daſs ein treppenförmiges Profil entsteht, mit dessen Gestalt sich das Resultat verändert.

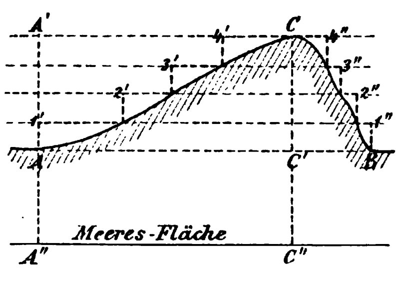


Fig. 82.

Zwei verschiedenen Profilen folgende Nivellements von A nach C, z. B. einerseits $A.1'.2'.3'.4'.C$ und andererseits von A durch den Berg in einem Stollen bis B und über $1''.\ 2''.\ 3''.\ 4''$ nach C, werden also (abgesehen von Beobachtungsfehlern) eine Differenz zeigen können: *den Schluſsfehler des Nivellementspolygones ACBA infolge nicht völligen Parallelismus der Niveauflächen.*

Der mathematische Ausdruck dafür ist

$$\int dh, \tag{1}$$

das Integral ausgedehnt über das geschlossene Polygon.

Wenn es nun hiernach nicht gleichgültig ist, auf welchem Wege ein geometrisches Nivellement ausgeführt wird, so muſs man entweder zu jedem in gewöhnlicher Weise berechneten Resultat den Weg, das Profil, angeben — oder man muſs eine andere Berechnungsweise einschlagen, welche vom Profil unabhängige Resultate giebt. Diese bietet sich durch Gleichung (2) § 8 S. 10. Darnach ist

$$W_C = W_A - \int_A^C g\, dh, \tag{2}$$

wenn W_C und W_A die Potentiale der Schwerkraft in C und A bezeichnen und die Integration über das nivellierte Profil ausgedehnt wird. Welche Form aber dieses Profil hat, ist offenbar ganz gleichgültig.

Um also klare Resultate zu erhalten, müſste man somit die Nivellements dazu benutzen, Potentialdifferenzen abzuleiten. Ob dieser Weg praktisch ist, lassen wir vorläufig dahingestellt.

Hier mag zunächst noch darauf hingewiesen werden, daſs aus geometrischen Nivellements *Höhenunterschiede und Meereshöhen in Strenge eigentlich gar nicht zu finden sind.* Messen wir nämlich z. B. auf dem

Wege von A nach C irgendwo ein dh und das zugehörige g, so ist $g\,dh$ die Potentialdifferenz der beiden Niveauflächen, welche dh begrenzen. In der Lotlinie CC' nun haben letztere einen anderen Abstand und die Schwere ist eine andere, jedoch dergestalt daſs, wenn diese Gröſsen bezw. dh_C und g_C nennen:

$$g\,dh = g_C\,dh_C$$

ist. Demnach wird die Höhe von C über A, gemessen in der Lotlinie CC' von C, gleich

$$CC' = \int_A^C \frac{g}{g_C}\,dh\,, \tag{3}$$

Die Schwerkraft g_C im Innern des Berges aber kann man in der Regel überhaupt nicht messen, sondern nur schätzen, so daſs also CC' aus Messungen allein nicht zu erhalten ist.

Aus Vorstehendem geht auch hervor, daſs man den Höhenunterschied von A und C als Unterschied der Meereshöhen CC'' und AA'' nicht gleich CC' setzen darf und umgekehrt aus $AA'' + CC'$ nicht CC'' findet.

§ 2. **Die strenge Reduktion der Nivellements.** Wir betrachten zunächst eine einzelne Aufstellung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 und sehen von Refraktionswirkungen ab. Dann erfolgt, wenigstens im Prinzip, die Visur nach der Latte in P_1 und in P_2 horizontal, d. h. in der Tangente der Niveaufläche J der Visieraxe, Fig. 83. Nennen wir die Zielhöhen z_1 und z_2, die Depressionen der Niveaufläche J gegen die horizontale Visur bei P_1 und P_2 bezw. d_1 und d_2, endlich die Schwerkräfte in der halben Höhe von z_1 und z_2 bezw. g_1 und g_2, so ist bei der geringen Gröſse von z in praktischen Fällen sehr nahe die Differenz der Potentiale W_1 für P_1 und W_2 für P_2 gleich

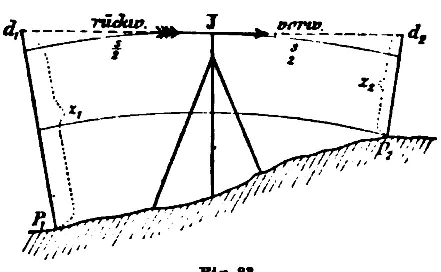


Fig. 83.

$$W_2 - W_1 = (z_2 - d_2)\,g_2 - (z_1 - d_1)\,g_1\,. \tag{1}$$

Der Fehler dieser Gleichung ist so gut wie null. Denn die Schwerkraft nimmt mit der Höhe sehr nahe gleichförmig ab, wie Formel (17) S. 97 für die normale Schwerkraft zeigt und wie für die lokalen Anziehungen aus Kap. 3 § 1 S. 141 und aus Kap. 4 § 3 S. 274 folgt. Man darf daher entlang der Nivellierlatte das Integral $g\,dh$ mit dem Mittelwert von g berechnen. Es wird allerdings noch vorausgesetzt, daſs die gerade Latte die eigentlich nach der Lotlinie schwachge-

krümmten Abschnitte z_1 und z_2 richtig giebt; aber dies ist augenscheinlich bis auf eine selbst bei Anhäufung im zusammengesetzten Nivellement verschwindende Gröfse der Fall.

Aus (1) ergiebt sich nun durch Transformation:

$$W_2 - W_1 = (z_2 - z_1)\frac{g_1 + g_2}{2} + (z_2 + z_1)\frac{g_2 - g_1}{2} + (d_1 - d_2)\frac{g_1 + g_2}{2} + (d_2 + d_1)\frac{g_1 - g_2}{2}. \quad (2)$$

Da man bei guten Nivellements behufs möglichster Elimination der Instrumentalfehler und der Refraktion aus gleichen Zielweiten nivelliert, werden bei nahezu gleicher Krümmung der Niveaufläche J in Richtung von P_1 und P_2 die Depressionen nahezu gleich. Dann wird in vorstehender Gleichung das dritte Glied sehr klein. Wir nehmen vorläufig an, dafs es als unerheblich anzusehen ist, werden aber später den Einflufs desselben sowohl für die normale Form der Niveauflächen als auch für charakteristische Fälle gestörter Form derselben betrachten. Er findet sich in der That verschwindend klein, wie im voraus bemerkt werden kann.

Das zweite und vierte Glied der Gleichung (1) können ebenfalls immer, auch in anbetracht ihrer Anhäufung bei zusammengesetzten Nivellements, vernachlässigt werden. Zunächst dürfen wir jedenfalls das kleinere der beiden Glieder ignorieren und uns darauf beschränken, das zweite: $\frac{1}{2}(z_2 + z_1)(g_2 - g_1)$, in seinem Einflufs auf ein zusammengesetztes Nivellement zu betrachten. Derselbe ist gleich der Summe vorstehender Produkte, oder angenähert gleich einem Mittelwert von $\frac{1}{2}(z_2 + z_1)$ mal der Gesamtdifferenz Δg in der Schwerkraft vom Anfang bis zum Ende, falls g entlang dem Nivellement fortwährend ab- oder zunimmt. $\frac{1}{2}(z_2 + z_1)$ setzen wir in ebenem Terrain im Maximum gleich 3^m und Δg, indem wir uns einen ganzen Meridianquadranten nivelliert denken, gleich $9{,}8 \,.\, 0{,}0053^m$. Hierbei wird der Einflufs auf die gesamte Potentialdifferenz gleich $9{,}8 \,.\, 0{,}016^m$ rund, mithin auf den Höhenunterschied etwa 16^{mm}, was bei einer solchen Ausdehnung des Nivellements unerheblich ist. Denken wir uns ferner, um einen andern Maximalfall zu erhalten, einen Berg von 8000^m Höhe nivelliert, so beträgt Δg nach der *Bouguer*schen Regel etwa $9{,}8 : 600$, was mit $\frac{1}{2}(z_2 + z_1) = 2^m$ einen Einflufs von $9{,}8 \,.\, 0{,}003$ für die Potentialdifferenz und von nur 3^{mm} für die Höhe ergiebt.

Hiernach reduziert sich Gleichung (2) auf die folgende einfachere

$$W_2 - W_1 = (z_2 - z_1)\frac{g_2 + g_1}{2}. \quad (3)$$

Aus der Summierung aller dieser Gleichungen für das ganze nivellierte Profil folgt die gesamte Potentialdifferenz. Wir drücken dies durch die Gleichung aus:

$$\Delta W = -\sum_A^C g \cdot \delta z \,. \tag{4}$$

In (4) bedeutet nun $\delta z = z_1 - z_2$ die Zielhöhendifferenz im Sinn Rückblick — Vorblick; $g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ wird in der Regel mit der Beschleunigung der Schwere am Standorte in der Höhe $\frac{1}{4}(z_1 + z_2)$ über dem Terrain hinreichend identisch sein. Eine geringe Änderung in der Annahme des Ortes macht aber, wie man sich leicht überzeugt, nichts aus. Man kann insbesondere für g auch die mittlere Schwerebeschleunigung von P_1 und P_2 nehmen.

Die Anwendung der Formel (4) zur Reduktion der Nivellements stöfst auf Schwierigkeiten wegen der dazu erforderlichen zahlreichen Messungen von g. Wenn es genügte, nur den normalen Teil von g zu berücksichtigen, für welchen die Formeln (17) bis (20) S. 97 gelten, so wäre die Reduktion allerdings ohne weiteres ausführbar. Nach jenen Formeln ist ausreichend genau, wenn $\mathfrak{a} = 0{,}00334$ und $\mathfrak{r} = 0{,}00347$ gesetzt wird:

$$g = 9{,}8060\,(1 - 0{,}00265 \cos 2B) \left\{1 - \frac{2H}{R}\left[1 + \frac{57 - 67 \sin^2 B}{10000}\right]\right\}, \tag{5}$$

worin B die geographische Breite und H die Meereshöhe des Ortes von g bezeichnen. Aber die Berücksichtigung des normalen Teiles von g genügt keineswegs und eine einigermafsen ausreichende Schätzung der Anomalieen in g, insbesondere auf grund der sichtbaren Massenunregelmäfsigkeiten der Erdoberfläche, ist wenigstens für gröfsere Höhenquoten nicht möglich; vergl. im 3. Kap. § 37 S. 244 und § 31 S. 228.

Nehmen wir indessen an, dafs die Angaben zur Berechnung von ΔW vorhanden sind, so würde es gewifs praktischer sein, noch den Quotienten

$$\Delta W : \mathfrak{G}$$

zu bilden und diesen als Ergebnis anzusehen, weil die $\Delta W : \mathfrak{G}$ wieder die Bedeutung von Höhendifferenzen, aber reduziert auf die konstante Schwerkraft $\mathfrak{G}$ unter 45° geographischer Breite und im Meeresspiegel, haben. Solche Höhendifferenzen sind ebenso wie die ΔW der mechanischen Arbeit zur Überwindung der wirklichen Höhendifferenzen proportional, entbehren also auch nicht einer praktischen Bedeutung, zugleich aber stehen sie den wirklichen Höhendifferenzen äufserlich näher als die ΔW.

Immerhin haben auch die so reduzierten Angaben den Nachteil, dafs sie selbst für ganz benachbarte Punkte erst noch reduziert werden müssen, um mit den nivellierten Werten verglichen werden zu können.

Die Einführung des Potentials in die Reduktion geometrischer Nivellements zur Berücksichtigung des Nichtparallelismus der Niveauflächen (oder um einem üblichen Sprachgebrauch zu folgen: der Lotablenkung) hat bereits 1871 *Th. Wand* in seinen *Prinzipien der mathematischen Physik und Potentialtheorie* S. 129—131 angegeben. 1873 wurde die strenge Reduktion auch vom Verfasser in Bd. 81 der Astronom. Nachr. S. 297—300 Nr. 1939 behandelt, 1874 von *Haupt* ebenda Bd. 84 S. 49—56 Nr. 1996 und 1876 von *Bruns*, Figur der Erde, S. 34—42.

An diesen Orten ist, insbesondere auch vom Verfasser, im Gegensatz zu anderen Autoren hervorgehoben, dafs (abgesehen von theoretischen Beispielen) die Schwerkraft sich zur strengen Reduktion besser eignet als die Lotabweichung. Vergleiche hierüber auch weiterhin § 6 dieses Kapitels.

§ 3. Bestimmung von Meereshöhen. Der Einflufs der normalen Variation der Schwerkraft auf die Nivellementsresultate. Im Hinblick auf die Schlufsbemerkung des vorigen Paragraphen kehren wir zu der Beantwortung der Frage zurück, inwieweit sich durch Nivellements die Höhenunterschiede und Meereshöhen bestimmen lassen, um daraus die Bedeutung der unmittelbaren Nivellementsergebnisse zu erkennen. Zunächst berücksichtigen wir dabei nur den normalen Teil der Schwerkraft.

Denken wir uns, dafs vom Punkte A, Fig. 82, S. 501 nach C nivelliert worden sei und es solle aus der bekannten Meereshöhe H_A von A mittelst eines Nivellements die Meereshöhe H_C abgeleitet werden. Dann ist auszugehen von der Relation:

$$H_C = CC' + C'C''. \tag{1}$$

Bedeutet δz die Zielhöhendifferenz $z_1 - z_2$ für einen Stand des Instruments im Sinne Rückblick — Vorblick, g die Schwerebeschleunigung daselbst und g_C dieselbe zwischen den entsprechenden Niveauflächen in der Lotlinie von C, so folgt mit Rücksicht auf Gleichung (3) des vorigen Paragraphen:

$$CC' = \sum_A^C \frac{g}{g_C}\,\delta z\,, \tag{2}$$

worin die Summierung über das ganze Profil AC auszudehnen ist.

Man erhält ferner für $C'C''$ die Gleichung:

$$C'C'' = \int_0^{H_A} \frac{g_A}{g_C}\,dh\,, \tag{3}$$

indem man sich H_A in Differentiale dh zerlegt denkt und mit g_A und g_C die Schwerebeschleunigungen an der Durchschnittsstelle der dh begrenzenden Niveauflächen mit den Lotlinien von A und C bezeichnet.

Fassen wir nur die normalen Werte von g, g_A und g_C ins Auge, so ist der Ausdruck (5) im vorhergehenden Paragraphen anzuwenden. Dabei genügt es, den Wert der geschlungenen Parenthese in (5)

gleich 1 zu setzen. Wir weisen dies für $C'C''$ nach; indem wir hierbei extreme Verhältnisse einführen, wird der Fehler in CC' mit einbezogen.

Man erhält aus (5) in jedenfalls hinreichender Strenge zur Substitution in (3):

$$\frac{g_A}{g_C} = \frac{1 - 0{,}00265 \cos 2B_A}{1 - 0{,}00265 \cos 2B_C} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{2h_A}{R}\left[1 + \frac{57 - 67 \sin^2 B_A}{10000}\right] \\ + \frac{2h_C}{R}\left[1 + \frac{57 - 67 \sin^2 B_C}{10000}\right] \end{array} \right\}. \quad (4)$$

h_A und h_C bedeuten hier die Meereshöhen der Niveauflächen, welche dh begrenzen, in den Lotlinien von A und C. Diese Höhen sind selbstverständlich etwas ungleich wegen der Ungleichheit der Schwerkräfte, deren wirkliche Werte hierbei natürlicherweise in betracht kommen. Im allgemeinen ist

$$h_C = \varkappa h_A\,; \quad (5)$$

wobei $\varkappa$ einen Koefficienten bezeichnet, der vom Verhältnis beider Schwerkräfte abhängt. Hinsichtlich des normalen Wertes der letzteren kann $\varkappa$ auf der Erdoberfläche im ganzen überhaupt nur um etwa $^1/_{200}$ von 1 abweichen. Wegen lokaler und kontinentaler Anziehungen ist die Abweichung des Wertes $\varkappa$ von 1 höchstens etwa $^1/_{1000}$. Diese Anomalie entspricht nämlich der Anziehung einer 8000^m starken Erdschicht.

Indem wir nun (4) in (3) einsetzen, dabei in dem Produkte

$$h_C \sin^2 B_C$$

in der grofsen Parenthese $\varkappa = 1$ nehmen und die Integration ausführen, erhalten wir den mit Rücksicht auf die normale Schwerkraft als formell streng anzusehenden Ausdruck:

$$C'C'' = \frac{1 - 0{,}00265 \cos 2B_A}{1 - 0{,}00265 \cos 2B_C} \left\{ \begin{array}{l} H_A + (\varkappa - 1)\left(1 + \frac{57}{10000}\right)\frac{H_A^2}{R} \\ + \frac{67}{10000}(\sin^2 B_A - \sin^2 B_C)\frac{H_A^2}{R} \end{array} \right\}, \quad (6)$$

worin $\varkappa$ nunmehr einen gewissen mittleren Wert von $\varkappa$ für die Höhe H_A bezeichnet. Nehmen wir zunächst für $\varkappa$ den normalen Teil nach (5) des vorigen Paragraphen mit Vernachlässigung der geschlungenen Parenthese, so geben das zweite und dritte Glied der Parenthese in (6) zusammen sehr nahe, wenn noch $\sin^2 B_A - \sin^2 B_C$ durch

$$\sin(B_A + B_C)\sin(B_A - B_C)$$

ersetzt wird:

$$\sin(B_A + B_C)\sin(B_A - B_C)\,.\,0{,}012\,\frac{H_A^2}{R}\,. \quad (7)$$

Der Faktor des Sinusproduktes ist für $H_A = 1000^m$ rund 2^{mm}; er wächst mit dem Quadrate der Höhe und erreicht für den bedeutenden

Wert $H_A = 8000^m$ den Betrag $0{,}12^m$. Allein je gröfser die Höhe H_A, umso geringer ist immer die gröfstmögliche Breitendifferenz $B_A - B_C$, und es dürfte sich kein Beispiel finden, wo (7) mehr als einige Millimeter giebt.

Setzen wir in (6) für $\varkappa$ den Wert $1 \pm {}^1/_{1000}$ als Repräsentanten anormaler Anziehungen, so giebt dies selbst für $H_A = 8000^m$ nur 10^{mm}.

Hiernach reicht es völlig aus

$$\begin{aligned} C'C'' &= \frac{1 - 0{,}00265 \cos 2B_A}{1 - 0{,}00265 \cos 2B_C} H_A \\ &= H_A + 0{,}00531 \frac{\sin(B_A + B_C) \sin(B_A - B_C)}{1 - 0{,}00265 \cos 2B_C} H_A \end{aligned} \tag{8}$$

zu setzen, umsomehr, wenn man bedenkt, dafs der Koefficient 0,00265 nicht ganz genau sein wird, der Ausdruck also auch deswegen etwas mangelhaft ist und zwar um

$$\sin(B_A + B_C) \sin(B_A - B_C) H_A \,.\, \delta_{\mathfrak{b}}\,, \tag{9}$$

worin $\delta_{\mathfrak{b}}$ den Fehler von $\mathfrak{b} = 0{,}00531$ bezeichnet. Da nun $\delta_{\mathfrak{b}}$ recht wohl 0,00002 betragen kann, so ist der Faktor des Sinusproduktes in (9) für $H_A = 1000^m$ schon 20^{mm}; er ist überhaupt bei jedem praktisch möglichen H_A weit gröfser als in (7).

In gleicher Weise kann man für (2) völlig ausreichend genau ansetzen, insoweit der normale Wert der Schwerkraft in betracht kommt:

$$\begin{aligned} CC' &= \sum_A^C \frac{1 - 0{,}00265 \cos 2B}{1 - 0{,}00265 \cos 2B_C} \delta z \\ &= \sum_A^C \delta z + 0{,}00531 \sum_A^C \frac{\sin(B + B_C) \sin(B - B_C)}{1 - 0{,}00265 \cos 2B_C} \delta z\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Hierin bezeichnet das erste Glied rechter Hand das unmittelbare Nivellementsresultat. Die Summierung im Korrektionsglied läfst sich bequem an der Hand einer passenden Profilzeichnung ausführen, falls $B - B_C$ so klein ist, dafs man den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann und wenn man zugleich für $\sin(B + B_C)$ einen konstanten Mittelwert $\sin(B_m + B_C)$ einführen darf*). Alsdann geht nämlich (10) durch Substitution von

$$B - B_C = \Delta M : \varrho_m\,,$$

worin ΔM den zu $B - B_C$ gehörigen Meridianbogen der Meeresfläche und ϱ_m einen mittleren Krümmungsradius im Meridian für die Meeresfläche (das Erdellipsoid) in jener Gegend bezeichnet, über in die Näherungsformel:

*) *Zachariae*, *De geodaetiske Hovedpunkter*, 1876, S. 244. (Übersetzung von *Lamp*, 1878, S. 285—286.)



$$CC' = \sum_A^C \delta z + \frac{0{,}00531 \sin(B_m + B_C)}{(1 - 0{,}00265 \cos 2B_C)\varrho_m} \sum_A^C \varDelta M \,.\, \delta z\,, \tag{11}$$

und hier ist nun die Summe $\varDelta M \,.\, \delta z$ offenbar proportional dem Inhalt der Fläche in der Profilzeichnung zwischen der nivellierten Linie AC, der Niveaufläche durch A und der Lotlinie durch C, vorausgesetzt, dafs diese ohne Rücksicht auf die Krümmung der Niveauflächen herzustellende Zeichnung anstatt der Horizontaldistanzen des nivellierten Profils die Abstände der geographischen Parallelen der nivellierten Punkte als Horizontaldistanzen enthält. Mit Hilfe einer topographischen Karte wird man solche Meridianprofile leicht herstellen.

Man überzeugt sich leicht, dafs (11) immer ausreicht, sobald $B - B_C$ zwei Grade nicht überschreitet. Denn alsdann giebt die im allgemeinen gröfste Vernachlässigung der Formel, d. i. die Ersetzung von $\sin(B + B_C)$ durch eine Konstante, selbst für extremste Werte der Höhen nur einige Millimeter. Da übrigens die Fixpunkte eines Landes einander stets viel näher liegen und man die Formel für CC' auf die Strecken von Fixpunkt zu Fixpunkt anzuwenden hat, so wird (11) immer den Charakter einer strengen Formel haben.

Bei der successiven Berechnung der Meereshöhen der Fixpunkte eines ausgedehnten Nivellements mufs selbstverständlich Formel (8) mit konkurrieren. Ebenso bei einer *Ausgleichung überschüssiger Beobachtungsergebnisse.* Denn die Gleichung (1) lehrt mit Rücksicht auf (8), dafs selbst das auf den Wert CC' reduzierte Nivellement von A nach C noch nicht $H_C - H_A$ ist. Die dem Nivellement von A nach C entsprechende Fehlergleichung für eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen lautet demnach:

$$\sum_A^C \delta z + v = \left\{ \begin{aligned} &H_C - H_A - \frac{0{,}00531 \sin(B_m + B_C)}{(1 - 0{,}00265 \cos 2B_C)\,\varrho_m} \sum_A^C \varDelta M \,.\, \delta z \\ &\qquad - \frac{0{,}00531 \sin(B_A + B_C) \sin(B_A - B_C)}{1 - 0{,}00265 \cos 2B_C} H_A \end{aligned} \right\} . \tag{12}$$

Hierin bezeichnet v eine durch die Ausgleichung zu bestimmende Verbesserung des unmittelbaren Nivellementsresultates. Dieselbe ist rechter Hand im ersten kleinen Korrektionsgliede vernachlässigt, sowie man auch im zweiten Korrektionsgliede für H_A einen Näherungswert einführen darf.

Es mag hier noch darauf hingewiesen werden, dafs die Korrektionen rechter Hand in (12) allerdings bei kleinen Distanzen der benachbarten Fixpunkte sehr klein ausfallen, dafs man sie aber schärfer berechnen mufs als wie die unmittelbaren Beobachtungsresultate angegeben werden, weil sonst bei allmählich ansteigenden, ausgedehnten Nivellementszügen eine Anhäufung von Rechnungsfehlern entstehen kann. Man wird auf Hundertel- oder Tausendel-Millimeter rechnen

und in die Ausgleichung eines grofsen Netzes zunächst wie üblich nur die Knotenpunkte aufnehmen.

§ 4. Die sphäroidischen Schlufsfehler der Nivellementspolygone. Nivelliert man von A nach C auf zwei verschiedenen Wegen, so entsteht ein Nivellementspolygon. Die beiden Ergebnisse in gewöhnlicher Reduktion zeigen nun im allgemeinen, abgesehen von sonstigen Fehlern, eine Differenz wegen der Nichtberücksichtigung der im vorigen Paragraphen angegebenen Reduktion auf Meereshöhe, welche für verschiedene Wege nicht übereinstimmend ausfällt. Insoweit wie bisher nur die normale Schwerkraft berücksichtigt wird, kann wie üblich diese Differenz, der Schlufsfehler, auch präziser der normale oder sphäroidische Schlufsfehler genannt werden.

Dieser Schlufsfehler wird am einfachsten erhalten, wenn man durch Zusammenfallenlassen des Endpunktes C mit dem Anfangspunkte A den einen der beiden Wege auf null reduziert. Wegen $B_A = B_C$ geht dann im Ausdruck (8) für CC' diese Gröfse in H_A über, und da $H_A = H_C$ ist, mufs wegen Gleichung (1) CC' verschwinden, d. h. es mufs nach (10) für das Nivellements-Polygon sein:

$$\sum \delta z = -0{,}00531 \sum \frac{\sin(B + B_A)\sin(B - B_A)}{1 - 0{,}00265 \cos 2B_A}\,\delta z\,, \qquad (1)$$

oder unter Voraussetzung mäfsiger Ausdehnung in geographischer Breite, etwa bis zu 2^0, nach (11) des vorigen Paragraphen:

$$\sum \delta z = -0{,}00531 \frac{\sin 2B_A}{(1 - 0{,}00265 \cos 2B_A)\,\varrho_m} \sum \Delta M \,.\, \delta z\,. \qquad (2)$$

In (1) bezeichnet B_A die geographische Breite eines willkürlichen Punktes A des Nivellementspolygones, den man für (2) am besten in eine mittlere Breite des letzteren verlegen wird; ϱ_m bezeichnet den zugehörigen Krümmungsradius des Erdellipsoids im Meridian und ΔM die Abstände der geographischen Parallelen der Nivellementspunkte von dem willkürlichen Punkte A.

Diese Abstände sind positiv zu rechnen, wenn $B - B_A$ positiv ist. Wie man aber auch A wählt, die $\Sigma\, \Delta M \,.\, \delta z$ ist immer der positive oder negative Inhalt der Fläche innerhalb des Profilcontoures der Meridianprofilzeichnung, wie aus den Regeln der analytischen Geometrie folgt, wobei nur bei Durchkreuzungen gehörig auf die leicht zu ermittelnden Vorzeichen der Flächenteile zu achten ist*).

---

*) Behufs einer direkten Ableitung der Formel (1) kann man davon ausgehen, dafs nach § 1 (2) S. 501 für ein geschlossenes Polygon

$$\int g\, dh = 0$$

ist. Setzt man hierin $g = g_A + (g - g_A)$, so folgt der Schlufsfehler

$$\int dh = \int \frac{g_A - g}{g_A}\, dh\,,$$

woraus man mit Rücksicht auf (5) § 2 S. 504 leicht zu (1) gelangt.

Ebenso wie man bei den Ausgleichungen der Präzisionsnivellements nach vermittelnden Beobachtungen in den Fehlergleichungen (12) des vorigen Paragraphen die sphäroidischen Reduktionsglieder wegzulassen pflegt, setzt man auch bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen in jedem Polygone $\Sigma\,\delta z =$ null. *Indessen sollte man wenigstens bei den mit der europäischen Gradmessung verbundenen Nivellements nicht mehr an dieser Praxis, die Nivellements unreduziert auszugleichen, festhalten.* Sie genügt wohl allenfalls in dem nördlichen Deutschland, aber keinesfalls in dem südlichen Deutschland und den Alpenländern, wie wir sogleich nachweisen werden. Man kann sich nicht darauf berufen, daſs die Beobachtungsfehler erheblicher seien, wie jene Korrektionen und daſs diese letzteren auch nur den normalen Teil der Schwerkraft enthalten. Denn einesteils sind diese Korrektionen nur in ebenen Gegenden geringer als die Beobachtungsfehler und anderenteils wird sich weiterhin finden, daſs der Einfluſs der Abweichungen der Schwerkraft vom normalen Wert auf die Nivellementsresultate, insoweit es sich lediglich um Schluſsfehler handelt, im allgemeinen weit kleiner ist als der Betrag der sphäroidischen Korrektionen.

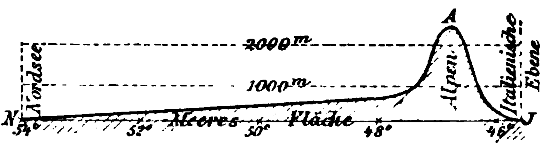


Fig. 84.

Betrachten wir zum Zwecke der Schätzung der letzteren ein Nivellement von der Nordsee über die Alpen bis Oberitalien, von da auf dem Parallelkreis bis zur französischen Küste des atlantischen Oceans und von hier aus an der Küste entlang bis zum Ausgangspunkt zurück. Dann hat das geschlossene Polygon ungefähr ein Meridianprofil wie das nebenstehende $NAIN$ in Fig. 84; insbesondere entspricht die Kurve NAI dem Nivellement von der Nordsee über die Alpen bis Oberitalien und die Gerade IN dem Rückgang auf dem Parallelkreis u. s. w. Nur bei dem ersten Teil tritt ein sphäroidischer Einfluſs auf, der ebenso wie der Schluſsfehler der Fläche $NAIN$ proportional ist. Nach Formel (2) folgt für dieses Polygon sehr nahe

$$\sum \delta z = -0{,}4^m . \qquad (3)$$

Dieser erhebliche Betrag rührt keineswegs lediglich von den Alpen her, die übrigens hier nur 2500^m hoch angenommen sind. Würde man für die Alpen eine Hochebene von 600^m Höhe setzen, so würden immer noch $-0{,}25^m$ Schluſsfehler übrig bleiben. Auch dieser Fehler übersteigt die Beobachtungsfehler.

Um einen anderen Fall zu erwähnen, nennen wir das Gradmessungs-

nivellement zwischen Swinemünde und Konstanz*). Dieses Nivellement, welches etwa zwischen 54° und 48° Breite sich bewegt, folgt im allgemeinen etwas geringeren Höhen als unsere Figur angiebt. Die sphäroidische Reduktion für Konstanz wird angenähert gleich $+ 0{,}075^m$, während der mittlere zufällige Beobachtungsfehler zu $\pm 0{,}048^m$ angegeben ist. Würde man aber Konstanz von Swinemünde aus auf einem anderen, mehr unserem Profil entsprechenden Wege erreichen, so würde die Reduktion den Betrag von $+ 0{,}15^m$ erreichen können und sich somit ein Schlufsfehler von $0{,}075^m$ ergeben.

Wenn man bedenkt, dafs bei anderen Gelegenheiten die Geodäten eine fast übertriebene Sorgfalt in Reduktionsrechnungen anwenden, kann man nur *dem* Umstand die Nichtbeachtung der oben geforderten Reduktionen zuschreiben, dafs die allgemeine Aufmerksamkeit noch zu wenig der Sache sich zuwendet und infolge dessen das Messen von Höhen mittelst des Nivellierinstrumentes noch immer als eine rein geometrische Operation angesehen wird.**)

Ist aber ein Netz von Hauptnivellementslinien nach vermittelnden oder bedingten Beobachtungen ausgeglichen, so darf man bei Einschaltungen allerdings von Reduktionen ganz absehen, da für mäfsige Distanzen dieselben klein sind und keine Fehleranhäufung mehr möglich ist.

In dieser Beziehung hat offenbar die Einführung von Meereshöhen einen Vorteil gegenüber der in § 2 dieses Kapitels S. 504 besprochenen Reduktionsweise.

§ 5. Die sphäroidische Depressionsdifferenz zwischen Rück- und Vorblick. In § 2 wurde darauf hingewiesen, dafs die Depressionen d_1 und d_2 beim Rückblick und Vorblick eines Instrumentstandes bei gleichen Zieldistanzen so nahe gleich sind, dafs man den Einflufs ihrer Differenz vernachlässigen kann. Wir weisen dies jetzt für die normale Form der Niveauflächen nach. Als solche nehmen wir das Erdellipsoid. Da nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt zu werden braucht, gilt die Entwicklung auch für andere Normalformen der Niveauflächen (Normalsphäroide, Kap. 2 § 17 S. 89).

---

*) Gradmessungsnivellement zwischen Swinemünde und Konstanz. Publikation des königl. preufs. geodät. Instituts. Bearbeitet von *Dr. W. Seibt.* Berlin, 1882.

**) Nachdem Vorstehendes schon längere Zeit geschrieben war, fanden wir zu unserer Freude in dem inzwischen erschienenen Bd. 5 der *Nivellements der preufsischen Landesaufnahme,* Berlin 1883, S. 127 eine Reihe von sphäroidischen Polygon-Schlufsfehlern angegeben und mit den beobachteten Schlufsfehlern verglichen. Bei der Ausgleichung und Höhenberechnung sind allerdings die sphäroidischen Glieder noch nicht berücksichtigt. Wir sind aber überzeugt, dafs auch mit der Zeit der weitere Schritt dieser Berücksichtigung der Glieder gethan werden wird, da die Gegengründe nicht stichhaltig sind.

Die stärkste Abweichung der Vertikalschnitte des Rotationsellipsoides von der Kreisform findet aber an jedem Punkte der Oberfläche in Richtung der Nordsüdlinie statt. Wir nehmen daher ein Nivellement in dieser Richtung an und denken uns in der geographischen Breite B einen Instrumentstand. Die horizontale Visieraxe des Instruments sei Axe der ξ, positiv gerechnet von der vertikalen Axe des Instruments nach Süden; normale Abstände von der Visieraxe in der Meridianebene seien mit ζ bezeichnet, positiv nach unten. Dann giebt Bd. 1 S. 137 § 2 (8) sofort die Gleichung der Meridianellipse, wobei nur für B_1 einfach B zu schreiben, das Azimut α = null zu nehmen und für ϑ nach (7) daselbst ξ zu setzen ist. Diese Gleichung lautet:

$$2\zeta \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = \xi^2(1-e^2\sin^2 B) + \zeta^2(1-e^2\cos^2 B) + \xi\zeta e^2 \sin 2B. \quad (1)$$

a bedeutet hierin die Äquatorialhalbaxe, e die numerische Excentricität. Man kann diese Gleichung auch leicht aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse direkt herstellen mit Vereinfachung der Entwicklungen von Bd. 1 § 2 S. 135 u. ff.

Die Gleichung (1) zeigt, dafs $\zeta : a$ in Bezug auf $\xi : a$, dieses als Gröfse erster Ordnung angenommen, eine Gröfse zweiter Ordnung ist. Unter Vernachlässigung des Gliedes mit ζ^2 wird daher bis auf Glieder vierter Ordnung genau und mit Vernachlässigung von e^4:

$$\zeta = \frac{\xi^2 \sqrt{1-e^2\sin^2 B}^3}{2a(1-e^2)} + \frac{\xi\zeta}{2a} e^2 \sin 2B + \ldots,$$

oder indem man für ζ im zweiten Gliede rechter Hand $\xi^2 : 2a$ substituiert, mit gleicher Genauigkeit:

$$\zeta = \frac{\xi^2 \sqrt{1-e^2\sin^2 B}^3}{2a(1-e^2)} + \frac{\xi^3}{4a^2} e^2 \sin 2B + \ldots. \quad (2)$$

Bezeichnen wir ζ für den Rückblick mit ζ_1, für den Vorblick mit ζ_2 und nehmen ξ vor- und rückwärts gleich grofs, so wird

$$\zeta_2 - \zeta_1 = \frac{\xi^3}{2a^2} e^2 \sin 2B + \ldots. \quad (3)$$

Man erkennt leicht, dafs $d_2 - d_1$, die Depressionsdifferenz im Sinne der Fig. 83 S. 502, nicht wesentlich verschieden ist von $\zeta_2 - \zeta_1$. Wir erhalten daher aus (3):

$$d_2 - d_1 = \frac{s^3}{8a^2} \mathfrak{a} \sin 2B + \ldots, \quad (4)$$

wobei noch die Horizontaldistanz $P_1P_2 = s$ und die Abplattung $\mathfrak{a}$ eingeführt sind.

Es ist nun zwar von vornherein klar, dafs für einen einzelnen Stand $d_2 - d_1$ ohne Einflufs bleibt, aber bei einem zusammengesetzten Nivellement wäre doch eine Anhäufung denkbar. Den un-

günstigsten Fall würde ein Nivellement vom Äquator nach einem der Pole bilden. Hier wird nun die Summe der Depressionsdifferenzen

$$\sum (d_2 - d_1) = -\mathfrak{n}\frac{s^2}{8a}\sum_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2B \,.\, \delta B\,, \tag{5}$$

wie aus (4) hervorgeht, wenn für $s:a$ der Absolutwert der Breitendifferenz der benachbarten Instrumentstände δB gesetzt wird, was nahezu richtig ist. Anstatt des Summenzeichens darf man sich ein Integralzeichen geschrieben denken. Das Integral von $B =$ null bis $\frac{\pi}{2}$ giebt $+1$, womit sich in hinreichender Annäherung findet:

$$\sum (d_2 - d_1) = -\mathfrak{n}\frac{s^2}{8a}\,. \tag{6}$$

Diese Summe ist im Sinne einer Verbesserung des nivellierten Höhenunterschiedes zu verstehen. Sie wird mit $\mathfrak{n} = {}^1/_{300}$, $a = 6370000^m$ und $s = 200^m$, welcher letztere Wert bei Präzisionsnivellements gewiſs nicht eintritt, nur ${}^1/_{400}$ Millimeter. Da nun die Summe der Differenzen $(d_2 - d_1)$ nahezu unmittelbar in die Differenz der Meereshöhen von End- und Anfangspunkt eingeht, so erkennt man hierdurch unzweifelhaft die Berechtigung zu ihrer Vernachlässigung in jedem praktischen Falle. Das gilt auch für Berechnungen, welche nach § 2 dieses Kapitels ausgeführt werden.

Die sphäroidische Depressionsdifferenz untersuchte 1874 *Oudemans* in den *Astronom. Nachr.* Bd. 83, S. 21—24 Nr. 1970. Wir dürfen dazu bemerken, daſs uns die Geringfügigkeit ihres Einflusses schon 10 Jahre früher ersichtlich wurde. *Oudemans* findet übrigens doppelt so viel, als (6) angiebt, da er bei der Integration in dem entsprechenden Ausdruck noch die halbe Stationslänge hat und diese irrtümlich anstatt des zweifachen Betrages als Differential unter das Integralzeichen nimmt.

§ 6. **Der Einfluſs der Anomalieen der Schwerkraft auf die Nivellementsresultate; Lotabweichungen.** Behufs Erkenntnis des Einflusses der Anomalieen der Schwerkraft auf die Ergebnisse der geometrischen Nivellements ist man auf die Behandlung passender ideellen Beispiele angewiesen, da die Behandlung praktischer Fälle sowohl in Strenge mittelst Beobachtung der Schwerkraft, als auch durch schätzungsweise Rechnung auf Schwierigkeiten stöſst. Indessen genügt glücklicherweise schon die Betrachtung einiger solchen passend konstruierten Fälle, um einen Überblick zu erhalten. Wir werden diese Betrachtung in den nächsten Paragraphen vornehmen, zunächst aber einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken.

Die Formeln (1) bis (3) § 3 S. 505 lassen erkennen, daſs zunächst bei geringen Höhendifferenzen und Höhen der Einfluſs der Veränderungen der Schwerkraft auf der Erdoberfläche ein geringfügiger und vielfach zu vernachlässigender sein muſs. Ein Nivellement in der niederdeutschen Ebene z. B. bedarf keiner Reduktion. Im allgemeinen be-

steht aber ein Unterschied in der Art des Einflusses der normalen Veränderungen und der sonstigen Variationen von g. Den Einflufs der ersteren kann man umgehen, wenn die Höhen nur auf Parallelkreisen erstiegen werden. Den Einflufs sonstiger Variationen würde man nur vermeiden können bei vertikaler Ersteigung der Höhen, die aber nur ausnahmsweise auf kleine Strecken möglich ist. Während nun bei einem eine Fläche bedeckenden Nivellementsnetz für die in einem Punkte zusammentreffenden Nivellements der Einflufs der ersten Art ein sehr verschiedener sein wird, ist dieses bei den Einflüssen der zweiten Art in gleichem Mafse nicht der Fall, was die Beispiele weiterhin zeigen werden. Die Einflüsse der zweiten Art geben daher im gebirgigen Terrain, obwohl sie die Meereshöhen ebenso treffen wie diejenigen der ersten Art, doch nicht wie diese erhebliche Schlufsfehler in den Polygonen. Da es aber hauptsächlich darauf ankommt, *bestimmte Angaben für die Meereshöhen zu erlangen, wenn dieselben auch mit Fehlern behaftet sind, die sich jedoch durch kein Nivellement nachweisen lassen*, so wird ersichtlich, dafs man weit mehr berechtigt ist, die Reduktion der unmittelbaren Nivellementsergebnisse wegen der anormalen Variationen der Schwerkraft zu unterlassen, als diejenige wegen der normalen Änderungen. Dieses ist von grofser Bedeutung, da eine vollständige Reduktion in Strenge nicht durchführbar sein, aber auch in nur näherungsweiser Ausführung aufserordentliche Mühe machen würde.*) (Die vorstehende Betrachtung gilt in angemessener Abänderung auch für den Fall, dafs anstatt Meereshöhen Potentialdifferenzen abgeleitet werden, doch wird man diese komplizierte Reduktionsweise sicherlich nur benutzen, wenn sie in Strenge, d. h. im allgemeinen: auf grund beobachteter Werte der Schwerkraft, möglich ist).

Durch jene sozusagen konstanten Fehler der Meereshöhen wird der Zweck der mit den Gradmessungsarbeiten in Verbindung gebrachten Präzisionsnivellements, für das Studium zeitlicher Veränderungen der Erdoberfläche ein Element mehr zu gewinnen, offenbar nicht beeinträchtigt. Ferner genügen derartige Angaben für die Reduktion der Grundlinien vollständig.

Hier ist auch der Ort, die Beziehung der Lotabweichungen zu den geometrischen Nivellements darzulegen. Verschiedene Autoren, die nicht von der Potentialtheorie ausgingen, haben Betrachtungen

*) Der Unterschied zwischen den Wirkungen der normalen und anormalen Variationen ist wohl zu beachten, und wir können daher der Bemerkung *Haupts*, *Astronom. Nachr.* Bd. 84 S. 56 unten, nicht beistimmen, dafs man die Korrektionen wegen der normalen Variationen mit Rücksicht auf die Wirkungen der unbekannten anormalen Variationen unterlassen dürfe. Diese Ansicht beruht eben auf einer Überschätzung der anormalen Wirkungen. Wenn *Haupt* von *Gaufs* sagt, dafs dieser die ganze Sache (betr. normale Einflüsse) für eine Kuriosität erkläre, so ist zu erinnern, dafs *Gaufs* nach S. 3 a. a. O. gar nicht von Nivellements, sondern nur von Polhöhen spricht.



über den Einflufs von Lotabweichungen angestellt. Man kann in der That die Nivellements anstatt mittelst der Schwerkraft auch mittelst Lotabweichungen auf Meereshöhen reduzieren. Jedoch ist dieser rein geometrische Weg, wie die Potentialtheorie zeigt, nicht der unmittelbar sich darbietende, sondern wenigstens teilweise ein Umweg. Für die normale Form der Niveauflächen ist dies unbedingt der Fall. Für die Abweichungen von der normalen Form allerdings kann er rechnerische Vorteile bieten, wie in einem der folgenden Beispiele. Aber er gewährt keine so bequeme Einsicht wie die Benutzung der Schwerkraft und hat in der That zu irrtümlichen Auffassungen geführt.

Betrachten wir diese Reduktionsweise etwas genauer. Es sei AC eine nivellierte Profillinie, Fig. 85, woraus die Höhe CC' von C über der Niveaufläche von A abzuleiten ist. Die Lotabweichungen denken wir uns in Bezug auf die geradlinigen Lotlinien eines Referenzellipsoides. Unter zulässigen, vereinfachenden Annahmen können wir sagen, dafs das unmittelbare Resultat des Nivellements von P_1 nach dem folgenden Punkte P_2 der normale Abstand dieses Punktes von der Niveaufläche durch P_1 ist. Legen wir aber nun durch P_1 auch eine Parallelfläche zum Referenzellipsoid, so wird zwar der normale Abstand des Punktes P_2 von dieser Fläche sehr nahe dieselbe Richtung wie jener haben*), er ist aber gröfser um $\varLambda \delta s$, wenn $\varLambda$ die Abweichung des aufgehängten Lotes in der Richtung des Nivellements nach vorwärts und δs die horizontale Entfernung $P_1 P_2$ bezeichnet. Nun erkennt man sofort, dafs

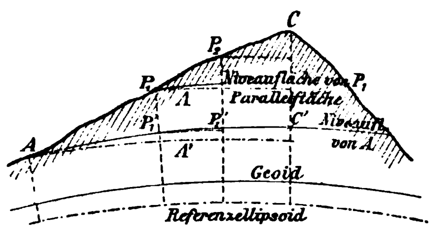


Fig. 85.

$$\sum \delta z + \sum \varLambda \delta s \tag{1}$$

die Erhebung von C über die Parallelfläche des Referenzellipsoides durch A ist, δz im Sinne Rückblick—Vorblick verstanden.

Denkt man sich, obgleich es in der Regel unmöglich ist, von A auf der Niveaufläche bis C' nivelliert, so wird $\Sigma \delta z$ null; damit folgt aus (1) als Erhebung von C' über die Parallelfläche von A

$$+\sum \varLambda' \delta s', \tag{2}$$

worin $\varLambda'$ die Lotablenkung in den Punkten P' der Niveaufläche von A und $\delta s'$ die horizontalen Entfernungen vorstellt.

Die Erhebung CC' von C über die Niveaufläche von A folgt aus (1) und (2) zu

*) In der Fig. 85 ist dementsprechend zwischen den verschiedenen Lotlinien kein Unterschied gemacht.

$$CC' = \sum \delta z + \sum \Lambda \delta s - \sum \Lambda' \delta s' . \qquad (3)$$

Hierin kann man die beiden letzten Summen vereinigen, wobei man Λ und Λ' auf zwei Punkte P und P' des Profils und der Niveaufläche von A bezogen zu denken hat, die in derselben Lotlinie des Referenzellipsoides übereinanderliegen. Die Differenz $\Lambda - \Lambda'$ stellt alsdann ein Mafs für die Krümmung der wirklichen Lotlinien $P'P$ dar.

Man erhält aus (3) in Strenge:

$$CC' = \sum \delta z + \sum (\Lambda - \Lambda') \frac{\delta s + \delta s'}{2} + \sum (\Lambda + \Lambda') \frac{\delta s - \delta s'}{2}, \qquad (4)$$

darf dies aber in der Regel auf die Näherungsformel:

$$CC' = \sum \delta z + \sum (\Lambda - \Lambda') \delta s \qquad (5)$$

abkürzen, da der Unterschied der Horizontaldistanzen $P_1 P_2 = \delta s$ und $P_1' P_2' = \delta s'$ für den vorliegenden Fall unerheblich ist. In (5) kann man unter δs nunmehr die horizontalen Entfernungen, gemessen in irgend einer Niveaufläche oder auf irgend einem Referenzellipsoid in der Nähe der Erdoberfläche verstehen.

Die Gleichung (5) zeigt deutlich, dafs nicht die Lotabweichung selbst, sondern nur die Differenz der Lotabweichungen in übereinanderliegenden Punkten P und P' des Profils und der Niveaufläche des Ausgangspunktes in betracht kommt. Ist nun der Höhenunterschied PP' gering, so wird auch $\Lambda - \Lambda'$ es sein, und somit zeigt sich wieder, dafs in flachen Gegenden die Lotstörungen keinen erheblichen Einflufs haben.

Es giebt aber eine Form der Gleichung (5), welche dies leicht vergessen macht. Läfst man nämlich den Endpunkt C mit dem Anfangspunkt A zusammenfallen, dergestalt dafs ein geschlossenes Nivellementspolygon entsteht, so giebt (5), da CC' = null wird:

$$\sum \delta z = - \sum (\Lambda - \Lambda') \delta s = - \sum \Lambda \delta s + \sum \Lambda' \delta s ; \qquad (6)$$

da aber $\Sigma \Lambda' \delta s$ für sich allein null ist, wie Ausdruck (2) auf voriger Seite erkennen läfst, so hat man für ein Nivellementspolygon somit anstatt (6) auch:

$$\sum \delta z = - \sum \Lambda \delta s . \qquad (6^*)$$

Jetzt sieht es aus, als hätte die Lotabweichung auf die einzelnen Teile des Polygons grofsen Einflufs, sogar in ebenen Gegenden, weil ja Λ im allgemeinen viel gröfser als $\Lambda - \Lambda'$ ist und die $\Sigma \Lambda \delta s$ für offene Nivellementslinien recht erhebliche Werte erlangen kann*).

Für die praktische Anwendung eignet sich die Reduktion nach

*) Hiernach ist z. B. die in den *Astronom. Nachr.* Bd. 84 1874 auf S. 9—10 und im Schlufspassus S. 16 von *Baeyer* ausgesprochene Ansicht nicht haltbar.



(6*) noch weniger wie die Reduktion mittelst der Schwerkraft. Zunächst ist ersichtlich, dafs aus beobachteten Lotabweichungen A die Summe $\Sigma A \delta s$ nur dann mit genügender Genauigkeit hervorgehen wird, wenn man A in Distanzen von wenigen Kilometern direkt ermittelt, so dafs es genügend scharf interpoliert werden kann. Und diese Messungen würden ebenso aufserordentlich viel Zeit beanspruchen, wie gegenwärtig diejenigen der Schwerebeschleunigung g. Wollte man sich aber doch auf dergleichen einlassen, so hätte die Reduktion mit g immerhin noch den Vorteil, dafs nicht blofs die Schlufsfehler der Polygone (abgesehen von Beobachtungs- und Refraktionsfehlern) daraus hervorgehen, sondern auch die Potentialwerte der Nivellementspunkte (wenn auch noch nicht die Meereshöhen) während *die Reduktion mittelst der Lotabweichungen A* gar nicht zur Kenntnis irgend welcher bestimmter, charakteristischer Werte für die Nivellementspunkte selbst führt: *weder zu Meereshöhen, noch zu Potentialwerten,* da die Werte $\Sigma A \delta s$ nur für geschlossene, nicht aber für offene Nivellementslinien eine Beziehung zu den Höhenunterschieden zwischen Niveauflächen haben, wie die Betrachtung von (1) S. 515 zeigt.

§ 7. **Schwerestörungen im Gebirge.** In Fig. 86 seien A und B zwei Punkte, die sich auf derselben gestörten, d. h. auf derselben wirklichen Niveaufläche befinden. Beide seien durch ein Nivellement verbunden, welches dem Profil ACB folgt, von dem wir

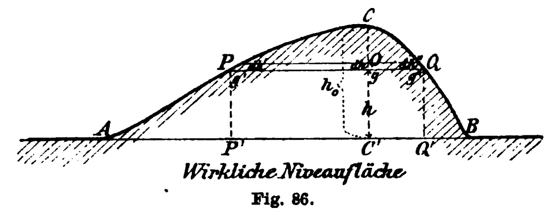


Fig. 86.

der Einfachheit halber voraussetzen, dafs es anfangs nur ansteigt, darnach nur abfällt. In den Höhen h und $h + dh$ über C', der Projektion von C auf die Niveaufläche AB, legen wir je eine Niveaufläche. Sind nun dh', dh und dh'' die Abstände beider bei P, O und Q, und sind g', g und g'' die zugehörigen Schwerkräfte, so ist (vergl. § 1 S. 502):

$$g'dh' = g\,dh = g''dh''$$

und hiernach, wenn CC' mit h_0 bezeichnet wird:

$$h_0 = \int_A^C \frac{g'}{g}\,dh' = \int_B^C \frac{g''}{g}\,dh''\,.$$

Hierbei ist es mit Rücksicht auf § 2 (4) S. 504 gleichgültig, ob die dh' und dh'' mathematisch streng als Differentiale oder praktisch als Zielhöhendifferenzen δz genommen werden. Das Nivellementsergebnis von A bis C ist aber gleich der Summe der dh' und das von B bis C gleich

der Summe der dh'' zu setzen. Daher wird die *Verbesserung des Nivellementsergebnisses von A bis C* auf die Angabe $CC' = h_0$ gleich

$$\int_A^C \frac{g' - g}{g}\, dh' \quad \text{oder sehr nahe} \quad \int_C^C \frac{\delta g' - \delta g}{G}\, dh\,, \tag{1}$$

und *für das Nivellementsergebnis von B bis C* gleich

$$\int_B^C \frac{g'' - g}{g}\, dh'' \quad \text{oder sehr nahe} \quad \int_{C'}^C \frac{\delta g'' - \delta g}{G}\, dh\,, \tag{2}$$

wobei G irgend eine konstante Beschleunigung bezeichnet, die sehr nahe gleich g', g und g'' ist, dergestalt dafs in den Relationen

$$\begin{aligned} g' &= G + \delta g' \\ g &= G + \delta g \\ g'' &= G + \delta g'' \end{aligned} \tag{3}$$

die Gröfsen $\delta g'$, δg und $\delta g''$ kleine Gröfsen vorstellen.

Der Schlufsfehler eines von A über C bis B und dann in der Ebene zurück nach A geführten Nivellements ist im Sinne einer Verbesserung, wie durch Subtraktion von (1) und (2) folgt, sehr nahe gleich

$$\int_C^C \frac{\delta g' - \delta g''}{G}\, dh\,.^{*)} \tag{4}$$

Hat das Terrain, auf welchem das Nivellementsprofil ACB verläuft, in der Richtung seines stärksten Falles nur eine geringe Neigung, so wird die vertikale Anziehung der über AB liegenden Erdschichten auf einen Terrainpunkt mit grofser Annäherung dadurch erhalten, dafs man das Terrain als eben und horizontal ansieht, vergl. im 3. Kap. § 16 S. 166. Aus der Formel (6) daselbst leiten wir sofort ohne Rücksicht auf sonstige Variationen in g für die Schwerkraft g' in P die Relation ab:

$$g' = G\left\{1 - \frac{2h}{R}\left[1 - \frac{3\Theta'}{4\Theta_m}\right]\right\},$$

wenn wir jetzt unter G die ungestörte, nun als konstant zu betrachtende Schwerkraft im Niveau AB verstehen und wenn Θ' die mittlere Dichtigkeit der Schichten zwischen P und P' bezeichnet. Die Höhe PP' ist hierbei in ausreichender Genauigkeit gleich h gesetzt worden.

Es ist also für einen Punkt P zwischen A und C:

$$\delta g' = -G\,.\,\frac{2h}{R}\left[1 - \frac{3\Theta'}{4\Theta_m}\right] \tag{5}$$

---

*) Dies stimmt überein mit dem S. 509 u. angegebenen allgemeinen Ausdruck für den Schlufsfehler, welcher den Sinn einer negativen Verbesserung hat.



und entsprechend für einen Punkt Q zwischen C und B:

$$\delta g'' = -G \cdot \frac{2h}{R}\left[1 - \frac{3\Theta''}{4\Theta_m}\right]. \quad (6)$$

Man erkennt nun augenblicklich, daſs, insoweit diese Ausdrücke Geltung haben, *bei einem homogenen Gebirge* $\delta g' = \delta g''$ ist und daher *der Schluſsfehler verschwindet.* Dies findet ganz unabhängig von der Form des Gebirges statt, solange nur vorherrschend ein *sanftes Gefälle der Gebirgsabhänge* in der Gegend des Nivellements vorhanden ist.

Um zu ermitteln, welchen Einfluſs bei einem homogenen Gebirge der Fehler der Formeln (5) und (6) wegen der Neigung der Abhänge hat, werden wir in den folgenden Paragraphen für einen Gebirgsrücken in der Form eines liegenden, dreiseitigen Prismas eine strenge Untersuchung des Schluſsfehlers anstellen. Über den Fehler der Formeln (5) und (6) giebt das vierte Kapitel S. 283 § 7 (6) Aufschluſs, wobei man nach (9) S. 286 daselbst nur $k^2\Theta$ durch GK zu ersetzen hat. Wir verfolgen dies aber nicht weiter.

Die Ausdrücke (5) und (6) gestatten nun auch eine Vorstellung von dem Einfluſs ungleicher Dichtigkeiten der Gebirgsmassen bei nicht zu steilen Abhängen in der Nähe des Nivellementsprofiles zu gewinnen. Für diesen Fall wird der Schluſsfehler (4) gleich

$$\int_{C'}^{C} \frac{3}{4} \, \frac{\Theta' - \Theta''}{\Theta_m} \, \frac{2h}{R} \, dh \, .$$

Hierin sind auſser h strenggenommen Θ' und Θ'' variabel. Nehmen wir der Einfachheit halber Θ' für den Profilteil AC und Θ'' für den Teil BC konstant, so läſst sich die Integration ausführen, und es folgt als *Schluſsfehler wegen Ungleichheit der Dichtigkeit der Gebirgsmassen*

$$\frac{3}{4} \, \frac{\Theta' - \Theta''}{\Theta_m} \cdot \frac{h_0^2}{R} \, . \quad (7)$$

Diese Formel giebt indessen den Betrag des Schluſsfehlers zu groſs, weil in der Nähe von C, dieses als höchsten Punkt des Profils gedacht, Θ' und Θ'' in Wirklichkeit nahezu gleich sind. Demgemäſs kann man für h_0 in (7) einen etwas kleineren Wert als denjenigen setzen, welcher der gröſsten Höhe CC' gleich ist.

Setzen wir nun $\Theta' - \Theta'' = 1$ bei $\Theta_m = 5{,}6$ und $h_0 = 1250^m$, so folgt der Schluſsfehler (7) gleich

$$0{,}033^m. \quad (8)$$

Diese Zahl dürfte denjenigen Teil der Schluſsfehler der Alpenpolygone, welcher von ungleicher Dichte der Schichten herrührt, wegen des groſsen angenommenen Wertes für $\Theta' - \Theta''$ eher über- als unterschätzen, selbst wenn h_0 etwas zu gering angenommen wäre.

Fragen wir nach der Verbesserung des Nivellementsergebnisses für $CC' = h_0$, welches aus dem Nivellement AC hervorgeht, so ist für $\delta g'$ bei nicht zu steilem Abfall des Gebirgsabhanges wieder Ausdruck (6) ausreichend. Für den Punkt O in CC' ist ferner zu setzen

$$\delta g = -G\left\{\frac{2h}{R}\left[1 - \frac{3\Theta_1}{4\Theta_m}\right] + \frac{2(h_0 - h)}{R}\,\frac{3\Theta_2}{4\Theta_m}\right\}, \tag{9}$$

wenn Θ_1 die mittlere Dichtigkeit der Schichten zwischen C' und O und Θ_2 diejenige für die Schichten zwischen C und O angiebt.

Um eine Vorstellung zu gewinnen, reicht die Annahme $\Theta' = \Theta_1 = \Theta_2$ vollkommen aus. Mit Rücksicht auf (1) folgt dann als *Verbesserung des Nivellementsergebnisses von A bis C auf die Angabe $CC' = h_0$* der Ausdruck:

$$\frac{3\Theta'}{4\Theta_m}\int_{C'}^{C}\frac{2(h_0 - h)}{R}\,dh,$$

d. i. aber

$$\frac{3\Theta'}{4\Theta_m}\cdot\frac{h_0^2}{R} \tag{10}$$

und speziell für $\Theta' = \frac{1}{2}\Theta_m$

$$\frac{3h_0^2}{8R}, \text{ d. i. } 0{,}06 \,.\, (h_0 \text{ in } km)^2 \text{ Meter.} \tag{10*}$$

Diese Ausdrücke gelten übrigens nicht nur für den höchsten Punkt C der Nivellementslinie AC, sondern wie man leicht erkennt, *auch für Zwischenpunkte*; ferner gelten sie auch dann noch, wenn AC nicht wie in Fig. 86 immer ansteigt, sondern wiederholt steigt und fällt. Differenzen der drei Werte Θ', Θ_1 und Θ_2 geben nur Einflüsse von der Ordnung (7); dieselben kommen jedenfalls bei einem rohen Überschlag gegen den Hauptwert (10) bezw. (10*) nicht weiter in betracht.

§ 8. **Homogener Gebirgsrücken von der Form eines liegenden, dreiseitigen Prismas.** Im vierten Kapitel sind Näherungsformeln für die Anziehung eines liegenden, dreiseitigen Prismas auf einen im mittleren Querprofil gelegenen Punkt entwickelt worden, wobei eine beträchtliche Länge des Prismas im Verhältnis zur Breite Erfordernis für einen hinlänglichen Grad der Annäherung war. Diese Formeln gestatten den Einflufs der Schwerestörung auf nivellierte Höhen und Schlufsfehler für Nivellements *im mittleren Teile* eines prismatischen Gebirgsrückens von jeder Querschnittsform zu ermitteln. Wir nehmen dabei der Einfachheit halber an, dafs das Nivellement direkt auf dem mittelsten Querprofil selbst stattfindet. Denn für ein Nivellement, welches in der Nähe des letzteren in Serpentinen die Höhe ersteigt, müssen wegen der Geringfügigkeit der Anziehungskomponente in der Längsrichtung (vergl. (7) S. 281) wesentlich dieselben Resultate gelten.

Würden wir nun die Formeln des vorigen Paragraphen anwenden, so müfsten wir zunächst Ausdrücke für $\delta g'$, δg und $\delta g''$ aufstellen. Diese Ausdrücke sind zwar im vierten Kapitel unmittelbar enthalten, aber sie sind für $\delta g'$ und δg so verschieden, dafs eine Vereinfachung in ihrer Differenz nicht stattfindet und infolge dessen das zu bildende Integral eigentlich in zwei zerfällt. Wir ziehen es daher vor, mit den Lotablenkungen zu rechnen, wobei zwar auch zwei Integrale zu bilden sind, deren eines aber bereits durch die im vierten Kapitel aufgestellten Potentialwerte berechnet ist.

In Fig. 87 sei ABC das mittlere Querprofil; AB legen wir in die ungestörte Niveaufläche, von deren Krümmung wir absehen. AB' sei diejenige gestörte, also wirkliche Niveaufläche, welche durch A führt. Bezeichnen wir nun die Lotabweichung in P mit Λ, in P' (vertikal unter P in der Niveaufläche AB') mit Λ' und das Differential der horizontalen, in Richtung AB gemessenen Entfernungen mit ds, so ist mit Rücksicht auf § 6 S. 516, insbesondere Gleichung (5), die Höhe von C über der wirklichen Niveaufläche von A:

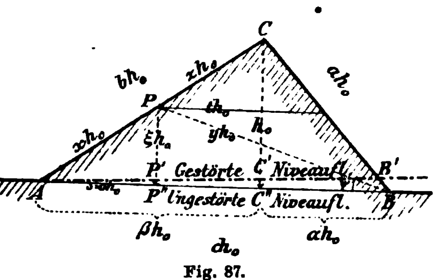


Fig. 87.

$$CC' = \sum \delta z + \int_A^C \Lambda\, ds - \int_A^C \Lambda' ds\,, \tag{1}$$

wobei $\Sigma \delta z$ das Nivellementsresultat entlang AC bezeichnet. Das erste der beiden Integrale ist noch zu bilden, der Wert des zweiten aber, welches offenbar $C'C''$ gleich ist, kann leicht mittelst der Differenz der beiden Werte des Potentiales v' für A und C'' aus dem 4. Kapitel § 7 (1) S. 282 gefunden werden. (Ehe wir zu diesen Ausrechnungen schreiten, sei noch bemerkt, dafs man in (1) die oberen Grenzen der Integration nur auf P bezw. P' zu verlegen braucht, um die entsprechende Gleichung für die Höhe PP' zu erhalten. Obwohl wir hierauf nicht weiter eingehen, wollten wir diese leichte Umformung der folgenden Rechnungen doch auch als einen Vorzug der Anwendung der Lotablenkungen im vorliegenden Falle gegenüber der Benutzung der Schwerestörungen, die für diesen allgemeinen Fall eine mühsame ist, hervorheben).

Setzen wir $s = \sigma h_0$ und benutzen überhaupt die Bezeichnungen der Fig. 87, so wird mit Rücksicht auf die Formeln (5) und (9) § 7 S. 284 u. 286, welche Λ in denselben Bezeichnungen geben:

$$\int_A^C \Lambda\, ds = K h_0^2 \int_0^\beta \left\{ \begin{array}{c} \xi \log\operatorname{nat}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{t}{2} \sin 2B \log\operatorname{nat}\left(\frac{y}{z}\right)^2 \\ + 2t\,(A + \psi) \sin^2 B \end{array} \right\} d\sigma\,.$$

Behufs Ausrechnung setzen wir dafür

$$\int_A^C \Delta\, ds = K h_0^2 (\mathrm{I} + \mathrm{II})\,, \tag{2}$$

mit

$$\mathrm{I} = \int_0^\beta \left\{ \left(\xi + \frac{t}{2} \sin 2B\right) \operatorname{lognat} y^2 + 2 \sin^2 B\,.\, t\psi \right\} d\sigma \tag{3}$$

und

$$\mathrm{II} = \int_0^\beta \left\{ 2A \sin^2 B\,.\, t - 2\xi \operatorname{lognat} x - \sin 2B\,.\, t \operatorname{lognat} z \right\} d\sigma\,. \tag{4}$$

Bei der weiteren Behandlung dieser Ausdrücke ist von den folgenden Relationen, welche aus Fig. 87 entnommen werden können, Gebrauch zu machen:

$$\xi = \frac{\sigma}{\beta} \qquad y^2 = \frac{\sigma^2}{\beta^2} + (c - \sigma)^2 \qquad x = \frac{b}{\beta}\sigma$$

$$z = \frac{b}{\beta}(\beta - \sigma) \qquad t = \frac{c}{\beta}(\beta - \sigma) \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2B = \frac{\alpha}{a^2} \qquad \sin^2 B = \frac{1}{a^2} \qquad a^2 = 1 + \alpha^2 \qquad b^2 = 1 + \beta^2$$

$$\psi = \operatorname{arc\,tan} \frac{\sigma}{\beta(c - \sigma)}\,.$$

Die letzte dieser Relationen setzt voraus, dafs $c - \sigma$ positiv ist, was für alle Werte von A bis C'' nur der Fall sein kann, wenn Winkel $B \leqq \frac{\pi}{2}$ ist, eine Forderung, die wir für naturgemäfse Formen des Gebirgsrückens als erfüllt betrachten dürfen.

Drückt man in (3) alle Variable bis auf y^2 und ψ mittelst der (5) durch σ aus und eliminiert mittelst dieser Gleichungen auch B, so folgt

$$a^2\beta \cdot \mathrm{I} = \int_0^\beta \left\{ \left[(1 - \alpha\beta)\,\sigma + \alpha\beta c\right] \operatorname{lognat} y^2 + 2(\beta - \sigma)\, c\psi \right\} d\sigma\,.$$

Dies formen wir durch teilweise Integration um, wobei wir beachten, dafs

$$\frac{d \operatorname{lognat} y^2}{d\sigma} = 2\, \frac{(1 + \beta^2)\,\sigma - \beta^2 c}{\sigma^2 + \beta^2 (c - \sigma)^2}$$

und

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{\beta c}{\sigma^2 + \beta^2 (c - \sigma)^2}$$

ist. Es wird hiermit

$$a^2\beta \cdot \mathrm{I} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \left[\frac{1 - \alpha\beta}{2}\,\sigma + \alpha\beta c\right] \sigma \operatorname{lognat} y^2 + (2\beta - \sigma)\, c\sigma\psi \right\}_{\sigma=0}^{\sigma=\beta} \\ - \int_0^\beta \left\{ (1 - \alpha\beta)\,\sigma + \alpha\beta c + \frac{(1 + \alpha\beta)\cdot\sigma - \alpha\beta c}{\sigma^2 + \beta^2 (c - \sigma)^2}\, \beta^2 c^2 \right\} d\sigma \end{array} \right\}.$$

Durch Einführung der Grenzen im Ausdrucke rechter Hand außerhalb des Integralzeichens, durch Ausführung der Integration für die beiden ersten Teile des Integrales und durch Substitution von

$$\sigma = \frac{v+\beta}{b^2}\beta c\,, \quad \text{womit} \quad v = \frac{b^2}{\beta c}\sigma - \beta$$

wird, im dritten Teile desselben, ergiebt sich:

$$a^2\beta \cdot \mathrm{I} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2+\alpha c}{2}\beta^2(\log\operatorname{nat} a^2 - 1) + Bc\beta^2 \\ -\frac{\beta^2 c^2}{b^2}\int\limits_{-\beta}^{(1-\alpha\beta):c} \frac{(1+\alpha\beta)v + (\beta-\alpha)}{1+v^2}\,dv \end{array} \right\}.$$

Das rechter Hand noch zu bildende Integral ist bis auf eine Konstante gleich

$$\frac{1}{2}(1+\alpha\beta)\log\operatorname{nat}(1+v^2) + (\beta-\alpha)\arctan v\,.$$

Wenn v von $-\beta$ bis $(1-\alpha\beta):c$ geht, so geht $1+v^2$ von b^2 bis $a^2b^2:c^2$ und $\arctan v$ von $-\frac{\pi}{2}+A$ bis $A+B-\frac{\pi}{2}$. Das betreffende Integral wird daher gleich

$$\frac{1+\alpha\beta}{2}\log\operatorname{nat}\frac{a^2}{c^2} + (\beta-\alpha)B$$

und die letzte Gleichung geht über in

$$a^2 \cdot \mathrm{I} = \beta \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2+\alpha c}{2}(\log\operatorname{nat} a^2 - 1) \\ -\frac{(1+\alpha\beta)c^2}{2b^2}\log\operatorname{nat}\frac{a^2}{c^2} + \frac{a^2 c}{b^2}B \end{array} \right\}. \tag{6}$$

Führen wir jetzt die Relationen (5) in die Relation (4) für II ein, um alle Variable durch σ auszudrücken, so ergiebt sich:

$$a^2\beta \cdot \mathrm{II} = \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_0^\beta \left\{2Ac(\beta-\sigma) - 2a^2\sigma\log\operatorname{nat}\frac{b\sigma}{\beta}\right\}d\sigma \\ -2\alpha c\int\limits_0^\beta (\beta-\sigma)\log\operatorname{nat}\frac{b(\beta-\sigma)}{\beta}\,d(\beta-\sigma) \end{array} \right\},$$

wobei im zweiten Integrale die Grenzen auf $\beta-\sigma$ als Veränderliche bezogen sind. Die Integration führen wir in den Gliedern, welche einen Logarithmus enthalten, zunächst nur teilweise aus und erhalten:

$$a^2\beta \cdot \mathrm{II} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{Ac\sigma(2\beta-\sigma) - a^2\sigma^2\log\operatorname{nat}\frac{b\sigma}{\beta}\right\}_{\sigma=0}^{\sigma=\beta} \\ -\alpha c\left\{(\beta-\sigma)^2\log\operatorname{nat}\frac{b(\beta-\sigma)}{\beta}\right\}_{\beta-\sigma=0}^{\beta-\sigma=\beta} \\ +\int\limits_0^\beta \left\{a^2\sigma + \alpha c(\beta-\sigma)\right\}d\sigma \end{array} \right\},$$

hieraus aber

$$a^2 . \text{II} = \beta \left\{ - \frac{a^2 + \alpha c}{2} (\log \text{nat}\, b^2 - 1) + Ac \right\} \cdot \tag{7}$$

Die Vereinigung der Resultate (6) und (7) mit (2) führt zu der Gleichung:

$$\int_A^C A\, ds = K h_0^2 \beta \left\{ \begin{array}{c} \frac{a^2 + \alpha c}{a^2} \log \text{nat} \frac{a}{b} - \frac{(1 + \alpha\beta) c^2}{a^2 b^2} \log \text{nat} \frac{a}{c} \\ + \left(\frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} \right) c \end{array} \right\} \cdot \tag{8}$$

§ 9. **Fortsetzung: Der Fehler in der nivellierten Gebirgshöhe und der Schlufsfehler des Nivellementspolygones** $ACBA$. Der Fehler des aus dem Nivellement von A bis C für die Höhe von C über A folgenden Wertes $\Sigma \delta z$ ist nach (1) des vorigen Paragraphen im Sinne einer Verbesserung gleich

$$\int_A^C A\, ds - \int_A^{C'} A'\, ds. \tag{1}$$

Den ersten Teil giebt die Gleichung (8) des vorigen Paragraphen; den zweiten finden wir in der bereits in der Anmerkung zu (1) des vorigen Paragraphen angedeuteten Weise, wozu wir den Wert des Potentials v' mittelst (1) § 7 S. 282 für die Punkte A und C'' bilden. Es ist:

$$v'_{C''} = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{h_0} \right) c - \frac{\pi}{4} (\alpha \sin 2B + \beta \sin 2A) \\ - \frac{\alpha^2 \cos B}{a} \log \text{nat}\, \alpha - \frac{\beta^2 \cos A}{b} \log \text{nat}\, \beta \end{array} \right\}$$

und

$$v'_A = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{b h_0} \right) c - Ac \frac{\sin B \sin C}{\sin A} \\ + \frac{c^2 \cos B}{a} \log \text{nat} \frac{b}{c} \end{array} \right\}.$$

Mit Rücksicht auf den letzten Teil des angezogenen § 7 S. 286 giebt die durch G dividierte Differenz $v'_{C''} - v'_A$ die Erhebung $C'C''$ der durch A führenden gestörten Niveaufläche über C'', und zwar wird die Division dadurch bewirkt, dafs $k^2 \Theta$ durch K ersetzt wird. $C'C''$ ist aber der Wert des zweiten in (1) auftretenden Integrales. So findet sich nach einigen Reduktionen, die mit Beachtung von Fig. 87 S. 521 und der Relationen (5) des vorigen Paragraphen leicht zu bewirken sind:

$$\int_A^{C'} A'\, ds = K h_0^2 \left\{ \begin{array}{c} c \log \text{nat}\, b + \frac{c^2 \alpha}{a^2} \log \text{nat} \frac{c}{b} + A \frac{c^2}{a^2} \\ - \frac{\alpha^3}{a^2} \log \text{nat}\, \alpha - \frac{\beta^3}{b^2} \log \text{nat}\, \beta - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right) \end{array} \right\} \cdot \tag{2}$$

Vereinigt man dieses Resultat nach Mafsgabe von (1) mit (8) des vorigen Paragraphen, fafst dabei die Glieder mit dem Logarithmus derselben Gröfse zusammen und nimmt sodann noch einige weitere Umformungen vor, so folgt als *Verbesserung der von A bis C nivellierten Höhe $\Sigma\delta z$* auf den wahren Wert CC' der Ausdruck:

$$K h_0^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)-\left(\frac{\alpha}{a^2}\log\text{nat}\,a+\frac{\beta}{b^2}\log\text{nat}\,b\right) \\ -\left(\frac{\alpha^3}{a^2}\log\text{nat}\,\frac{a}{\alpha}+\frac{\beta^3}{b^2}\log\text{nat}\,\frac{b}{\beta}\right) \\ +c\left(\frac{\log\text{nat}\,\frac{c}{b}}{a^2}-\frac{\log\text{nat}\,\frac{c}{a}}{b^2}+\frac{B\beta}{b^2}-\frac{A\alpha}{a^2}\right) \end{array} \right\}. \tag{3}$$

Nach § 7 (9) S. 286 ist hierzu K durch die Relation gegeben:

$$K = \frac{3\Theta}{4\Theta_m}\cdot\frac{1}{\pi R}, \tag{3*}$$

worin Θ die Dichtigkeit der Masse des prismatischen Gebirgsrückens bezeichnet.

Vertauscht man in (3) A mit B, α mit β, a mit b, so ergiebt sich die Verbesserung der von B bis C nivellierten Höhe $\Sigma\delta z$ auf den wahren Wert der Erhebung von C über die durch B führende wirkliche Niveaufläche. Durch Subtraktion dieses Ausdruckes von (3) folgt diejenige Verbesserung, welche nötig ist, um das Ergebnis des Nivellements ACB auf den Betrag der Erhebung von B über die wirkliche Niveaufläche von A zu bringen. Da nun bei fortgesetztem Nivellement von B bis A in der Ebene um den Gebirgsrücken herum, oder überhaupt auf einem nahezu in einer Niveaufläche liegenden Wege, eine weitere Störung nicht entsteht, so ist jene Verbesserung zugleich der Schlufsfehler des Nivellementspolygones.

Der Schlufsfehler des Nivellementspolygones $ACBA$ ist somit im Sinne einer Verbesserung gleich*):

$$2 K h_0^2 c \left(\frac{\log\text{nat}\,\frac{c}{b}}{a^2}-\frac{\log\text{nat}\,\frac{c}{a}}{b^2}+\frac{B\beta}{b^2}-\frac{A\alpha}{a^2}\right). \tag{4}$$

Dafs der Schlufsfehler null ist für ein symmetrisches Profil und dafs er wächst mit zunehmender Unsymmetrie des Profils ist schon mit Rücksicht auf den Ausdruck (4) § 7 S. 518 klar. Es zeigt sich dies aber auch jetzt ganz deutlich. Differenziert man

*) Der Schlufsfehler wurde zuerst vollständig 1880 von *Clarke* in seiner *Geodesy* p. 299 und unabhängig hiervon vom Verf. 1882 in der *Zeitschrift für Vermessungswesen* Bd. 11 S. 233 u. ff. angegeben, nachdem bereits 1872 *Zachariae* in Bd. 80 der *Astronom. Nachr.* S. 305—318 und 383, Nr. 1916 und 1920, das Problem in die Geodäsie eingeführt, aber unvollkommen gelöst hatte.

nämlich den so eben abgeleiteten Ausdruck (4) nach β, wobei die Relationen:

$$\alpha = c - \beta \qquad a^2 = 1 + \alpha^2 \qquad b^2 = 1 + \beta^2$$
$$A = \text{arc cot}\, \beta \qquad B = \text{arc cot}\, \alpha$$

zu beachten sind, so folgt als Differentialquotient:

$$2 K h_0^2 c \left\{ \begin{array}{c} \frac{\alpha}{a^4} \log \text{nat} \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \frac{\beta}{b^4} \log \text{nat} \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ - \frac{\beta^2 - 1}{b^4} B - \frac{\alpha^2 - 1}{a^4} A \end{array} \right\}. \tag{5}$$

Setzt man hierin $\beta = \alpha$, dann $\beta = 3\alpha$ und zuletzt $\beta = c$ mit $\alpha =$ null, so überzeugt man sich in jedem dieser drei Fälle durch Ausrechnung des Wertes des Differentialquotienten für einige Werte von α bezw. c, vielleicht unterstützt durch eine graphische Darstellung, ohne Schwierigkeit davon, daſs (5) in diesen drei Fällen positiv ist; hieraus kann man aber auf das gleiche Verhalten für alle in betracht kommenden Profilformen schlieſsen.

Somit hat der Schluſsfehler (4) den gröſsten Wert, wenn das Profil *auf einer Seite vertikal* abfällt. Dieser *gröſste Schluſsfehler* ist gleich

$$K h_0^2 \frac{c^2}{c^2 + 1} \left\{ \pi - \frac{2 \log \text{nat}\, c}{c} - \frac{c^2 + 1}{c} \log \text{nat} \frac{c^2 + 1}{c^2} \right\}, \tag{6}$$

wie sich aus (5) durch die Substitution von $B = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 0$, $\beta = c$, $a = 1$, $b^2 = c^2 + 1$ ergiebt.

Für die entsprechende Profilform geht übrigens der Schluſsfehler, wie es sein muſs und wie man sich durch Anwendung vorstehender Substitutionen auf (3) überzeugen kann, in den Fehler der nivellierten Höhe von A bis C über.

Der gröſste Schluſsfehler kann näherungsweise für nicht zu kleine Werte von c durch den Näherungsausdruck

$$K h_0^2 \pi,$$

welcher mit Rücksicht auf den durch (3*) angegebenen Wert von K gleich ist

$$\frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{h_0^2}{R}, \tag{6*}$$

dargestellt werden. Entwickelt man nämlich (6) nach Potenzen von $1 : c^2$, so folgt unter ausschlieſslicher Berücksichtigung der gröſsten Glieder:

$$K h_0^2 \pi \left\{ 1 - \frac{2 \log \text{nat}\, c + 1}{\pi c} - \frac{1}{c^2} + \dots \right\}, \tag{7}$$

woraus man die Zulässigkeit der Näherungsformel für gröſsere Werte von c leicht erkennt und zugleich ersieht, daſs dieselbe den Schluſs-

fehler etwas überschätzt. Die Überschätzung nimmt aber mit wachsendem Werte von c ab; sie ist 30% des Näherungswertes für $c = 5$, 20% für $c = 10$ u. s. f.

Eine Überschätzung des Schlufsfehlers im allgemeinen findet durch (6*) auch insofern statt, als ein vertikaler Abfall kaum irgendwo in bedeutender Ausdehnung vorkommen dürfte. Ersetzen wir aber denselben durch einen nicht vertikalen, wenn auch stark geneigten, so wird der Schlufsfehler viel kleiner. Dies zeigt schon der Wert des Differentialquotienten (5) des Schlufsfehlers für $\alpha =$ null. Derselbe beträgt

$$2Kh_0^2\left\{c \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{c} - \frac{\pi}{2}\frac{c(c^2-1)}{(c^2+1)^2} + \frac{2c^2}{(c^2+1)^2}\log\operatorname{nat} c\right\},$$

oder in hinreichender Annäherung für gröfsere c:

$$2Kh_0^2.$$

Für kleine α ist hiernach der Schlufsfehler bei nicht zu kleinen Werten von c angenähert gleich

$$\frac{3\Theta}{4\Theta_m}\frac{h_0^2}{R}\left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right). \tag{8}$$

Wie die Vergleichung mit (4) für numerische Werte zeigt, gewährt dieser Ausdruck sogar noch bei $\alpha = 1$ eine rohe Annäherung. Während er nämlich für $c = 10$ nahezu den richtigen Wert giebt, überschätzt er ihn für $c = 5$ um etwa 25% des Näherungswertes und unterschätzt ihn für grofse c bis zu 38% desselben.

Für 45° Abfall der steileren Seite kann (4) bei nicht zu kleinen c durch den Näherungsausdruck

$$\frac{3\Theta}{4\Theta_m}\frac{h_0^2}{R}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi c}\log\operatorname{nat}\frac{c^2}{2} + \dots\right\}. \tag{9}$$

ersetzt werden, welcher selbst für $c = 5$ nur 20% des Näherungswertes Fehler giebt, für $c = 10$ aber nur noch 4%. Dieser Ausdruck zeigt, dafs der Schlufsfehler für 45° Abfall der steileren Seite nur $^1/_3$ bis $^1/_2$ des maximalen Schlufsfehlers (6*) beträgt. In praktischen Fällen dürfte er somit kaum diesen Betrag erreichen und $^1/_3$ als Maximum anzunehmen sein.

In Bezug auf den Fehler der von A bis C nivellierten Höhe war schon in § 7 (10) S. 520 unter Voraussetzung flacher Abdachung des Hanges AC der Ausdruck (6*), der zugleich den gröfsten Wert des Schlufsfehlers repräsentiert, als Näherungswert ermittelt worden. Hiermit stimmt nun auch der Ausdruck (3) überein, wie man zunächst leicht für Profile erkennt, die beiderseits flach abgedacht sind. Alsdann ist nämlich $\alpha : a$ und $\beta : b$ nahe gleich 1; ferner ist immer $\log\operatorname{nat} a$ im Verhältnis zu a und $\log\operatorname{nat} b$ im Verhältnis zu b klein. Demnach reduziert sich in der grofsen Klammer von (3) das 1. Glied auf π,

während das 2., 3. und 4., welches letztere den halben Schlufsfehler repräsentiert, wegfallen. Für $\alpha =$ null, also vertikalen Abfall einerseits, geht, wie schon bemerkt, (3) in aller Strenge in den gröfsten Wert des Schlufsfehlers über; in diesem Falle gilt also (6*) mit derselben Annäherung für den Höhenfehler wie für den Schlufsfehler. Man überzeugt sich aber auch leicht für beliebige kleinere Werte von α, dafs (6*) eine Annäherung gewährt. Beispielsweise geben für $\alpha = 1$ in der grofsen Parenthese von (3) das 1. Glied $3\pi : 4$ und das 4. Glied, welches dem halben Schlufsfehler entspricht, nach (9) $\pi : 4$; das 2. und 3. Glied aber geben, wie leicht ersichtlich, überhaupt in keinem Falle etwas Erhebliches. Die grofse Parenthese in (3) wird also angenähert gleich π und der Ausdruck (3) gleich $Kh_0^2\pi$, d. i. gleich (6*).

§ 10. Fortsetzung: Übersicht des Verhaltens in einigen besonderen Fällen.

Um die Übersicht zu fördern, wurden für acht verschieden geböschte Profile mit

$$h_0 = 2500^m$$

die Lotablenkungen berechnet, graphisch dargestellt und daraus eine graphische Darstellung der Schlufsfehler und Fehler der nivellierten Höhen abgeleitet.

Die Profile bilden 2 Gruppen mit je gleicher Basis von bezw. 25000 und 250000^m, also mit

$$c = 10 \text{ und } c = 100\,.$$

Die Projektion C' der Spitze C auf die Basis AB fällt in jeder Gruppe der Reihe nach auf $^6/_6$, $^5/_6$, $^4/_6$, $^3/_6$ der Länge AB von B aus.

Die Lotablenkungen Λ für eine Reihe von Punkten P auf den Hängen AC und BC, sowie die Lotablenkungen Λ' für die Projektionen P' dieser Punkte auf die Grundfläche AB, ferner die Differenzen $\Lambda - \Lambda'$, welche die Lotkrümmung von P bis P' anzeigen, sind in den folgenden Zahlentabellen enthalten. Auf eine genügend scharfe Ermittelung dieser Differenzen $\Lambda - \Lambda'$, welche allein auf das Nivellement einwirken, wurde besonders bedacht genommen. (S. die zwei nächsten Seiten. Zu den Profilen IV und VIII sind auch die Tabellen im 4. Kap. § 11 S. 298 und § 12 S. 301 zu vergleichen.)

Die Lotstörungen Λ und Λ' sowohl als ihre Differenzen $\Lambda - \Lambda'$ sind in Tafel II als Ordinaten zu den σ als Abscissen graphisch aufgetragen, und zwar Λ und Λ' nach oben, $\Lambda - \Lambda'$ zur besseren Übersicht in vergröfsertem Mafsstabe nach unten. Die Verzeichnung bot dadurch Schwierigkeit, dafs der Differentialquotient von Λ in A, B und C, derjenige von Λ' in A und B unendlich wird, wie schon im 4. Kap. S. 297 und 299 für die Profilformen IV und VIII angegeben ist. Für die Differenz $\Lambda - \Lambda'$ bleibt ein stark hervortretendes

Lotablenkungen im mittleren Querprofil *ACB* langgestreckter Gebirgsrücken.

1. Gruppe: $c = 10$, $h_0 = 2500^m$.

Profil I.

$\beta : \alpha = 6 : 0$.

σ	A	A'	$A - A'$
0	+ 19,43″	+ 19,43″	+ 0,00″
5/3	+ 24,66	+ 23,63	+ 1,03
10/3	+ 23,94	+ 21,96	+ 1,98
5	+ 19,44	+ 16,60	+ 2,84
20/3	+ 10,49	+ 6,92	+ 3,57
70/9	+ 0,74	− 3,18	+ 3,92
25/3	− 6,11	− 10,04	+ 3,93
9	− 17,20	− 20,93	+ 3,73
55/6	− 21,40	− 25,03	+ 3,63
9,5	− 28,92	− 32,18	+ 3,26
9,8	− 37,98	− 40,78	+ 2,80
9,9	− 41,39	− 44,05	+ 2,66
10	− 45,00	− 47,48	+ 2,48

Profil II.

$\beta : \alpha = 5 : 1$.

σ	A	A'	$A - A'$
0	+ 21,23″	+ 21,23″	0,00″
5/3	+ 27,06	+ 25,59	+ 1,47
10/3	+ 25,49	+ 22,68	+ 2,81
5	+ 18,88	+ 14,99	+ 3,89
20/3	+ 5,46	+ 1,01	+ 4,45
7,5	− 6,02	− 9,74	+ 3,72
8	− 16,48	− 17,68	+ 1,20*
8,3	− 26,53	− 22,95	− 3,58
25/3*	− 28,53	− 23,55	− 4,98
8,35	− 29,98	− 23,84	− 6,14
8,5	− 38,36	− 26,51	− 11,85
8,65	− 41,16	− 29,11	− 12,05
9	− 47,22	− 34,68	− 12,54
55/6	− 48,62	− 36,95	− 11,67
9,5	− 48,83	− 40,31	− 8,52
9,7	− 47,10	− 41,33	− 5,77
9,8	− 45,70	− 41,50	− 4,20
10	− 39,28	− 39,28	− 0,00

Profil III.

$\beta : \alpha = 4 : 2$.

σ	A	A'	$A - A'$
0	+ 23,57″	+ 23,57″	0,00″
1	+ 29,26	+ 27,87	+ 1,39
5/3	+ 30,09	+ 27,85	+ 2,24
10/3	+ 26,86	+ 22,72	+ 4,14
5	+ 15,94	+ 10,61	+ 5,33
6	+ 3,41	− 1,00	+ 4,41
19/3	− 2,91	− 5,73	+ 2,82
20/3*	− 12,89	− 10,69	− 2,20
7	− 23,04	− 15,68	− 7,36
7,5	− 31,35	− 22,50	− 8,85
25/3	− 38,16	− 31,03	− 7,13
9	− 39,76	− 34,74	− 5,02
9,5	− 37,93	− 35,29	− 2,64
10	− 30,83	− 30,83	− 0,00

Profil IV.

$\beta : \alpha = 3 : 3$.

σ	A	A'	$A - A'$
0	+ 26,74″	+ 26,74″	0,00″
1,5	+ 34,05	+ 30,57	+ 3,48
3	+ 29,13	+ 23,06	+ 6,07
4	+ 20,01	+ 13,39	+ 6,62
4,5	+ 12,69	+ 7,06	+ 5,63
4,9	+ 3,75	+ 1,44	+ 2,31
5*	0,00	0,00	0,00

2. *Gruppe:* $c = 100$, $h_0 = 2300^m$.

Profil V.

$\beta : \alpha = 6 : 0$.

σ	A	A'	$A - A'$
0	+ 19,50″	+ 19,50″	0,00″
10	+ 23,78	+ 23,72	+ 0,06
25	+ 24,85	+ 24,70	+ 0,15
40	+ 22,66	+ 22,42	+ 0,24
55	+ 17,35	+ 17,02	+ 0,33
70	+ 7,94	+ 7,52	+ 0,42
82	− 4,75	− 5,24	+ 0,49
90	− 19,04	− 19,57	+ 0,53
95	− 34,94	− 35,48	+ 0,54
98	− 54,16	− 54,67	+ 0,51
100	− 89,80	− 90,10	+ 0,30

Profil VI.

$\beta : \alpha = 5 : 1$.

σ	A	A'	$A - A'$
0	+ 21,32″	+ 21,32″	0,00″
$^{50}/_3$	+ 27,16	+ 27,01	+ 0,15
$^{100}/_3$	+ 25,60	+ 25,31	+ 0,29
50	+ 18,98	+ 18,54	+ 0,44
$^{175}/_3$	+ 13,34	+ 12,83	+ 0,51
$^{200}/_3$	+ 5,41	+ 4,83	+ 0,58
$^{220}/_3$	− 3,58	− 4,21	+ 0,63
80	− 17,55	− 18,15	+ 0,60
82	− 24,20	− 24,59	+ 0,39
$^{250}/_3$*	− 31,35	− 30,12	− 1,23
84	− 35,54	− 33,01	− 2,53
85	− 39,61	− 36,81	− 2,80
$^{175}/_2$	− 46,24	− 43,68	− 2,56
$^{275}/_3$	− 51,42	− 49,63	− 1,79
95	− 51,55	− 50,43	− 1,12
98	− 48,20	− 47,74	− 0,46
100	− 41,90	− 41,90	− 0,00

Profil VII.

$\beta : \alpha = 4 : 2$.

σ	A	A'	$A - A'$
0	+ 23,71″	+ 23,71″	0,00″
$^{50}/_3$	+ 30,26	+ 30,02	+ 0,24
$^{100}/_3$	+ 27,03	+ 26,57	+ 0,46
50	+ 16,07	+ 15,39	+ 0,68
60	+ 3,37	+ 2,58	+ 0,79
65	− 7,31	− 8,00	+ 0,69
66	− 10,50	− 10,94	+ 0,44
$^{200}/_3$*	− 13,51	− 13,11	− 0,40
67	− 15,22	− 14,22	− 1,00
68	− 18,70	− 17,29	− 1,41
70	− 23,77	− 22,28	− 1,49
75	− 32,13	− 30,82	− 1,31
80	− 37,18	− 36,11	− 1,07
90	− 40,49	− 39,94	− 0,55
95	− 38,68	− 38,41	− 0,27
100	− 32,13	− 32,13	0,00

Profil VIII.

$\beta : \alpha = 3 : 3$.

σ	A	A'	$A - A'$
0	+ 27,03″	+ 27,03″	0,00″
5	+ 31,97	+ 31,84	+ 0,13
10	+ 33,87	+ 33,62	+ 0,25
15	+ 34,37	+ 34,00	+ 0,37
20	+ 33,76	+ 33,28	+ 0,48
30	+ 29,46	+ 28,73	+ 0,73
40	+ 20,30	+ 19,36	+ 0,94
45	+ 12,87	+ 11,85	+ 1,02
48	+ 6,58	+ 5,59	+ 0,99
49	+ 3,83	+ 2,97	+ 0,86
50*	0,00	0,00	0,00

Unendlichwerden des Differentialquotienten aber nur bei CC', was bereits aus den vorstehenden Zahlentabellen, in denen die Stelle CC' durch einen Stern hervorgehoben ist, ersehen werden kann. Allerdings ist strenggenommen auch in A und B der Differentialquotient von $A - A'$ nicht endlich, sondern unendlich. Betrachtet man aber die Formeln (2) § 11 S. 295 und (4) § 12 S. 299, so erkennt man, dafs z. B. die in A unendlich werdenden Glieder, abgesehen vom Faktor $-2Kh_0$, für A und A' bezw. sind:

$$\tan A \log \text{nat}\, \sigma \quad \text{und} \quad \sin A \cos A \log \text{nat}\, \sigma\,,$$

welche sich für flache Profile nur äufserst wenig unterscheiden. In der That gelang es bei keiner Profilform, das Unendlichwerden des Differentialquotienten von $A - A'$ bei A und B sichtbar zu machen.

Die von der beweglichen Ordinate $A - A'$ mit wachsendem σ beschriebene Fläche ist von A bis zu irgend einer Stelle dem Fehler in der nivellierten Höhe von A bis zu dem entsprechenden Punkte P des Hanges proportional. Die ganze Fläche ist der Schlufsfehler des Nivellements $ACBA$. In den Zeichnungen sind die dem Inhalte der zu beiden Seiten der Abscissenaxe liegenden Flächen entsprechenden Fehler in Metern eingeschrieben. Die unterhalb liegenden Zahlen sind positiv, die oberhalb liegenden negativ zu rechnen.

Die Schlufsfehler und Fehler der nivellierten Höhe von A bis C sind aufserdem nach den strengen Formeln (4) und (3) des vorigen Paragraphen berechnet worden. Diese in folgender Tabelle enthaltenen Werte stimmen mit den aus der Zeichnung entnommenen noch in den Centimetern überein, mithin so gut als eine solche Zeichnung es gestattet.

Fehler der Nivellements im mittleren Teile eines homogenen, langgestreckten Gebirgsrückens von der Form eines liegenden dreiseitigen Prismas.

Profil	$h_0 = 2500^m$	$\beta : \alpha$	Schlufsfehler $ACBA$	Fehler d. Höhe C über A
I	$AB = 25000^m$	6:0	$0{,}299^m$	$0{,}30^m$
II		5:1	0,081	0,26
III		4:2	0,026	0,26
IV		3:3	0,000	0,26
V	$AB = 250000^m$	6:0	0,356	0,36
VI		5:1	0,009	0,35
VII		4:2	0,003	0,35
VIII		3:3	0,000	0,35

Diese Tabelle läfst deutlich hervortreten, dafs es einer starken Unsymmetrie des Gebirgsprofiles bedarf, um aus der Anziehung des

als homogen betrachteten Gebirges einen Schlufsfehler für das Nivellement $ACBA$ entstehen zu lassen. Mit Rücksicht auf das S. 510 Fig. 84 gegebene Alpenprofil wird man sich sagen müssen, dafs der Anteil des Schlufsfehlers der *Alpenpolygone*, welcher aus vorstehender Ursache erzeugt wird, nur einige Centimeter betragen kann.

§ 11. **Fortsetzung: Gröfster Schlufsfehler.** Wir haben bisher lediglich Nivellements betrachtet, welche den langgestreckten Gebirgsrücken in seinem mittleren Teile überschreiten, und zwar wurde für diesen Fall gefunden, dafs der Schlufsfehler der Nivellements, welche im übrigen in der Ebene verlaufen, infolge der Unsymmetrie des Querprofiles des Gebirges in praktischen Fällen kaum soviel wie der dritte Teil des Gebirgshöhenfehlers, vergl. § 9 S. 527, betragen dürfte, da auch die steilere Seite des Gebirges im allgemeinen noch weit sanfter als im Gefälle 1 : 1 abfallen wird. Es ist nun aber noch die Frage zu beantworten, ob nicht dadurch eine Steigerung des Schlufsfehlers entstehen kann, dafs ein Nivellement bei Überschreitung des Gebirges nicht ausschliefslich in mittleren Teilen desselben verbleibt, oder dieselben überhaupt nicht berührt.

Nehmen wir also an, dafs das Nivellement den Gebirgskamm in einem gewissen Profil AC_1 ersteigt, auf dem Kamme bis C_2 fortgeführt wird, in C_2B, einem anderen Profile, wieder zum Fufse des Gebirges gelangt und schliefslich in der Ebene zum Ausgangspunkte A zurückkehrt. Den entstehenden Schlufsfehler beurteilen wir jetzt am einfachsten nach Mafsgabe der Formel (4) § 7 S. 518, und zwar können wir denselben mit einer kleinen Modifikation, die leicht als zulässig erkannt wird, gleich setzen

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g' - \delta g''}{G}\, dh\,, \tag{1}$$

worin bezeichnen: h_0 die Höhe des Kammes C_1C_2 über der Ebene AB, $\delta g'$ und $\delta g''$ die Schwerestörungen in gleichen Höhen beim Auf- und Abstieg und G irgend einen konstanten mittleren Wert der Schwerkraft der Gegend.

Erfolgt der Aufstieg im mittleren Teile des Gebirgsrückens an einer sehr sanften Böschung, so ist $\delta g'$ ein Maximum und nach § 7 (5) S. 518 sehr nahe gleich:

$$+\, G \cdot \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{2h}{R}\,;$$

es wird daher angenähert

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g'}{G}\, dh = \frac{3\Theta h_0^2}{4\Theta_m R}\,, \tag{2}$$

d. h. gleich dem Gebirgshöhenfehler (10) § 7 S. 520.

Für den Fall, dafs auch der Abstieg im mittleren Teile des Gebirgsrückens erfolgt und das Gefälle des Hanges kleiner als 1 : 1 ist, hat aber der Ausdruck (1) nach S. 527 ungefähr einen Maximalwert gleich $^1/_3$ des Ausdruckes (2), mithin ist alsdann im allgemeinen:

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g''}{G} dh > \frac{2}{3} \cdot \frac{3\Theta h_0^2}{4\Theta_m R} \,. \qquad (3)$$

Erfolgt jedoch der Abstieg in einem Querprofile in der Nähe eines der beiden Enden des prismatischen Gebirgsrückens, so ist der Wert dieses Integrales im allgemeinen kleiner, weil bei gleicher Höhenlage die Schwerestörung $\delta g''$ am Ende kleiner wie in der Mitte ist — würden wir ein mathematisches Prisma mit gerade abgeschnittenen Enden haben, so wäre hier (grofse Länge vorausgesetzt) der Integralwert genau die Hälfte von dem in der Mitte; in Wirklichkeit ist wegen der Abböschung der Enden die Verkleinerung nur etwa $^3/_4$; mithin wird für diesen Fall

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g''}{G} dh > \frac{1}{2} \cdot \frac{3\Theta h_0^2}{4\Theta_m R} \qquad (4)$$

und somit aus der Vereinigung von (2) und (4) der Schlufsfehler

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g' - \delta g''}{G} dh < \frac{1}{2} \cdot \frac{3\Theta h_0^2}{4\Theta_m R} \,, \qquad (5)$$

d. h. der Schlufsfehler für ein in der Mitte des Gebirges aufsteigendes, am Ende desselben absteigendes Nivellement AC_1C_2BA ist kleiner als die Hälfte des Fehlers für die Gebirgshöhe h_0.

Dieser Betrag dürfte überhaupt das äufserste Mafs des Schlufsfehlers bei irgend einem homogenen Gebirge vorstellen, auch mit Rücksicht auf den Umstand, dafs ein Nivellement im Gebirge sich im allgemeinen in Thälern und über Pässe (also in Einschnitten der Gebirgsmasse) bewegt, solange es sich nur wesentlich um einen einfachen Auf- und Abstieg handelt. Das dürfte sich unschwer an der Hand des für diesen Fall allgemein gültigen Ausdruckes (1) erkennen lassen, wenn die Variationen der Schwerestörungen in betracht gezogen werden, welche mit der Änderung der Umstände verknüpft sind. In den meisten Fällen wird der Schlufsfehler sogar wesentlich kleiner sein.

Selbstverständlich kann er dadurch gesteigert werden, dafs in einem Nivellement *wiederholte Überschreitungen* von Höhen vorkommen. Man mufs aber hierbei beachten, dafs diese Steigerung keine notwendige ist; es kann im allgemeinen ebensowohl eine Kompensation der mit den einzelnen Überschreitungen verbundenen Fehler stattfinden; solange daher die spezielle Form des Verlaufes des Nivellements nicht beachtet wird, mufs die Verknüpfung dieser Einzelfehler nach der Regel für *zufällige* Fehler stattfinden..

§ 12. Einfluſs eines unterirdischen Massendefektes von kugelförmiger Gestalt. M sei der Mittelpunkt eines kugelförmigen Hohlraumes, über welchen hinweg ein Nivellement geführt werde. Zur Erleichterung der Integration nehmen wir ein ebenes, dreieckiges Nivellementsprofil ACB in einer Vertikalebene durch M an, Fig. 88. AB sei eine wirkliche Niveaufläche.*)

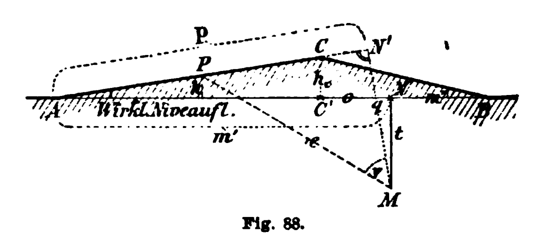


Fig. 88.

Wir beziehen M auf AB durch die rechtwinkeligen Koordinaten $AN = m'$ und $NM = t$, sowie auf AC durch $AN' = p$ und $N'M = q$. Mit den übrigen Bezeichnungen der Figur ist alsdann der Abstand eines Punktes P der Linie AC von M gleich

$$e = q \sec \psi\,. \tag{1}$$

Ist Θ die Dichtigkeit der Massenschicht, in welcher der Hohlraum vorkommt, so ist die Anziehung der störenden Masse in dem Abstande $PM = e$ gleich zu setzen

$$-\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta \frac{a^3}{e^2}\,, \text{ d. i. } -\frac{G}{R}\cdot\frac{\Theta a^3}{\Theta_m e^2}\,, \tag{2}$$

wobei a den Radius des Hohlraumes bezeichnet. Wir nehmen nun der Einfachheit halber sogleich

$$\frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{1}{2}\,. \tag{2*}$$

Für den Punkt P wird hiermit die von dem Hohlraum herrührende Schwerestörung

$$\delta g' = -G\cdot\frac{a^3}{2R}\cdot\frac{\cos(A+\psi)}{e^2}\,.$$

Hierin ist für e der Wert (1) zu setzen. Beachtet man ferner die aus Fig. 88 zu ersehende Relation:

$$h = (p - q\tan\psi)\sin A\,, \tag{3}$$

womit

$$dh = -q \sin A \sec^2\psi\, d\psi$$

wird, so folgt:

$$\int_A^C \frac{\delta g'}{G}\, dh = \frac{a^3}{2Rq}\sin A \int_A^C \cos(A+\psi)\, d\psi\,.$$

*) Gröſsere Hohlräume können aus Gründen der Festigkeit wohl nicht existieren, aber für unsere Zwecke dürfen wir uns den Massendefekt in einem solchen Hohlraume konzentriert denken.

Die Integration bietet keine Schwierigkeit und giebt

$$\int_A^C \frac{\delta g'}{G}\, dh = \frac{a^3}{2Rq} \sin A \left\{ \sin(A + \psi_3) - \sin(A + \psi_1) \right\}, \qquad (4)$$

wobei ψ_1 und ψ_3 die Werte von ψ für AM und CM bedeuten.

Zur Berechnung ist es in der Regel bequemer, q sowie die beiden Sinus der Parenthese durch die Koordinaten m' und t von M und durch die Gröfsen h_0 und o, vergl. Fig. 88, auszudrücken. Es folgt alsdann aus (4):

$$\int_A^C \frac{\delta g'}{G}\, dh = \frac{a^3 \sin A}{2R\,(m' \sin A + t \cos A)} \left(\frac{o}{\sqrt{o^2 + (t + h_0)^2}} - \frac{m'}{\sqrt{m'^2 + t^2}} \right).$$

Ganz entsprechend ist für die Profilstrecke BC:

$$\int_B^C \frac{\delta g''}{G}\, dh = \frac{a^3 \sin B}{2R(m'' \sin B + t \cos B)} \left(\frac{-o}{\sqrt{o^2 + (t + h_0)^2}} - \frac{m''}{\sqrt{m''^2 + t^2}} \right).$$

Mit Rücksicht auf den allgemeinen Ausdruck (4) § 7 S. 518 ist hiernach der im Nivellementspolygon $ACBA$ erzeugte *Schlufsfehler* gleich

$$\frac{a^3}{2R} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin A}{m' \sin A + t \cos A} \left(\dfrac{o}{\sqrt{o^2 + (t + h_0)^2}} - \dfrac{m'}{\sqrt{m'^2 + t^2}} \right) \\ + \dfrac{\sin B}{m'' \sin B + t \cos B} \left(\dfrac{o}{\sqrt{o^2 + (t + h_0)^2}} + \dfrac{m''}{\sqrt{m''^2 + t^2}} \right) \end{array} \right\}. \qquad (5)$$

Dieser Ausdruck läſst aber imstich, wenn M in der Verlängerung von AC oder CB liegt, weil alsdann das 1. oder 2. Glied der geschlungenen Parenthese in $0:0$ übergeht. Um daher noch einen in allen Fällen unmittelbar brauchbaren Ausdruck zu erlangen, schreiben wir in (4) anstatt

$$\sin(A + \psi_3) - \sin(A + \psi_1)$$

identisch

$$-2 \cos\left(A + \frac{\psi_1 + \psi_3}{2}\right) \sin \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}$$

und beachten aufserdem behufs Elimination von q aus (4) die aus der doppelten Berechnung des Dreiecksinhaltes ACM folgende Relation:

$$\frac{q h_0}{\sin A} = e_1 e_3 \sin(\psi_1 - \psi_3),$$

worin e_1 und e_3 die Distanzen MA und MC bezeichnen. Damit folgt aus (4):

$$\int_A^C \frac{\delta g'}{G}\, dh = -\frac{a^3 h_0}{2R e_1 e_3} \frac{\cos\left(A + \dfrac{\psi_1 + \psi_3}{2}\right)}{\cos \dfrac{\psi_1 - \psi_3}{2}}. \qquad (6)$$

Hierin ist $A + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ der Neigungswinkel der Halbierungslinie des Gesichtswinkels, unter welchem AC in M erscheint, gegen die Vertikale, und $\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}$ die Hälfte dieses Gesichtswinkels. Diese Gröſsen bezeichnen wir für AC mit ν' und γ', für BC mit ν'' und γ'', wie auch Fig. 89 zeigt. Wir erhalten damit als *Schluſsfehler* an Stelle von (5):

$$\frac{a^3 h_0}{2 R e_3} \left\{ \frac{\cos \nu''}{e_2 \cos \gamma''} - \frac{\cos \nu'}{e_1 \cos \gamma'} \right\}, \tag{7}$$

welcher Ausdruck stets bestimmte Angaben liefert. Hierzu berechnet man die e, ν und γ nach Maſsgabe der Fig. 89 aus den nachstehenden Formeln:

$$\begin{aligned} e_1 \sin(\nu' + \gamma') &= m' & e_2 \sin(\nu'' + \gamma'') &= m'' \\ e_1 \cos(\nu' + \gamma') &= t & e_2 \cos(\nu'' + \gamma'') &= t \\ e_3 \sin(\nu' - \gamma') &= o & = e_3 \sin(\gamma'' - \nu'') & \\ e_3 \cos(\nu' - \gamma') &= t + h_0 & = e_3 \cos(\gamma'' - \nu''), & \end{aligned} \tag{8}$$

wobei die positive Zählung für die m, o, ν und γ genau nach Fig. 89 zu verstehen ist.

§ 13. Fortsetzung: Maximum des Schluſsfehlers; Fehler der nivellierten Höhe. Ausdruck (7) des vorigen Paragraphen bestätigt den auch unmittelbar leicht zu ziehenden Schluſs, daſs M ungefähr unter der Mitte der steiler geböschten Seite die stärkste Wirkung giebt, und daſs die letztere mit der Böschung dieser Seite wächst. Bei der Betrachtung der Variationen von (7) ist es nützlich, diesen Ausdruck, wie folgt zu schreiben:

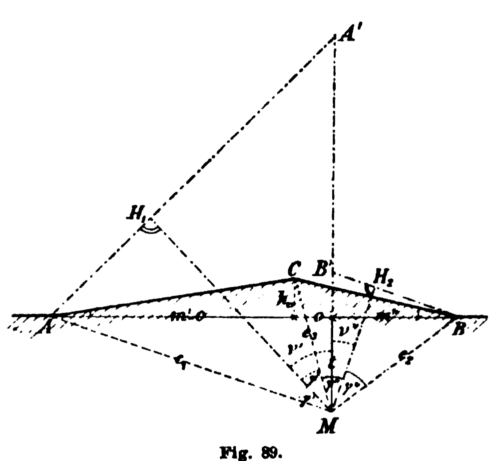


Fig. 89.

$$\frac{a^3 h_0}{2R} \cdot \frac{1}{e^3} \left(\frac{1}{MB'} - \frac{1}{MA'} \right), (1)$$

wobei MA' und MB' vertikale Linien sind, welche (vergl. Fig. 89) mittelst der Normalen AA' und BB' zu den Halbierungslinien MH_1 und MH_2 der Gesichtswinkel $2\gamma'$ und $2\gamma''$ konstruiert werden.

Lassen wir in (7) des vorigen Paragraphen das kleinere negative Glied fort, was dem Falle entspricht, daſs die Seite AC sehr flach

abfällt und CBM vertikal ist, so ergiebt sich das *Maximum des Schlufsfehlers* (7):

$$\frac{a^3 h_0}{2Rt(t+h_0)}. \tag{2}$$

Diesem Ausdruck geben wir noch eine andere Gestalt mittelst der maximalen Lotablenkung, welche der Hohlraum erzeugt. Wir haben dieselbe, da jetzt AC schwach geböscht, CB nahezu vertikal und über M gedacht wird, in Fig. 89 rechter Hand von B auf der Verlängerung von AB zu suchen. Bezeichnen wir die *maximale Lotablenkung* mit Λ_{max}, so ist nach dem 4. Kap. § 2 (12) S. 272 für $\Theta = \frac{1}{2}\Theta_m$:

$$\Lambda_{max} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{a^3}{Rt^2}, \tag{3}$$

wobei Λ als Arcus zu verstehen ist.

Hiermit giebt (2) als *Maximum des Schlufsfehlers*:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} h_0 \frac{\Lambda_{max}}{1+\frac{h_0}{t}},$$

oder abgekürzt:

$$\frac{5}{2} h_0 \Lambda_{max} \quad \text{oder} \quad \frac{5}{2} \frac{\Lambda_{max} \text{ in Sek.}}{\varrho''} h_0. \tag{4}$$

Diese Abkürzung reicht aus, da bei gröfseren Hohlräumen $t > h_0$ sein wird.

Setzen wir $h_0 = 1250^m$, $a = 5000^m = 4h_0$, $t = 15000^m = 12h_0$, so wird nach (2) der maximale Schlufsfehler gleich

$$0{,}050^m.$$

Dagegen wird nach (4) und (3) derselbe gleich $0{,}052^m$ mit der maximalen Lotablenkung

$$3{,}5''.$$

Um die Lotablenkung auf $7''$ und den Schlufsfehler auf $0{,}100^m$ zu bringen, mufs der vorausgesetzte Hohlraum von $1^1/_4$ Kubikmeile Volumen (welcher ungefähr dem nach *Schweizers* Untersuchungen unterhalb *Moskau* befindlichen entspricht, vergleiche S. 377) in nur 10000^m Tiefe t angenommen werden, womit sich die Dicke der Erdschicht über dem Hohlraum $t - a = 5000^m$ ergiebt. Kleiner kann man letztere nicht wohl voraussetzen, weil die Dimensionen des wirklichen Massendefektes gröfser als die des Hohlraumes sein müssen, da er kein absoluter Massenmangel sein kann.

Zur Berechnung des Schlufsfehlers für eine Profilform, welche praktischen Verhältnissen, insbesondere den Alpennivellements besser entspricht, als obige Annahmen, setzen wir noch:

$$h_0 = 1250^m, \quad AB = 25000^m, \quad \cot A = 16, \quad \cot B = 4,$$
$$m' = 18h_0, \quad m'' = 2h_0 = o, \quad a = 4h_0, \quad t = 12h_0.$$

Damit giebt Ausdruck (5) des vorigen Paragraphen als Schlufsfehler, indem $a^3 : 2Rh_0$ nahezu gleich 8 wird:

$$8\left\{\frac{1}{210}\left(\frac{2}{\sqrt{173}}-\frac{18}{\sqrt{468}}\right)+\frac{1}{50}\left(\frac{2}{\sqrt{173}}+\frac{2}{\sqrt{148}}\right)\right\},$$

$$\text{d. i.} \; -0{,}026+0{,}050=+0{,}024^m.$$

Für $t = 10000^m = 6h_0$ verdoppelt sich dieses Ergebnis annähernd.

Hieraus kann man wohl den Schlufs ziehen, dafs durch kugelförmige Massendefekte in den *Alpen* bei den die Pässe überschreitenden Präzisionsnivellements Schlufsfehler von 10 Centimetern zwar entstehen können, aber nicht gerade sehr wahrscheinlich sind.

Handelt es sich nicht um den Schlufsfehler, sondern um den Fehler der nivellierten Höhe von A bis C im Sinne einer Verbesserung auf den Wert CC', so genügt es, die Formel (5) oder (7) des vorigen Paragraphen auf den Linienzug ACC' anzuwenden. Dieses zeigt sich ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf die allgemeinen Ausdrücke (1) und (4) § 7 S. 518, wenn man bedenkt, dafs der analytische Ausdruck der Schwerestörung für CC' derselbe ist, wie für ein vertikales CB. ACC' giebt also dieselbe Wirkung wie ACB im Maximum bei vertikalem Abfall von CB. Der *Maximalfehler der nivellierten Höhe* ist daher ebenfalls durch Ausdruck (2) bezw. (4) gegeben.

Vergleicht man diesen durch einen kugelförmigen Hohlraum erzeugten Fehler mit demjenigen, welcher S. 520 unter (10*) aus der Anziehung der Gebirgsmasse abgeleitet wurde, so erkennt man leicht, dafs letzterer in der Regel der bedeutendere sein wird. Gleichheit der Wirkungen entsteht u. a. bei $t = 2a$ und $a = 3h_0$ rund, ferner bei $t = 3a$ und $a = 7h_0$.

§ 14. **Zusammenfassung vorstehender Untersuchungen über den Einflufs der Anomalieen der Schwerkraft.** Wir haben im Vorstehenden an einigen Beispielen den Einflufs der Anziehung einer homogenen Gebirgsmasse, ferner den Einflufs von Dichtigkeitsunterschieden in derselben, endlich den Einflufs eines bedeutenden Massendefektes untersucht. Es dürfte dieses ausreichen. Denn was anders geformte Massendefekte anbetrifft, so ist doch die maximale Wirkung jedenfalls gerade bei der Kugelform zu suchen, da bei einer Verteilung eines und desselben Volumens nach der Länge oder Breite die Anziehung auf die verschiedenen Seiten des Nivellementsprofils sich im allgemeinen mehr der Gleichmäfsigkeit nähert. Dieses wurde z. B. für die Annahme eines cylindrischen Hohlraumes, dessen Axe quer zum Nivellementsprofil liegt, genauer untersucht und bestätigt gefunden*). In Bezug auf unterirdische Massenanhäufungen kann

*) Vergleiche Verfassers Aufsatz in der *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1883, S. 27.

auſserdem bemerkt werden, daſs sie weniger schädlich als Defekte sind, da sie nicht in gleichem Sinne wirken wie die Anziehung des Gebirges bei Ungleichheit seiner Abböschungen.

Zu den vorstehend berücksichtigten Schwerestörungen lokalen Charakters können allerdings noch solche mehr kontinentalen Charakters treten. Diese erlangen aber für die Schluſsfehler nur in den seltenen Fällen Bedeutung, wo es sich um solche kontinental ausgedehnte Nivellements handelt, welche bedeutendere Höhen an extremen Stellen ersteigen und in den dazwischen liegenden Teilen nicht wieder verlassen. In Europa existieren Gebiete, die zu derartigen Nivellements Veranlassung geben könnten, nicht. Wollten wir auch voraussetzen, daſs in 500^m Höhe an dem einem Abhange der Alpen in der Längsrichtung derselben ein Nivellement geführt würde, welches an den beiden Enden diese 500^m erstiege bezw. verlieſse, so würden erst dann 10 Centimeter Schluſsfehler durch kontinentale Störungen entstehen, wenn deren Unterschied für beide Enden $G : 5000$ betrüge, wofür nach § 29 S. 215 u. ff. und § 37 S. 244 wenig Wahrscheinlichkeit vorhanden ist.

Man ersieht hieraus, daſs die Schwerestörungen in europäischen Nivellements wahrscheinlich keine *Schluſsfehler* erzeugen werden, die bei Zusammenwirken verschiedener Ursachen im ungünstigsten Falle 1 bis 2 Decimeter überschreiten; meist werden dieselben kleiner sein.

Ein anderes ist es mit den Nivellementsergebnissen für die *Meereshöhen*; hier können zusammengenommen die Fehler recht wohl $^1/_2$ Meter betragen. Da aber diese Fehler in den Nivellementspolygonen sich nahezu aufheben, so sind sie wenigstens insofern nicht schädlich, als sie das Zustandekommen bestimmter Angaben für die Meereshöhen innerhalb der Genauigkeit der Beobachtung nicht verhindern. (§ 6 S. 514.)

§ 15. Die anormale Depressionsdifferenz zwischen Rück- und Vorblick.

Wir haben jetzt zu untersuchen, welchen Einfluſs eine Verschiedenheit der Krümmung derjenigen Niveaufläche, zu welcher die Visieraxe des Nivellierinstruments als Tangente gedacht wird, rück- und vorwärts bei gleichen Zielweiten auf die Zielhöhendifferenz ausübt, d. h. wie groſs in der Bezeichnung der Fig. 83 des § 2 S. 502 die Differenz $d_2 - d_1$ für einen Stand ist. In § 5 S. 511 ist die Untersuchung bereits für die normale Krümmung der Niveauflächen durchgeführt; nunmehr betrachten wir anormale Krümmungen.

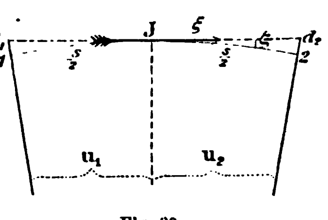


Fig. 90.

Im Anschlufs an die Fig. 83 auf S. 502 sei jetzt in Fig. 90 J der Durchkreuzungspunkt der Vertikalaxe und Visieraxe des Instruments. Von demselben aus zählen wir in der Tangente Abscissen ξ und normal dazu Ordinaten ζ der Niveaufläche. So lange nun die Entwicklung nach *Taylors* Satz zulässig ist, kann man setzen:

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_J \xi^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_J \xi^3 + \dots .$$

Diese Entwicklung wenden wir an auf die Punkte 2 und 1 der Niveaufläche in gleichem Abstande $\frac{s}{2}$ vor- und rückwärts. ζ ist in beiden Punkten von den Depressionen d nicht wesentlich verschieden. Wir erhalten also:

$$d_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_J \cdot \frac{s^2}{4} + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_J \cdot \frac{s^3}{8} + \dots$$

$$d_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_J \cdot \frac{s^2}{4} - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_J \cdot \frac{s^3}{8} + \dots$$

und hieraus:

$$d_2 - d_1 = \frac{s^3}{24}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_J + \dots . \tag{1}$$

Für ein zusammengesetztes Nivellement häufen sich diese Fehler an, solange die Werte des in der Formel (1) auftretenden Differentialquotienten für die successiven Stände gleiches Vorzeichen besitzen. Nehmen wir aber an, dafs das Nivellement nahezu horizontal in einer Vertikalebene verläuft und keine Unstetigkeiten oder solchen gleich zu achtende rasche Änderungen in der Krümmung der betreffenden Niveauflächen vorkommen, sodafs für kleine Strecken von der Länge s stark konvergente *Taylor*sche Entwicklungen möglich sind, welche in der oben angewandten Abkürzung für $d_2 - d_1$ eine brauchbare Annäherung geben, so läfst sich die Reihe der $d_2 - d_1$ summieren.

Zu dem Zwecke beachten wir, dafs für den Punkt J der Krümmungsradius ϱ des Vertikalschnittes der Niveaufläche in Richtung des Nivellements durch die Relation

$$\frac{1}{\varrho} = \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_J \tag{2}$$

gegeben ist. Zählt man nun horizontale Entfernungen S vom Anfangspunkt des Nivellements ab, so ist sehr nahe $S = S_J + \xi$, worin sich S_J auf Stand J bezieht. Man kann hiermit und mit Rücksicht auf (2) die Formel (1) wie folgt schreiben:

$$d_2 - d_1 = \frac{s^3}{24} \frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{dS} + \dots .$$

Nunmehr wird bei gleichen Stationslängen s:

$$\sum (d_2 - d_1) = \frac{s^2}{24} \sum \frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{dS}\, dS + \dots ,$$

wobei für den einen der Faktoren s das Symbol dS gesetzt ist. Die Summierung rechter Hand kann mit Rücksicht auf die Voraussetzung der Stetigkeit der Krümmung durch Integration bewirkt werden und giebt

$$\sum (d_2 - d_1) = \frac{s^2}{24} \left\{ \left(\frac{1}{\varrho}\right)_{\text{Ende}} - \left(\frac{1}{\varrho}\right)_{\text{Anfang}} \right\} + \cdots \tag{3}$$

Hierin bezeichnet, um es nochmals hervorzuheben, s die Stationslänge, und die Formel gilt nur, wenn auf Strecken von Stationslänge keine starken Krümmungsänderungen vorkommen — oder mit andern Worten, solange $1 : \varrho$ sich innerhalb Strecken von Stationslänge nahezu gleichmäfsig mit dem Orte ändert. Die durch (3) gegebene Summe hat den Sinn einer Verbesserung des Nivellementsresultates.

H. Bruns, welcher in seiner *Figur der Erde* S. 39—41 dieselbe Sache behandelt, betrachtet nur die einzelne Station, wobei er, anstatt des Differentialquotienten die Amplitudendifferenz einführt. Auf diese Formel kommen wir weiter unten. *Oudemans* giebt dagegen in seiner S. 513 citierten Abhandlung eine integrale Formel, ohne jedoch die Krümmungsradien einzuführen. Er erkennt aber bereits, dafs nur die Differentialquotienten für die Endpunkte ins Resultat eingehen.

Nach der Formel (3) kann man auch die Aufgabe des § 5 S. 511 behandeln. Für ein Nivellement vom Äquator nach dem einen der Pole hat man, wenn das *Erdellipsoid* zu grunde gelegt wird, aus dem bekannten Ausdruck für den Meridiankrümmungsradius Bd. 1 S. 44:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)_{\text{Anfang}} = \frac{1}{a_0(1-e^2)} \qquad \left(\frac{1}{\varrho}\right)_{\text{Ende}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a_0};$$

hiermit folgt

$$\sum (d_2 - d_1) = -e^2 \frac{s^2}{16 a_0}, \tag{4}$$

was mit (6) S. 513 übereinstimmt.

Führt das Nivellement über eine annähernd *kugelförmige Massenanhäufung* (oder über einen solchen Massendefekt) hinweg, so wird die Summe (3) ein Maximum für die Strecke von ϱ_{max} bis ϱ_{min}, vergl. § 2 (13) und (14) S. 272 u. 273. Bezeichnen wir mit R den Radius der ungestörten Niveaufläche, so wird alsdann

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)_{\text{Anfang}} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{8\sqrt{10}}{125} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{a^3}{t^3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)_{\text{Ende}} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{a^3}{t^3}\right);$$

unter Abkürzung von $8\sqrt{10} : 125$ auf $1 : 5$ folgt daher:

$$\sum (d_2 - d_1) = \frac{s^2}{20R} \cdot \frac{\Theta a^3}{\Theta_m t^3}. \tag{5}$$

Hierin ist a der Radius, t die Tiefe des Mittelpunktes der störenden

Masse, $\Theta : \Theta_m$ das Verhältnis ihrer Dichtigkeit zur mittleren Dichtigkeit der Erde.

Für die abnormen Werte $\Theta = \Theta_m$ und $s = 200^m$ wird hiernach:

$$\sum (d_2 - d_1) \leqq {}^1/_3{}^{mm}.$$

Nicht wesentlich erheblicher wird der Betrag bei einem Nivellement, das durch einen in der Grundfläche eines *Gebirgsrückens* gelegenen *Tunnel* führt, oder auf einer *Brücke über ein prismatisches Thal* hinweg schreitet. Zwar kommt hier der Krümmungsradius null vor, wie aus S. 304 ersichtlich ist; aber das Gebiet der kleinen Krümmungsradien reduziert sich nach S. 305 in allen Fällen auf einen verschwindend kleinen Umfang. Zur Erlangung eines Maximaleffektes für den ersten der oben erwähnten Fälle, das Tunnelnivellement, wird man nach S. 303 (6)

$$\frac{1}{\varrho_{min}} < \frac{7}{4R}$$

setzen können, während nach S. 305

$$\frac{1}{\varrho_{max}} = \frac{1}{3R} \text{ bis } \frac{1}{\infty}$$

anzunehmen ist. Damit giebt der Ausdruck (3) für den absoluten Wert des in Rede stehenden Einflusses die Relation:

$$\sum (d_2 - d_1) < \frac{7s^2}{96R}, \tag{6}$$

d. i. 0,5 Millimeter bei $s = 200^m$.

Hierbei ist nun allerdings der Einfluſs nicht gerechnet, den der rasche Krümmungswechsel an der Eintrittsstelle in den Gebirgsrücken ausübt. Wie jedoch aus S. 300 (7) und (8), insbesondere auch aus den Tabellen daselbst hervorgeht, sind für die kleine in betracht kommende Strecke im Betrage von nicht mehr als einer Stationslänge die Änderungen der Lotablenkungen so gering, daſs von einem nennenswerten Einfluſs derselben auch nicht die Rede sein kann.

Betrachten wir endlich noch den Fall, daſs ein Nivellement, welches bis zum Fuſse eines *halbkugelförmigen Berges* gelangt ist, in einem *Tunnel* durch denselben hindurch geführt wird (womit zugleich im wesentlichen der Fall der Überschreitung einer *halbkugelförmigen Pinge* auf einer Brücke erledigt ist). Hier steigt ϱ auſserhalb von R bis $2R$, welcher Wert an der Eintrittsstelle stattfindet; innerhalb ist $\varrho = 0{,}8R$. Auſserhalb wird bis zur Eintrittsstelle im Sinne einer Verbesserung:

$$\sum (d_2 - d_1) = -\frac{2s^2}{96R}. \tag{7}$$

Dazu tritt die Depressionsdifferenz für die Aufstellung an der Eintrittsstelle. Erfolgt die Aufstellung genau am Beginn des Berges, so ist diese Depressionsdifferenz gleich

$$d_2 - d_1 = \frac{s^2}{8R}\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9s^2}{96R} \tag{8}$$

unter der Annahme, dafs bei Berechnung der Depressionen auf die Strecke $s:2$ der Krümmungsradius ϱ sowohl aufserhalb wie innerhalb konstant gesetzt werden darf, eine Annahme, von deren Zulässigkeit man sich leicht überzeugt. Die Differenz (8) ist nun zwar weit gröfser als die Summe (7), aber sie beträgt für $s = 200^m$ doch nur 0,6 Millimeter.

Man sieht zugleich aus diesem Beispiel, dafs *einzelne Diskontinuitäten mehr zu fürchten* sind, als die langsameren Krümmungswechsel. In dieser Beziehung ist noch folgendes Beispiel bemerkenswert, wobei wir an die Gleichung (5) § 23 S. 39, welche sich auf den Krümmungswechsel bei normalem Eintritt aus der freien Luft in eine senkrechte Felswand bezieht, anknüpfen. Nivelliert man nämlich bei entsprechenden Verhältnissen über eine Brücke direkt in einen Tunnel hinein und steht gerade in der Grenzfläche des vertikalen Felsens, so ist angenähert

$$d_2 - d_1 = \frac{s^2}{8}\left(\frac{1}{\varrho_i} - \frac{1}{\varrho_a}\right),$$

also nach jener Relation

$$d_2 - d_1 = \frac{3s^2}{16R}. \tag{9}$$

Für $s = 200^m$ giebt dieses 1,2 Millimeter.

Dieser Betrag, welcher als das *Maximum* anzusehen ist, welches durch Diskontinuitäten entstehen kann, wird jedoch ebenso wenig wie die weiter oben angegebenen Beträge in der Praxis erreicht, da die Stationslängen s meist erheblich kleiner als 200^m sind.

§ 16. Fortsetzung: Die anormale Depressionsdifferenz im Gebirge. Nivelliert man einen Berg hinauf, so steht man bei jeder Instrumentaufstellung unter dem Einflufs sehr rascher Krümmungsänderung. Es ist noch zu untersuchen, ob hieraus eine schädliche Anhäufung entstehen kann. Wir geben zum Zwecke dieser Untersuchung der Formel (1) des vorigen Paragraphen eine andere Gestalt.

Aus der Formel für ζ daselbst S. 540 oben folgt:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_J \xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_J \xi^2 + \dots .$$

Bezeichnen wir den Differentialquotienten absolut genommen mit u und zwar, vergl. Fig. 90 S. 539, für Punkt 2 mit u_2, für 1 mit u_1, so ist:

$$u_2 = \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_J \cdot \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_J \cdot \frac{s^2}{4} + \cdots$$

$$u_1 = \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_J \cdot \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_J \cdot \frac{s^2}{4} + \cdots$$

und daher:

$$u_2 - u_1 = \frac{s^2}{4}\left(\frac{d^3\zeta}{d\xi^3}\right)_J + \cdots;$$

hiermit giebt Gleichung (1) des vorigen Paragraphen:

$$d_2 - d_1 = \frac{s}{6}(u_2 - u_1) + \cdots. \tag{1}$$

u ist die Amplitude, welche die Lotrichtung von J, dem Instrumentstand, bis Punkt 2 bezw. 1 beschreibt, wobei wir der Einfachheit halber von den Abweichungen der Lotrichtung in Punkt 1 und 2 gegen die vertikale Visierebene J absehen. Bezeichnet man die Störungen der beiden Werte u mit δu, so kann man anstatt (1) auch schreiben:

$$d_2 - d_1 = \frac{s}{6}(\delta u_2 - \delta u_1) + \cdots, \tag{2}$$

da der Einflufs der normalen Werte von u bereits als unerheblich nachgewiesen ist.

Die δu lassen sich aber durch die Lotstörungen Λ in den Punkten J, 1 und 2 ausdrücken. Nimmt man Λ positiv, wenn es einer Anziehung in Richtung des fortschreitenden Nivellements entspricht, so wird

$$\begin{aligned} \delta u_2 &= \Lambda_J - \Lambda_2 \\ \delta u_1 &= \Lambda_1 - \Lambda_J. \end{aligned} \tag{3}$$

Von diesen Formeln machen wir nun eine Anwendung auf ein Nivellement, welches im mittleren Profil eines im Verhältnis zur Breite langen prismatischen Gebirgsrückens vom Fufse A nach dem Kamme C geführt wird, Fig. 91. Nach den Untersuchungen im 4. Kapitel scheint hier Aussicht zu sein, einen besonders grofsen Betrag für $d_2 - d_1$ zu erhalten, wie aus Formel (7) S. 300, welche für Λ in der Nähe des Fufses A gilt, ersichtlich ist. Es kommen übrigens, wie man leicht erkennt, ganz allgemein in (2) nur diejenigen Teile von Λ zur Geltung, welche weder konstant noch der Entfernung proportional sind.

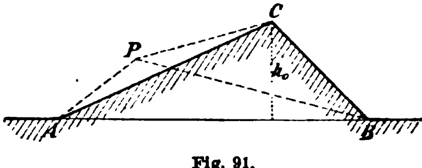


Fig. 91.

Nehmen wir nun an, dafs für einen Instrumentstand J linker Hand von A, Fig. 91, der Punkt 2 mit A selbst zusammenfällt und beachten, dafs in der erwähnten Formel (7) $-\sigma h_0$ die Abstände von A nach links bezeichnet, so ist $-\sigma h_0$ für die Punkte 1, J und 2

bezw. gleich s, $s:2$ und null einzuführen. Abgesehen von den unwesentlichen Teilen in Λ wird dann:

$$\Lambda_1 = K \sin 2A \, . \, s \log\text{nat}\, s$$
$$\Lambda_J = K \sin 2A \cdot \frac{s}{2} \log\text{nat} \frac{s}{2}$$
$$\Lambda_2 = 0 \, ;$$

damit geben die Formeln (3) und (2):

$$d_2 - d_1 = - \frac{K \log\text{nat}\, 2}{6} s^2 \sin 2A \, . \tag{4}$$

Führen wir für K nach S. 287 (8) sowie für log nat 2 die Werte ein und zerlegen $\sin 2A$ in $2 \sin A \cos A$, so folgt:

$$d_2 - d_1 = - \frac{s^2 \sin A \cos A}{230\,000\,000} \text{ Meter} , \tag{4*}$$

für s in Metern.

Nehmen wir einen Augenblick an, dafs dieser Ausdruck für jeden Stand von A bis C Geltung habe und beachten, dafs $s \tan A$ alsdann der Zielhöhendifferenz eines Standes gleich ist, während die Summe der Zielhöhendifferenzen von A bis C gleich h_0 wird, so ergiebt sich für das Nivellement von A bis C angenähert:

$$\sum (d_2 - d_1) = - \frac{s h_0 \cos^2 A}{230\,000\,000} \text{ Meter} . \tag{5}$$

Dieser Ausdruck würde unter der oben gemachten Voraussetzung allgemeiner Geltung von (4*) nicht nur für das Nivellement im Querprofil, sondern auch für ein Zickzacknivellement von A bis C gelten, wenn s die auf das Querprofil ACB projizierte Stationslänge bedeutet. Ist nämlich s' die wirkliche Stationslänge und v ihre Neigung im Grundrifs gegen s, so ist das beim Zickzacknivellement in Formel (2) auftretende Produkt $s'(\delta u_2' - \delta u_1')$, worin die $\delta u'$ die Störungen der wirklichen Amplituden sind, gleich dem Produkt $s(\delta u_2 - \delta u_1)$, welches im Querprofilnivellement zur Strecke s gehört, weil $s = s' \cos v$, $A' = A \cos v$ und also $\delta u' = \delta u \cos v$ wird.

Die Summe (5) bleibt selbst für die bedeutenden Werte $s = 200^m$ und $h_0 = 2500^m$ absolut genommen kleiner als rund 2 Millimeter.

Allein dieser Betrag ist noch viel zu grofs, weil der Ausdruck (4*) für mittlere Teile des Berges viel zu viel giebt. Dieses zeigt die Betrachtung der Verhältnisse für einen Punkt P, der aufserhalb des Gebirges nahe bei dem Hange AC gelegen ist, Fig. 91. Für denselben setzt sich die Gesamtanziehung aus den Anziehungen der drei Prismen APB, PCB und APC zusammen, wobei der allgemeine Ausdruck (5) S. 281 in betracht kommt. In diesem Ausdruck treten die Logarithmen der Distanzen AP, BP und CP auf. Ist eine dieser Strecken sehr klein, so entspricht einer gleichmäfsigen Verschiebung von P eine sehr un-

gleichmäſsige Änderung der Anziehung. Dieser Umstand tritt aber nur nahe bei A und C, jedoch nicht für mittlere Lagen von P, Fig. 91, auf. Die Betrachtung des citierten Ausdruckes (5) zeigt, daſs alsdann für jedes Prisma bei mäſsigen Verschiebungen von P die Änderung dem Differentialquotienten proportional gesetzt werden kann.

§ 17. **Der Einfluſs der durch Mond und Sonne bewirkten Lotstörung auf die Nivellementsresultate.** Die Ausdrücke für diese Lotstörungen sind im 5. Kap. § 1 S. 384 angegeben. Bewegt sich das Nivellement im südwestlichen Azimut α vorwärts, so ist die Depression γ der Visieraxe vorwärts, infolge der Lotstörung gleich

$$\gamma = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha \,, \tag{1}$$

wenn ξ und η die südliche und westliche Komponente der Störung des Zeniths sind. Nach (8) S. 384 wird

$$\gamma = - P \sin 2\zeta \cos(A - \alpha) \,, \tag{2}$$

worin ζ die Zenithdistanz des Gestirns, A sein Azimut bezeichnet und P nachstehende Werte hat:

$$\begin{array}{lll} \text{für den } \textit{Mond} & P = 0{,}0174'' \,, & \text{arc } P = 1 : 12000000 \\ \;\;\text{„ die } \textit{Sonne} & P = 0{,}0080'' \,, & \text{arc } P = 1 : 23000000 . \end{array} \tag{3}$$

Die Verbesserung der Zielhöhe vorwärts ist, bei der Entfernung $\frac{s}{2}$, gleich

$$+ \frac{s}{2}\gamma \,,$$

für die Zielhöhe rückwärts aber

$$- \frac{s}{2}\gamma \,.$$

Mithin wird die *Gesamtverbesserung* für die Zielhöhendifferenz rückwärts — vorwärts, d. h. *für den Höhenunterschied* „vorwärts über rückwärts“, gleich $-s\gamma$, oder mit Rücksicht auf (2) gleich

$$s P \sin 2\zeta \cos(A - \alpha) \,. \tag{4}$$

Hierin ist für P der Wert des Arcus nach (3) zu setzen.

Bezieht man ζ und A in (4) auf das Mittel der Zeiten von Vor- und Rückblick, so wird die kleine Veränderung in ζ und A zwischen Vor- und Rückblick eliminiert (abgesehen davon, daſs diese letzteren im Mittel von symmetrischen Wiederholungen ohnehin auf dieselbe Zeit fallen).

Der Betrag des Ausdruckes (4) ist für den einzelnen Stand ganz unerheblich; dennoch kann bei ausgedehnten Nivellements eine Anhäufung zu einem merkbaren Betrage stattfinden.

Nehmen wir zunächst an, daſs Mond und Sonne genau im Äquator stehen, so fallen bei Nivellements auf der nördlichen Hemisphäre immer gleichzeitig

ζ auf den 1. Quadr. und A auf den 1. oder 4. Quadr.,

ζ auf den 2. Quadr. und A auf den 2. oder 3. Quadr..

Nivelliert man nun nach Süden hin, sodaſs $\alpha =$ null ist, so wird hiernach der Ausdruck (4) stets positiv, während bei Nivellements in ostwestlicher Richtung mit $\alpha = 90^0$ ein Vorzeichenwechsel eintreten kann. Bei den Nivellements der ersteren Art tritt demnach eine Anhäufung der Fehler (4) ein, während bei denen der letzteren Art eine Kompensation stattfinden kann, z. B. bezüglich der Sonne, wenn symmetrisch zum Mittag beobachtet wird. Allerdings bewegen sich Mond und Sonne nicht genau im Äquator, infolge welches Umstandes für Stellungen dieser Gestirne in der Nähe des Ost-Westvertikales der Ausdruck (4) bei $\alpha =$ null auch negativ sein kann; da aber in diesem Falle zugleich $\cos A$ kleine Werte hat, so herrschen bei nordsüdlichen Nivellements doch schlieſslich die positiven Ausdrücke vor. Durch Wiederholung der Nivellements in umgekehrter Richtung lassen sich die Fehler, wie leicht zu sehen, nicht beseitigen.

Das vorstehend erörterte Verhalten des Ausdruckes (4) entspricht einer Tendenz der Niveauflächen, ihre Abplattung in konstantem Sinne zu ändern. Um dieses noch von einem anderen Gesichtspunkt aus zu erkennen, betrachten wir das Potential $\mathfrak{V}$ der Anziehung von Mond und Sonne.

Nach dem 5. Kap. § 1 (10) S. 385 ist dasselbe für Punkte einer ungestörten Niveaufläche gegeben durch die Formel:

$$\mathfrak{V} = \frac{3}{2} G R \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p \cos^2 \zeta = G R P \cos^2 \zeta , \tag{5}$$

worin P als Arcus zu verstehen ist.

Damit nun wieder eine Fläche konstanten Potentialwertes entsteht, muſs, abgesehen von einer Konstanten, das ungestörte Niveau um

$$+ R P \cos^2 \zeta \tag{6}$$

gehoben werden.

Die Deklination (d. i. der Äquatorabstand) des Mondes schwankt aber zwischen -30^0 und $+30^0$; somit liegt an den Polen ζ für den Mond zwischen 60^0 und 120^0, $\cos^2 \zeta$ zwischen null und $\frac{1}{4}$. Am Äquator dagegen liegt ζ je nach Umständen zwischen 30^0 und 150^0 oder 0^0 und 180^0, $\cos^2 \zeta$ also zwischen $^3/_4$ und null oder 1 und null. Für Äquatorpunkte ist demnach der Ausdruck (6) im allgemeinen gröſser als für Punkte in der Nähe der Pole. Die Wirkung des Mondes (und auch diejenige der Sonne) vergröſsert somit die Ab-

plattung. Jedoch ist der Betrag gering, denn der Mittelwert von $\cos^2\zeta$ am Äquator übersteigt für den Mond nicht $^1/_2$, der Unterschied der Mittelwerte der Erhebungen für Äquator und Pol also beim Mond nicht

$$\frac{1}{2}\,RP,\quad \text{d. i.}\quad {}^1/_4 \text{ Meter}. \tag{7}$$

Der entsprechende Einflufs der Sonne ist nahezu die Hälfte.

Geringer noch als diese mittleren Beträge gestalten sich in der Regel die Unterschiede der Wirkungen auf Ergebnisse wiederholter Nivellements, da die natürlichen Verhältnisse ungleichartigen Anhäufungen des Ausdruckes (4) nicht günstig sind. Beim Monde ist es der Umstand, dafs er in der kurzen Zeit von vier Wochen seinen Umlauf um die Erde vollendet. In dem Resultat eines Nivellements von dieser Dauer wird daher die Wirkung, wenn immer zu denselben Stunden gearbeitet wurde, bereits einen gewissen mittleren Betrag annehmen, der für alle Wiederholungen nahezu derselbe bleibt. Bei der Sonne ist es dagegen der Umstand, dafs in der Regel behufs Ausnutzung günstiger Luftverhältnisse die Arbeit des Nivellierens auf die ersten Vormittags- sowie die späteren Nachmittagsstunden beschränkt und auf diese Zeiten wenigstens annähernd gleichmäfsig verteilt wird. Infolge dessen werden sich in einem zusammengesetzten Nivellement diejenigen Teile der Ausdrücke (4), welche von $\sin 2\zeta \sin A$ abhängen, gröfstenteils gegenseitig aufheben, während den von $\sin 2\zeta \cos A$ abhängigen der geringe Betrag dieses Faktors zu den betreffenden Stunden günstig ist.

Bei Nivellements innerhalb Mitteleuropas werden nach vorstehenden Bemerkungen in der Regel kaum ein paar Centimeter Differenz zwischen den Ergebnissen mehrfacher Nivellements selbst für die entferntesten Punkte zu befürchten sein, so dafs sie ohne Bedeutung bleiben. Eine Rücksichtnahme auf dieselben würde erst nötig werden, wenn die Arbeitszeit auf bestimmte Tagesstunden in bestimmten Jahreszeiten beschränkt würde. Ein hierher gehöriger Fall, welcher einen möglichst grofsen Widerspruch zeigt, ist folgender. Man denke sich, dafs eine 1000^{km} lange Linie von ost-westlicher Richtung nur in den Sommermonaten nivelliert werde und zwar wegen des Sonnenstandes streckenweise vormittags in Richtung nach West, nachmittags zurück in Richtung nach Ost. Dann wird das Resultat für den Gesamthöhenunterschied aus den Vormittagsnivellements von demjenigen aus den Nachmittagsnivellements wegen der Wirkung der Sonnenanziehung nach Formel (4) bis zu $0{,}087^m$ abweichen können, während die Mondanziehung keine nennenswerte Wirkung zurückläfst.

Auf die Nivellementsfehler infolge der Anziehung des Mondes und der Sonne weist *Vogler* hin in seiner 1873 erschienenen Schrift *Ziele und Hilfsmittel geometrischer Präzisionsnivellements*, S. 28. Seine Ergebnisse sind jedoch mit $^3/_2$ zu multiplizieren, da S. 27 vergessen ist, dafs die Anziehungen auf den Erdmittelpunkt und den Ort P' verschiedene Richtungen haben.

§ 18. Zeitliche Änderungen der Niveauflächen; die physische Meeresfläche.

Im fünften Kapitel sind verschiedene Ursachen erwähnt worden, welche zeitliche Änderungen der Niveauflächen bewirken. Wir verweisen in dieser Hinsicht besonders auf die Paragraphen 21—24 S. 438 u. ff. und bemerken hier nur zusammenfassend, dafs alle diese Änderungen sehr klein sind und in der Regel einen säkulären Charakter haben, dergestalt dafs eine in kurzer Zeit merkbare Änderung von Höhendifferenzen mit grofser Wahrscheinlichkeit stets auf physische Punktverschiebungen zurückzuführen sein wird.

Wir müssen nun noch erwähnen, dafs die zeitlichen Änderungen des Erdkörpers, welche durch die Anziehung von Mond und Sonne erzeugt werden (Flut und Ebbe), sowie diejenigen, deren Ursache die Wärmebewegung auf der Erdoberfläche ist, bewirken, dafs die physische Meeresoberfläche keine genaue Niveaufläche bildet, selbst nicht in den sogenannten Mittelwasserständen*). Die letztere Thatsache ist durch die Präzisionsnivellements sicher konstatiert; es existieren Differenzen von mehreren Decimetern entlang der Küste der Ostsee, der Nordsee und der französischen Küste des Oceans; das Mittelwasser des Mittelmeeres bei Marseille zeigt sogar ungefähr $^2/_3{}^m$ Depression gegen dasjenige der Nordsee bei Amsterdam**).

Für die Gradmessungen und auch für die Schweremessungen ist es von Wichtigkeit, dafs die Mittelwasserstände in möglichster Ausdehnung für die ganze Kontinentalküste untersucht werden. Nur auf diese Weise ist es möglich, eine Vorstellung davon zu erhalten, wieviel Unterschied zwischen den Meereshorizonten bestehen kann, auf welche sich die Gradmessungen derjenigen Kontinente beziehen, für die eine Verbindung durch Nivellements nicht möglich ist. Wenn diese Unterschiede, wie es wahrscheinlich ist, ein paar Meter nicht überschreiten,

---

*) Vergl. die Verhandlungen der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung 1878 in Hamburg, Berlin 1879, S. 57—66, sowie die Verhandlungen derselben Kommission 1882 im Haag, Berlin 1883, S. 51 und 113.

Eine sehr gute Übersicht giebt Bd. 5 der „Nivellements der Landesaufnahme" Berlin 1883, S. 141 und 142. Auch ist zu vergleichen „*Seibt*, das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde", Berlin 1881, S. 86 u. ff.

Diese letztere Schrift enthält u. a. auch den praktischen Nachweis, dafs zur Bestimmung des Mittelwassers täglich einmalige Beobachtungen des Wasserstandes an Stelle kontinuierlicher Registrierungen ausreichen. Wenn aber im achten Abschnitt dieser Schrift bei der Untersuchung des Verlaufes des Mittelwassers entlang der Ostseeküste das Mittelwasser der Nordsee bei Kuxhaven gewissermafsen als westlichster Punkt der Ostsee behandelt wird, so ist dies ein Verfahren, das die ganze Untersuchung dieses Abschnittes wertlos macht.

**) Vergl. hierzu im allgemeinen noch *Bruns*, Figur der Erde, S. 4 u. ff.

Was die angegebene Depression des Mittelmeeres gegen die Nordsee anbetrifft, so wird deren Betrag sich durch Berücksichtigung der Variation der Schwerkraft mit der geogr. Breite nach § 5 S. 510 noch um mehrere Decimeter vermindern.

so kommt denselben allerdings mit Rücksicht auf die anderen Ursachen von Nichtübereinstimmung der Beobachtungsdaten bei der Ermittelung der Erdgestalt keine Bedeutung zu. Nur für die Höhenmessungen selbst ist es von Wichtigkeit immer denselben, durch einen Festpunkt zu bezeichnenden Horizont anzuwenden, der möglichst in die durchschnittliche Höhe der Mittelwasser zu verlegen ist, sobald es sich um die Erde im allgemeinen handelt. Dieser Horizont, d. h. die denselben bezeichnende Niveaufläche, ist der naturgemäfse Ersatz der mathematischen Erdoberfläche, an deren Höhenlage nach der Bd. 1 S. 5 gegebenen Definition praktisch genommen eine Unklarheit haftet.

Achtes Kapitel.

Die trigonometrische Höhenmessung.

Mit Bemerkungen über die Lateralrefraktion und die Aberration.

§ 1. Die Bedeutung der trigonometrischen Höhenmessung. Bereits Bd. 1 S. 520 ist gezeigt worden, dafs die Messung einer Zenithdistanz von einem Punkte der Erdoberfläche nach einem anderen nur insofern eine Gleichung für die Höhendifferenz beider Punkte liefert, als die Höhen der Punkte nicht als Meereshöhen, sondern als Höhen über einem Referenzellipsoid gedacht werden, gegen welches die Lotabweichungen in den betreffenden Punkten bekannt sind. Die sogenannte trigonometrische Höhenmessung ist also kein Konkurrent der geometrischen Höhenmessung*). Denn während diese bei geeigneter Reduktion Meereshöhen H liefert, giebt jene die Summen $N + H$ aus der Höhe N des Geoides über dem Referenzellipsoid und der Meereshöhe H. Liegen aber beiderlei Messungen vor, so kann N ermittelt werden.

Zenithdistanzmessungen geben hiernach ein Mittel an die Hand, für einzelne Punkte der Erdoberfläche den Abstand des Geoides von einem Referenzellipsoid, in Bezug auf welches die Lotabweichungen bekannt sind, abzuleiten.

Eigentlich kann man das Referenzellipsoid ganz entbehren und direkt aus den Messungen, welche zur Kenntnis der Lotabweichungen führen, sowie aus den Zenithdistanzmessungen die Lage der betrachteten Punkte bezüglich eines willkürlich gewählten, rechtwinkeligen Axensystems ermitteln. Dieses ist konstruktiv in folgender Weise zu erkennen.

---

*) Im Schlufsparagraphen dieses Kapitels wird etwas eingehender untersucht, inwieweit trigonometrische, ohne Hilfe von Lotablenkungen berechnete Höhendifferenzen den Meereshöhen entsprechen.

Durch einen Punkt P_1 denke man sich eine Linie als Parallele zur Erdaxe und eine Ebene als Meridianebene, jene Parallele enthaltend, gelegt. Die Messung der geographischen Breite von P_1 gestattet die Angabe der Lotrichtung in der Meridianebene, die Messung des Azimutes nach einem Punkte P_2 giebt eine in P_1 vertikale Ebene durch P_2 und die Messung der Zenithdistanz (abgesehen von der Refraktion) in dieser Ebene eine Gerade, auf welcher P_2 liegt. Wird nun noch die gerade Entfernung $P_1 P_2$ durch direkte Messung bekannt, so läfst sich die Lage von P_2 sofort konstruieren.

Wenn der geographische Längenunterschied von P_1 und P_2 gemessen ist, so kann man mittelst desselben hierauf die Meridianebene von P_2 finden und mit Hilfe der geographischen Breite von P_2 sodann in derselben die Lotrichtung von P_2. Fehlt jener, so gestattet die Kenntnis des in P_2 nach P_1 gemessenen Azimutes und der geographischen Breite von P_2 (abgesehen von äquatorialen Gegenden) die Konstruktion der Lage von Meridianebene und Lotrichtung für P_2, wie die Betrachtung der dreiseitigen Ecke lehrt, welche in P_2 von der Richtung nach P_1, einer Parallelen zur Erdaxe und der Vertikalen gebildet wird.

Sind nun weiter in P_1 und P_2 nach einem Punkt P_3 die Horizontalwinkel gemessen, aufserdem in P_1 oder P_2 die Zenithdistanz, so ergiebt sich P_3, u. s. w.

Erhellt aus vorstehender Erläuterung die Möglichkeit, ohne Einführung eines Referenzellipsoides das System der Punkte zu konstruieren und zu berechnen, so wäre es doch unpraktisch, bei der wirklichen Ausführung der Rechnung nicht die Thatsache zu benutzen, dafs ein mäfsig grofser Teil des Geoides immer nur geringe Höhenabweichungen gegen ein passendes Referenzellipsoid haben kann. Man wird vielmehr die Horizontalwinkelmessungen und astronomischen Bestimmungen zunächst für sich mit Benutzung eines Referenzellipsoides nach § 19 S. 560 des ersten Bandes bearbeiten und darnach erst mit Hilfe der erlangten Resultate die Zenithdistanzmessungen verwerten.

Wenn es bei der oben angegebenen Konstruktion des Punktsystems unmittelbar klar ist, dafs eine hypothesenfreie Bestimmung vorliegt, so läfst sich doch auch bei der Einführung eines Referenzellipsoides in die Rechnung nicht behaupten, dafs zur Bestimmung des Geoides eine das Wesen der Resultate bedingende Hypothese über dessen Form gemacht sei; es wird nur vorausgesetzt, dafs ein erstgewähltes Referenzellipsoid, welches zu grofse Abweichungen vom Geoid zeigt, durch ein genügenden Anschlufs gewährendes Referenzellipsoid ersetzt werden kann und ersetzt wird.

Durch den Umstand, eine hypothesenfreie Bestimmung der Lage einer Schaar von Punkten des Geoides zu geben, empfiehlt sich die

Verwendung der Zenithdistanzmessungen in Verbindung mit astronomisch-geodätischen Rechnungen nach dem Verfahren des § 19 S. 560 Bd. 1 theoretisch in hohem Grade, weil es thatsächlich kein anderes hypothesenfreies Verfahren zu Spezialstudien über das Geoid giebt. Wir können ohne Hypothese allenfalls aus Mondbeobachtungen in äquatorialen Gegenden kontinentale Undulationen des Geoides ableiten (6. Kapitel), wir werden mit der Zeit wohl auch mittelst Schweremessungen über die kontinentalen Undulationen des Geoides einige Aufschlüsse erhalten (3. Kapitel); wollen wir aber Spezialstudien anstellen, so bleiben uns von den bisher erwähnten Methoden nur die Krümmungsmessungen (Gradmessungen). In § 21 S. 564 u. ff. des ersten Bandes ist angegeben, wie mittelst solcher Messungen das Geoid im Detail studiert werden kann. Als gröfster Mangel tritt dabei der Umstand hervor, dafs man die Stationen sehr dicht legen mufs, ehe mit Sicherheit ein regelmäfsiger Verlauf der Lotabweichungen zu erwarten ist. Der Grund davon ist das im ersten Kapitel erörterte Vorkommen von sehr raschen Änderungen, sogar von Diskontinuitäten in der Krümmung der Niveauflächen.

Dagegen tritt als Übelstand bei der praktischen Verwertung des Verfahrens mit Zenithdistanzmessungen der Umstand hervor, dafs die Resultate von der Refraktion zu befreien sind, was ohne Hypothesen, die in der Regel nur eine rohe Annäherung versprechen, gar nicht geschehen kann. Zur Zeit dürfte es noch fraglich erscheinen, ob man diesen Übelstand einmal genügend überwinden lernen wird, während bei dem vorher erwähnten, theoretisch unvollkommenen Verfahren durch fortgesetzte Verdichtung des Netzes der Stationen ohne Zweifel die Unvollkommenheit der Theorie mehr und mehr unschädlich gemacht und die Genauigkeit in wünschenswertester Weise gesteigert werden kann. (Vergl. hierzu noch § 18 dieses Kapitels.)

Die oben auseinandergesetzte Methode der Bestimmung des Geoides aus Zenithdistanzmessungen ist 1878 von *Bruns* in seiner *Figur der Erde* auf S. 45—49 in den Grundzügen in klarer Weise dargestellt worden. *Bruns* setzt für die Realisierung derselben grofse Hoffnungen auf eine Ausbildung der Theorie der Refraktion.

Die Methode ist übrigens nicht neu und bereits 1868 von *Villarceau* empfohlen worden (*Comptes rendus* 1868 Bd. 67 S. 1275; vergl hierzu auch bei uns im ersten Band S. 586). *Villarceau* scheint jedoch mehr Vertrauen in die Methode der Krümmungsmessungen zu setzen, obgleich er bezüglich der Refraktion von günstigen Resultaten zu berichten weifs.

Dafs man aus gegenseitigen Zenithdistanzmessungen bei bekannter Entfernung wenigstens der Theorie nach den Krümmungsradius bestimmen kann, wufste schon *Kepler*, und *Grimaldi* und *Riccioli* versuchten eine Anwendung des Verfahrens, allerdings mit schlechtem Erfolg (*Wolf*, *Handbuch*, Bd. 2 1872, S. 127; *Todhunter*, *History of Attraction*, Bd. 1 S. 117). Den veränderten Anschauungen über das Geoid entsprechend wird jetzt die Aufgabe anders präzisiert, doch ist es der alte Grundgedanke.

§ 2. Die Grundgleichung der sphärischen Höhenrefraktion. Wir nehmen zunächst an, dafs die Niveauflächen innerhalb der in betracht kommenden Ausdehnung eines Lichtstrahles konzentrische Kugelflächen seien und dafs die Flächen gleichen Druckes und gleicher Dichtigkeit der Luft mit Niveauflächen zusammenfallen. Ein Lichtstrahl sei von P_1, Fig. 92, bis P gelangt und gehe unendlich wenig weiter bis P'. Dann ist klar, dafs man sich denken kann, der Brechungsindex der Luft ändere sich in P beim Übergange in die von zwei unendlich nahen Niveauflächen begrenzte Luftschicht PP' sprungweise von n in $n + dn$ und das Element PP' des Lichtstrahles sei demgemäfs gerade.

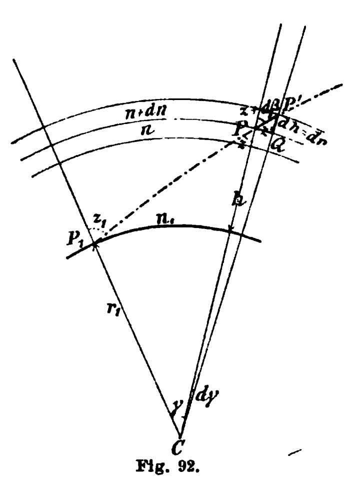


Fig. 92.

Was die Lage von PP' im allgemeinen anlangt, so ist darauf hinzuweisen, dafs der Lichtstrahl auf der Strecke PP' diejenige Vertikalebene nicht verläfst, in welcher er nach P gelangt, dafs er somit in voller Ausdehnung eine ebene Kurve, gekrümmt in der Vertikalebene seiner Endpunkte, darstellt. Man kann dies auch so aussprechen: Für konzentrische sphärische Niveauflächen und Luftschichten ist die regelmäfsige Lateralrefraktion gleich null.

Die Krümmung des Lichtstrahles bei P erscheint zufolge unserer Annahme als sprungweiser Übergang der Zenithdistanz z in $z + d\beta$. Nach dem Brechungsgesetz ist aber

$$n \sin z = (n + dn) \sin (z + d\beta) \,. \tag{1}$$

Hieraus läfst sich eine Differentialgleichung für $d\beta$, d. h. den Betrag der Refraktion in P, herleiten:

$$d\beta = -\frac{dn}{n} \tan z \,. \tag{1*}$$

Durch Integration ergiebt sich dann die Gesamtrefraktion, d. h. der Winkel zwischen den Endtangenten des Lichtstrahles.

Für unsere Zwecke ist es aber vorzuziehen, direkt die Höhenänderung dh aufzustellen, welche zu PP' gehört. Das Differentialdreieck $PP'Q$ giebt, wenn CP mit r bezeichnet wird:

$$dh = dr = r \, d\gamma \cot z' \,. \tag{2}$$

Um dies integrieren zu können, mufs z' oder z als Funktion von r oder γ bekannt sein. Wenn wir von P nach P' übergehen, ändert sich z in z' und zwar ist

$$z' - z = dz = d\beta - d\gamma \,. \tag{3}$$

Von (3) aus könnte man durch Integration z' in der gewünschten Weise dargestellt erhalten. Es läſst sich aber direkt eine Integralformel aufstellen. Das Dreieck $PP'C$ giebt nämlich nach dem Sinussatz

$$r' \sin z' = r \sin (z + d\beta);$$

multipliziert man beiderseits mit n' und beachtet die Relation (1), so folgt

$$n'r' \sin z' = nr \sin z .$$

Nach dieser wichtigen Gleichung ist für den ganzen Lauf des Lichtstrahles $nr \sin z$ konstant, so daſs man setzen kann:

$$nr \sin z = n_1 r_1 \sin z_1 , \tag{4}$$

worin n_1, r_1 und z_1 sich auf Punkt P_1 beziehen. Vertauschen wir nun in (2) z' mit z, was zulässig ist, setzen $\cot z = \sqrt{1 - \sin^2 z} : \sin z$ und substituieren endlich für $\sin z$ den Wert aus (4), so erhalten wir:

$$dr = \frac{r\sqrt{n^2 r^2 - n_1^2 r_1^2 \sin^2 z_1}}{n_1 r_1 \sin z_1} d\gamma . \tag{5}$$

Von dieser Gleichung, welche schon *Laplace* kannte*), ausgehend, kann man, wenn n als Funktion von r gegeben ist, nach vorheriger Reduktion auf $d\gamma$ durch Integration γ als Funktion von r darstellen. Da man aber schlieſslich r als Funktion von γ braucht und bei der Umkehrung Reihenentwicklung anwenden wird, ist es vorteilhaft, mit Umgehung der Integration diese Reihenentwicklung unmittelbar unter Anwendung von *Taylor*s Satz aufzusuchen.

§ 3. **Reihenentwicklung.** Nach *Taylor*s Satz ist für den Punkt P der Radiusvektor

$$r = r_1 + \left(\frac{dr}{d\gamma}\right)_1 \gamma + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2 r}{d\gamma^2}\right)_1 \gamma^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3 r}{d\gamma^3}\right)_1 \gamma^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4 r}{d\gamma^4}\right)_1 \gamma^4 + \dots, \tag{1}$$

wobei r_1 und seine Differentialquotienten für den Punkt P_1 zu nehmen sind. Bei Ableitung der Differentialquotienten gehen wir von der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen aus, welche bei Vertauschung von $z' = z + dz$ mit z (was offenbar zulässig ist) ergiebt:

$$\frac{dr}{d\gamma} = r \cot z . \tag{2}$$

Ferner ist nach (3) und (1*) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{dz}{d\gamma} = -\left(1 + \frac{dn}{d\gamma} \frac{\tan z}{n}\right),$$

*) *Méc. cél.*, t. 4 l. 10, Nr. 11 S. 277. Die Entwicklung erscheint hier sehr kompliziert und ist an mehrere Orte zerstreut.



und da $\frac{dn}{d\gamma} = \frac{dn}{dr}\frac{dr}{d\gamma}$ ist, folgt hieraus mit Rücksicht auf (2):

$$\frac{dz}{d\gamma} = -\left(1 + \frac{r\,dn}{n\,dr}\right) = -(1 - \varkappa)\,, \tag{3}$$

wobei $\varkappa$ zur Abkürzung dient:

$$\varkappa = -\frac{r\,dn}{n\,dr}\,. \tag{3*}$$

Aus (2) folgt nunmehr

$$\frac{d^2 r}{d\gamma^2} = \cot z\,\frac{dr}{d\gamma} - \frac{r}{\sin^2 z}\,\frac{dz}{d\gamma} = r\cot^2 z + \frac{r(1-\varkappa)}{\sin^2 z}\,; \tag{4}$$

ferner in ähnlicher Weise hieraus, wenn $\frac{d\varkappa}{dr} = \varkappa'$ gesetzt wird:

$$\frac{d^3 r}{d\gamma^3} = r\cot^3 z + \frac{r\cot z}{\sin^2 z}(1-\varkappa)(5-2\varkappa) - \frac{r^2\cot z}{\sin^2 z}\varkappa'\,, \tag{5}$$

und endlich, wenn $\frac{d^2\varkappa}{dr^2} = \varkappa''$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 r}{d\gamma^4} = r\cot^4 z &+ \frac{r\cot^2 z}{\sin^2 z}(1-\varkappa)(18-16\varkappa+4\varkappa^2) \\ &+ \frac{r}{\sin^4 z}(1-\varkappa)^2(5-2\varkappa) \\ &- \frac{r^2\cot^2 z}{\sin^2 z}(11-6\varkappa)\varkappa' - \frac{r^2}{\sin^4 z}(1-\varkappa)\varkappa' \\ &- \frac{r^3\cot^2 z}{\sin^2 z}\varkappa''. \end{aligned} \tag{6}$$

Hiermit giebt (1) nachstehende Reihe für $r - r_1 = h$:

$$\begin{aligned} h = s_1\cot z_1 &\left\{1 + \frac{\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)(5-2\varkappa_1) - r_1\varkappa_1'}{6\sin^2 z_1}\gamma^2\right\} \\ + \frac{1}{2}s_1\gamma &\left\{\begin{aligned} &\frac{\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)}{\sin^2 z_1} \\ &+ \frac{\cos^4 z_1 + (1-\varkappa_1)(18-16\varkappa_1+4\varkappa_1^2)\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)^2(5-2\varkappa_1)}{12\sin^4 z_1}\gamma^2 \\ &- \frac{[(11-6\varkappa_1)\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)]\,r_1\varkappa_1' + \cos^2 z_1 . r_1^2\varkappa_1''}{12\sin^4 z_1}\gamma^2 \end{aligned}\right\} \\ + \dots, & \end{aligned} \tag{7}$$

wobei $r_1\gamma = s_1$ gesetzt ist und $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$ und $\varkappa_1''$ die nachstehende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= -\frac{r_1}{n_1}\left(\frac{dn}{dh}\right)_1 \\ \varkappa_1' &= \left(\frac{d\varkappa}{dh}\right)_1 \\ \varkappa_1'' &= \left(\frac{d^2\varkappa}{dh^2}\right)_1. \end{aligned} \tag{7*}$$

Vorstehende Entwicklung kann jedenfalls nur dann konvergent sein, wenn die Funktion $\varkappa$ und ihre Differentialquotienten nach r

und somit auch die Differentialquotienten von r nach γ entlang der Lichtkurve endlich und stetig sind.

Selbstredend ist zur praktischen Brauchbarkeit der Formel (7) eine so rasche Konvergenz erforderlich, dafs zum mindesten die nicht angesetzten Glieder unerheblich sind. Inwieweit dieses für einen thatsächlichen Luftzustand der Fall ist, kann aber nur die Erfahrung zeigen.

Wir formen den Ausdruck (7) für die Anwendung noch etwas um, indem wir die Entfernung s_m, gemessen in der mittleren Höhe beider Stationen, einführen. Es ist

$$s_m = \left(r_1 + \frac{h}{2}\right)\gamma = s_1 + \frac{h\gamma}{2}, \tag{8}$$

also auch

$$s_m = s_1\left(1 + \frac{h\gamma}{2s_1}\right)$$

und

$$s_1 = \frac{s_m}{1 + \frac{h\gamma}{2s_1}} = s_m\left\{1 - \left(\frac{h\gamma}{2s_1}\right) + \left(\frac{h\gamma}{2s_1}\right)^2 - \left(\frac{h\gamma}{2s_1}\right)^3 + \dots\right\}. \tag{8*}$$

Hierzu giebt (7):

$$\frac{h\gamma}{2s_1} = \frac{1}{2}\gamma\cot z_1\left\{1 + \frac{\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)(5-2\varkappa_1) - r_1\varkappa_1'}{6\sin^2 z_1}\gamma^2\right\}$$
$$+ \frac{1}{4}\gamma^2\frac{\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)}{\sin^2 z_1} + \dots .$$

Damit wird erhalten:

$$s_1 = s_m\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{1-\varkappa_1}{4\sin^2 z_1}\gamma^2 \\ -\frac{1}{2}\gamma\cot z_1\left(1 + \frac{-\cos^2 z_1 + 4(1-\varkappa_1)^2 - 2r_1\varkappa_1'}{12\sin^2 z_1}\gamma^2\right) + \dots \end{array}\right\} \tag{9}$$

und hiermit durch Einführung in (7), wobei wir zugleich $1 + \frac{\gamma^2}{12}$ als Faktor ziehen:

$$h = s_m\left(1 + \frac{\gamma^2}{12}\right)\left\{\begin{array}{c} \cot z_1\left[1 - \frac{1 - 4(1-\varkappa_1)^2 + 2r_1\varkappa_1'}{12\sin^2 z_1}\gamma^2\right] \\ + \frac{1-\varkappa_1}{2\sin^2 z_1}\left[\gamma + \frac{1 + 2\cos^2 z_1}{12\sin^2 z_1}(1 - 4\varkappa_1 + 2\varkappa_1^2)\gamma^3\right] \\ - \frac{[(7-6\varkappa_1)\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)]r_1\varkappa_1' + \cos^2 z_1 . r_1^2\varkappa_1''}{24\sin^4 z_1}\gamma^3 + \dots \end{array}\right\} . \tag{10}$$

Diese Formel berücksichtigt alle Potenzen von γ bis γ^4 einschliefslich, $s_m : r$ als Gröfse von der Ordnung γ in betracht gezogen.

§ 4. **Berechnung des Refraktionskoefficienten k_1.** Wenn wir die Formeln (5) S. 520 Bd. 1 auf den vorliegenden Fall anwenden, so wird mit Vernachlässigung von γ^5:

$$h = s_m\left(1 + \frac{\gamma^2}{12}\right)\cot\left(z_1 - \frac{1-k_1}{2}\gamma\right) + \dots . \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $\frac{1}{2} k_1 \gamma$ den Winkel in P_1 zwischen der Geraden nach dem Objekte P_2 und der Tangente der Lichtkurve, also den Refraktionswinkel in P_1, vergl. Fig. 93. Bringen wir nun die Formel (10) des vorigen Paragraphen, welche auch auf den Höhenunterschied h der Punkte P_1 und P_2 bezogen werden kann, auf die Form (1), so wird ein Ausdruck für k_1 erhalten.

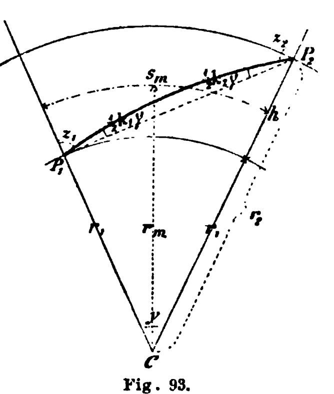


Fig. 93.

Für die grofse Parenthese in (10) setzen wir zunächst, unter $a, b, c \ldots$ zu bestimmende Koefficienten verstanden:

$$\cot(z_1 - [a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + \ldots]), \tag{2}$$

oder in Entwicklung nach *Taylor*s Satz:

$$\cot z_1 + \frac{a}{\sin^2 z_1}\gamma + \frac{b + a^2 \cot z_1}{\sin^2 z_1}\gamma^2 + \frac{3c\sin^2 z_1 + 6ab\cot z_1 \sin^2 z_1 + a^3(1 + 2\cos^2 z_1)}{3\sin^4 z_1}\gamma^3 + \ldots .$$

Indem wir die Koefficienten gleichhoher Potenzen von γ in dieser Entwicklung und in der grofsen Parenthese von (10) einander gleichsetzen, erhalten wir zur Bestimmung von $a, b, c \ldots$ die Relationen:

$$a = \frac{1 - \varkappa_1}{2}, \tag{3}$$

$$b + a^2 \cot z_1 = -\frac{1 - 4(1 - \varkappa_1)^2 + 2r_1\varkappa_1'}{12}\cot z_1,$$

$$3c\sin^2 z_1 + 6ab\cot z_1 \sin^2 z_1 + a^3(1 + 2\cos^2 z_1)$$
$$= \frac{1 + 2\cos^2 z_1}{8}(1 - \varkappa_1)(1 - 4\varkappa_1 + 2\varkappa_1^2)$$
$$- \frac{[(7 - 6\varkappa_1)\cos^2 z_1 + (1 - \varkappa_1)]\, r_1\varkappa_1' + \cos^2 z_1 \,.\, r_1^2\varkappa_1''}{8}.$$

Hieraus folgt

$$b = -\frac{2\varkappa_1 - \varkappa_1^2 + 2r_1\varkappa_1'}{12}\cot z_1 \tag{4}$$

und

$$c = -\frac{\varkappa_1(1-\varkappa_1)(2-\varkappa_1) + [(3-2\varkappa_1)\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)]\, r_1\varkappa_1' + r_1^2\varkappa_1''\cos^2 z_1}{24\sin^2 z_1}. \tag{5}$$

Die Vergleichung von (1) und (2) zeigt aber, dafs

$$k_1 = 1 - 2a - 2b\gamma - 2c\gamma^2 + \ldots, \tag{6}$$

mithin wird

$$k_1 = \varkappa_1 + \frac{2\varkappa_1 - \varkappa_1^2 + 2r_1\varkappa_1'}{6}\gamma\cot z_1 + \frac{\varkappa_1(1-\varkappa_1)(2-\varkappa_1) + [(3-2\varkappa_1)\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)]r_1\varkappa_1' + r_1^2\varkappa_1''\cos^2 z_1}{12\sin^2 z_1}\gamma^2 + \ldots, \tag{6*}$$

welcher Ausdruck in Verbindung mit Formel (1) dasselbe leistet, wie die Formel (10) des vorigen Paragraphen.

Indessen formen wir diesen Ausdruck für k_1 noch um, indem wir die Höhen der Punkte als näherungsweise bekannt voraussetzen, eine Annahme, die auch den eben erwähnten Formeln (10) und (1) zu grunde liegt.

Aus (10) des vorigen Paragraphen folgt zur Substitution im zweiten Gliede von (6*) hinreichend genau für $\cot z_1$:

$$\cot z_1 = \frac{h}{s_m} - \frac{1 - \varkappa_1}{2 \sin^2 z_1} \gamma + \dots \tag{7}$$

In den mit γ^2 multiplizierten Gliedern von (6*) setzen wir ferner ausreichend:

$$\cot z_1 = \frac{h}{s_m} + \dots, \qquad \frac{1}{\sin^2 z_1} = 1 + \frac{h^2}{s_m^2} + \dots .$$

Damit ergiebt sich

$$k_1 = \varkappa_1 - \frac{(1 - \varkappa_1) r_1 \varkappa_1'}{12} \left(\frac{s_m}{r_m}\right)^2 + \frac{\varkappa_1 (2 - \varkappa_1) + 2 r_1 \varkappa_1'}{6} \frac{h}{r_m}$$
$$+ \frac{(2 - \varkappa_1) r_1 \varkappa_1' + r_1^2 \varkappa_1''}{12} \left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots . \tag{8}$$

Hierbei ist auch von der Relation

$$s_m = r_m \gamma \tag{9}$$

Gebrauch gemacht. Zufolge derselben hat man mit Rücksicht auf § 3 (8) S. 556:

$$r_m = r_1 + \frac{h}{2} = r_2 - \frac{h}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2} \tag{9*}$$

und

$$r_1 = r_m - \frac{h}{2} = r_m \left(1 - \frac{h}{2 r_m}\right),$$

welche letztere Formel dazu dienen kann, r_1 aus (8) zu eliminieren.

Um überhaupt in (8) lediglich solche Gröfsen zu haben, die sich auf die mittlere Höhe beziehen, setzen wir noch:

$$\varkappa_m = -\frac{r_m}{n_m} \left(\frac{dn}{dh}\right)_m$$
$$\varkappa_m' = \left(\frac{d\varkappa}{dh}\right)_m \tag{10}$$
$$\varkappa_m'' = \left(\frac{d^2\varkappa}{dh^2}\right)_m .$$

Der Index m deutet die Beziehung auf die Niveaufläche vom Radius r_m in der mittleren Höhe an.

Für eine Niveaufläche in der Höhe x über der Niveaufläche in der mittleren Höhe ist hiermit:

$$\begin{aligned}
\varkappa &= \varkappa_m + \varkappa_m' x + \frac{1}{2}\varkappa_m'' x^2 + \dots \\
\varkappa' &= \varkappa_m' + \varkappa_m'' x \\
\varkappa'' &= \varkappa_m'' + \dots ;
\end{aligned}$$

insbesondere ist für den Punkt P_1, wobei $x = -\frac{h}{2}$ wird:

$$\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \varkappa_m - \frac{r_m \varkappa_m'}{2}\frac{h}{r_m} + \frac{r_m^2 \varkappa_m''}{8}\left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots \\
r_1 \varkappa_1' &= r_m \varkappa_m' \left(1 - \frac{h}{2 r_m}\right) - \frac{r_m^2 \varkappa_m''}{2}\frac{h}{r_m} + \dots \\
r_1^2 \varkappa_1'' &= r_m^2 \varkappa_m'' + \dots .
\end{aligned} \tag{11}$$

Hiermit giebt (8):

$$\begin{aligned}
k_1 = \varkappa_m &- \frac{(1-\varkappa_m) r_m \varkappa_m'}{12}\left(\frac{s_m}{r_m}\right)^2 + \frac{\varkappa_m(2-\varkappa_m) - r_m \varkappa_m'}{6}\frac{h}{r_m} \\
&- \frac{2(2-\varkappa_m) r_m \varkappa_m' - r_m^2 \varkappa_m''}{24}\left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots .
\end{aligned} \tag{12}$$

Im Endpunkt P_2 dagegen ist

$$\begin{aligned}
k_2 = \varkappa_m &- \frac{(1-\varkappa_m) r_m \varkappa_m'}{12}\left(\frac{s_m}{r_m}\right)^2 - \frac{\varkappa_m(2-\varkappa_m) - r_m \varkappa_m'}{6}\frac{h}{r_m} \\
&- \frac{2(2-\varkappa_m) r_m \varkappa_m' - r_m^2 \varkappa_m''}{24}\left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots .
\end{aligned} \tag{13}$$

Der Winkel zwischen den Endtangenten in P_1 und P_2, oder die gesamte Refraktion, findet sich aus (12) und (13) gleich

$$\frac{k_1 + k_2}{2}\gamma = \left\{ \begin{array}{c} \varkappa_m - \dfrac{(1-\varkappa_m) r_m \varkappa_m'}{12}\left(\dfrac{s_m}{r_m}\right)^2 \\ - \dfrac{2(2-\varkappa_m) r_m \varkappa_m' - r_m^2 \varkappa_m''}{24}\left(\dfrac{h}{r_m}\right)^2 + \dots \end{array} \right\}\gamma . \tag{14}$$

Die Parenthese rechter Hand stellt den mittleren Refraktionskoefficienten k des Lichtstrahles $P_1 P_2$ dar.

Die gesamte Refraktion kann man auch leicht direkt berechnen, was zur Kontrolle noch geschehen soll.

§ 5. **Die gesamte Refraktion $k\gamma$ des Lichtstrahles.** Das Differential derselben ist bereits im § 2 S. 553 unter (1*) angegeben worden. Es ist daselbst mit $d\beta$ bezeichnet und entspricht der Zunahme $d\gamma$ des Zentriwinkels γ, Fig. 92, S. 553. Bezeichnen wir die gesamte Refraktion jetzt mit $k\gamma$, so ist also

$$\frac{d(k\gamma)}{d\gamma} = -\frac{dn}{n\,d\gamma}\tan z . \tag{1}$$

Da aber $dh \tan z = r\,d\gamma$ ist, so folgt hieraus mit Rücksicht auf (3*) S. 555:

$$\frac{d(k\gamma)}{d\gamma} = -\frac{r\,dn}{n\,dh} = \varkappa\,. \tag{2}$$

Verfolgen wir nun den Lauf des Lichtstrahles von P_1 aus, so erscheint die gesamte Refraktion desselben als Funktion von γ. Da sie in P_1 selbst noch gleich null ist, so haben wir nach *Taylors* Satz:

$$k\gamma = \left(\frac{d(k\gamma)}{d\gamma}\right)_1 \gamma + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2(k\gamma)}{d\gamma^2}\right)_1 \gamma^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3(k\gamma)}{d\gamma^3}\right)_1 \gamma^3 + \ldots, \tag{3}$$

worin der Index 1 wieder die Beziehung auf P_1 andeutet. Nun ist aber nach (2)

$$\frac{d^2(k\gamma)}{d\gamma^2} = \frac{d\varkappa}{d\gamma} = \frac{d\varkappa}{dh}\,\frac{dh}{d\gamma} = \varkappa'\, r \cot z, \tag{4}$$

und hiermit

$$\frac{d^3(k\gamma)}{d\gamma^3} = \varkappa' \cot z \frac{dr}{d\gamma} - \varkappa' r \frac{1}{\sin^2 z} \frac{dz}{d\gamma} + \varkappa'' r \cot z \frac{dh}{d\gamma},$$

also mit Rücksicht auf (2) und (3) S. 554 u. 555:

$$\frac{d^3(k\gamma)}{d\gamma^3} = \frac{\varkappa' r}{\sin^2 z}(\cos^2 z + 1 - \varkappa) + \varkappa'' r^2 \cot^2 z\,. \tag{5}$$

Es wird hiermit aus (3) für den mittleren Refraktionskoefficienten erhalten:

$$\begin{aligned} k = \varkappa_1 &+ \frac{r_1 \varkappa_1'}{2}\gamma \cot z_1 \\ &+ \frac{r_1 \varkappa_1'(\cos^2 z_1 + 1 - \varkappa_1) + r_1^2 \varkappa_1'' \cos^2 z_1}{6 \sin^2 z_1}\gamma^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

und indem wir mittelst (7) S. 558 aus dieser Entwicklung $\cot z_1$ eliminieren:

$$\begin{aligned} k = \varkappa_1 &- \frac{(1-\varkappa_1) r_1 \varkappa_1'}{12}\gamma^2 + \frac{r_1 \varkappa_1'}{2}\,\frac{h}{r_m} \\ &+ \frac{(1+\varkappa_1) r_1 \varkappa_1' + 2 r_1^2 \varkappa_1''}{12}\left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \ldots. \end{aligned} \tag{7}$$

Um schliefslich auch noch die Koefficienten $\varkappa$ auf die mittlere Höhe zu beziehen, machen wir von den (11) S. 559 Gebrauch. Zugleich führen wir für r_1 nach (9*) S. 558 r_m ein und gelangen zu der Formel:

$$\begin{aligned} k = \varkappa_m &- \frac{(1-\varkappa_m) r_m \varkappa_m'}{12}\left(\frac{s_m}{r_m}\right)^2 \\ &- \frac{2(2-\varkappa_m) r_m \varkappa_m' - r_m^2 \varkappa_m''}{24}\left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \ldots. \end{aligned} \tag{8}$$

Dies ist dasselbe Resultat, welches in (14) S. 559 enthalten ist.

Die Formel (8) zeigt, dafs ein Lichtstrahl, welcher in seinem Verlauf nur geringe Höhenunterschiede aufweist, in erster Annähe-

rung als Kreisbogen aufgefaſst werden darf. Denn für denselben wird k nahezu gleich einem konstanten Werte $\varkappa_m$; die Gesamtkrümmung $k\gamma$ wächst somit nahezu proportional der Länge des Lichtstrahles, dessen Krümmungsradius $= r_m : \varkappa_m$ ist.

§ 6. **Der Einfluſs der Abplattung der Niveauflächen.** Bisher wurde vorausgesetzt, daſs innerhalb des in betracht kommenden Gebietes die Schichten gleicher Luftdichtigkeit ebenso wie die entsprechenden Niveauflächen als konzentrische Kugelflächen aufgefaſst werden dürfen. Da aber die Niveauflächen eine Abplattung haben, so müssen wir diese strenggenommen auch für die Schichten gleicher Luftdichtigkeit einführen. Aus dem zweiten Kapitel wissen wir, daſs die Abplattung mit der Höhenlage der Niveauflächen etwas variiert; indessen genügt es hier, dieselben als Parallelflächen zu behandeln.

Gehen wir nun auf § 2 und Fig. 92 S. 553 zurück, so zeigt sich strenggenommen zunächst die Änderung, daſs die von den Lotrichtungen aufeinanderfolgender Punkte des Lichtstrahles gebildete Fläche keine Ebene mehr ist, weil sich die Lotrichtungen für Punkte einer Niveaufläche im allgemeinen kreuzen. Die hiermit verbundene zweite Krümmung des Lichtstrahles ist aber jedenfalls sehr gering; wir vernachlässigen sie daher, indem wir uns vorbehalten, nachträglich den Nachweis ihrer Geringfügigkeit zu liefern. Dann bleibt in Fig. 92 S. 553 nur noch zu beachten, daſs es keinen gemeinsamen Durchschnittspunkt C aller Normalen giebt, daſs vielmehr im allgemeinen je zwei unendlich benachbarte Normalen, z. B. diejenigen von P und P', einen besonderen Durchschnittspunkt haben. Die Länge der Normalen von hier bis zu einer Niveaufläche ist deren Krümmungsradius; für die Niveaufläche durch P_1 bezeichnen wir denselben mit ϱ. An Stelle des Radiusvektors r tritt nunmehr $\varrho + h$, wobei zu beachten, daſs ϱ eine Funktion von γ ist.

Mit Rücksicht hierauf modifiziert sich die Entwicklung des § 3 S. 554 u. ff. wie folgt. An Stelle von (1) setzen wir:

$$h = \left(\frac{dh}{d\gamma}\right)_1 \gamma + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2h}{d\gamma^2}\right)_1 \gamma^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3h}{d\gamma^3}\right)_1 \gamma^3 + \dots, \tag{1}$$

von welcher Form der Gleichung wir früher nur deshalb keinen Gebrauch gemacht haben, um nicht in der Entwicklung auſser r noch die Variable h zu haben. Jetzt ist dieses unvermeidlich. Die Gleichung (2) § 3 geht über in:

$$\frac{dh}{d\gamma} = (\varrho + h) \cot z\,, \tag{2}$$

die Gleichungen (3) und (3*) in:

$$\frac{dz}{d\gamma} = -(1 - \varkappa), \tag{3}$$

$$\varkappa = -\frac{(\varrho + h)\,dn}{n\,dh}. \tag{3*}$$

Aus (2) folgt durch Differentiation:

$$\frac{d^2h}{d\gamma^2} = \varrho' \cot z + (\varrho + h)\cot^2 z + \frac{(\varrho + h)(1 - \varkappa)}{\sin^2 z}, \tag{4}$$

wobei ϱ' den ersten Differentialquotienten von ϱ nach γ bezeichnet. Ferner ist

$$\begin{aligned}\frac{d^3h}{d\gamma^3} = \varrho'' \cot z + \varrho' \frac{\cos^2 z + 2(1 - \varkappa)}{\sin^2 z} + (\varrho + h)\cot^3 z \\ + \frac{(\varrho + h)\cot z}{\sin^2 z}(1 - \varkappa)(5 - 2\varkappa) - \frac{(\varrho + h)^2 \cot z}{\sin^2 z}\varkappa',\end{aligned} \tag{5}$$

unter $\varkappa'$ wie früher $\frac{d\varkappa}{dh}$ verstanden. Hiermit geht (1) über in

$$\begin{aligned}h = \left(\varrho_1\gamma + \frac{1}{2}\varrho_1'\gamma^2 + \frac{1}{6}\varrho_1''\gamma^3 + \ldots\right)\cot z_1 \\ + \frac{1}{2}\gamma\left\{\left(\varrho_1\gamma + \frac{1}{3}\varrho_1'\gamma^2 + \ldots\right)\cot^2 z_1 + \left(\varrho_1\gamma + \frac{2}{3}\varrho_1'\gamma^2 + \ldots\right)\frac{1 - \varkappa_1}{\sin^2 z_1}\right\} \\ + \frac{1}{6}\varrho_1\gamma^3\left\{\cos^2 z_1 + (1 - \varkappa_1)(5 - 2\varkappa_1) - \varrho_1\varkappa_1'\right\}\frac{\cot z_1}{\sin^2 z_1}\ldots,\end{aligned} \tag{6}$$

mit

$$\varkappa_1 = -\frac{\varrho_1}{n_1}\left(\frac{dn}{dh}\right)_1.$$

Für die horizontale Entfernung s_1 der Punkte P_1 und P_2, gemessen auf der Niveaufläche von P_1 haben wir die *Taylor*sche Entwicklung:

$$s_1 = \varrho_1\gamma + \frac{1}{2}\varrho_1'\gamma^2 + \frac{1}{6}\varrho_1''\gamma^3 + \ldots; \tag{7}$$

führen wir dieselbe in (6) ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}h = s_1 \cot z_1 \left\{1 + \frac{\cos^2 z_1 + (1 - \varkappa_1)(5 - 2\varkappa_1) - \varrho_1\varkappa_1'}{6\sin^2 z_1}\gamma^2\right\} \\ + \frac{1}{2}s_1\gamma\frac{\cos^2 z_1 + (1 - \varkappa_1)}{\sin^2 z_1} + \frac{1}{12}\varrho_1'\gamma^3\left(1 - \frac{\varkappa_1}{\sin^2 z_1}\right) + \ldots.\end{aligned} \tag{7*}$$

Die bei dieser Entwicklung vernachlässigten Glieder von der Ordnung γ^4 können aus (7) S. 555 entnommen werden, indem für r_1 einfach ϱ_1 gesetzt wird.

Die Vergleichung mit dieser letzteren Formel zeigt, dafs die nach der Hypothese der Kugelgestalt berechneten Werte h um

$$+\frac{1}{12}\varrho_1'\gamma^3\left(1 - \frac{\varkappa_1}{\sin^2 z_1}\right) \tag{8}$$

zu verbessern sind. Man überzeugt sich leicht, dafs dieses Korrektionsglied auch für Formel (10) § 3 S. 556 gilt. Bei Anwendung der Formel (1) des § 4 bleibt es ebenfalls bestehen, wenn man k_1 in der Weise nach den Formeln des § 4 berechnet, dafs für r immer ϱ

mit demselben Index gesetzt wird. Dabei ist es innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenzen gestattet in den Formeln (8) und (12) des § 4 S. 558 u. 559 den Krümmungsradius ϱ_m der mittleren Niveaufläche an irgend einer Stelle zwischen P_1 und P_2 zu messen.

Dem Charakter der Formel (1) des § 4 S. 556 würde es übrigens besser entsprechen, das Glied (8) in zwei Teile zu spalten, nämlich in

$$+\frac{1}{12}\varrho_1'\gamma^3 \tag{9}$$

und

$$-\frac{1}{12}\varrho_1'\gamma^3\cdot\frac{\varkappa_1}{\sin^2 z_1}. \tag{9*}$$

Nimmt man das letztere Glied mit in die Cotangente, so ergiebt sich als Verbesserung des nach § 4 berechneten Wertes von k_1:

$$+\frac{\varkappa_1}{6}\frac{\varrho_1'}{\varrho_1}\gamma. \tag{10}$$

Mit Aufstellung des Korrektionsgliedes (9) ist auch die in Bd. 1 S. 520—521 noch unerledigte Frage nach dem Wert des Ergänzungsgliedes $E_{2.1}$ beantwortet. [Wir haben dieses nicht für sich allein abgeleitet (was mit Polarkoordinaten leicht geschehen kann), weil wir noch den Einflufs der Abplattung auf den Refraktionskoefficienten mit in die Betrachtung aufnehmen wollten.]

Behufs numerischer Schätzung von (9) und (10) setzen wir voraus, dafs P_1 und P_2 auf demselben Meridian liegen, P_2 nördlich von P_1. Dann ist in der geographischen Breite B nach Bd. 1 S. 44 (3)

$$\varrho = a_0(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 B+\ldots\right)$$

und

$$\frac{d\varrho}{dB} = \frac{3}{2}a_0e^2\sin 2B+\ldots$$

Da dB und $d\gamma$ jetzt nach der Voraussetzung nicht verschieden sind, so ist, wenn $2\mathfrak{a}$ für e^2 gesetzt wird:

$$\varrho' = 3\mathfrak{a}\,a_0\sin 2B+\ldots \tag{11}$$

und

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = 3\mathfrak{a}\sin 2B+\ldots\,. \tag{12}$$

Diese Ausdrücke sind in (9) bezw. (10) einzuführen.

Für $\gamma = {}^1/_{60}$, d. h. für rund 100^{km} Distanz, wird demnach das Korrektionsglied (9) im Maximum gleich

$${}^1/_{40}\text{ Meter.}$$

Das Glied (9*) giebt hiervon nur einen Bruchteil. Da im Meridian die Abplattung am gröfsten ist, so stellt dieser Wert das überhaupt für 100^{km} Distanz bei Anwendung der Kugelhypothese entstehende gröfste Fehlerglied vor. Man kann dasselbe mit Rücksicht auf die sonst erreichbare Genauigkeit unbedenklich vernachlässigen, obgleich es sich

für aufeinanderfolgende Strecken anhäuft; denn selbst für einen Quadranten giebt es nur etwa 1,5^m.

§ 7. Die regelmäßsige Lateralrefraktion; Notiz über die Aberration des Lichtes. Um die von der Abplattung der Niveauflächen herrührende zweite Krümmung des Lichtstrahles zu schätzen, ist es erforderlich sich die ähnliche Untersuchung des Bandes 1 S. 335 § 6 für die geodätische Linie zu vergegenwärtigen; alsdann wird das Folgende leicht verständlich sein.

Von ihrem Anfangspunkte P_0 bis zum Endpunkte P_n denken wir uns die Lichtkurve in $n =$ unendlich viele, unendlich kleine, geradlinige Elemente P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 u. s. f. zerlegt. Schneiden die Lotrichtungen der Punkte P_0, P_1, P_2 u. s. f. die Erdaxe in den Punkten K_0', K_1', K_2' u. s. f., so stellen die Ebenen $P_0P_1K_0'$, $P_0P_1P_2K_1'$, $P_1P_2P_3K_2'$ u. s. f. die aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der Lichtkurve vor. Für die beiden ersten, welche die Gerade P_0P_1 gemeinsam haben, ist der Flächenwinkel abhängig von der Strecke $K_0'K_1'$ der Erdaxe und dem normalen Abstand des Punktes K_1' von der Geraden P_0P_1. Um den Flächenwinkel auf einen bekannten Ausdruck zurückzuführen, bezeichnen wir mit Q_1 denjenigen Punkt, wo die Lotrichtung für P_1 die Niveaufläche von P_0 schneidet. Die unendlich kleine, gerade Strecke P_0Q_1 können wir aber als Element einer geodätischen Linie betrachten. Für die Ebenen $P_0Q_1K_0'$ und $P_0Q_1K_1'$, zwei aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der letzteren, ist dann der Flächenwinkel v bereits in Bd. 1 durch den Ausdruck auf S. 335 u. gegeben; da nun längere Lichtstrahlen stets nahezu horizontal verlaufen, so weichen die Richtungen der beiden Geraden P_0P_1 und P_0Q_1 und daher auch die normalen Abstände des Punktes K_1' von denselben nur wenig von einander ab; man kann somit in 1. Annäherung den Ausdruck für v auch auf den gesuchten Flächenwinkel anwenden.

Wegen des Umstandes, daß die Ebenen $P_0P_1K_0'$ und $P_0P_1P_2K_1'$ den unendlich kleinen Winkel v miteinander bilden, macht von oben gesehen (das Auge in der Lotlinie P_1 gedacht) der Lichtstrahl bei P_1 eine unendlich kleine, laterale Schwenkung. Setzen wir beide Ebenen bis in die Nähe von P_n fort, so haben sie dort einen unendlich kleinen Querabstand, den man näherungsweise gleich dem Produkt aus v in den normalen Abstand des Punktes P_n von der Geraden P_0P_1 setzen kann. Betrachtet man nun den Lichtstrahl zufolge seiner ersten und wesentlichsten Krümmung als Kreisbogen vom Radius ϱ_l, so ist dieser Abstand angenähert $s^2 : 2\varrho_l$, wenn s die Länge des Lichtstrahles P_0P_n bezeichnet. Damit findet sich aber als Querabstand der beiden Schmiegungsebenen in der Nähe von P_n der Ausdruck (1) S. 335 Bd. 1 mit der Modifikation, dafs ϱ_a durch ϱ_l zu ersetzen ist. Die weitere Rechnung, insbesondere die Summierung der Querabstände

bei P_n zwischen je zwei aufeinander folgenden Schmiegungsebenen, geht wie auf S. 336 Bd. 1 vor sich; schliefslich gelangt man für den in Richtung wachsender Azimute gemessenen Horizontalwinkel zwischen der Vertikalebene, welche in P_0 den Lichtstrahl tangiert und der Vertikalebene von P_0 nach P_n, wieder zu Gleichung (5) S. 337 Bd. 1 mit der eben angedeuteten Modifikation. Bezeichnen wir diesen Winkel als die regelmäfsige Lateralrefraktion und nennen die Endpunkte des Lichtstrahles jetzt P_1 und P_2, so erhalten wir damit den Satz:

Die regelmäfsige Lateralrefraktion eines Lichtstrahles, welcher von einem Punkte P_2 nach einem anderen Punkte P_1 geht, ist in P_1 gleich dem Produkt aus dem Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimutes für das Objekt P_2, (abgesehen darin von dem Einflufs der Höhenlage desselben über dem Standpunkte P_1) in den Refraktionskoefficienten.

Hierbei ist nur noch zu beachten, dafs nach dem Schlufs von § 5 S. 561, wenn k den mittleren Refraktionskoefficienten des Lichtstrahles bezeichnet, $\varrho_l = \varrho_\alpha : k$ gesetzt werden kann.

Wenn man nun bedenkt, dafs k erfahrungsmäfsig in der Regel etwa $^1/_7$ ist, für mefsbare Distanzen aber ohnehin der Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts nur einige Hundertelsekunden erreicht, so kann man gewifs bei den Horizontalwinkeln und Azimuten sowie bei der Betrachtung in § 6, wie geschehen, die regelmäfsige Lateralrefraktion vernachlässigen.

Die Methode vorstehender Entwicklung entspricht dem von *Sonderhof* 1869 im 51. Teile von *Grunerts Archiv* S. 39 und 45 eingeschlagenen Wege. Den Betrag der regelmäfsigen Lateralrefraktion gab bereits 1867 *Andrae* im 1. Bde. der *Danske Gradmaaling* S. 543 an.

Anm. *Über den Einflufs der Aberration auf terrestrische Messungen.* Derselbe kann vernachlässigt werden. Um dieses nachzuweisen, betrachten wir zwei Punkte, ein Objekt O und einen Standpunkt, woselbst sich ein Fernrohr FM befindet, welches genau auf O gerichtet ist, Fig. 94. Zur Zeit 1 sei das Objekt in O_1, das Fadenkreuz in F_1 und der optische Mittelpunkt des Objektivs (den wir der Einfachheit halber an Stelle der zwei Hauptpunkte benutzen), in M_1. Wir nehmen nun an, dafs die drei Punkte sich mit derselben Geschwindigkeit rechtwinkelig zur Linie OMF bewegen. Ein von O_1 ausgegangener Lichtstrahl möge zur Zeit 2 gerade in M_2 anlangen. Man findet dann mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit der Dreiecke $O_1M_1M_2$ und $M_2F_2F_3$ leicht, dafs dieser Lichtstrahl zu einer Zeit 3, wo er in der Ebene des Fadenkreuzes anlangt, gerade den Kreuzpunkt selbst trifft (konstante Lichtgeschwindigkeit von O bis F vorausgesetzt). Das Fernrohr, dessen Richtung F_3M_3 zur Zeit 3 parallel $F_1M_1O_1$ ist, steht daher anscheinend aufs Objekt ein. Es steht aber auch wirklich ein, da F_3M_3 durch O_3 hindurch geht. Die Aberration ist somit null. Würde sich hingegen O in der Zeit 1.3 bis O_3' bewegen, so entstünde eine Aberration gleich dem Winkel, unter welchem O_3O_3' von F_3 aus erscheint. Dieser Winkel ist in Sek. gleich

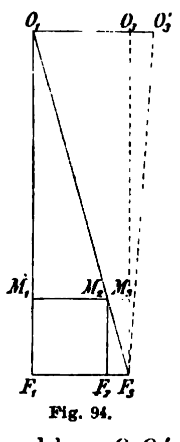


Fig. 94.

$$206265 \frac{v}{l}, \tag{1}$$

worin v die Geschwindigkeitsdifferenz von O und F, l die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Handelt es sich nun um einen Standpunkt und ein Objekt auf der Erdoberfläche, so brauchen wir nur die Bewegungskomponente normal zur Verbindungslinie zu betrachten, da offenbar diese allein Ursache von Aberration wird. Nach § 2 S. 3 des 1. Kap. kann man sich aber jede Bewegung eines Punktes der Erde in zwei Teile zerlegt denken, in eine Parallelverschiebung mit dem Erdschwerpunkt und eine Drehung um den letzteren. Nach dem eben Gesagten erzeugt nun höchstens die Drehung um den Erdschwerpunkt, also die tägliche Bewegung, eine Aberration. Der Betrag derselben ist nach Formel (1) zu berechnen. Das Maximum der Aberration entsteht für zwei Punkte desselben Meridianes, weil in diesem Falle die Verbindungslinie normal zur Bewegungsrichtung steht, sodafs die ganze Bewegungsdifferenz Aberration erzeugt.

Ist R der Erdradius, B die geographische Breite des einen, $B + \Delta B$ diejenige des anderen Punktes, so ist die Bewegung des ersten Punktes in einer Sekunde angenähert gleich

$$\frac{2\pi R \cos B}{24.60.60}$$

und daher, abgesehen vom Vorzeichen

$$v = \frac{\pi R \sin B \, \Delta B}{43200} = \frac{\pi s \sin B}{43200}, \tag{2}$$

wenn $s = R \Delta B$ die Entfernung bezeichnet. Hiermit wird die Aberration in Sekunden gleich

$$\frac{206265 \, \pi \, \sin B \, s^m}{43200 . 300\,000\,000}, \tag{3}$$

indem das Licht in der Sekunde rund $300\,000\,000^m$ zurücklegt. Man bemerkt, dafs (3) selbst für $s = 300\,000^m$ im Maximum nur 0,015″ beträgt.

§ 8. **Einflufs einer Abweichung der Luftschichten gleicher Dichtigkeit von der Normalform.** Es ist in § 6 nachgewiesen worden, dafs man bei Berechnung der Höhenrefraktion von der Abplattung der Luftschichten gleicher Dichtigkeit absehen kann. Diese Abplattung, welche der Voraussetzung des Zusammenfallens jener Luftschichten mit Niveauflächen entspricht, ist überhaupt im Vergleiche zu den anormalen Abweichungen der Luftschichten gleicher Dichte von ganz untergeordneter Bedeutung. Die Ursache der Abweichungen von der Normalform ist die Unregelmäfsigkeit der Verteilung der Wärme und des Druckes in der Luft. Bezüglich der Wärmeverteilung sei hier nur bemerkt, dafs in der Nähe des Terrains die Lufttemperatur weit gröfseren täglichen Schwankungen unterliegt als in gröfseren, freien Höhen über dem Terrain; ist nun das Terrain geneigt, so ergiebt sich schon daraus eine Abweichung der Schichten gleicher Luftdichte in der Nähe des Terrains von der Normalform. Die Ungleichheit des Luftdruckes im Meeresniveau aber zeigt jede

Isobarenkarte, jeder Wetterbericht der deutschen Seewarte. Ein vollständiges Horizontallaufen der Luftschichten gleicher Dichte wird daher ebensowenig stattfinden, wie ein völliger Parallelismus, und es fragt sich, ob für diesen Fall unsere Formeln noch eine Bedeutung haben, weil die bei Entwicklung derselben vorausgesetzte Normalform nicht stattfindet.

Wir knüpfen an die Untersuchung des § 2 S. 553 an. Wenn der Lichtstrahl im Punkte P auf eine Luftschicht trifft, die daselbst nicht horizontal ist, so tritt an die Stelle der Zenithdistanz z als Einfallswinkel ein anderer Wert ε. Das Differential der Brechung bei P wird nun

$$d\beta = -\frac{dn}{n}\tan\varepsilon. \tag{1}$$

dn ist die sprungweise bei P eintretende, unendlich kleine Änderung des Brechungsindex n; dieselbe bleibt konstant innerhalb einer Schicht von der Dicke dh' (früher dh), in welcher der Lichtstrahl ein Bogenelement $PP' = d\sigma$ durchläuft. Da nun $d\sigma \,.\cos\varepsilon = dh'$ ist, so folgt aus (1):

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = -\frac{\sin\varepsilon\, dn}{n\, dh'}\,.$$

Der Krümmungsradius ϱ_l des Lichtstrahles ist aber gegeben durch die Relation

$$\varrho_l\, d\beta = d\sigma\,,$$

folglich wird

$$\frac{1}{\varrho_l} = -\frac{\sin\varepsilon}{n}\frac{dn}{dh'}\,. \tag{2}$$

Hierin ist dn die Änderung des Brechungsindex für die Strecke dh' normal zur Luftschicht. Messen wir aber dn für eine vertikale Strecke dh, und ist ν der Neigungswinkel der Luftschicht bei P, so folgt für die Werte dh und dh', welche demselben Differential dn entsprechen, die Relation $dh = dh'\sec\nu$. Es wird daher

$$\frac{dn}{dh'} = \frac{dn}{dh}\sec\nu\,.$$

Um anzudeuten, daſs in $dn:dh$ das Differential dh sich nicht auf die Höhenänderung des Lichtstrahles, welche zu dessen Linienelement $d\sigma$ gehört, sondern auf eine ausschlieſsliche Höhenänderung an dem betreffenden Punkte bezieht, schreiben wir besser

$$\frac{dn}{dh'} = \frac{\partial n}{\partial h}\sec\nu\,.$$

Die partielle Differentiation rechter Hand entspricht dem Umstande, daſs n jetzt nicht mehr lediglich Funktion von h bezw. r ist, sondern daſs es von drei Koordinaten abhängt, als welche sich darbieten h, γ und das Azimut derjenigen Vertikalebene in P_1, welche die Ebene der Zählung für γ bildet.

Nach (2) wird nunmehr:

$$\frac{1}{\varrho_l} = -\frac{\partial n \sin \varepsilon}{n \partial h \cos \nu}. \tag{3}$$

Die Ebene der Krümmung des Lichtstrahles bei P steht im allgemeinen nicht vertikal sondern schief, nämlich normal auf der Luftschicht gleicher Dichte, welche durch P hindurchführt. Denken wir uns den Lichtstrahl auf die Vertikalebene $P_1 P_2$ projiziert, so erlangt in der Projektion die Brechung und also auch $1 : \varrho_l$ einen etwas anderen Wert. Man kann dies durch Beifügen eines Faktors $\sec^3 \lambda \cos \mu$ zum Ausdruck bringen. Denkt man sich nämlich drei aufeinanderfolgende Punkte P', P und P' des Lichtstrahles und bezeichnet für den Augenblick die Seiten des von denselben gebildeten, unendlich kleinen Dreiecks Δ mit a, b und c, so ist bekanntlich $1 : \varrho_l = 4\Delta : abc$. Die Projektion verkleinert sowohl Δ wie a, b und c, letztere drei Strecken nahezu in gleichem Verhältnis, und diese Veränderung wird durch den Faktor $\cos \mu : \cos^3 \lambda$ dargestellt.

Wir haben nun in der Projektion auf die Vertikalebene $P_1 P_2$

$$\frac{1}{\varrho_l} = -\frac{\partial n \sin \varepsilon \cos \mu}{n \partial h \cos \nu \cos^3 \lambda}. \tag{4}$$

Wenn dagegen die Luftschichten ihre Normalform haben, so ist

$$\frac{1}{\varrho_l} = -\frac{dn}{n dh} \sin z = -\frac{\partial n}{n \partial h} \sin z. \tag{4*}$$

Die Formeln (4) und (4*) geben aber in der Regel beide den Wert von $1 : \varrho_l$ gleich $-\partial n : n \partial h$, d. i. $\varkappa : r$, erheblich genauer als auf $1^0/_0$.

Da nämlich die Lichtstrahlen nach entfernten Objekten immer nahezu horizontal laufen, so ist z nahezu 90^0 und $\sin z$ weicht somit nur um eine Gröfse 2. Ordnung von eins ab, wenn man als 1. Ordnung den Arcus des Neigungswinkels des Lichtstrahles gegen die Horizontale annimmt. Insbesondere ist für die Werte $2^0 30'$ und $8^0 10'$ dieses Winkels die Abweichung 0,001 bezw. 0,01. Setzen wir nun voraus, dafs die Neigung ν der Luftschichten nur einige Grade beträgt, so wird ε ebenso wie z nahezu gleich 90^0, wozu allerdings bemerkt werden mufs, dafs die Abweichungen von 90^0 in z sich mit der Neigung ν der Luftschichten ungünstig kombinieren können, sodafs die Abweichungen von 90^0 in ε im allgemeinen gröfser als diejenigen in z sein werden. Jedenfalls wird $\sin \varepsilon$ mit eins bis auf weniger als 0,01 übereinstimmen, solange die Abweichung des Wertes von ε gegen 90^0 nicht 8^0 überschreitet. Mit dieser Abweichung kombiniert sich diejenige des Faktors $\cos \mu \sec \nu$ in (4) von eins in jedem Falle so günstig, dafs eine Verkleinerung entsteht; um dieses einzusehen, hat man zu beachten, dafs μ wesentlich als Komponente von ν quer zur Brechungsebene des Lichtstrahles auftritt. Was endlich $\cos^3 \lambda$ an-

betrifft, so braucht nur darauf hingewiesen zu werden, dafs λ von der Ordnung der anormalen Lateralrefraktion ist, um zu erkennen, dafs es immer mit eins vertauscht werden darf.

Der Umstand, dafs die beobachteten Lateralrefraktionen nur selten mehr wie einige Sekunden betragen und in der Regel erheblich kleiner als die entsprechenden Höhenrefraktionen sind, beweist, dafs die Neigung der Luftschichten im allgemeinen thatsächlich nur einige Grade beträgt. Denn die Lateralrefraktion und die Höhenrefraktion stehen annähernd im Verhältnis $\sin\mu : \cos\mu$, wie die Projektion des Lichtstrahles auf Niveaufläche und Vertikalebene zeigt [s. o. Entwicklung zu (4)]. Es mufs daher $\sin\mu$ in der Regel im Durchschnitt für die ganze Länge des Lichtstrahles ein kleiner Bruch sein.

In allen Fällen nun, wo man (4*) mit (4) vertauschen darf, kann man bei Berechnung der Refraktion die Ausdrücke der §§ 3 bis 5 zu grunde legen. Dieselben gelten somit nicht nur bei normaler Lagerung, sondern auch bei geringer Neigung der Luftschichten gleicher Dichte. Man mufs aber beim Gebrauche der Formeln darauf achten, dafs die von der Krümmung des Lichtstrahles abhängige Gröfse $\varkappa$ und ihre durch $\varkappa'$ und $\varkappa''$ bezeichneten Veränderungen nach der Höhe bei der allgemeineren Benutzung der Formeln immer auf die Umgebung des Lichtstrahles zu beziehen sind. Hieraus ergiebt sich einesteils noch eine Einschränkung für die Anwendbarkeit der Formeln, anderenteils eine Einschränkung der Methoden zur Bestimmung der Konstanten, worauf wir weiterhin einzugehen haben.

§ 9. **Fortsetzung; Ausnahmefall.** Die Formeln der §§ 3 bis 5 dürfen bei nicht normaler Luftschichtung unmittelbar Anwendung finden, sobald der Lichtstrahl $P_1 P_2$ nur steigt oder nur fällt. Die in den Formeln auftretenden Gröfsen $\varkappa_1$, $\varkappa'_1$, $\varkappa''_1$ u. s. w. können wir uns dabei (ganz abgesehen von der wirklichen Ausführung) dadurch gegeben denken, dafs $\varkappa$ aufser für P_1 noch für mindestens zwei andere Punkte des Lichtstrahles bekannt ist. Da allen diesen Punkten verschiedene Höhen zukommen, so erscheint nun $\varkappa$ entlang des Lichtstrahles als Funktion der Höhe und $\varkappa_1'$ sowie $\varkappa_1''$ u. s. w. lassen sich interpolatorisch herstellen. Sobald der Lichtstrahl jedoch teils steigt, teils fällt, giebt es im Verlaufe desselben Orte gleicher Höhe, in denen $\varkappa$ bei geneigter Luftschichtung um so verschiedenere Werte hat, je entfernter solche Orte von einander sind.

In diesem Falle ist es unzulässig, $\varkappa$ als Funktion der Höhe aufzufassen. Man wird vielmehr $\varkappa$ entlang des Lichtstrahles als Funktion der Entfernung oder, was dasselbe, als Funktion von γ annehmen und die Formeln demgemäfs umwandeln. Hierbei ist an § 3 S. 554 anzuknüpfen. Für die Reihe (1) gilt jetzt mit der im vorigen Paragraphen angegebenen Genauigkeit die Entwicklung der Differential-

quotienten nur bis (4) einschliefslich, weil weiterhin aufser $\varkappa$ noch dessen Differentialquotienten auftreten.

Für $\varkappa$ besteht die früher aufgestellte Formel (3*) § 3 S. 555, die jetzt besser wie folgt geschrieben wird:

$$\varkappa = -\frac{r\partial n}{n\partial h}.$$

Bei der Differentiation von (4) nach γ setzen wir nun

$$\frac{d\varkappa}{d\gamma} = \varkappa' \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varkappa}{d\gamma^2} = \varkappa'' \tag{1}$$

und erhalten anstatt (5) S. 555:

$$\frac{d^3 r}{d\gamma^3} = r\cot^3 z + \frac{r\cot z}{\sin^2 z}(1-\varkappa)(5-2\varkappa) - \frac{r\varkappa'}{\sin^2 z}, \tag{2}$$

ferner anstatt (6) S. 555:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 r}{d\gamma^4} = r\cot^4 z &+ \frac{r\cot^2 z}{\sin^2 z}(1-\varkappa)(18-16\varkappa+4\varkappa^2) \\ &+ \frac{r}{\sin^4 z}(1-\varkappa)^2(5-2\varkappa) \\ &- \frac{r\cot z}{\sin^2 z}(10-6\varkappa)\varkappa' \\ &- \frac{r\varkappa''}{\sin^2 z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Hiermit wird anstatt (7) S. 555 erhalten:

$$\begin{aligned} h = s_1 \cot z_1 &\left\{1 + \frac{\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)(5-2\varkappa_1)}{6\sin^2 z_1}\gamma^2\right\} \\ + \frac{1}{2}s_1\gamma &\left\{\begin{aligned} &\frac{\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)}{\sin^2 z_1} \\ &+ \frac{\cos^4 z_1 + (1-\varkappa_1)(18-16\varkappa_1+4\varkappa_1^2)\cos^2 z_1 + (1-\varkappa_1)^2(5-2\varkappa_1)}{12\sin^4 z_1}\gamma^2 \\ &- \frac{\varkappa_1'}{3\sin^2 z_1}\gamma - \frac{(10-6\varkappa_1)\varkappa_1'\cot z + \varkappa_1''}{12\sin^2 z_1}\gamma^2 \end{aligned}\right\}, \\ + \ldots, & \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $r_1\gamma = s_1$ gesetzt ist und $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$ und $\varkappa_1''$ die nachstehende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= -\frac{r_1}{n_1}\left(\frac{\partial n}{\partial h}\right)_1 \\ \varkappa_1' &= \left(\frac{d\varkappa}{d\gamma}\right)_1 \\ \varkappa_1'' &= \left(\frac{d^2\varkappa}{d\gamma^2}\right)_1. \end{aligned} \tag{4*}$$

Anstatt (10) S. 556 ergiebt sich:

$$h = s_m\left(1+\frac{\gamma^2}{12}\right)\left\{\begin{array}{c} \cot z_1\left[1-\frac{1-4(1-\varkappa_1)^2}{12\sin^2 z_1}\gamma^2\right] \\ +\frac{1-\varkappa_1}{2\sin^2 z_1}\left[\gamma+\frac{1+2\cos^2 z_1}{12\sin^2 z_1}(1-4\varkappa_1+2\varkappa_1^2)\gamma^3\right] \\ -\frac{\varkappa_1'}{6\sin^2 z_1}\gamma^2-\frac{6\varkappa_1'(1-\varkappa_1)\cot z_1+\varkappa''}{24\sin^2 z_1}\gamma^3+\dots \end{array}\right\}. \quad (5)$$

Endlich wird anstatt (6*) S. 557 erhalten:

$$k_1 = \varkappa_1 + \frac{2\varkappa_1-\varkappa_1^2}{6}\gamma\cot z_1 + \frac{\varkappa_1'}{3}\gamma + \frac{2\varkappa_1'(1-\varkappa_1)\cot z_1+\varkappa_1''}{12}\gamma^2 + \frac{\varkappa_1(1-\varkappa_1)(2-\varkappa_1)}{12\sin^2 z_1}\gamma^2+\dots. \quad (6)$$

Zur Prüfung kann man in den neuen Formeln setzen:

$$\begin{aligned} \varkappa_1' &= r_1\varkappa_1'\cot z_1 \\ \varkappa_1'' &= r_1\varkappa_1'\cot^2 z_1 + \frac{r_1\varkappa_1'(1-\varkappa_1)}{\sin^2 \varkappa_1} + r_1^2\varkappa_1''\cot^2 z_1 \end{aligned} \quad (7)$$

und wird die früheren wieder erhalten.

§ 10. **Zusammenstellung der Formeln.** Wir stellen nunmehr die wichtigsten der bisher entwickelten Formeln zusammen, wobei wir uns noch einige Abkürzungen erlauben und zugleich auf die Angaben von Bd. 1 S. 520 Rücksicht nehmen.

Wir bezeichnen die beiden Punkte, welche der Lichtstrahl verbindet, wie bisher mit P_1 und P_2. Die auf P_1 und P_2 bezogenen Höhen und Lotabweichungen werden durch die Indices 1 und 2 unterschieden, und zwar sei:

H die Meereshöhe oder Höhe über dem Geoid,

$\mathfrak{H}$ die Höhe über dem Referenzellipsoid,

$N = \mathfrak{H} - H$ die Höhe des Geoids über dem Referenzellipsoid in der Lotlinie des betr. Punktes,

ξ die Abweichung des wahren Zeniths vom ellipsoidischen nach Süden,

η dieselbe nach Westen.

Ferner sei:

$z'_{1.2}$ die beobachtete Zenithdistanz des Lichtstrahles in P_1,

$z'_{2.1}$ dieselbe in P_2,

$z_{1.2}$ die ellipsoidische, d. h. von Lotabweichung befreite Zenithdistanz des Lichtstrahles in P_1,

$z_{2.1}$ dieselbe in P_2,

während Bd. 1 S. 520 $\zeta_{1.2}$ und $\zeta_{2.1}$ die ellipsoidischen Zenithdistanzen der Geraden P_1P_2 bezeichneten; weiter nennen wir wie dort:

s_0 die Entfernung der Punkte im Niveau des Referenzellipsoids,

s_m die Entfernung in der mittleren Höhe $\mathfrak{H}$ beider Punkte,

$\varrho_{1.2}$ den Krümmungsradius des Referenzellipsoids in der Vertikalebene $P_1 P_2$ mit den Azimuten $\alpha'_{1.2}$ und $\alpha'_{2.1}$.

In der 1. Formel (5) S. 520 Bd. 1 für einseitige Messungen dürfen wir nun zuerst nach § 6 S. 563 das Glied $E_{2.1}$ weglassen. Setzen wir aufserdem fest, dafs die Entfernung

$$s < 64^{km}, \quad \text{also} \quad \gamma < 0{,}01$$

sein soll, so verschwindet sicher auch der Einflufs von $\frac{\gamma^2}{12}$ in dem Faktor hinter s_m in der genannten Formel. Dieselbe giebt daher, wenn zugleich für $\zeta_{1.2}$ gesetzt wird $z_{1.2} + \frac{1}{2} k_1 \gamma$, die Näherungsformel für einseitige Messung von P_1 aus:

$$h = \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1 = s_m \cot\left(z_{1.2} - \frac{1-k_1}{2}\gamma\right) \tag{1}$$

oder ebenso genau

$$h = s_m \cot z_{1.2} + \frac{1-k_1}{2} \frac{s_m s_0}{\varrho_{1.2} \sin^2 z_{1.2}}, \tag{1*}$$

wobei in hinreichender Annäherung zu nehmen ist:

$$\begin{aligned} s_m &= s_0\left(1 + \frac{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}{2\varrho_{1.2}}\right) \\ \underset{\text{in Sek.}}{\gamma} &= \varrho'' \frac{s_0}{\varrho_{1.2}} \\ z_{1.2} &= z'_{1.2} + \xi_1 \cos\alpha'_{1.2} + \eta_1 \sin\alpha'_{1.2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Der Refraktionswinkel in P_1 ist hier zu $\frac{1}{2} k_1 \gamma$ angesetzt, während wir ihn in Bd. 1 S. 520 zu $\frac{1}{2} k_1 \gamma'$ annahmen. Die Bedeutung von k_1 ist in beiden Fällen etwas verschieden; für den ersten Fall aber ist sie unseren jetzigen Entwicklungen entsprechend, wobei als Normalform der Luftschichten gleicher Dichte diejenige der Parallelflächen zu einem Referenzellipsoid, welches für die betreffende Gegend einen guten Anschlufs gewährt, anzusehen ist. Abweichungen von dieser Normalform infolge der abweichenden Gestalt der Niveauflächen kann man sich mit Abweichungen der Luftschichten aus anderen Gründen kombiniert denken. Die Betrachtung einer anderen Normalform der Luftschichten, die der wirklichen Gestalt der Niveauflächen mehr angepafst ist, erschien hinsichtlich des Erfolges mit Rücksicht auf anderweite, unvermeidliche Ungenauigkeiten überflüssig; jedenfalls hat der Ausdruck $\frac{1}{2} k_1 \gamma$ den Vorzug, die Endformel zu vereinfachen.

In den früher abgeleiteten Ausdrücken für k_1 können bedeutende Vereinfachungen mit Rücksicht darauf erfolgen, dafs $\gamma < 0{,}01$ sein soll, $h : r$ immer $< 0{,}001$ sein wird und $\varkappa$ etwa gleich $^1/_7$ ist. Be-

trachten wir speziell die Formel (8) S. 558, so ist einleuchtend, dafs hierin r_1 und r_m ohne weiteres beide gleich $\varrho_{1.2}$ oder gleich einem mittleren Erdkrümmungsradius ϱ gesetzt werden dürfen, und dafs das Glied $r_1 \varkappa_1' (h : r_m)^2$ unter der zur Brauchbarkeit der Entwicklung notwendigen Annahme: $\varkappa_1' h$ sei ein kleiner Bruch, weggelassen werden kann.

Wir nehmen hiernach im Mittel aus (6*) und (8) S. 557 u. 558:

$$k_1 = \varkappa_1 + \frac{1}{6} \varkappa_1' (h + s_m \cot z_{1.2}) + \frac{1}{12} \varkappa_1'' h^2 + \dots \quad (3)$$

Diese Näherungsformel gilt bei normaler Luftschichtung für beliebige Lichtstrahlen, dagegen bei anormaler Luftschichtung für lediglich steigende oder fallende Lichtstrahlen. Sie betrachtet $\varkappa$ als Funktion der Höhe; insbesondere ist

$$\varkappa_1' = \left(\frac{d\varkappa}{dh}\right)_1, \quad \varkappa_1'' = \left(\frac{d^2\varkappa}{dh^2}\right)_1 \text{ u. s. f.}$$

Für einen beliebigen Punkt des Lichtstrahles in der Höhe h über P_1 wird somit nach *Taylors* Satz:

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_1' h + \frac{1}{1.2} \varkappa_1'' h^2 + \dots \quad (4)$$

Eine Formel von allgemeinerer Gültigkeit als (3), welche auch für teilweise steigende und fallende (jedoch jedenfalls nur für nahezu horizontale) Lichtstrahlen gilt, ist (6) S. 571, wonach man (unter Ergänzung um ein für später erforderliches, leicht abzuleitendes Glied) hat:

$$k_1 = \varkappa_1 + \frac{1}{3} \varkappa_1' \gamma + \frac{1}{12} \varkappa_1'' \gamma^2 + \frac{1}{60} \varkappa_1''' \gamma^3 + \dots \quad (5)$$

Diese Näherungsformel betrachtet $\varkappa$ entlang dem Lichtstrahl als Funktion von γ; insbesondere ist

$$\varkappa_1' = \left(\frac{d\varkappa}{d\gamma}\right)_1, \quad \varkappa_1'' = \left(\frac{d^2\varkappa}{d\gamma^2}\right)_1 \text{ u. s. f.}$$

Für einen beliebigen Punkt im Zentriwinkelabstand γ von P_1 ist somit nach *Taylors* Satz:

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_1' \gamma + \frac{1}{1.2} \varkappa_1'' \gamma^2 + \dots \quad (6)$$

In allen Fällen ist nach (7*) S. 555 und (4*) S. 570:

$$\varkappa_1 = -\frac{\varrho_{1.2}}{n_1} \left(\frac{\partial n}{\partial h}\right)_1. \quad (7)$$

In diesem Ausdrucke für $\varkappa_1$ soll strenggenommen anstatt $\varrho_{1.2}$ stehen $\varrho_{1.2} + \mathfrak{H}_1$; jedoch entspricht einerseits die Vernachlässigung von $\mathfrak{H}_1$ dem bei den Formeln für k_1 innegehaltenen Genauigkeitsgrade, und es ist andererseits in denjenigen Fällen, wo diese Formeln (5) und (6) zur Anwendung gelangen, eine gröfsere Genauigkeit aus anderen

Gründen gar nicht zu erreichen. Jedoch ist bei der Bildung der Differentialquotienten von $\varkappa$ nach h von dem strengen Ausdruck

$$\varkappa = -\frac{\varrho_{1.2} + \mathfrak{H}}{n}\frac{\partial n}{\partial h} \tag{7*}$$

auszugehen und $\partial\mathfrak{H} = \partial h$ zu nehmen. Wird dann im Endwert $\mathfrak{H}$ wieder vernachlässigt, so findet sich:

$$\varrho_{1.2}\varkappa_1' = \varkappa_1 + \varkappa_1^2 - \frac{\varrho_{1.2}^2}{n_1}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial h^2}\right)_1$$

und (8)

$$\varrho_{1.2}^2\varkappa_1'' = 2\varkappa_1^2(1+\varkappa_1) - \frac{\varrho_{1.2}^2}{n_1}(2+3\varkappa_1)\left(\frac{\partial^2 n}{\partial h^2}\right)_1 - \frac{\varrho_{1.2}^3}{n_1}\left(\frac{\partial^3 n}{\partial h^3}\right)_1.$$

Für gleichzeitige, gegenseitige Messungen ist nach Bd. 1 S. 520 (6):

$$h = \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1 = s_m \tan\left(\frac{z_{2.1} - z_{1.2}}{2} + \frac{k_2 - k_1}{4}\gamma\right), \tag{9}$$

oder auch ebenso genau:

$$h = s_m \tan\frac{z_{2.1} - z_{1.2}}{2} + \frac{k_2 - k_1}{4}\frac{s_m^2}{\varrho_{1.2}}\sec^2\frac{z_{2.1} - z_{1.2}}{2}. \tag{9*}$$

Dabei ist s_m und γ wie in (2) zu verstehen; ferner ist:

$$z_{2.1} - z_{1.2} = z'_{2.1} - z'_{1.2} + \begin{Bmatrix} \xi_2 \cos a'_{2.1} + \eta_2 \sin a'_{2.1} \\ -\xi_1 \cos a'_{1.2} - \eta_1 \sin a'_{1.2} \end{Bmatrix}. \tag{10}$$

k_1 und k_2 kann man hierzu nach (3) bezw. (5) berechnen: k_2 selbstverständlich erst nach vorheriger angemessener Vertauschung der Indices.

Wir führen hier noch die mit Rücksicht auf Bd. 1 S. 520 aus der Gleichung $\zeta_{1.2} + \zeta_{2.1} = \gamma + 180^0$ leicht ableitbare Relation für die Gesamtrefraktion an:

$$\frac{k_1 + k_2}{2}\gamma = \gamma - (z'_{1.2} + z'_{2.1} - 180^0) - \begin{Bmatrix} \xi_1 \cos a'_{1.2} + \eta_1 \sin a'_{1.2} \\ + \xi_2 \cos a'_{2.1} + \eta_2 \sin a'_{2.1} \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

Im Falle einer Anwendung der Formeln wird es sich immer darum handeln, die in den Koefficienten k_1 bezw. k_2 auftretende Gröfse $\varkappa$ und ihre Derivierten zu bestimmen — entweder aus Temperaturbeobachtungen oder aus den in geeigneter Weise angeordneten Messungen von Zenithdistanzen selbst. Bei allen Verfahren, die in dieser Hinsicht eingeschlagen worden sind, laufen Annahmen unter, die den thatsächlichen Umständen in der Regel nicht genau entsprechen. Leider dürfte es unmöglich sein, ohne dergleichen Annahmen vorzugehen; doch ist selbstverständlich die Zweckmäfsigkeit der Annahmen verschieden. Im allgemeinen mag hier nochmals

hervorgehoben werden, dafs die Formeln zufolge ihrer Entwicklung eine brauchbare Annäherung nur dann versprechen, wenn $\varkappa$ entlang dem Lichtstrahle nicht zu raschen Änderungen unterliegt.

Zur Beleuchtung der Frage über die Schwankungen in $\varkappa$ betrachten wir im nächsten Paragraphen dessen Abhängigkeit von Lufttemperatur und Luftdruck.

§ 11. **Der Refraktionskoefficient $\varkappa$ als Funktion von Temperatur und Druck der Luft.** Ist Θ die Dichtigkeit der Luft für den auf 0^0 reduzierten Stand b des Quecksilberbarometers bei der Schwerebeschleunigung g und für eine Temperatur gleich t^0 der hundertteiligen Skala, und gehört hierzu der Brechungsindex n beim Übergang aus dem leeren Raum in die Luft, so hat man für zwei verschiedene Wertsysteme einesteils nach dem *Arago*schen Gesetz:

$$n - 1 = (n_0 - 1)\,\frac{\Theta}{\Theta_0}\,, \tag{1}$$

andernteils nach dem *Mariotte*- und *Gay-Lussac*schen Gesetz, indem der Ausdehnungskoefficient der Luft gleich 0,003665 ist:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{bg}{b_0 g_0} \cdot \frac{1 + 0{,}003665\, t_0}{1 + 0{,}003665\, t}\,, \tag{2}$$

wenn beachtet wird, dafs der hydrostatische Druck der Höhe der Flüssigkeitssäule und der Schwerkraft proportional ist. Es wird daher

$$n - 1 = (n_0 - 1)\,\frac{bg}{b_0 g_0}\,\frac{1 + 0{,}003665\, t_0}{1 + 0{,}003665\, t}\,, \tag{3}$$

oder, wenn man die sogenannte absolute Temperatur

$$\frac{1}{0{,}003665} + t, \text{ d. i. } 272{,}8 + t \text{ oder abgerundet } 273 + t, \text{ mit } T \tag{4}$$

bezeichnet und einführt:

$$n - 1 = (n_0 - 1)\,\frac{bg T_0}{b_0 g_0 T}\,. \tag{5}$$

Diese Formel hat man nur als Näherungsformel anzusehen, die aber für unsere Zwecke ausreicht. Denn obwohl die Untersuchungen der Physiker über die Abhängigkeit des Brechungsindex von Druck und Temperatur noch nicht als abgeschlossen zu bezeichnen sind, so beweisen sie doch die starke Annäherung der Formel (5) an die Thatsachen. Früher setzte man $n^2 - 1$ proportional der Dichtigkeit; $n - 1$ scheint etwas besser, führt aber in der Theorie der terrestrischen Refraktion zu keinen nennenswerten Änderungen.

Die Relation (5) entspricht nicht nur der trockenen Luft, sondern auch der feuchten Luft, wie schon *Laplace* bemerkt. Der Wasserdampf hat zwar bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur geringere Dichtigkeit als trockene Luft, jedoch nahezu dasselbe Brechungsvermögen.

Im Mittel nach *Bessels* Bestimmungen aus Refraktionsbeobachtungen von *Bradley* und ihm selbst sowie den experimentellen Bestimmungen der Physiker kann man setzen

$$n_0 = 1{,}000293 \text{ für } b_0 = 760^{mm} \text{ und } T_0 = 273\,.$$

Die Schwerkraft g_0 ist hierbei annähernd diejenige für 45° geogr. Breite im Meeresniveau, welche wir bereits mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet haben. Es wird somit

$$n = 1 + 0{,}000293 \frac{273\, b g}{760\, T \mathfrak{G}}\,. \tag{6}$$

Hieraus folgt, n als Funktion der Höhe h über einem beliebigen Horizont betrachtet:

$$\frac{\partial n}{\partial h} = 0{,}000293 \frac{273\, b g}{760\, T \mathfrak{G}} \left\{ \frac{\partial b}{b \partial h} + \frac{\partial g}{g \partial h} - \frac{\partial T}{T \partial h} \right\}$$

und nach (7) § 10 S. 573:

$$\varkappa = \varrho \frac{0{,}000293 \frac{273\, b g}{760\, T \mathfrak{G}} \left\{ \frac{\partial T}{T \partial h} - \frac{\partial b}{b \partial h} - \frac{\partial g}{g \partial h} \right\}}{1 + 0{,}000293 \frac{273\, b g}{760\, T \mathfrak{G}}}\,, \tag{7}$$

wobei ϱ den Krümmungsradius des Erdellipsoids im betreffenden Azimut vorstellt und der Nenner ohne wesentlichen Schaden gleich 1 gesetzt werden kann.

Der in dieser Formel auftretende Quotient $\partial b : b \partial h$ mufs aus der Differentialformel für barometrisches Höhenmessen entnommen werden. Von der Bewegung der Luft abgesehen, ist nach den Lehren der Hydrostatik in Strenge

$$-\partial p = \Theta g \,\partial h\,, \tag{8}$$

wenn an der Stelle ∂h die Schwerkraft gleich g und der Druck der Luft für die Flächeneinheit (in einem von der Schwerkraft unabhängigen Mafse) gleich p ist. Bezeichnet q die Dichtigkeit des Quecksilbers, so kann man entsprechend setzen:

$$p = b g q\,. \tag{9}$$

Alsdann wird

$$\frac{\partial p}{p \partial h} = \frac{\partial b}{b \partial h} + \frac{\partial g}{g \partial h}$$

und mit Rücksicht auf (8):

$$\frac{\partial b}{b \partial h} + \frac{\partial g}{g \partial h} = -\frac{\Theta}{b q}\,. \tag{10}$$

Nach *Regnault* ist im Vergleiche zu Wasser gröfster Dichtigkeit für Quecksilber von 0° Temperatur

$$q = 13{,}596$$

und für trockene Luft von 0^0 Temperatur bei 760^{mm} Stand des Quecksilberbarometers, gemessen in Paris (mit $48^0\,50'$ geogr. Breite und 60^m Meereshöhe)

$$\Theta = 0{,}00129319^{*)}.$$

Man hat daher für trockene Luft in der geographischen Breite B und der Meereshöhe H bei b^{mm} Stand des Quecksilberbarometers und bei der Temperatur t^0 der hundertteiligen Skala, oder der absoluten Temperatur T:

$$\frac{\Theta}{q} = \frac{0{,}00129319}{13{,}596}\,\frac{b}{760}\,\frac{273}{T}\,\frac{1 - 0{,}00265\cos 2B - \frac{2H}{\varrho}}{1 - 0{,}00265\cos 97^0 40' - \frac{120}{\varrho}}\,. \qquad (11)$$

Ist aber die Luft feucht und die Spannkraft des in ihr enthaltenen Wasserdampfes gleich e, so ist Θ geringer, weil die Dichtigkeit des Wasserdampfes nur 0,623 derjenigen der Luft unter sonst gleichen Umständen beträgt. Bezieht man nun linker Hand in (11) $\Theta : q$ auf feuchte Luft, so ist rechter Hand der Faktor

$$1 - 0{,}377\,\frac{e}{b} \qquad \text{oder sehr nahe} \qquad 1 - \frac{3e}{8b} \qquad (11^*)$$

anzubringen. Mithin ergiebt sich endlich nach (10), wenn zugleich ∂h nicht wie b in Millimetern, sondern wie ϱ in Metern genommen wird:

$$\frac{\partial b}{b\,\partial h} + \frac{\partial g}{g\,\partial h} = -\,\frac{1 - \frac{3e}{8b}}{10517\,.\,0{,}760}\,\frac{273}{T}\left(1 - 0{,}00265\cos 2B - \frac{2H}{\varrho}\right),$$

und hiermit folgt aus (7):

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 0{,}000293\,\frac{b}{760}\,\frac{273}{T}\,\frac{g}{\mathfrak{G}}\,\varrho F \\ &\text{mit} \\ F &= \frac{\tau}{T} + \frac{1 - \frac{3e}{8b}}{7993}\,\frac{273}{T}\,\frac{g}{\mathfrak{G}} \\ &\text{und} \\ \frac{g}{\mathfrak{G}} &= 1 - 0{,}00265\cos 2B - \frac{2H}{\varrho}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Hierin ist ϱ der Krümmungsradius des Erdellipsoides in dem betreffenden Azimut, H die Meereshöhe, B die geographische Breite, b der auf 0^0 reduzierte Stand des Quecksilberbarometers in Millimetern, T die absolute Temperatur der Luft $= 273 + t^0$ der Centesimalskala, τ die Änderung derselben für 1^m Höhe und e die Spannung des Wasserdampfes in Millimetern Quecksilbersäule**).

*) *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart 1877, Bd. I S. 490 u. ff.

**) Die Formel für $\varkappa$ stimmt im wesentlichen überein mit *Jordan*, a. a. O. S. 566.

Zur Übersicht berechnen wir einige Werte von $\varkappa$, wobei wir die Luft zu $^2/_3$ mit Wasserdampf gesättigt annehmen, sowie $\varrho = 6370000$, $H = 0$ und $B = 45^0$ setzen:

b	e	T	100 τ, d. i. die Änderung der Lufttemp. nach oben für 100^m in hundertteiligen Graden gleich						
			-3^0	-2^0	-1^0	0^0	$+1^0$	$+2^0$	$+3^0$
760^{mm}	6^{mm}	283^0	0,026	0,089	0,153	0,217	0,280	0,344	0,407
660	4,3	278	0,023	0,080	0,137	0,195	0,252	0,309	0,366
560	3	273	0,021	0,071	0,121	0,172	0,222	0,272	0,322

§ 12. **Die Veränderlichkeit von $\varkappa$ zeitlich und räumlich.** Die kleine Tabelle zeigt zweierlei: 1. daſs der Refraktionskoefficient $\varkappa$ unter Voraussetzung konstanter Temperaturabnahme nach oben hin abnimmt und zwar unter mittleren Verhältnissen, wobei die Temperaturabnahme $0{,}58^0$ für 100^m Erhebung beträgt, um

$$0{,}016 \text{ für } 1000^m. \tag{1}$$

Denn es ist in diesem Falle:

$$\begin{aligned} \varkappa = 0{,}180 &\quad \text{für } H = 0^m \\ 0{,}161 &\quad \text{,,} \quad 1150 \\ 0{,}142 &\quad \text{,,} \quad 2500. \end{aligned}$$

Sie zeigt zweitens, daſs die Gröſse der Temperaturabnahme den Koefficienten $\varkappa$ sehr stark beeinfluſst, und zwar entsteht eine Verminderung desselben um rund

$$0{,}006 \text{ für } 0{,}1^0 \tag{2}$$

Zuwachs der Temperaturabnahme auf 100^m Erhebung.

Die Temperaturabnahme mit der Höhe ist nach *Hann**) auf der Erdoberfläche bis zu 60^0 geographischer Breite durchschnittlich wie

---

Eine ebenfalls mit (12) wesentlich übereinstimmende Formel gab 1855 *Baeyer* in den *Astronom. Nachr.* Bd. 41 Nr. 980 S. 320 (34) gelegentlich einer längeren theoretischen Entwicklung über die terrestrische Refraktion.

Baeyer illustriert die Formel durch Tabellen und fügt u. a. ausführliche Erläuterungen über Bestimmung der Lufttemperatur durch Refraktionsbeobachtungen bei.

Im 71. Bd. der *Astronom. Nachr.* Nr. 1695 S. 228 stellt 1868 *Erman*, an eine Formel der *Méc. cél.* anknüpfend, ebenfalls eine Formel für $\varkappa$ auf, um mit Hilfe derselben die Temperaturabnahme in den Luftschichten in der Nähe der Ostseeküste zu studieren. Für den betreffenden Fall giebt diese Formel wesentlich dasselbe wie (12).

*) *J. Hann*, Handbuch der Klimatologie, Stuttgart 1883, S. 153 u. ff.

bemerkt gleich 0,58° für 100^m oder gleich 1° für 172^m Erhebung anzunehmen. *Bauernfeind**) fand bis auf ein paar Meter denselben Wert; er nimmt auch eine geringe Änderung mit der geographischen Breite an; allein dieselbe ist nicht sicher konstatiert und nach *Hann* nicht nachweisbar.

Die Temperaturabnahme mit der Höhe unterliegt Veränderungen aus mehreren Gründen. Sie ändert sich mit der Jahreszeit und beträgt nach *Hann* für Mitteleuropa (Harz, Erzgebirge und Alpen) durchschnittlich für 100^m im

Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Mittel
0,67°	0,70°	0,53°	0,45°	0,59°

oder 1° für eine Erhebung um

149^m	143^m	188^m	222^m	170^m

Sie ändert sich ferner lokal durchschnittlich von 0,4° bis 0,8°; sie ist z. B. auf der Nordseite der schweizer Alpen 0,69, auf der Südseite 0,55. Über Thälern findet häufig anstatt einer Abnahme eine Zunahme statt; eine solche wird auch oftmals bei Barometermaxima im Winter beobachtet.

Die gröfsten und raschesten Variationen der Temperatur zeigt zeitlich und räumlich die Luftschicht am Erdboden. So fand *Wild* 1872—1874**) im Mittel die Temperatur in 16^m und 26^m Höhe über dem Boden gröfser als in 2^m Höhe um die folgenden Beträge:

	April bis September			Winter
	8^h	1^h	8^h	1^h
16^m	— 0,27°	— 0,40°	+ 0,30°	+ 0,07°
26^m	— 0,36	— 0,42	+ 0,50	+ 0,06

Ferner fand *Becquerel* 1875***) in 20^m mehr als in 2^m Höhe:

	Morgens			Mittags	Nachmittags			Nachts
	3^h	6^h	9^h	12^h	3^h	6^h	9^h	12^h
März—Mai	+0,6°	+0,3°	−0,3°	−0,7°	−0,6°	+0,2°	+0,4°	+0,4°
Juni—Aug.	+0,7	+0,3	−0,5	−0,8	−0,4	+0,4	+0,6	+0,5
September	+1,3	+0,3	−0,3	−0,9	−1,0	+0,6	+0,7	+0,7
Jahresdurchschnitt	.	−0,53	−0,28	.	−0,34	.	.	.

*) *C. M. v. Bauernfeind*, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre. München 1862. S. 120.

**) Zeitschrift d. österreich. Gesellsch. f. Meteorologie 1876 Bd. 11 S. 205.

***) Ebenda S. 284.

Hiernach sind tägliche Variationen von $\varkappa$ in der Luftschicht zwischen 2^m und 20^m Höhe im Betrage von $-0,1$ mittags bis $+0,5$ nachts die Regel.

In der That sind wiederholt (und auch vom Verfasser bei einer längeren Beobachtungsreihe im Jahre 1862) an Lichtstrahlen, welche diese Luftschicht in gröfserer Ausdehnung durchstrichen, dergleichen Werte von $\varkappa$ beobachtet worden. In der Regel jedoch fallen die aus Zenithdistanzmessungen berechneten Variationen in $\varkappa$ geringer aus. Denn indem brauchbare und für mäfsige Entfernungen und Höhendifferenzen nach der Hypothese der Kreisform des Lichtstrahles berechenbare Höhenbestimmungen sich erfahrungsmäfsig nur dann ergeben, wenn der Lichtstrahl die in Rede stehende Luftschicht mindestens im gröfseren Teile seines Laufes verläfst, werden sich die auf diese Weise ermittelten $\varkappa$ meist im Durchschnitt auf etwas gröfsere Abstände vom Terrain als 20^m beziehen. Man hat für dieselben auch eine ziemlich regelmäfsige Durchschnitts-Abhängigkeit von der Tageszeit konstatiert, wobei man nach dem Vorgange von *Baeyer* die letztere, vom wahren Mittag abgerechnet, in Bruchteilen des halben Tagebogens der Sonne, d. h. der halben Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang, ausdrückte, um verschiedene Jahreszeiten mit einander in Beziehung bringen zu können.*) Während *Baeyer* $\varkappa$ der Zeit $\mathfrak{T}$ proportional setzt, ergab eine gelegentlich der Triangulierung von Mecklenburg angestellte Untersuchung zahlreichen Beobachtungsmateriales die für die Sommermonate gültige Interpolationsformel:

$$\varkappa = 0,174 + 0,075 \sin(268^\circ 34' + \mathfrak{T}^0),$$

worin $\mathfrak{T}^0$ proportional $\mathfrak{T}$ und für $\mathfrak{T} = 1$ gleich 90° zu setzen ist.**) Nach *Hartl* genügt ebenso der Ausdruck:

$$\varkappa = 0,100 + 0,077\,\mathfrak{T}^2.$$

Hartl hat noch anderes Material untersucht; darnach bestätigen sich die in Mecklenburg gefundenen Resultate für Norddeutschland im grofsen und ganzen.***) Im Hinblick auf eine Anwendung der

*) *Astronom. Nachr.* 1837 Bd. 14 Nr. 317 S. 70.

**) *Grofsherzoglich mecklenburgische Landesvermessung.* Teil I. Schwerin 1882; S. 240.

Die Entfernung schwankte innerhalb ziemlich enger Grenzen um 17^{km} herum. Zur Berechnung von $\varkappa$ wurde, wie dies immer bei gleichzeitigen, gegenseitigen Messungen geschieht, die aus (11) § 10 S. 574 folgende Näherungsformel benutzt:

$$\varkappa = 1 - \frac{z'_{1.2} + z'_{2.1} - 180^\circ}{\gamma}.$$

***) *Mitteilungen des k. k. militär-geogr. Instituts in Wien.* 3. Bd. 1883.

Verfasser verspricht, seine Untersuchungen auch auf die österreichischen Alpenländer auszudehnen.

Interpolationsformel zur Berechnung von $\varkappa$ für Zwecke einer einseitigen Höhenbestimmung mufs man aber bedenken, dafs die beobachteten $\varkappa$ obgleich sie meistens Mittelwerte für eine Stunde Zeitraum darstellen, gegen diese Formel den mittleren Fehler $\pm$ 0,018 zeigen, sodafs die rechnerische Bestimmung recht unsicher wird, auch wenn die für die Gröfse der Refraktion in betracht kommenden Verhältnisse der Beobachtungen denen der mecklenburgischen Beobachtungen im allgemeinen gleich sind. Die Ursachen der Unsicherheit sind die Verschiedenheiten in dem Abstand des Lichtstrahles vom Terrain, in der Kultur des letzteren und in den Bestrahlungsverhältnissen desselben, wodurch eine ungleichartige Verteilung der Wärme in der Luft bedingt wird.

Über die Änderung der Wärmeabnahme mit der Höhe nach oben hin geben folgende, von *Hann* aus *Glaishers* Beobachtungen von 1869 im *Ballon captif* (Zeitschr. d. österr. Ges. f. Met. 1879 Bd. 14 S. 475) abgeleitete Zahlen Auskunft:

25. Mai — 28. Juli 1869. Abnahme für 100^m.

1) Im Mittel für 3^h — 7^h bezw. . . . . 3^h — $7{,}5^h$

Höhe:	0^m	60^m	120^m	180^m	240^m	300^m — 500^m
heiter:	$1{,}50^0$	$1{,}13^0$	$0{,}95^0$	$0{,}79^0$	$0{,}70^0$	$0{,}77^0$
trübe:	1,40	1,10	0,79	0,82	0,80	0,58

2) Im Mittel für 30^m — 300^m Höhe

Stunde:	10—11^h vorm.	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	$7{,}5^h$ nachm.
heiter:	$1{,}40^0$	$1{,}07^0$	$0{,}97^0$	$0{,}89^0$	$0{,}80^0$	$0{,}49^0$	
trübe:	—	1,02	0,83	0,95	0,86	0,86.	

Hartl findet letztere Durchschnittszahlen mit den beobachteten Refraktionskoefficienten $\varkappa$ in guter Übereinstimmung (bis auf $0{,}1^0$).

Trotzdem die Zahlen Mittelwerte aus 28 Fahrten sind, zeigt sich eine keineswegs regelmäfsige Abnahme der Temperatur mit der Höhe. Dafs eine solche selbst in gröfserer Höhe über dem Erdboden nur im rohen Durchschnitt stattfindet, zeigt ein Blick auf die Ergebnisse aller Luftfahrten. Man vergl. z. B. *Joh. Müller*, Lehrbuch der kosmischen Physik, 1875, Tab. 17 und S. 514. Wir beschränken uns hier auf die Mitteilung einiger Beobachtungen bei *Tissandiers* Luftfahrt am 29. Nov. 1875 gegen Mittag,*) wonach sich die Temperatur fand:

bis 700^m Höhe gleich — 2^0, von da
bis 1500^m „ „ — 3 bis — 4^0 (weifsl. opalis. Wolken),
bei 1650^m „ „ null (Eiskrystalle),
bei 1770^m „ „ + 1^0.

*) *Comptes rendus* 1876 Bd. 81 S. 1216.

Hiernach erleidet $\varkappa$ auch in gröfseren Höhen wegen des unregelmäfsigen Verlaufes der Temperatur beinahe sprungweise Änderungen im Betrage von 0,1 bis 0,2, d. h. fast um seinen ganzen normalen Betrag.

Die Ursache der starken Temperaturänderung in der Nähe des Erdbodens ist der Erdboden selbst, welcher durch Strahlung Wärme teils von der Sonne aufnimmt, teils in den Weltraum abgiebt und durch Leitung seine Temperatur der benachbarten Luft mitteilt. In gröfserer Höhe über dem Erdboden ist die wesentlichste Ursache der Unregelmäfsigkeiten die Kondensation des Wasserdampfes. In einer ruhenden, von aufsen thermisch nicht beeinflufsten, trockenen Atmosphäre würde nach der mechanischen Wärmetheorie für 100^m die Temperatur sehr nahe um 1^0 abnehmen. Ist Wasserdampf in der Luft, so tritt bei wachsender Höhe eine allmähliche Kondensation desselben ein, weil mit der Temperatur zugleich der Sättigungsgehalt abnimmt. Bei der Kondensation wird aber Wärme frei; die Temperaturabnahme in der feuchten Atmosphäre ist daher eine langsamere wie in der trockenen, und wenn aus irgend welchen Gründen die Kondensation des Wasserdampfes nicht allmählich, sondern stellenweise plötzlich erfolgt, so kann es geschehen, dafs die Temperaturänderung mit der Höhe aus einer Abnahme stellenweise ziemlich plötzlich in eine Zunahme übergeht.*)

§ 13. Fortsetzung: Bauernfeinds Beobachtungsreihe von 1877—1880.

Von der Empfindlichkeit des Refraktionskoefficienten gegen lokale Verhältnisse giebt einen sehr interessanten und augenfälligen Beweis eine Beobachtungsreihe, welche *Bauernfeind* auf der westöstlichen, 48^{km} langen Linie *Döbra-Kapellenberg* des bayerischen Gradmessungsnetzes zu allen Tageszeiten hat anstellen lassen**). *Döbra* liegt 30^m über *Kapellenberg*, das Profil zwischen beiden, in 780^m mittlerer Meereshöhe gelegenen Punkten fällt ziemlich steil an beiden Enden um etwa 130^m ab; einzelne Kuppen des Profiles liegen zwar etwas höher, aber doch noch 100^m unter der Lichtlinie. In Bezug auf die nähere Umgebung der Stationen ist Folgendes zu bemerken:

1. *Kapellenberg*. Das Terrain fällt bis 1000^m Entfernung ziemlich gleichmäfsig um 50^m. Der Gipfel ist kahl, die Hänge sind mit jungem Fichtenbestand bedeckt. Die Pfeilerhöhe beträgt 5^m.

2. *Döbra*. Das Terrain fällt bis 450^m Distanz ziemlich gleichmäfsig um 50^m. Es ist bewaldet; der Wald überragt den 3^m hohen

*) Über diese Verhältnisse und weitere diesbezügliche Litteratur vergleiche *A. Ritter*, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme, Hannover 1879, S. 1 bis 8 (aus Wiedemanns Annalen 1878 B. 5, S. 413).

**) Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. (Abhandl. der kön. bayer. Akad. d. Wissensch. 2. Cl. 1880 Bd. 13. 3. Abt.)



Pfeiler, doch ist im Umkreis von 20^m aller Wald weggeschlagen, nach Ost bis 80^m Entfernung.

Die Messungen erfolgten in den Jahren 1877 bis 1880 hauptsächlich in den Monaten Mai, Juni, August und September. *Bauernfeind* berechnet aus ihnen nach seiner Theorie die Höhen einseitig (und ohne Rücksicht auf Lotabweichung); da nun diese Theorie eine regelmäfsige Schichtung der Luft nach der Höhe voraussetzt, so ist wegen der fast gleichen Höhe beider Punkte das Mittel der einseitigen Berechnungen für die Höhendifferenz aus den im grofsen und ganzen beiderseits gleichzeitig erfolgten Messungen im wesentlichen als frei von der besonderen Form der Theorie der Refraktion zu betrachten. Nach der der Abhandlung beigegebenen graphischen Darstellung finden wir für $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$ trigonometrisch bezw. $H_2 - H_1$ barometrisch *mehr* als das Präzisionsnivellement gab die Zahlwerte umstehender Tabelle.

Die trigonometrischen Werte zeigen ebenso wie die barometrischen eine tägliche Periode. Die Ursache derselben für die barometrischen Messungen ist (nach *Bauernfeind*) bekanntlich diese, dafs das Stationsthermometer nicht die Temperatur der höheren Luftschichten giebt. Während die Angaben dieser Thermometer starke Variationen im Laufe des Tages zeigen, sind dieselben in der Regel in gröfseren Höhen gering, kaum 1 bis 2°.

Die Ursache der täglichen Periode der Ergebnisse der trigonometrischen Messungen kann infolge der nahezu gleichen Höhe beider Stationen nur die durch lokale Verhältnisse erzeugte unsymmetrische Form des Lichtstrahles zu beiden Stationen sein: Station *Kapellenberg* liegt frei, *Döbra* dagegen im Walde; ferner haben die Profilseiten bei *Döbra*, im Westen, und bei *Kapellenberg*, im Osten, gegen die Sonne einen verschiedenen Stand.

In der Nähe derjenigen Zeiten, wo die barometrischen Messungen gegen das Präzisionsnivellement die Differenz null geben, wo man also erwarten mufs, dafs die Luftschichtung einigermafsen frei von lokalen Abweichungen sein wird, gehen auch die trigonometrischen Differenzen durch null hindurch. Der wahre Wert von $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$ kann zwar von dem Ergebnis des Präzisionsnivellements in Bezug auf welches dieselben gebildet sind, etwas abweichen, doch wird sehr wahrscheinlich auch er in der Nähe dieser Zeiten von den Messungen gegeben werden.*)

Die Tabelle zeigt noch, dafs zu den barometrisch günstigsten Zeiten sich die trigonometrischen Werte und somit auch die Refraktionen und Temperaturen in der Nähe des Terrains sehr rasch ändern. Es ist dieses ein ungünstiger Umstand für die Benutzung dieser Zeiten.

*) Vergl. hierzu den Schlufsparagraphen dieses Kapitels, wo auch erörtert werden wird, inwieweit barometrisches und geometrisches Nivellement zu vergleichbaren Werten führen.

		Trigonometr. $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$	Barometr. $H_2 - H_1$
Vormittags	7	+ 2,6^m	+ 0,2^m
	8	+ 4,2	+ 1,5
	9	+ 3,6	+ 1,7
	10	+ 4,6	+ 1,6
	11	+ 5,6	+ 3,3
	12	+ 5,0	+ 3,1
Nachmittags	1	+ 5,0	+ 3,8
	2	+ 4,6	+ 2,3
	3	+ 4,0	+ 3,2
	4	+ 3,0	+ 1,6
	5	+ 3,4	+ 2,1
	6	+ 3,0	+ 1,3
	7	+ 3,2	+ 0,4
	8	— 1,6	0,0
	9	— 3,6	— 2,4
	10	— 3,9	— 0,9
	11	— 2,2	— 2,0
	12	— 3,0	— 0,4
Vormittags	1	— 2,6	— 2,0
	2	— 4,2	— 2,6
	3	— 5,0	— 1,0
	4	— 5,6	— 1,5
	5	— 4,8	— 1,9
	6	— 1,0	— 1,1
Mittel		+ 0,60	+ 0,43

§ 14. **Bauernfeinds Refraktionstheorie.** Ehe wir an der Hand der bisherigen Aufstellungen dazu übergehen, die Methoden zu besprechen, die nach unserer Ansicht zur trigonometrischen Höhenmessung zu empfehlen sind, haben wir den Blick auf die bisherigen Leistungen zu richten.

Obwohl *Laplace* zu Anfang dieses Jahrhunderts die mathematische Behandlung der Refraktion angebahnt hatte, beschränkte man sich doch lange Zeit auf die Annahme einer Kreisbogengestalt für den Lichtstrahl, wahrscheinlich weil man die allerdings sehr zutreffende Ansicht hatte, dafs es schwierig, ja unmöglich sei, den thatsächlichen

Refraktionsverhältnissen durch die Theorie zu folgen. Jedoch nahm man an, daſs die Krümmung des Kreisbogens zeitlich veränderlich sei und beobachtete daher hauptsächlich nach der Methode gegenseitiger, gleichzeitiger Zenithdistanzmessungen. Die Abweichungen von der Kreisbogengestalt glaubte man durch Auswahl günstiger Profile vermeiden zu können.

Zu Anfang der sechziger Jahre wurde aber von mehreren Seiten versucht, sich durch die Theorie den thatsächlichen Verhältnissen mehr zu nähern*), in Deutschland 1866 durch *Bauernfeind* im Anschluſs an seine epochemachenden Untersuchungen über das barometrische Höhenmeſsverfahren. Indem *Bauernfeind* gelegentlich dieser Untersuchungen zahlreiche Beobachtungen von sich und anderen diskutierte, fand er, daſs die Temperatur in der Atmosphäre mit zunehmender Höhe in arithmetischer Progression abnimmt und daſs sie dabei der sechsten Wurzel des Luftdruckes proportional ist, wenn sie vom absoluten Nullpunkt aus gezählt wird**). Dieses Gesetz für die durchschnittliche Konstitution der Atmosphäre legte *Bauernfeind* nun auch der Refraktionstheorie zu grunde.

Zur Erläuterung desselben stellen wir folgende Betrachtung an. Wir verstehen unter der Höhe u der Atmosphäre über einem Punkt die Höhe über demselben bis zu der Stelle, wo die absolute Temperatur null ist. Nach der Hydrostatik wird alsdann (vergl. auch § 11 (8) S. 576):

$$dp = \Theta g\, du\,, \tag{1}$$

worin dp die zu du gehörige Druckzunahme bei der Luftdichtigkeit Θ und der Schwerkraft g bezeichnet. Da nun nach dem *Mariotte-* und *Gay-Lussac*schen Gesetz (vergl. auch § 11 S. 575)

$$\Theta = \Theta_0 \frac{p T_0}{p_0 T} \tag{2}$$

zu setzen ist, worin Θ_0, T_0, p_0 ebenso wie Θ, T, p zusammengehörige Werte sind, so wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{\Theta_0 T_0}{p_0 T}\, g\, du\,. \tag{3}$$

Nimmt man jetzt an, daſs T sich nach oben hin gleichmäſsig vermindert und daſs daher

$$T = u\tau \tag{4}$$

gesetzt werden kann, wobei die Konstante τ nach *Hann* (§ 12 S. 578) gleich $^1/_{172}$ ist, so folgt

*) Hierher ist auch die oben erwähnte Abhandlung *Baeyers* zu rechnen; dieselbe scheint aber ohne praktische Konsequenzen geblieben zu sein.

**) *C. M. v. Bauernfeind*, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen etc.

$$\frac{dp}{p} = c\,\frac{du}{u} \quad \text{für} \quad c = \frac{\Theta_0 T_0 g}{p_0 \tau}. \tag{5}$$

Hiernach wird, abgesehen von der geringen Veränderlichkeit von g mit der Höhe:

$$u = a p^{\frac{1}{c}}, \tag{6}$$

wobei a eine Integrationskonstante vorstellt. Aus (6) und der Annahme $T = u\tau$ folgen für zwei Punkte derselben Lotlinie mit Rücksicht auf die modifizierte Relation (2):

$$\Theta_1 T_1 p_2 = \Theta_2 T_2 p_1\,,$$

die Proportionen:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1^{\frac{1}{c}}}{p_2^{\frac{1}{c}}} = \frac{\Theta_1^{\frac{1}{c-1}}}{\Theta_2^{\frac{1}{c-1}}}. \tag{7}$$

Bauernfeind untersucht zunächst an der Hand der Beobachtungen die Proportionalität von p und T^c und findet $c = 6$; sodann untersucht er die Gleichung

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{k'}$$

und findet k' sehr nahe gleich 1, u für das Meeresniveau rund gleich 51400^m.

Nach unserer Aufstellung der Gleichungen (1) bis (7), die von der bezüglichen *Bauernfeind*schen verschieden ist, *bedingt* die Proportionalität von T zu u die Existenz der Proportionalität von p und T^c. Kennt man erst die Atmosphärenhöhe, so kann man dann auch c nach (5) berechnen:

$$c = \frac{\Theta_0 T_0 g}{p_0 \tau}. \tag{8}$$

Nehmen wir an, dafs für $u = 51400^m$ die Temperatur $T = 298^0$ sei, so wird $1 : \tau = 172$, wie oben angegeben. Der Wert $T = 298^0$, entsprechend einer Temperatur der hundertteiligen Skala von 25^0, ist allerdings wohl als Durchschnittstemperatur im Meeresniveau zu grofs, aber der für u im Meeresniveau angegebene Wert ist auch sehr unsicher. Behalten wir also $1 : \tau = 172$ bei und setzen nach (11) und (9) § 11 S. 577 u. 576

$$\Theta_0 = \frac{0{,}001293}{13{,}6}\, q \quad \text{für} \quad T_0 = 273$$

und

$$p_0 = 0{,}760\, q\, g\,,$$

so folgt

$$c = 5{,}90\,,$$

völlig mit *Bauernfeinds* Wert für c innerhalb der Genauigkeit desselben übereinstimmend.

Bei der vorstehenden Theorie kommt übrigens gar nicht in betracht, welches die ganze Höhe der Atmosphäre wirklich ist*). Sie tritt lediglich als ein geeignetes Mafs für die Temperaturabnahme mit der Höhe in den unteren Luftschichten auf.

§ 15. **Fortsetzung; kritische Bemerkungen.** Bei den weiteren Entwicklungen nimmt *Bauernfeind* $n^2 - 1$ proportional zu Θ; er setzt also für einen beliebigen Punkt des Lichtstrahles

$$n^2 - 1 = (n_1^2 - 1)\frac{\Theta}{\Theta_1}, \tag{1}$$

wobei n_1 und Θ_1 sich auf Punkt P_1, den Standpunkt, beziehen. Im Anschlufs an § 11 S. 575 würden wir dagegen setzen

$$n - 1 = (n_1 - 1)\frac{\Theta}{\Theta_1}. \tag{1*}$$

Wir bemerken aber gleich hier, dafs in den Endformeln beide Annahmen nur zu ganz unwesentlichen Differenzen führen.

Da nun nach (7) auf voriger Seite die Beziehung besteht:

$$\frac{\Theta}{\Theta_1} = \left(\frac{u}{u_1}\right)^5 = \left(\frac{u_1 - h}{u_1}\right)^5, \tag{2}$$

so wird mit (1)

$$n^2 - 1 = (n_1^2 - 1)\left(1 - \frac{h}{u_1}\right)^5, \tag{3}$$

dagegen mit (1*):

$$n - 1 = (n_1 - 1)\left(1 - \frac{h}{u_1}\right)^5. \tag{3*}$$

Hieraus folgt ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf die Formeln (7) und (8) in § 10 S. 573 u. 574

erstens, für die Annahme (1):

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{5(n_1^2 - 1)}{2n_1^2 m_1} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m_1} = \frac{\varrho_{1.2}}{u_1} \\ \varrho_{1.2}\,\varkappa_1' &= -\varkappa_1\left(\frac{4}{m_1} - 1 - 2\varkappa_1\right) \\ \varrho_{1.2}^2\,\varkappa_1'' &= +\varkappa_1\left\{\frac{12}{m_1^2} - \frac{4(2 + 6\varkappa_1)}{m_1} + 4\varkappa_1 + 8\varkappa_1^2\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

zweitens, für die Annahme (1*):

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{5(n_1 - 1)}{n_1 m_1} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m_1} = \frac{\varrho_{1.2}}{u_1} \\ \varrho_{1.2}\,\varkappa_1' &= -\varkappa_1\left(\frac{4}{m_1} - 1 - \varkappa_1\right) \\ \varrho_{1.2}^2\,\varkappa_1'' &= +\varkappa_1\left\{\frac{12}{m_1^2} - \frac{4(2 + 3\varkappa_1)}{m_1} + 2\varkappa_1 + 2\varkappa_1^2\right\}. \end{aligned} \tag{4*}$$

*) Vergl. über diese *A. Ritter* a. S. 582 a. O.

Diese Ausdrücke können nun ohne weiteres zur Berechnung von h bezw. k_1 nach § 10 (1*) und (3) S. 572 dienen. Wollen wir aber mit *Bauernfeinds* Entwicklungen vergleichen,*) so stellen wir h besser nach § 3 (7) S. 555 auf, worin $r_1 \varkappa_1'$ durch den Wert $\varrho_{1.2} \varkappa_1'$ und $r_1^2 \varkappa_1''$ durch den Wert $\varrho_{1.2}^2 \varkappa_1''$ zu ersetzen ist. Wir finden dann ohne Schwierigkeit mit einigen meist unerheblichen Vernachlässigungen aus beiden Systemen (4) und (4*) denselben, im wesentlichen mit *Bauernfeinds* Angabe übereinstimmenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
h = s_1 \cot z_1 & \left\{ 1 + \frac{2 \varkappa_1 \gamma^2}{3 m_1 \sin^2 z_1} \right\} \\
& + \frac{1}{2} s_1 \gamma \left\{ \frac{\cos^2 z_1 + 1 - \varkappa_1}{\sin^2 z_1} + \frac{m_1 (13 \cos^2 z_1 + 1 - \varkappa_1) - 3 \cos^2 z_1}{3 m_1^2 \sin^4 z_1} \varkappa_1 \gamma^2 \right\} .
\end{aligned} \tag{5}
$$

Bauernfeind hat zwar anstatt des Koefficienten 13 rechter Hand nur 1, indessen liegt diese Differenz völlig innerhalb der in (5) anderweit innegehaltenen Genauigkeitsgrenze. Die gröfste Vernachlässigung enthält der erste Klammerausdruck, dessen genauer Wert nach (7) S. 555 leicht aufzustellen ist. Sie wächst mit dem Quadrat der Entfernung und beträgt für $s = 64^{km}$ annähernd $h : 15000$.

Die *Bauernfeind*sche Entwicklung in den *Astronom. Nachr.* ist übrigens etwas umständlich, weil sie nicht unmittelbar von *Taylors* Satz ausgeht.**) Die in der *Vermessungskunde*, 6. Aufl. Bd. 2 S. 301, angedeutete Vereinfachung führt aber durch die für $\cos z =$ null divergente Reihe (l) daselbst.

Setzen wir nun aus (4) unsere Werte für $\varrho \varkappa'$ und $\varrho^2 \varkappa''$ in den strengen Ausdruck (6*) S. 557 für k_1 ein, so erhalten wir *andere* Ausdrücke als *Bauernfeind.* Dafs dessen Angaben in den *Astronom. Nachr.* Bd. 67 S. 65 (64) bezw. in der *Vermessungskunde* S. 338 oben für den Refraktionswinkel $\Delta z = \frac{1}{2} k_1 \gamma$ nicht richtig sind, sieht man schon in dem Vorkommen eines unmöglichen Gliedes. Er setzt nämlich in unseren Bezeichnungen, abgesehen von einem (auch nicht korrekten) Glied mit γ^2:

$$
\frac{1}{2} k_1 \gamma = \frac{1}{2} \varkappa_1 \gamma \left\{ 1 - \frac{4 \varkappa_1 - m_1 (5 - 6 \varkappa_1)}{3 \varkappa_1 m_1} \gamma \cot z_1 - \dots \right\} ; \tag{6}
$$

es enthält darnach $\frac{1}{2} k_1 \gamma$ ein von $\varkappa_1$ freies Glied

$$
\frac{1}{2} \varkappa_1 \gamma \cdot \frac{5 m_1}{3 \varkappa_1 m_1} \gamma \cot z_1 \quad \text{oder} \quad \frac{5}{6} \gamma^2 \cot z_1 ,
$$

*) *Astronom. Nachr.* vom Jahre 1867 Bd. 67 Nr. 1587—90 S. 55 Gl. 38 oder *Elemente der Vermessungskunde* 6. Aufl. Bd. 2, Stuttgart 1879, S. 301 (268).

**) Diese wesentliche Vereinfachung für die Theorie der terrestrischen Refraktion fanden wir nur bei *E. Pucci*, *Fondamenti di Geodesia*, vol. I, Milano 1883, benutzt.

was selbstverständlich falsch ist, da der Refraktionswinkel $\frac{1}{2} k_1 \gamma$ mit $\varkappa_1$ gleichzeitig verschwinden mufs, wie auch die Gleichung (5) zeigt.

In unseren Entwicklungen fehlt in der That dieses Glied und zwar genügt es mit einem Fehler von höchstens $^1/_{1500}$, meist von kaum $^1/_{5000}$ des Betrages zu setzen

$$\frac{1}{2} k_1 \gamma = \frac{1}{2} \varkappa_1 \gamma \left\{ 1 - \frac{4\gamma \cot z_1}{3 m_1} + \frac{\gamma^2 \cot^2 z_1}{m_1^2} - \frac{(1 - \varkappa_1)\gamma^2}{3 m_1} \right\}. \quad (6^*)$$

Für die Anwendung der Formeln ist vorerst die Berechnung von m_1 erforderlich. *Bauernfeind* giebt in dieser Hinsicht zunächst eine Untersuchung, als deren Resultat eine Tabelle für das Verhältnis m_0 der Atmosphärenhöhe zum Meridiankrümmungsradius unter verschiedenen Breitegraden erscheint, wenn überall ein normaler Luftdruck und eine normale Temperatur herrschen. Wir wollen ihm hier nicht weiter folgen und nur bemerken, dafs nach unserer Ansicht es zur Zeit ebenso richtig ist, die zu m_0 gehörende Atmosphärenhöhe u_0 konstant zu nehmen, was obendrein der Konstanz von $c = 6$ besser entspricht. Denn nach dem vorigen Paragraphen Gl. (8) verlangt die Annahme $c = 6$ einen ganz bestimmten Wert von τ, d. h. der Abnahme der Lufttemperatur für 1^m Höhe, sodafs zu einer bestimmten Temperatur immer nur dieselbe Atmosphärenhöhe gehören kann.

Weiter handelt es sich dann um den Übergang von m_0 zu m_1, oder wenn der in m_0 eingeführte Meridiankrümmungsradius als überflüssig wegbleibt, um den Übergang von u_0 zu u_1. Hierbei müssen die Proportionen (7) § 14 S. 586 zur Anwendung kommen. Man hat dann die Wahl, mit Lufttemperatur T, Luftdruck p oder Luftdichte Θ zu rechnen. Da nun im allgemeinen die zu $c = 6$ gehörige Temperaturabnahme τ nicht vorhanden ist, wird jede dieser Rechnungen einen anderen Wert für u_1 ergeben. In dem seither (bis 1883) von *Bauernfeind* befolgten Rechnungsgange besteht aber nicht nur dieses Bedenken, sondern auch ein Irrtum, insofern u nicht, wie (7) § 14 S. 586 verlangt, proportional der fünften Wurzel von Θ, sondern *umgekehrt* proportional Θ gesetzt worden ist.*) Wenn auch dieser Irrtum gehoben sein wird, so bleibt immer der in der Natur der Theorie begründete Mangel, dafs der besondere Stand der meteorologischen Instrumente nicht theoretisch konsequent, sondern nur empirisch (etwa behufs möglichsten Anpassens an die Beobachtungen) berücksichtigt werden kann.

Hiermit steht im engsten Zusammenhang, dafs die Theorie auf alle diejenigen Fälle, in welchen die gleichmäfsige Abnahme τ der Lufttemperatur mit der Höhe eine andere ist, als die Annahme $c = 6$

*) Auf Anfrage teilte Herr *v. Bauernfeind* mit, dafs in der That hier ein Versehen vorliege.



verlangt, strenggenommen nicht pafst, — es sei denn, dafs man c mit Rücksicht auf Gl. (8) S. 586 *variabel* nähme. Dieser Umstand genügt, die Theorie für diejenigen Fälle unannehmbar zu machen, wo der wirkliche Verlauf der Lufttemperatur hinreichend bekannt ist, um durch seine Berücksichtigung einen besseren Anschlufs der Theorie an die Erfahrung erwarten zu können, sowie für diejenigen Fälle, in welchen aus beobachteten Refraktionen ein Schlufs auf das Verhalten der Lufttemperatur gezogen werden soll. Wenn er bisher nicht genügend gewürdigt worden ist, so liegt dies (abgesehen von der Nichtbeachtung des theoretischen Zusammenhangs von c und τ) daran, dafs die in der Regel ungleichmäfsige Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe noch ungünstiger wirkt, diese Fehlerursache aber schwerlich durch irgend eine Theorie ganz zu heben ist.

Zu gunsten der *Bauernfeind*schen Theorie der terrestrischen Refraktion ist hervorgehoben worden, dafs die analoge Theorie der astronomischen Strahlenbrechung die von *Bessel* beobachteten Refraktionen bis zu 90° Zenithdistanz darstellt und dafs sie die Abnahme des Refraktionskoefficienten mit der Meereshöhe zeigt. Das erstere aber bildet nur einen Beweis für die Anpassung der Theorie an den durchschnittlichen Luftzustand, und das zweite ist keine so wesentliche Folgerung, dafs darin ein Grund für die Festhaltung der Theorie im allgemeinen liegt. Doch mufs anerkannt werden, dafs die letztere dazu beigetragen hat, in weiteren Kreisen die Kenntnis der Abhängigkeit des Refraktionskoefficienten von der Höhe zu verbreiten.

§ 16. **Refraktionstheorie von Jordan.** Unter der Voraussetzung, dafs die Temperatur als Funktion der Höhe durch eine nach Potenzen der Höhe fortschreitende Reihe ausgedrückt werden kann, haben *Villarceau* 1860, *Ibañez* 1864 und *Jordan* 1876 Refraktionstheorieen entworfen. Über die Theorieen der erstgenannten, die — obwohl selbständig aufgestellt — doch übereinstimmen sollen, ist uns weiter nichts bekannt, als dafs gegenseitige Beobachtungen vorausgesetzt werden, dafs die Reihe bei der zweiten Potenz abgebrochen wird und Temperatur- und Barometerbeobachtungen auf beiden Stationen dazu dienen sollen, die Koefficienten dieser Reihe zu bestimmen. In Spanien sind angeblich günstige Resultate erzielt worden.*)

Auch *Jordan* nimmt für die Temperaturfunktion eine Reihenentwicklung nach Potenzen der Höhe an.**) Er berechnet für beide Punkte P_1 und P_2 die Koefficienten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ durch Ausdrücke, die sich nicht wesentlich von (12) S. 577 unterscheiden (nur etwas vereinfacht sind) und setzt alsdann

*) *Verhandlungen der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung zu Paris 1875.* Berlin 1875. S. 118.

**) *Astronom. Nachr.* 1876 Bd. 88 Nr. 2095 S. 99 oder *Handbuch der Vermessungskunde* Bd. 1 Stuttgart 1877 S. 564 u. ff.

$$k_1 = \frac{2\varkappa_1 + \varkappa_2}{3}$$
$$k_2 = \frac{\varkappa_1 + 2\varkappa_2}{3} \tag{1}$$

Zu letzteren Formeln gelangt er, indem er die Gleichung des auf die Tangente in P_1 als Abscissenaxe bezogenen Lichtstrahles ansetzt wie folgt:

$$y = Pl^2 + Ql^3\,, \tag{2}$$

wo l die Kurvenlänge von P_1 bis zu einem beliebigen Punkte oder dessen nicht wesentlich verschiedene Abscisse und y seine Ordinate bedeutet. Hiernach ist für den Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte des Lichtstrahles sehr nahe

$$\frac{1}{\varrho_l} = 2P + 6Ql\,. \tag{3}$$

Nimmt man nun $\varkappa = \varrho_{1.2} : \varrho_l$, so folgt

$$\varkappa = \varrho_{1.2}\,(2P + 6Ql) \tag{4}$$

und hiermit

$$\varkappa_1 = \varrho_{1.2}\,.\,2P \qquad \varkappa_2 = \varrho_{1.2}\,(2P + 6QL)\,,$$

wenn L die ganze Kurvenlänge von P_1 bis P_2 oder die Abscisse von P_2 bedeutet. Drückt man mittelst dieser Relationen P und Q durch $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ aus, so ergiebt sich

$$y = \frac{\varkappa_1}{2\varrho_{1.2}}\,l^2 + \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{6\varrho_{1.2}L}\,l^3$$

und hieraus für die Ordinate Y von P_2:

$$Y = \frac{2\varkappa_1 + \varkappa_2}{6\varrho_{1.2}}\,L^2\,. \tag{5}$$

Es ist aber sehr nahe $Y:L$ gleich dem Refraktionswinkel $\frac{1}{2}\,k_1\gamma$ und $\gamma = L : \varrho_{1.2}$, womit sich mittelst (5) sofort die erste der Näherungsrelationen (1) und aus dieser durch Vertauschung der Indices alsdann auch die zweite findet.

Die *Jordan*schen Formeln (1) lassen sich auch aus unseren Entwicklungen herleiten. Knüpfen wir an die Formeln (5) und (6) § 10 S. 573 an, so werden wir, da $\varkappa$ nur in den Endpunkten P_1 und P_2 bekannt ist, zu setzen genötigt sein:

$$k_1 = \varkappa_1 + \frac{1}{3}\,\varkappa'\gamma$$

und

$$\varkappa_2 = \varkappa_1 + \varkappa'\gamma\,.$$

Die Elimination von $\varkappa'$ aus beiden Gleichungen giebt sofort die erste Gleichung (1). Das gleiche Resultat läſst sich aus (3) und (4) § 10 S. 573 gewinnen, wenn (3) auf $k_1 = \varkappa_1 + \frac{1}{3}\,\varkappa' h$ abgekürzt wird. Die

erste Ableitung hat aber den Vorzug allgemeinerer Gültigkeit; denn falls die Luftschichtung nicht nach Niveauflächen stattfindet (für welchen Fall, innerhalb gewisser Grenzen der Abweichungen, unsere Formeln auch Geltung besitzen), so ist die zweite Ableitung nur für durchaus steigende oder fallende Lichtstrahlen, die erste aber auch für abwechselnd steigende und fallende Lichtstrahlen brauchbar.

Wenn hiernach die Gültigkeit der *Jordan*schen Formeln nicht an die normale Luftschichtung gebunden ist, so hat man doch zu bedenken, dafs die Anwendung der Formeln $\varkappa_2 = \varkappa_1 + \varkappa'\gamma$ bezw. $\varkappa_1 + \varkappa' h$ eine gute Annäherung an die Wirklichkeit nur in den seltenen Fällen bieten kann, wo der Verlauf der Temperatur entlang dem Lichtstrahl ein ziemlich gleichmäfsiger ist (bei normaler Schichtung entspricht der Formel $\varkappa_2 = \varkappa_1 + \varkappa' h$ eine Funktion zweiten Grades von h für die Temperatur). Die Formeln haben vor den *Bauernfeind*schen allerdings den Vorzug, die wirkliche Temperaturabnahme mit der Höhe zu berücksichtigen: so gut als dies eben möglich ist, wenn nur in den Endpunkten Beobachtungen über dieselbe vorliegen. Umgekehrt gestatten sie auch aus Refraktionsbeobachtungen einen mehr oder weniger sicheren Rückschlufs auf die Temperaturverhältnisse.

§ 17. Formel bei gegenseitigen Messungen, wenn $\varkappa$ in vier Punkten bekannt ist. Wenn wir voraussetzen, dafs aufser den Werten von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ in den beiden Endpunkten des Lichtstrahles P_1P_2 noch die Werte $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_\beta$ in zwei mittleren Punkten desselben gegeben sind, so wird ohne Zweifel ein genauerer Schlufs auf den Verlauf von $\varkappa$ entlang dem Lichtstrahle möglich sein, als aus $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ allein. Wir bezeichnen die Abstände der beiden Punkte von P_1, gemessen als Zentriwinkel in derselben Weise wie γ, Fig. 92 S. 553, mit α und β und setzen, Fig. 95:

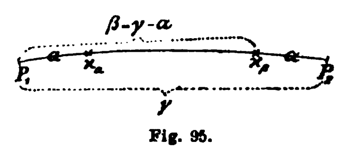


Fig. 95.

$$\beta = \gamma - \alpha \quad \text{also} \quad \alpha + \beta = \gamma . \tag{1}$$

Im Anschlufs an die Formeln (5) und (6) § 10 S. 573 haben wir nun

$$k_1 = \varkappa_1 + \frac{1}{3}\varkappa_1'\gamma + \frac{1}{12}\varkappa_1''\gamma^2 + \frac{1}{60}\varkappa_1'''\gamma^3 \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} \varkappa_\alpha &= \varkappa_1 + \varkappa_1'\alpha + \frac{1}{2}\varkappa_1''\alpha^2 + \frac{1}{6}\varkappa_1'''\alpha^3 \\ \varkappa_\beta &= \varkappa_1 + \varkappa_1'\beta + \frac{1}{2}\varkappa_1''\beta^2 + \frac{1}{6}\varkappa_1'''\beta^3 \\ \varkappa_2 &= \varkappa_1 + \varkappa_1'\gamma + \frac{1}{2}\varkappa_1''\gamma^2 + \frac{1}{6}\varkappa_1'''\gamma^3 . \end{aligned} \tag{3}$$

Letztere Gleichungen dienen zur interpolatorischen Bestimmung von $\varkappa_1'$, $\varkappa_1''$ und $\varkappa_1'''$. Der damit berechnete Wert k_1 wird selbstredend alle Mängel eines interpolatorisch berechneten Wertes haben und dem wahren Wert von k_1 in der Regel nur dann genau entsprechen, wenn — wie bei der Entwicklung der Formeln des § 10 vorausgesetzt — der Ausdruck für k_1 der Anfang einer stark konvergenten Reihe ist.

Die Aufstellung des Ausdruckes für k_1 erfolgt am einfachsten, wenn die Gröſsen auf den linken Seiten in (2) und (3) nach rechts gebracht werden. Alsdann ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1 - k_1 & \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ \varkappa_1 - \varkappa_\alpha & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \varkappa_1 - \varkappa_\beta & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ \varkappa_1 - \varkappa_2 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Hieraus folgt

$$k_1 \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \varkappa_1 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} + \varkappa_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix}$$

$$+ \varkappa_\alpha \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} - \varkappa_\beta \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} .$$

Die Berechnung der Determinanten gestaltet sich nach gehöriger Reduktion mittelst der Relation (1) unter Anwendung bekannter Sätze sehr bequem und ergiebt

$$k_1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{\gamma^2}{10\,\alpha\beta}\right)\varkappa_1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{15\,\alpha\beta}\right)\varkappa_2 + \frac{\left(\beta - \frac{2}{5\gamma}\right)\varkappa_\alpha - \left(\alpha - \frac{2}{5\gamma}\right)\varkappa_\beta}{6\,(\beta - \alpha)\,\alpha\beta}\,\gamma^2 . \quad (4)$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 bezw. α und β folgt hieraus

$$k_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{\gamma^2}{10\,\alpha\beta}\right)\varkappa_2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{15\,\alpha\beta}\right)\varkappa_1 + \frac{\left(\beta - \frac{2}{5\gamma}\right)\varkappa_\beta - \left(\alpha - \frac{2}{5\gamma}\right)\varkappa_\alpha}{6\,(\beta - \alpha)\,\alpha\beta}\,\gamma^2 , \quad (5)$$

und durch Kombination beider Formeln ergiebt sich endlich:

$$k_2 + k_1 = (\varkappa_2 + \varkappa_1) + A\left\{\varkappa_\beta + \varkappa_\alpha - (\varkappa_2 + \varkappa_1)\right\} \quad (6)$$

und

$$k_2 - k_1 = \frac{1}{3}(\varkappa_2 - \varkappa_1) + \frac{1}{5}A\left\{\frac{\varkappa_\beta - \varkappa_\alpha}{\beta - \alpha}\,\gamma - (\varkappa_2 - \varkappa_1)\right\} \quad (7)$$

mit

$$A = \frac{\gamma^2}{6\,\alpha\beta} .$$

Nach *Jordans* Theorie wird $k_2 + k_1 = \varkappa_2 + \varkappa_1$ und $k_2 - k_1 = \frac{1}{3}(\varkappa_2 - \varkappa_1)$; die Formeln (6) und (7) zeigen, welche Änderungen durch Berücksichtigung der Werte von $\varkappa$ in zwei symmetrischen Zwischenpunkten eintreten. Man wird letztere jedenfalls in der Nähe der Mitte des Lichtstrahles annehmen und demgemäſs $\alpha = \gamma - \beta = \frac{1}{3}\gamma$ bis $\frac{1}{2}\gamma$ setzen, wodurch die Gröſse A gegeben ist.

Man kann A aber auch aus den Messungen selbst bestimmen. Denkt man sich nämlich eine Reihe aufeinanderfolgender, gleichzeitiger, gegenseitiger Zenithdistanzmessungen gegeben und für jedes Wertpaar der Zenithdistanzen die Gröſsen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_2 - \varkappa_1$ aus Temperaturbeobachtungen in der Nähe der Stationen abgeleitet, so wird $\varkappa_2 - \varkappa_1$ für die aufeinanderfolgenden, gegenseitigen Messungen verschiedene Werte annehmen. In den diesen Messungen entsprechenden Gleichungen für h, welche durch Einführung von (7) in (9*) § 10 S. 574 entstehen, wird demnach der Faktor von A verschieden sein, was die Möglichkeit einer gleichzeitigen Bestimmung von h und A herbeiführt.

Durch diese Methode wird zugleich dem Umstande Rechnung getragen, daſs $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ aus den Temperaturbeobachtungen in der Regel formell nicht in mathematischer Strenge für P_1 und P_2 bestimmt werden, sondern daſs die in verschiedenen Höhen aufgehängten Thermometer nur mittlere Werte von $\varkappa$ für die Nähe der Stationen geben. A priori läſst sich die Formel diesen Verhältnissen entsprechend nicht leicht anpassen; aber das empfohlene Verfahren bietet eine Möglichkeit, dieses a posteriori zu thun. Dabei wird man für die Rechnung bequemer anstatt A als Unbekannte $B = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}A$ einführen, womit (7) übergeht in

$$k_2 - k_1 = B\left\{(\varkappa_2 - \varkappa_1) - \frac{\varkappa_\beta - \varkappa_\alpha}{\beta - \alpha}\gamma\right\} + \frac{1}{3}\frac{\varkappa_\beta - \varkappa_\alpha}{\beta - \alpha}\gamma . \qquad (7^*)$$

Was die Gröſse $(\varkappa_\beta - \varkappa_\alpha)\gamma : (\beta - \alpha)$ anbetrifft, so wird man mit Rücksicht auf die für brauchbare Bestimmungen überhaupt unvermeidliche Voraussetzung einer bedeutenden Höhenlage der mittleren Teile des Lichtstrahles über dem Terrain dafür (falls wirkliche Beobachtungen fehlen) einen Wert setzen können, der der Temperaturabnahme mit der Höhe entspricht, wie sie aus den Tagesmitteln der Beobachtungen in P_1 und P_2 bezw. deren Nähe folgen.

Man hat dabei zu beachten, daſs diese Gröſse nichts Anderes ist, als ein nach Maſsgabe der Veränderung von $\varkappa$ im mittleren Teile des Lichtstrahles berechneter Wert der Differenz $\varkappa_2 - \varkappa_1$. Dieser Wert erscheint im Vergleiche zum wirklichen, lokal beeinfluſsten Werte als ein normaler, wesentlich von dem Höhenunterschiede abhängiger. Bei geringen Höhenunterschieden, wie z. B. im Falle der in § 13 S. 584 besprochenen Beobachtungsreihe, kann er gleich null angenommen werden.

Wenn gleichzeitige barometrische Beobachtungen auf mehreren Punkten von verschiedener Höhenlage in der Umgebung der Zenithdistanzstationen vorliegen, so kann man einen Näherungswert von $\varkappa$ für die mittleren Teile des Lichtstrahles mit Hilfe der Lufttemperaturen erhalten, welche sich aus den barometrischen Beobachtungen und den geometrisch nivellierten Höhenunterschieden ergeben (vergl. die Anmerkung zu § 21).

§ 18. **Übersicht der Methoden.** Die im vorhergehenden Paragraphen durchgeführte Berechnung der Refraktionskoefficienten k aus den für vier Punkte des Lichtstrahles gegebenen Werten von $\varkappa$ läfst sich selbstverständlich auch durch Hinzuziehen von mehr als vier Punkten verallgemeinern, jedoch ohne Aussicht auf praktische Durchführbarkeit. Dieselbe ist bereits für den behandelten Fall nicht sehr grofs, weil dabei die Ermittlung von $\varkappa$ aus Beobachtungen der Lufttemperatur in verschiedenen Höhen über dem Terrain wenigstens für die Endpunkte des Lichtstrahles vorausgesetzt wird. Indessen bietet sich hierzu vielleicht eine Möglichkeit in der Anwendung thermo-elektrischer Vorrichtungen, welche durch kleine Luftballons*) getragen werden.

Ohne Lufttemperaturbeobachtungen läfst sich die Methode des vorigen Paragraphen (und im allgemeinen auch diejenige von *Jordan*) nicht wohl durchführen. Allerdings scheint sich dazu die Möglichkeit durch gleichzeitige Beobachtungen zwischen drei Punkten zu bieten, indem sich aus der Gesamtrefraktion für den Lichtstrahl zwischen je zwei der drei Punkte drei Gleichungen ergeben, in denen die Werte $\varkappa$ für die drei Punkte auftreten. Dieselben führen indessen wegen der durch ihren Näherungscharakter bedingten formellen Ungenauigkeit, sowie wegen der Schwierigkeit, hinlänglich zuverlässige Werte für $\varkappa$ in den mittleren Teilen der Lichtstrahlen zu erhalten, bei einer Auflösung nach jenen drei $\varkappa$ voraussichtlich nicht zu genügend scharfen Werten der letzteren.

Anstatt der wegen ihres interpolatorischen Charakters möglicherweise von geringem Erfolg begleiteten Methode des vorhergehenden Paragraphen könnte sich vielleicht ein *Verfahren mit lokalen Korrektionen* empfehlen, welches wir noch kurz andeuten wollen. Nimmt man nämlich an, dafs die Refraktion nur deswegen nicht nach den einfachen Formeln von *Jordan* berechnet werden kann, weil in der Nähe des Terrains durch den Verlauf der Lufttemperatur Unregelmäfsigkeiten entstehen, so kann man z. B. für den Refraktionswinkel des Lichtstrahles $P_1 P_2$ in P_1 näherungsweise setzen (vergl. S. 591):

---

*) Eines Vorschlages zu der Anwendung kleiner Luftballons gedenkt bereits *Baeyer* 1855 in den *Astronom. Nachr.* Bd. 41 S. 325. Die dabei erwähnten Minimumthermometer dürften jetzt zeitgemäfser durch geeignete elektrische Vorrichtungen zu ersetzen sein.

$$\frac{1}{2} k_1 \gamma = \frac{1}{2} \frac{2\varkappa_1' + \varkappa_2'}{3} \gamma + c_1 (t_1' - t_1). \tag{1}$$

Hierin bezeichnen $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$ die Werte von $\varkappa$ in P_1 und P_2 entsprechend den von den lokalen Anomalieen befreiten Lufttemperaturen t_1' und t_2', während t_1 und t_2 die wirklichen Temperaturen der Luft in den Endpunkten des Lichtstrahles sind. Das Korrektionsglied $c_1 (t_1' - t_1)$ ist unter der Voraussetzung entstanden, dafs in der Nähe von P_1 die Luftschichten gleicher Dichtigkeit parallel laufen. Bei der Durchkreuzung ebener paralleler Schichten ist aber die totale Refraktion nur abhängig von den Brechungsindices der beiden äufseren Schichten; für 760^{mm} Barometerstand und 0^0 mittlerer Lufttemperatur beträgt sie $0{,}22'' \Delta t . \tan \varepsilon$ bei der Temperaturdifferenz Δt in hundertteiligen Graden und dem mittleren Neigungswinkel ε des Strahles zur Schichtennormale. Mit Rücksicht hierauf und unter Beachtung des Umstandes, dafs das erste Glied der Formel (1) bereits den normalen Teil der Refraktion in den betrachteten Schichten enthält, gelangt man nun zu dem Korrektionsgliede in der angegebenen Form, wobei von der Abhängigkeit des Koefficienten c_1 vom Stande der meteorologischen Instrumente entsprechend einer ersten Annäherung abgesehen ist.

Man kann die Formel (1) auch auf k_1 reduzieren und hat sodann $c_1' = c_1 : \gamma$ als eine, von den lokalen Verhältnissen abhängige Unbekannte aufzufassen, die sich durch Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen, also zu verschiedenen Tageszeiten, ermitteln läfst, ähnlich wie der Koefficient A bezw. B im vorhergehenden Paragraphen.

Die Methode der lokalen Korrektionen erfordert ebenso wie diejenige des vorhergehenden Paragraphen die Beobachtung der Lufttemperatur in gröfseren Höhen über dem Terrain, damit rechnerisch ein Schlufs auf t' und $\varkappa'$ möglich ist. Ein Ersatz von t' durch Tagesmittel der t dürfte sich in mehr als einer Hinsicht wenig geeignet erweisen.

Wenn überhaupt die Einführung beobachteter Lufttemperaturen in die Refraktionsberechnung sich als unzweckmäfsig herausstellen sollte, weil die beobachteten Lufttemperaturen von den wahren zu sehr abweichen — ein Umstand, den schon 1855 *Baeyer* befürchtet und der in der That mit Rücksicht auf die begleitenden Umstände eintreten mufs, wiewohl je nach der Art der Instrumente und Einrichtungen in verschiedenem Grade — dann können die beiden soeben behandelten Methoden selbstverständlich keine Anwendung finden.

Um nun doch die Aufgabe der trigonometrischen Höhenbestimmung zu lösen, wird man sich genötigt sehen, in der Regel wieder zu der Annahme des Zusammenfallens der Luftschichten gleicher Dichtigkeit mit Niveauflächen zurückzukehren. Damit aber diese Annahme dem wirklichen Luftzustande wenigstens annähernd entspricht, mufs man entweder die Beobachtungen über den ganzen Tag (24 Stunden) ausdehnen und für den Mittelwert die Rechnung führen, oder man mufs die Beobachtungen auf diejenigen Zeiten beschränken,

wo die Temperatur der Luft erfahrungsmäfsig in der Regel einen einigermafsen normalen Verlauf hat.

Was das erste Verfahren anbetrifft, so zeigen die Publikationen von *Bauernfeind* aus den Jahren 1880 und 1883, dafs es möglich ist, Beobachtungsreihen zu erhalten, die sich, abgesehen von einigen Lücken, fortlaufend über einen Tag, ja über eine Reihe von aufeinanderfolgenden Tagen ausdehnen. Wenn aber die Formeln für normale Gestalt der Flächen gleicher Luftdichte in irgend einem Falle Berechtigung haben, so dürfte es derjenige sein, der dem Mittel der Messungen für die genannten Zeiträume entspricht.

Hinsichtlich des zweiten Verfahrens ist zu erwähnen, dafs nach den Untersuchungen von *Bauernfeind* und *Rühlmann* die Temperaturen der Luftschichten in der Nähe des Terrains zum Gebrauche für barometrische Höhenmessungen im allgemeinen zweimal täglich tauglich sind. Die betreffenden Zeiten für Deutschland zeigt *Voglers* Diagramm*) in übersichtlicher Weise:

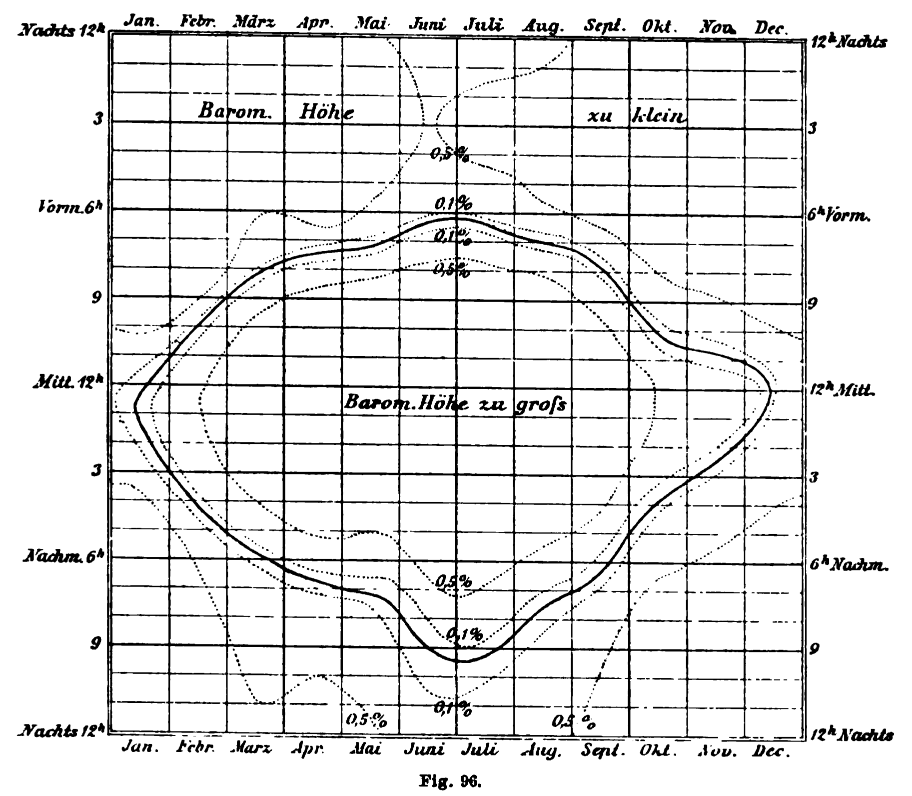


Fig. 96.

Dafs in einzelnen Fällen auch das trigonometrische Mefsverfahren in der Nähe dieser Zeiten richtige Werte zu geben vermag, erkennt

*) Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877, S. 91.

man aus der in § 13 S. 584 aufgeführten Beobachtungsreihe. Aber es besteht immer eine Unsicherheit hinsichtlich des geeignetsten Zeitpunktes der Messungen, die durch gleichzeitige barometrische Messungen zu heben, in mehr als einer Hinsicht ungenügend erscheinen mufs; auch ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dafs diese Zeiten in einzelnen Fällen sich als ganz untauglich erweisen.

Die Berechnung der Beobachtungen hat bei der den letzten beiden Fällen zu grunde gelegten Voraussetzung an die Formeln des § 10, insbesondere an (3) S. 573, anzuknüpfen. Um die in dieser Formel auftretenden Koefficienten zu ermitteln, was natürlicherweise nur bei gröfseren Höhenunterschieden nötig wird, da für kleinere Höhenunterschiede die Annahme $k_1 = k_2$ genügt, ist die gleichzeitige Beobachtung zwischen drei Stationen verschiedener Höhenlage am geeignetsten*). Die betreffenden Entwicklungen werden wir im nächsten Paragraphen aufstellen.

Wenn die Beobachtungen über alle 24 Stunden des Tages ausgedehnt werden und die Rechnung mit dem Mittel derselben geführt wird, so schwindet auch ein grofser Teil der Bedenken gegen die Benutzung der Lufttemperaturen wegen der Schwierigkeit ihrer Beobachtung, und man wird sogar hoffen dürfen, dafs die Tagesmittel der in der Nähe des Terrains beobachteten Lufttemperaturen frei von lokalen Anomalieen sind. Aus derartigen Bestimmungen an mehreren Punkten verschiedener Höhenlage in der Gegend trigonometrischer Stationen läfst sich die Temperatur als Funktion der Höhe und damit $\varkappa$ als ebensolche ermitteln.

Um den Einflufs der Refraktion zu vermindern, kann man sich des Mittels der Verkleinerung der Distanzen bedienen. Dieses ist sehr wirksam, da die durch die Refraktion in der Höhenmessung erzeugte Unsicherheit erfahrungsmäfsig ungefähr mit dem Quadrat der Distanz wächst. Nach Ausweis des ersten Bandes über die Vermessung von Mecklenburg ist der mittlere Fehler eines (ohne Rücksicht auf die Abweichungen der Niveauflächen von der Form eines Ellipsoides berechneten) Höhenunterschiedes bei 17^{km} Distanz aus den Beobachtungen eines Vor- oder Nachmittags noch nicht $\pm 0{,}2^m$. Die Berechnung ist hierbei mit Rücksicht auf die geringen Höhenunterschiede nach der Hypothese der Kreisform des Lichtstrahles gemacht. Hiernach dürfte eine ausschliefsliche Benutzung von Distanzen unter 20^{km} ohne Anwendung besonderer Theorieen und Beobachtungsverfahren gute Resultate versprechen, wobei nur diejenigen Linien auszuschliefsen wären, für welche die Differenz $z'_{2.1} - z'_{1.2}$ zu verschiedenen Zeiten sich in solchem Mafse verschieden ergiebt, dafs eine Ungleichheit von k für beide Endpunkte des Lichtstrahles anzunehmen ist. Für diese Distanzen

*) Dieses Verfahren empfiehlt 1855 *Baeyer* a. a. O. S. 325, neuerdings *H. Bruns* in der Astronom. Vierteljahrsschrift 1883 Bd. 18 S. 250.

$< 20^{km}$ dürften Messungen der Zenithdistanzen an ein oder zwei Vor- bezw. Nachmittagen ausreichen, während für gröfsere Distanzen fortlaufende Messungen über Tag und Nacht zur Erzielung guter Resultate höchst wahrscheinlich notwendig sein werden. Ergiebt sich durch Einschränkung der Distanzen somit einerseits ein Zeitgewinn, so erfordert leider dieselbe eine grofse Vermehrung der Anzahl der Stationen und der astronomischen Bestimmungen, womit zugleich eine ganz erhebliche Ausdehnung des Ausgleichungsgeschäftes verbunden ist.

Wir möchten hier nochmals auf die in Bd. 1 S. 564 § 21 u. ff. angegebene Methode der Bestimmung der Gestalt des Geoides aus Lotabweichungen hinweisen und zwar besonders im Sinne einer Befürwortung ausgedehnter Benutzung der Breitenbestimmungen zur Ermittelung der Form der Meridiane. Denn wir sind der Ansicht, dafs sich durch Breitenstationen von durchschnittlich 10^{km} Abstand die Form eines Meridianes rascher und genauer bestimmen läfst, als mittelst Zenithdistanzmessungen, welche Entfernungen man dabei auch benutzen möge.

Nehmen wir an, dafs auf einem 1000^{km} langen Meridianbogen sich 100 Breitenstationen in ungefähr gleichen Abständen befinden, dafs jede geographische Breite mit $\pm 1{,}5''$ m. F. bestimmt sei und dafs der mittlere Einflufs derjenigen Massenunregelmäfsigkeiten, welche eine merkbare Wirkung nur bis etwa 10^{km} Entfernung ausüben, auch $\pm 1{,}5''$ betrage (ein auf grund theoretischer und empirischer Erwägungen plausibler Wert), so würde sich der Unterschied der Höhen $\mathfrak{H}$ von Anfangs- und Endpunkt des Meridianbogens gegen ein Referenzellipsoid mit dem m. F.

$$\pm \frac{10000 . 2{,}1}{206265} \sqrt{100}\,, \quad \text{d. i.} \quad \pm 1^m,$$

ergeben. Wenn es auch gelingen sollte, die gleiche Genauigkeit mittelst Zenithdistanzmessungen zu erreichen, so dürfte doch die Arbeit eine ungleich gröfsere sein. Denn während für die empfohlene Methode, die wir kurz als *astronomisches Nivellement* bezeichnen möchten, bei der geringen erforderlichen Genauigkeit der Breitenbestimmungen nicht nur die Arbeit der astronomischen Messung, sondern auch diejenige für die geodätische Festlegung der Punkte (welche — natürlicherweise unter Zugrundelegung eines Dreiecksnetzes 1. Ordnung — im einzelnen nach ziemlich rohen Methoden erfolgen kann) eine geringe ist, auch keine mühsamen Rekognoszierungen nötig werden und die rechnerische Auswertung der Beobachtungen sehr einfach ausfällt, gestaltet sich die Methode der Zenithdistanzmessungen in allen diesen Teilen erheblich schwieriger.

Ihre Anwendung wird daher ohne Zweifel eine beschränkte bleiben, insbesondere auf die Konstruktion von ostwestlichen Profilen, welche die meridionalen Profile des Geoides verbinden, und auf einzelne Fälle zur Kontrolle und Ergänzung der Ergebnisse des astronomischen Nivellements im Hochgebirge, wo die Krümmung der Lotlinien die Güte der letzteren etwas beeinträchtigt, wenn auch in der Weise, dafs der Einflufs bei Vergleichung von Stationen gleicher Höhenlage beiderseits des Gebirges in der Regel zum gröfseren Teile verschwinden wird.

§ 19. Formeln bei Beobachtungen zwischen drei Stationen unter Voraussetzung normaler Form der Luftschichten. Die drei Punkte nennen wir P_1, P_2, P_3 und bezeichnen allgemein mit

h_{mn} die Höhe von P_n über P_m, ferner mit k_{mn} den Refraktionskoefficienten, der zu dem Refraktionswinkel in P_m für den Strahl nach P_n gehört, endlich mit $\varkappa_m$ den Refraktionskoefficienten $\varkappa$ im Punkte P_m.

Die Beziehung von k_{mn} zu $\varkappa_m$ und h_{mn} wird durch die Formel (3) § 10 S. 573 gegeben. Indem wir die Distanzen $< 32^{km}$ voraussetzen, genügt es für die Parenthese im 2. Gliede $2h$ zu schreiben. Damit erhalten wir für $k_{1.2}$ die Näherungsrelation:

$$k_{1.2} = \varkappa_1 + \frac{1}{3}\varkappa_1' h_{1.2} + \frac{1}{12}\varkappa_1'' h_{1.2}^2, \tag{1}$$

worin $h_{1.2}$ rechter Hand einen Näherungswert für die betreffende Höhendifferenz vorstellt.

Nach (4) S. 573 ist ferner näherungsweise:

$$\begin{aligned} \varkappa_2 &= \varkappa_1 + \varkappa_1' h_{1.2} + \frac{1}{2}\varkappa_1'' h_{1.2}^2 \\ \varkappa_3 &= \varkappa_1 + \varkappa_1' h_{1.3} + \frac{1}{2}\varkappa_1'' h_{1.3}^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Indem wir nun aus diesen drei Gleichungen $\varkappa_1'$ und $\varkappa_1''$ eliminieren, erhalten wir:

$$k_{1.2} = \frac{\varkappa_1}{6}\frac{4h_{1.3} - h_{1.2}}{h_{1.3}} + \frac{\varkappa_2}{6}\frac{h_{1.3} + h_{2.3}}{h_{2.3}} - \frac{\varkappa_3}{6}\frac{h_{1.2}^2}{h_{1.3}h_{2.3}}. \tag{3}$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 folgt hieraus:

$$k_{2.1} = \frac{\varkappa_1}{6}\frac{h_{1.3} + h_{2.3}}{h_{1.3}} + \frac{\varkappa_2}{6}\frac{4h_{2.3} + h_{1.2}}{h_{2.3}} - \frac{\varkappa_3}{6}\frac{h_{1.2}^2}{h_{1.3}h_{2.3}}. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) findet sich durch Subtraktion und Addition:

$$k_{2.1} - k_{1.2} = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{3} \tag{5}$$

und

$$\frac{k_{2.1} + k_{1.2}}{2} = \varkappa_1\left(\frac{1}{2} + \frac{h_{1.2}}{6h_{3.1}}\right) + \varkappa_2\left(\frac{1}{2} + \frac{h_{1.2}}{6h_{2.3}}\right) + \varkappa_3\frac{h_{1.2}^2}{6h_{3.1}h_{2.3}}. \tag{6}$$

Die gleichzeitigen, gegenseitigen Beobachtungen zwischen drei Punkten geben aber mit Hilfe von Gleichung (11) S. 574 die mittleren Refraktionskoefficienten für die zugehörigen drei Lichtstrahlen. Indem man sodann die Beziehung (6) auf jeden der letzteren anwendet, erhält man anscheinend drei unabhängige Gleichungen zur Bestimmung von $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$. Dieselben lauten, wenn der mittlere Refraktionskoefficient des Strahles P_mP_n mit

$$(mn) = \frac{k_{mn} + k_{nm}}{2}$$

bezeichnet wird:

$$
\begin{aligned}
(1.2) &= \varkappa_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_{1.2}}{6 h_{3.1}}\right) + \varkappa_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_{1.2}}{6 h_{2.3}}\right) + \varkappa_3 \frac{h_{1.2}^2}{6 h_{3.1} h_{2.3}} \\
(2.3) &= \varkappa_1 \frac{h_{2.3}^2}{6 h_{1.2} h_{3.1}} + \varkappa_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_{2.3}}{6 h_{1.2}}\right) + \varkappa_3 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_{2.3}}{6 h_{3.1}}\right) \qquad (7) \\
(3.1) &= \varkappa_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_{3.1}}{6 h_{1.2}}\right) + \varkappa_2 \frac{h_{3.1}^2}{6 h_{1.2} h_{2.3}} + \varkappa_3 \left(\frac{1}{2} + \frac{h_{3.1}}{6 h_{2.3}}\right).
\end{aligned}
$$

Eliminieren wir mit Hilfe der (2) $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$, so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
(1.2) &= \varkappa_1 + \frac{\varkappa_1'}{2} h_{1.2} + \frac{\varkappa_1''}{6} h_{1.2}^2 \\
(2.3) &= \varkappa_1 + \frac{\varkappa_1'}{2} (h_{1.2} + h_{1.3}) + \frac{\varkappa_1''}{6} (h_{1.2}^2 + h_{1.3}^2 + h_{1.2} h_{1.3}) \qquad (7^*) \\
(1.3) &= \varkappa_1 + \frac{\varkappa_1'}{2} h_{1.3} + \frac{\varkappa_1''}{2} h_{1.3}^2 .
\end{aligned}
$$

Dieses System ist dem vorhergehenden vorzuziehen, weil es einfacher und auch für den Fall brauchbar ist, dafs $\varkappa_1''$ von vornherein gleich null angenommen werden soll. Übrigens lassen sich aus (7) sowohl wie aus (7*) nur zwei der Unbekannten durch die dritte ausdrücken, denn es wird, wie man leicht verifiziert:

$$(1.2) h_{1.2} + (2.3) h_{2.3} + (1.3) h_{3\,1} = 0 . \qquad (8)$$

Diese Bedingungsgleichung besteht auch noch, wenn in die Formel für k ein Glied mit $\varkappa'''$ aufgenommen wird. Der Grad ihrer Erfüllung durch die Beobachtungswerte giebt einen Mafsstab für die Beobachtungsfehler und die Fehler der zu grunde gelegten Theorie.

Um nun sämtliche drei Unbekannte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ bezw. $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$ und $\varkappa_1''$ zu bestimmen, ist noch die Gleichung

$$h_{1.2} + h_{2.3} + h_{3.1} = 0 \qquad (9)$$

herbeizuziehen. In dieselbe sind die Ausdrücke für h einzusetzen, welche sich aus der Anwendung der Gleichung (9*) § 10 S. 574 mit Rücksicht auf (5) ergeben. Alles weitere bedarf keiner Erörterung.

Nur mag noch bemerkt werden, dafs die Bedingung (8) eine Ausgleichung fordert. Da erfahrungsmäfsig die Fehler der trigonometrisch ermittelten Höhen mit dem Quadrat der Entfernung wachsen*), so kommen den Refraktionskoefficienten gleiche Gewichte zu. Theoretische Erwägungen bestätigen dieses mit Rücksicht auf den systematischen Charakter der Abweichungen.

§ 20. **Zahlenbeispiel.** Zur Prüfung der Methode des vorhergehenden Paragraphen eignen sich die Beobachtungen, welche *von Bauernfeind* 1881 zwischen drei Punkten in der Nähe von *München*

*) Vergl. z. B. *Zeitschr. für Vermessungswesen* 1876 Bd. 5 S. 154.



hat anstellen lassen.*) Für die gegenseitige Lage dieser Punkte sind folgende Zahlen mafsgebend:

Nr.	Name	Geogr. Breite	Geometr. niv. Höhe über dem Meer.
1	Höhensteig . .	47° 52′ 0″	484,000^m
2	Irschenberg .	47 49 47	753,626
3	Kampenwand	47 45 18	1564,331

Seite	Mittleres südwestl. Azimut	log ϱ im Meeresniv	log s_0 (im Meeresniv.)	log s_m (i. d. mittl. Höhe)	γ
1.2	76° 13′ 59″	6,805367	4,236499	4,236541	556,62″
2.3	284 9 2	6,805362	4,531967	4,532046	1099,08
3.1	127 25 6	6,804955	4,310604	4,310674	660,80

Diese Angaben stimmen z. T. nicht ganz mit denen der Abh. überein. Indem wir nämlich von den ebenfalls mitgeteilten rechtwinkeligen Koordinaten der Punkte ausgingen, stellte sich heraus, dafs daselbst bei der Berechnung der Krümmungsradien ϱ des (*Bessel*schen) Erdellipsoides in den Vertikalebenen der Seiten die Meridiankonvergenz übersehen ist. Es ändert jedoch dieser Umstand log ϱ nur in der 6. Decimalstelle um 3 bis 11 Einheiten und γ nur bis zu 0,01″.

Die Beobachtungen erstrecken sich über eine Reihe aufeinanderfolgender Tage von 30 zu 30 Min. Wir wählten die Messungen vom 19. August $1^h\ 30^m$ v. bis 20. August 1^h v., interpolierten die Lücken mittelst graphischen Verfahrens und bildeten sodann Mittelwerte. Da die Abh. nicht die Zenithdistanzen z', sondern die Refraktionswinkel giebt, so sind letztere an den zu ihrer Bildung aus den geometrisch nivellierten Höhenunterschieden berechneten Zenithdistanzen ζ' der geraden Verbindungslinien wieder anzubringen, um die z' zu erhalten. Die Zahlen sind folgende:

Richtung	ζ' nach der Abh.	Refr. Winkel nach der Abh.	z'	Gesamtrefr. u. mittl. Refr.-Koeff.
1.2	89° 10′ 52,69″	0′ 58,73″	89° 9′ 53,96″	110,96″
2.1	90 58 23,93	0 52,23	90 57 31,70	0,1993
2.3	88 47 18,69	1 35,65	88 45 43,04	167,45
3.2	91 31 0,39	1 11,80	91 29 48,59	0,1524
3.1	93 6 57,15	0 34,37	93 6 22,78	107,04
1.3	87 4 3,65	1 12,67	87 2 50,98	0,1620

*) *Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion*; 2. Mitteilung. (Abh. der kön. bayer. Ak. der Wiss., 2. Cl., 1883, Bd. 15, 1. Abt.)

Die letzte Rubrik zeigt erstens die Gesamtrefraktion nach Formel (11) § 10 S. 574 ohne Rücksicht auf die zur Zeit noch unbekannte Lotabweichung aus den z' berechnet, sowie zweitens den hieraus durch Division mit γ abgeleiteten mittleren Refraktionskoefficienten. Beachtet man nun, dafs sich nach Mafsgabe des geometrischen Nivellements die Höhenunterschiede

$$h_{1.2} = 270^m \qquad h_{2.3} = 811^m \qquad h_{3.1} = -1080^m$$

sehr nahe wie $1:3:-4$ verhalten, so giebt die Bedingungsgleichung (8) des vorigen Paragraphen:

$$(0{,}1993 + v_1) \,.\, 1 + (0{,}1524 + v_2) \,.\, 3 - (0{,}1620 + v_3) \,.\, 4 = 0\,,$$

wobei das Symbol v Verbesserungen andeutet, die sich nach der Methode der kleinsten Quadrate zu $-0{,}0003$, $-0{,}0010$ und $+0{,}0013$ bestimmen, so dafs nunmehr in dem System (7*) des vorigen Paragraphen zu setzen ist:

$$(1.2) = 0{,}1990 \qquad (2.3) = 0{,}1514 \qquad (1.3) = 0{,}1633\,.$$

Dieses System lautet allgemein mit obigen Näherungswerten der h:

$$\left.\begin{aligned} (1.2) &= \varkappa_1 + a + b \\ (2.3) &= \varkappa_1 + 5a + 21b \\ (1.3) &= \varkappa_1 + 4a + 16b \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{für} \\ a &= \tfrac{1}{2}\,\varkappa_1' h_{1.2} \\ b &= \tfrac{1}{6}\,\varkappa_1'' h_{1.2}^2. \end{aligned}$$

Es giebt aus den beiden ersten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \tfrac{5}{4}(1.2) - \tfrac{1}{4}(2.3) + 4b \\ a &= -\tfrac{1}{4}(1.2) + \tfrac{1}{4}(2.3) - 5b\,; \end{aligned}$$

die dritte der vorhergehenden Gleichungen kann als Rechenkontrolle dienen.

Mit den ausgeglichenen Zahlwerten für (1.2) und (2.3) folgt

$$\varkappa_1 = 0{,}2109 + 4b\,, \qquad a = -0{,}0119 - 5b\,.$$

Die (2) des vorigen Paragraphen geben hiermit

$$\varkappa_2 = 0{,}1871 - 3b\,, \qquad \varkappa_3 = 0{,}1157 + 12b\,,$$

und daraus folgt zur Einführung in die Gleichung (9*) § 10 S. 574, welche z. B. für $h_{1.2}$ mit Rücksicht auf (5) des vorigen Paragraphen (und unter Vernachlässigung der Lotabweichungen) lautet:

$$h_{1.2} = s_m \tan \frac{z'_{2.1} - z'_{1.2}}{2} + \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{12}\,\frac{s_m^2}{\varrho_{1.2}}\,\sec^2 \frac{z'_{2.1} - z'_{1.2}}{2}\,,$$

$$\begin{aligned} \varkappa_2 - \varkappa_1 &= -0{,}0238 - 7b \\ \varkappa_3 - \varkappa_2 &= -0{,}0714 + 15b \\ \varkappa_1 - \varkappa_3 &= +0{,}0952 - 8b\,. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Höhenunterschiede werden nunmehr:

$$\begin{aligned} h_{1.2} &= + \ \ 269{,}90 - 0{,}09 - \ \ 27\,b = + \ \ 269{,}76 \\ h_{2.3} &= + \ \ 812{,}67 - 1{,}08 + 227\,b = + \ \ 812{,}02 \\ h_{3.1} &= - 1082{,}22 + 0{,}52 - \ \ 44\,b = - 1081{,}78 \end{aligned} \qquad (1)$$

mit $b = 0{,}0019$ entsprechend der Bedingung $h_{1.2} + h_{2.3} + h_{3.1} = 0$.

Zu diesem Werte findet sich weiter:

$$\varkappa_1 = 0{,}219 \qquad \varkappa_2 = 0{,}181 \qquad \varkappa_3 = 0{,}139$$

$$k_{2.1} - k_{1.2} = -0{,}013 \quad k_{3.2} - k_{2.3} = -0{,}014 \quad k_{1.3} - k_{3.1} = +0{,}027$$

sowie $a = -0{,}0214$, $\varkappa_1' h_{1.2} = -0{,}043$ und $\varkappa_1'' h_{1.2}^2 = 0{,}0114$.

An der Hand dieser Werte für $\varkappa_1'$ und $\varkappa_1''$ läfst sich nunmehr nachträglich prüfen, ob die Vernachlässigungen in den benutzten Formeln im Vergleiche zu den strengeren Formeln der §§ 3 und 4 zulässig sind. Wir gehen darauf nicht weiter ein und bemerken nur, dafs eine strengere Rechnung Änderungen von nur 1 bis 2 Centimetern giebt.

Wird $\varkappa_1''$ *= null gesetzt,* so wird auch b = null und für die Höhenunterschiede findet sich:

$$h_{1.2} = +269{,}81 \qquad h_{2.3} = +811{,}59 \qquad h_{3.1} = -1081{,}70\,.$$

Diese Werte erfüllen die Gleichung $h_{1.2} + h_{2.3} + h_{3.1} = 0$ nicht. Um die Erfüllung herbeizuführen, könnte man die Verbesserungen v für die mittleren Refraktionskoefficienten mit Rücksicht auch auf diese Bedingung bestimmen. Bedenkt man aber, dafs die Fehler der Theorie auf die mittleren Refraktionskoefficienten ganz anders wirken, wie auf die Differenzen $k_{2.1} - k_{1.2}$ u. s. f., so ist es zweckmäfsig, die Ausgleichung durch Verbesserungen δ_1, δ_2 und δ_3 an den Annahmen $3\,(k_{2.1} - k_{1.2}) = \varkappa_2 - \varkappa_1$ u. s. f. zu bewirken. Die Gewichte der δ nehmen wir gleich grofs an. Es folgt als Bedingung

$$3{,}9\,\delta_1 + 15{,}1\,\delta_2 + 5{,}5\,\delta_3 = 0{,}30\,,$$

damit

$$\delta_1 = 0{,}0043 \qquad \delta_2 = 0{,}0166 \qquad \delta_3 = 0{,}0061$$

und

$$h_{1.2} = +269{,}83 \qquad h_{2.3} = +811{,}84 \qquad h_{3.1} = -1081{,}67\,. \qquad (2)$$

Aufserdem ergiebt sich

$$k_{2.1} - k_{1.2} = -0{,}007 \quad k_{3.2} - k_{2.3} = -0{,}018 \quad k_{1.3} - k_{3.1} = +0{,}034\,.$$

Setzt man entsprechend Jordans Theorie

$$0{,}1993 = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} \qquad 0{,}1524 = \frac{\varkappa_2 + \varkappa_3}{2} \qquad 0{,}1620 = \frac{\varkappa_3 + \varkappa_1}{2}$$

und benutzt die hieraus folgenden Werte

$$\varkappa_1 = 0{,}2089 \qquad \varkappa_2 = 0{,}1897 \qquad \varkappa_3 = 0{,}1151$$



wie vorher nach Mafsgabe der Relationen $3(k_{2.1} - k_{1.2}) = \varkappa_2 - \varkappa_1$ u. s. f., die auch jetzt Geltung haben, zur Berechnung der Höhendifferenzen, so wird

$$h_{1.2} = +\,269{,}83 \qquad h_{2.3} = +\,811{,}54 \qquad h_{3.1} = -\,1081{,}70\,.$$

Verbessert man wieder die Annahmen $3(k_{2.1} - k_{1.2}) = \varkappa_2 - \varkappa_1$ u. s. f. um Gröfsen δ, so findet sich

$$\delta_1 = 0{,}0047 \qquad \delta_2 = 0{,}0181 \qquad \delta_3 = 0{,}0066$$

und

$$h_{1.2} = +\,269{,}85 \qquad h_{2.3} = +\,811{,}81 \qquad h_{3.1} = -\,1081{,}66\,. \qquad (3)$$

Aufserdem ergiebt sich

$$k_{2.1} - k_{1.2} = -\,0{,}005 \quad k_{3.2} - k_{2.3} = -\,0{,}019 \quad k_{1.3} - k_{3.1} = +\,0{,}033\,.$$

Behufs Berechnung der Refraktion aus den Angaben der meteorologischen Instrumente auf den drei Stationen nach (12) § 11 S. 577 wurden für den angegebenen Zeitraum von 24 Stunden aus den halbstündigen (event. interpolierten) Beobachtungszahlen nachstehende Mittelwerte*) gebildet, denen die berechneten Werte von τ und $\varkappa$ beigefügt sind:

	b	e	T	$100\,\tau$	$\varkappa$
1	719,2^{mm}	10,5^{mm}	290,74^0	0	0,1943
2	697,1	10,5	290,28	−0,344	0,1698
3	632,9	7,8	283,31	−1,376	0,1072

Mit den Annahmen $3\,(k_{2.1} - k_{1.2}) = \varkappa_2 - \varkappa_1$ u. s. f., die auch jetzt Geltung haben, folgt

$$h_{1.2} = +\,269{,}81 \qquad h_{2.3} = +\,811{,}72 \qquad h_{3.1} = -\,1081{,}74\,.$$

Verteilt man den Widerspruch der Bedingungsgleichung

$$h_{1.2} + h_{2.3} + h_{3.1} = 0$$

wieder durch Verbesserungen δ der Annahmen für $3\,(k_{2.1} - k_{1.2})$ u. s. f., so ergiebt sich

$$\delta_1 = 0{,}0031 \qquad \delta_2 = 0{,}0121 \qquad \delta_3 = 0{,}0044\,,$$

$$h_{1.2} = +\,269{,}82 \qquad h_{2.3} = +\,811{,}90 \qquad h_{3.1} = -\,1081{,}72 \qquad (4)$$

und

$$k_{2.1} - k_{1.2} = -\,0{,}007 \quad k_{3.2} - k_{2.3} = -\,0{,}017 \quad k_{1.3} - k_{3.1} = +\,0{,}031\,.$$

Zum Schlusse geben wir noch die Resultate für die Höhen-

*) Hierbei fand sich, dafs die Temperaturangaben der betr. Abhandlung von den entsprechenden der Mitteilung über die mit den trigonometrischen gleichzeitig angestellten barometrischen Höhenmessungen (erschienen unter dem Titel: „*Neue Beob. über die tägl. Periode barometr. bestimmter Höhen*") z. T. nicht unerheblich abweichen.

differenzen, die unter *Voraussetzung der Kreisbogenform des Lichtstrahles* hervorgehen. Verbessert man die unmittelbaren Resultate

$$h_{1.2} = +269{,}90 \qquad h_{2.3} = +812{,}67 \qquad h_{3.1} = -1082{,}22$$

wie vorher mittelst Verbesserungen der Annahmen $3(k_{2.1} - k_{1.2}) = 0$ u. s. f., so wird erhalten

$$\delta_1 = -0{,}0049 \qquad \delta_2 = -0{,}0193 \qquad \delta_3 = -0{,}0070,$$

$$h_{1.2} = +269{,}88 \qquad h_{2.3} = +812{,}38 \qquad h_{3.1} = -1082{,}26 \qquad (5)$$

und

$$k_{2.1} - k_{1.2} = -0{,}002 \quad k_{3.2} - k_{2.3} = -0{,}006 \quad k_{1.3} - k_{3.1} = -0{,}002\,.$$

Die fünf Rechnungsergebnisse stellen wir nunmehr nach dem Grade der Annäherung von $h_{3.1}$ an das Resultat des geometrischen Nivellements zusammen:

	Geom. niv.	(3)	(2)	(4)	(1)	(5)
1.2	269,63	269,85	9,83	9,82	9,76	9,88
2.3	810,71	811,81	1,84	1,90	2,02	2,38
1.3	1080,33	1081,66	1,67	1,72	1,78	2,26

Für die Unterschiede der Refraktionswinkel an beiden Enden jeder der drei Lichtkurven findet sich mittelst der Differenzen $k_{2.1} - k_{1.2}$ u. s. f.:

	Geom. niv.	(3)	(2)	(4)	(1)	(5)
1.2	6,5″	1,3″	1,8″	2,0″	3,5″	0,5″
2.3	23,9	10,3	10,1	9,3	7,7	3,5
1.3	38,3	11,0	11,2	10,1	8,8	0,8

Die Vergleichung der Rechnungsergebnisse mit dem Resultat des geometrischen Nivellements hat insofern einen Sinn, als letzteres bis auf mehrere Decimeter Abweichung (vergl. den nächsten Paragraphen) den ersteren entsprechen mufs. Nun gehen aber bei den gröfseren Höhenunterschieden die Abweichungen über den Betrag von einem Meter hinaus, und es scheint, dafs keine der Refraktionstheorieen im vorliegenden Falle genügend ist. Insbesondere entspricht das Ergebnis (1), welches nach den Formeln des § 19 abgeleitet worden ist, nicht den Erwartungen. Wahrscheinlich enthalten die benutzten Tagesmittel noch erhebliche lokale Anomalieen. Immerhin ist durch die Berechnungen (1) bis (4) im Vergleiche mit (5) etwas erreicht — auch im Vergleiche zu *Bauernfeinds* Theorie, bei welcher der Unterschied der Refraktionswinkel an den beiden Enden der Lichtkurven selbst für die Linie 1.3 noch nicht 2″ beträgt, deren Ergebnisse sich also von (5) nicht sehr unterscheiden werden.

Möglicherweise wird sich die erste Berechnungsmethode günstiger gestalten, wenn erst die Lotabweichungen, deren Bestimmung im Werke ist, in die Rechnung aufgenommen werden können. Die Resultate der trigonometrischen Berechnung werden dann allerdings noch immer nicht mit den Ergebnissen des geometrischen Nivellements direkt vergleichbar sein. Um vergleichbare Resultate zu erzielen, bedarf es der Bestimmung der Gestalt des Geoides im Bereiche des Dreiecks HJK, zu welchem Zwecke sich wahrscheinlich die Einschaltung noch einiger astronomischer Stationen nötig machen wird. (In dieser Hinsicht ist bei Anordnung neuer Beobachtungspunkte anzustreben, dafs die längste Dreiecksseite die Richtung NS hat, um entlang derselben allein durch Breitenbestimmungen die Gestalt des Geoides ableiten zu können.)

Die oben geführte Rechnung hat mit Rücksicht auf die letzten Bemerkungen selbstredend nur den Zweck die Art und Weise zu zeigen, welche uns für die Verwertung der Beobachtungen wünschenswert erscheint. Für eine vollständige Diskussion aller Messungen im ganzen und einzelnen (insbesondere auch zu den für barometrische Messungen günstigsten Zeiten) ist die Erledigung der astronomischen Hilfsmessungen abzuwarten.

§ 21. **Über die Bedeutung trigonometrischer, ohne Rücksicht auf Lotabweichung ermittelter Höhendifferenzen.** Wird die Formel (9*) § 10 S. 574, welche sich auf gleichzeitige, gegenseitige Zenithdistanzmessungen zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 bezieht, ohne Rücksicht auf Lotabweichung in den letzteren zur Berechnung des Höhenunterschiedes $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$ angewandt, so heifst dies zunächst nichts Anderes, als dafs die Höhen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ auf ein besonderes Referenzellipsoid bezogen werden, dessen Lage durch die Bedingung des Verschwindens der von den Lotabweichungen herrührenden Parenthese in (10) § 10 S. 574 markiert ist. Für jedes andere Punktepaar ist dann das Referenzellipsoid ein anderes, woraus ersichtlich wird, dafs diese Höhenberechnung nur dann einen Wert hat, wenn mit einer für den betreffenden Zweck ausreichenden Genauigkeit die Differenz $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$ als Differenz der Meereshöhen $H_2 - H_1$ aufgefafst werden darf.

Sehen wir zunächst von der Krümmung der Lotlinien ab und denken uns durch P_1 eine Niveaufläche und eine Parallelfläche zum Referenzellipsoid gelegt, so ist die Differenz $(\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1) - (H_2 - H_1)$ gleich dem über die horizontale Entfernung $P_1 P_2 = s$ erstreckten Integral

$$-\int^{s} \frac{\varDelta''}{\varrho''} \, ds \,, \tag{1}$$

vergl. Bd. 1 S. 565 (2), woselbst das Symbol γ anstatt $\varDelta$ angewandt

ist. In dem Ausdruck (1) bezeichnet $\varDelta$ die Lotabweichung im Sinne einer Depression der Tangente der Niveaufläche gegen diejenige des Ellipsoides in Richtung von P_1 nach P_2. Wegen der besonderen Lage des letzteren ist

$$\varDelta_1 + \varDelta_2 = 0\,. \tag{2}$$

Aus dieser Bedingung folgt für (1) der Wert null, falls $\varDelta$ durch eine Funktion 1. Grades, etwa $\lambda + \lambda' s$, zwischen P_1 und P_2 dargestellt werden kann. Ist dagegen $\varDelta$ von höherem Grade, z. B. gleich $\lambda + \lambda^{\mathrm{I}} s + \lambda^{\mathrm{II}} s^2$, so findet sich für (1) der von null verschiedene Wert

$$\frac{1}{6}\,\frac{\lambda^{\mathrm{II}}}{\varrho''}\,s^3\,. \tag{3}$$

Um eine Vorstellung von dem durchschnittlichen Betrage des Ausdruckes (1) in einem praktischen Falle zu bekommen, denken wir uns im Anschlufs an Bd. 1 S. 568 u. ff. im Meridian des Brockens eine Reihe von aufeinander folgenden Punkten trigonometrisch verbunden. Die Fig. 45 S. 570 giebt die $\varDelta$ für die Reihenfolge der Punkte von Süden nach Norden, wobei für Seeberg $\varDelta = 0$ gesetzt ist. Um nun $\varDelta$ für das Profil eines bestimmten Punktepaares auf das ihm eigentümliche Referenzellipsoid zu beziehen, genügt es nach der 1. Gl. (9) S. 536 Bd. 1 von den $\varDelta$ eine Konstante von solchem Werte abzuziehen, dafs für die reduzierten $\varDelta$ die Gleichung (2) erfüllt ist. In Fig. 45 kommt dieses einer Parallelverschiebung der Abscissenaxe um den mittleren Betrag der beiden zu P_1 und P_2 gehörenden Ordinaten gleich. Der Wert des Ausdruckes (1) wird sodann graphisch durch die Fläche zwischen Kurve und Abscissenaxe dargestellt, wobei Flächen oberhalb negativ, unterhalb positiv zu rechnen *sind*.

Bei einem Abstande der Ordinaten von 10′ geographischer Breite, also einer Entfernung der Punkte gleich $18{,}5^{km}$, ist aber der Verlauf der Kurve meist geradlinig, der Wert von (1) also null. Im Maximum ist für das durch Fig. 45 gegebene Sphäroid der Wert von (1) gleich $^1/_4{}^m$, im Durchschnitt aber noch nicht $^1/_{20}{}^m$, somit geringfügig.

Bei 20′ oder 37^{km} Abstand steigen Maximum und Durchschnitt jedoch bezw. bereits auf $1{,}2^m$ und $0{,}4^m$.

Durch die Krümmung der Lotlinien können vorstehende Beträge sich noch etwas vergröfsern. Jedoch wird bei Abständen von weniger als 20^{km} und nicht sehr beträchtlichen Höhenunterschieden das übliche Verfahren der trigonometrischen Höhenbestimmung aus gegenseitigen Zenithdistanzmessungen mit Rücksicht auf die durch die Refraktion entstehende Unsicherheit zweifellos als ein solches angesehen werden können, welches Unterschiede der Meereshöhen giebt. Weniger günstig ist die einseitige Messung, was wir jedoch nicht weiter verfolgen wollen.

Wenn man die Differentialformel für *barometrisches Höhenmessen* (8) § 11 S. 576 betrachtet und erwägt, dafs $g = -\frac{dW}{dh}$, dem Differentialquotienten des Potentiales nach der Höhe, ist, so scheint es leicht, aus barometrischen Messungen an zwei Punkten auf ihre Potentialdifferenz zu schliefsen. Indessen kompliziert sich der Zusammenhang wegen der Abhängigkeit der Luftdichtigkeit von der Höhe. Man bleibt deshalb besser bei dem üblichen Entwicklungsgange der Formel für barometrisches Höhenmessen stehen; wir verweisen insbesondere auf *Jordan, Handbuch der Vermessungskunde*, Bd. 1, 1877, S. 493 Formel (33), welche letztere wir mit der kleinen Modifikation adoptieren, dafs bei der Abhängigkeit der Schwerkraft von der geographischen Breite gemäfs unseren Untersuchungen der Faktor 0,00265 anstatt 0,002573 angewandt wird. Doch sind wir völlig damit einverstanden, dafs die Anziehung des Terrains nicht zu berücksichtigen ist (sowohl in (33) wie bei Reduktion der Quecksilberbarometerstände auf gleiche Schwerkraft); denn dieses entspricht ganz den auf S. 243 § 37 erwähnten Erfahrungen. Die Formel lautet (für Metermafs) in unseren Bezeichnungen:

$$h_{1.2} = 18400\,(1 + 0{,}003665t)\left(1 + \frac{3e}{8b}\right) F \log\frac{p_1}{p_2}$$

mit

$$F = (1 + 0{,}00265 \cos 2B)\left(1 + \frac{2H}{R}\right). \qquad (4)$$

Hierin sind p_1 und p_2 die in absolutem Mafse gemessenen Luftdrücke für die Flächeneinheit an den beiden, zunächst in derselben Vertikalen gedachten Stationen, ferner sind B, H, t und $e:b$ bezw. die mittlere geographische Breite, mittlere Meereshöhe, mittlere Lufttemperatur in Centesimalgraden und mittleres Verhältnis des Dunstdruckes zum Barometerstand.

Multipliziert man $h_{1.2}$ mit der mittleren Schwerkraft g_m der Säule und nimmt für g_m den normalen Wert, so folgt die Potentialdifferenz beider Stationen

$$W_1 - W_2 = 18400\,(1 + 0{,}003665\,t)\left(1 + \frac{3e}{8b}\right) \mathfrak{G} \log\frac{p_1}{p_2}, \qquad (5)$$

worin $\mathfrak{G}$ die normale Schwerkraft im Meeresniveau für 45° Breite bezeichnet (S. 97 § 20). Dieser Ausdruck ist verhältnismäfsig genauer als derjenige für $h_{1.2}$, weil er von den durch die Unkenntnis des genauen Betrages der Schwerkraft erzeugten Unsicherheiten wesentlich nur noch diejenige enthält, die in der Konstanten 18400 durch Einführung des normalen Wertes der Schwerkraft von *Paris* (wo *Regnault* die Dichtigkeit der Luft bestimmte) anstatt ihres wirklichen Wertes entsteht.

Übrigens ist diese Unsicherheit sehr klein, und selbst die entsprechende in der Formel für $h_{1.2}$ ist im Vergleiche zu anderen Fehlereinflüssen unerheblich.

Die Gröfse $h_{1.2}$ ist für übereinander liegende Stationen der Unterschied ihrer Meereshöhen. Liegen die Stationen nicht übereinander, so ist $h_{1.2}$ der Abstand der Niveauflächen der betreffenden Punkte, gemessen in der geographischen Breite B, die man willkürlich annehmen kann, in der Regel aber gleich $\frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ setzt. Hieraus ersieht man, dafs der barometrisch bestimmte Wert $h_{1.2}$ mit dem unmittelbaren Ergebnis eines geometrischen Nivellements zwischen beiden Punkten im allgemeinen nicht übereinstimmen wird. Der Unterschied beider ist von derselben Ordnung wie der Unterschied des unmittelbaren Ergebnisses des geome-

trischen Nivellements und der Höhe des oberen Punktes über der Niveaufläche des unteren (vergl. im 7. Kap. § 1 S. 501). Eine strenge Vergleichung würde die Aufstellung der Potentialdifferenzen erfordern.

Jedenfalls aber ist der Unterschied nicht so bedeutend, dafs man nicht das Ergebnis des geometrischen Nivellements für $h_{1.2}$ mit $2B = B_1 + B_2$ in Formel (3) einführen dürfte, um rückwärts auf die mittlere Temperatur t der Luftsäule zu schliefsen. Dieser Vorgang ergiebt die mittlere Lufttemperatur bei mäfsig grofsen Höhenunterschieden um so besser befreit von den Anomalieen der Lufttemperatur in der Nähe des Terrains, je genauer diese Anomalieen auf beiden Stationen dieselben sind, weil in der Differenz der Gewichte der bis zur Grenze der Atmosphäre gedachten Luftsäulen über den letzteren die Einflüsse der erwähnten Temperaturanomalieen sich subtrahieren. Beeinträchtigend für die Güte des Resultates ist ein grofser Horizontalabstand der Stationen, insofern mit dem letzteren der Einflufs einer Neigung der Luftschichten gleicher Dichtigkeit gegen die Niveauflächen zunimmt.

